

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MAPMO

THÈSE présentée par :

Laurent MARIN

soutenue le : **23 Novembre 2009**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques**

**Bornes dynamiques pour des opérateurs de Schrödinger
quasi-périodiques**

THÈSE DIRIGÉE PAR :

Sergueï TCHEREMCHANTSEV
Michel ZINSMEISTER

Professeur, Université d'Orléans
Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Serge CANTAT
François GERMINET

Professeur, Université de Rennes I
Professeur, Université de Cergy-Pontoise

JURY :

Nils BERGLUND
Serge CANTAT
François GERMINET
Laurent RAYMOND
Sergueï TCHEREMCHANTSEV

Professeur, Université d'Orléans, Président du jury
Professeur, Université de Rennes
Professeur, Université de Cergy-Pontoise
Maitre de Conférence, Université de Provence
Professeur, Université d'Orléans.

Table des matières

Chapitre 1. Introduction	7
1. Présentation du problème	7
2. Présentation des résultats	13
Chapitre 2. Modèle Sturmien	19
1. Propriétés du modèle Sturmien	19
2. Mot Sturmien	19
3. Matrices de transfert	20
4. Approximation périodique	22
Chapitre 3. Méthode pour borne supérieure	27
1. Analyse dans le plan complexe	27
2. Borne supérieure	32
3. Borne presque sûre	35
4. Un contre exemple	37
Chapitre 4. Méthode pour borne inférieure	39
1. Borne inférieure pour la dimension de boîte du spectre	39
2. Dimension de boîte du spectre et dynamique	44
Chapitre 5. Étude du spectre via un système dynamique	47
1. Définition du modèle et premières propriétés	47
2. Plan de la preuve	53
3. Bandes Horizontales	54
4. Bandes Verticales	60
5. Intersection et correspondance	62
6. Cônes pour les bandes horizontales	63
7. Cônes pour les bandes verticales	65
8. Implications pour le spectre.	68
Bibliographie	71

Remerciements :

Je tiens à remercier Nils Berglund, Serge Cantat, François Germinet, Laurent Raymond, Sergueï Tcheremchantsev de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Un merci tout particulier, Serge Cantat et François Germinet, qui ont accepté d'être mes rapporteurs.

Mes pensées vont également vers Sergueï Tcheremchantsev et Michel Zinsmeister, mes deux directeurs de thèse qui ont su m'accompagner, m'orienter et m'aider pendant ces quatre années.

Merci à Kari Astala pour m'avoir accueilli à Helsinki et facilité mon intégration en Finlande.

Un merci aussi pour Emiliano De Simone, dont l'opiniâtreté et la rigueur sont pour beaucoup dans la dernière partie de ce travail. Un grand merci à Laurent Raymond et Dominique Vieugué pour leurs sagesses et les conversations très intéressantes que nous avons eues.

Un grand merci aux secrétaires de tous les pays (France, UK, Finlande) qui se sont occupé à un moment de moi, Anne, Marie, Christelle, Marie-France, Chris, Riitta, Savu...

Merci à tous ceux que j'aurai oublié.

Un merci enfin à ma femme et à ma famille pour leurs soutiens indéfectibles.

CHAPITRE 1

Introduction

1. Présentation du problème

Nous nous intéressons dans ce travail à la dynamique d'un électron dans un quasicristal. L'étude des propriétés physiques de ces matériaux, découverts en 1984, continue son cours dans les communautés physique et mathématique.

On étudie dans ce travail des opérateurs de Schrödinger de la forme $H = -\Delta + V$ où V est l'opérateur de multiplication par la fonction V et Δ est défini dans le cas discret par

$$\Delta\Psi_n = \Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}.$$

Ce sont des opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert le plus souvent $l^2(\mathbb{Z}^d)$ ou $L^2(\mathbb{Z}^d)$ dans lui même. On appelle $\mathbb{Z}^d$ l'espace coordonnée.

Ici V est appelé le potentiel. Son choix dépend du modèle considéré. L'objectif est de déterminer si le système se propage dans l'espace coordonnée et de quantifier cette vitesse. Précisons comment nous allons évaluer cette vitesse.

L'évolution dans le temps du système quantique dont l'opérateur de l'énergie est H , est donnée par l'équation de Schrödinger en mécanique quantique

$$i\partial_t\psi = H\psi.$$

On a donc

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi(0).$$

Le vecteur $\psi(0)$ est alors l'état initial du système. On considère les états initiaux bien localisés dans l'espace coordonnée pour la plupart des résultats. L'évolution du paquet d'ondes $\psi(t)$ est dans les cas les plus intéressants une propagation liée au temps. Le terme "paquet d'ondes" pour désigner le système est emprunté à la physique.

Des quantités que l'on peut étudier pour mesurer la propagation du paquet d'ondes sont les moments. On choisit une base $\mathcal{B} = \{e_n\}$ de l'espace coordonnée. Dans le cas particulier de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}^d$, on choisit la base canonique $e_n = \delta_n$, $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}^d$.

Pour $p > 0$, on définit les moments en moyennes dans le temps

$$\langle |X|_{\psi(0)}^p \rangle_T = \sum_n |n|^p a(n, T),$$

avec

$$a(n, T) = \frac{2}{T} \int_0^\infty e^{-2t/T} |\langle e^{-itH}\psi(0), \delta_n \rangle|^2 dt.$$

Ici $a(n, T)$ est la probabilité que le système se trouve en n au temps T en moyenne dans le temps.

Il est possible de définir ces probabilités sans moyenne dans le temps, explicitement

$$a(n, t) = |\langle e^{-itH}\psi(0), \delta_n \rangle|^2$$

Cette quantité mesure la probabilité que le système se trouve en n au temps t (mais sans moyenne dans le temps).

Dans ce travail, nous considérerons principalement les probabilités en moyenne dans le temps.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Remarque 1. Dans ce travail et comme la plupart des auteurs, nous choisirons comme condition initiale $\psi(0) = e_1$.

Les premiers moments, $p = 1, 2$, de ces probabilités sont d'un intérêt particulier puisque pouvant être interprétés comme l'espérance, variance, etc. Dans ce travail, nous serons intéressés par l'évaluation de la croissance des moments en fonction du temps pour toutes valeurs de p .

On voit facilement que les croissances des moments sont reliées à la propagation sur $\mathbb{Z}$ de $e^{-itH}\psi(0)$. En effet, si le système se propage alors les moments croissent vers l'infini quand T tend vers l'infini. Pour évaluer cette croissance, sa vitesse, on est intéressé par les quantités suivantes, appelées exposants de croissance des moments inférieurs

$$\beta_{\psi(0)}^-(p) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \langle |X|_{\psi(0)}^p \rangle_T}{p \log T}$$

et supérieurs

$$\beta_{\psi(0)}^+(p) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \langle |X|_{\psi(0)}^p \rangle_T}{p \log T}.$$

En fonction des auteurs, on ne trouve pas le coefficient p au dénominateur dans la définition. Nous omettrons la dépendance en $\psi(0)$ dans toutes nos notations lorsque cela n'entraînera pas d'ambiguïté. Signalons dans les généralités que ces deux fonctions sont croissantes au sens large grâce à l'inégalité de Jensen.

De plus, pour les modèles que nous considérerons et avec un état initial bien localisé, l'inégalité de Combes-Thomas implique que

$$|X|_{\psi(0)}^p \leq C(p)T^p \text{ pour tout } p > 0.$$

En particulier, cela montre que les moments sont finis.

Dans le cas où H est un opérateur de $\ell^2(\mathbb{Z})$, il existe une autre approche plus directe pour évaluer la propagation. On définit les probabilités extérieures (en moyenne dans le temps) par

$$P(N, T) = \sum_{|n| > N} a(n, T).$$

On définit également les probabilités extérieures gauche et droite

$$P_g(N, T) = \sum_{n < -N} a(n, T),$$

$$P_d(N, T) = \sum_{n > N} a(n, T).$$

On a clairement $P(N, T) = P_g(N, T) + P_d(N, T)$.

Ces quantités mesurent la probabilité que la particule quantique se trouve à l'extérieur d'une boule ou sur une demi-droite. Cela nous permet de considérer le front du paquet d'ondes, sa partie avant, la plus rapide.

L'idée est d'évaluer selon quelle puissance inverse du temps, les probabilités extérieures tendent vers 0.

Pour cela, on définit les quantités suivantes :

Pour tout $\alpha \in [0, +\infty]$,

$$S^-(\alpha) = -\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^\alpha - 2, T)}{\log T}$$

et

$$S^+(\alpha) = -\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^\alpha - 2, T)}{\log T}$$

On remplace T^α par $T^\alpha - 2$ pour des raisons purement techniques afin que $P(T^0 - 2, T) = 1$ pour tout T . Dans la suite, nous omettrons souvent d'écrire la soustraction du 2.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Pour tout α , $0 \leq S^+(\alpha) \leq S^-(\alpha) \leq \infty$.

Il faut comprendre ces nombres de la façon suivante. Ils donnent la vitesse de décroissance des probabilités extérieures. Précisément, $\log P(T^\alpha, T)$ vérifie

$$T^{-S(\alpha)^+} \lesssim P(T^\alpha, T) \lesssim T^{-S(\alpha)^-}$$

pour de grandes valeurs de T .

Les exposants critiques suivants sont d'un intérêt particulier :

$$\alpha_l^\pm = \sup\{\alpha \geq 0 : S^\pm(\alpha) = 0\},$$

$$\alpha_u^\pm = \sup\{\alpha \geq 0 : S^\pm(\alpha) < \infty\}.$$

On peut interpréter $\alpha_l^\pm$ comme le taux (inférieur et supérieur) de propagation de la partie essentielle du paquet d'ondes. Précisément, pour $\alpha < \alpha_l^-$,

$$P(T^\alpha, T) \geq T^{-\delta}$$

pour tout $\delta > 0$ et T suffisamment grand.

On interprète $\alpha_u^\pm$ comme les taux de propagation de la partie la plus rapide (polynomialement petite) du paquet d'ondes. Précisément, pour tout $\alpha < \alpha_u^+$, il existe $A < +\infty$ tel que

$$P(T^\alpha, T) \geq T^{-A}.$$

Pour $\alpha > \alpha_u^+$, $P(T^\alpha, T)$ décroît vers 0 plus vite que n'importe quelle puissance inverse de T . La réciproque est vraie également et constitue un critère pour majorer cet exposant critique.

Les exposants critiques vérifient les propriétés suivantes :

$$0 \leq \alpha_l^- \leq \alpha_u^-,$$

$$0 \leq \alpha_l^+ \leq \alpha_u^+,$$

mais aussi

$$\alpha_l^- \leq \alpha_l^+, \alpha_u^- \leq \alpha_u^+.$$

Ces quantités sont reliées de la façon suivante avec les exposants de transports, voir [18]

$$\lim_{p \rightarrow 0} \beta_{\psi(0)}^\pm(p) = \alpha_l^\pm$$

et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \beta_{\psi(0)}^\pm(p) = \alpha_u^\pm.$$

En particulier, comme les fonctions $\beta_\psi^\pm$ sont croissantes, on a pour tout $p > 0$

$$\alpha_l^\pm \leq \beta_{\psi(0)}^\pm(p) \leq \alpha_u^\pm.$$

Il est ainsi clair que ces deux définitions ne sont pas concurrentes mais se complètent, nous aurons une borne supérieure pour l'exposant $\alpha_u^\pm$ si et seulement si on en a une pour les exposants de transport à tout ordre p .

Un premier résultat essentiel pour le type de modèle que l'on considère est la borne balistique. La propagation du système ne peut pas être plus rapide que le temps si l'état initial du système est bien localisé. Pour nos exposants, cela revient à dire que

$$\alpha_u^\pm \leq 1.$$

Notons que l'égalité est possible mais qu'il est également possible que $\alpha_u^\pm < 1$ dans certains cas.

Le problème abordé dans ce travail est de fournir des bornes inférieures ou supérieures pour α_u et pour $\beta^\pm(p)$, $p \gg 1$. Nous rappelons ici les résultats de bornes dynamiques antérieurs aux nôtres.

Les premiers résultats de ce type ont été obtenus à l'aide de la mesure spectrale de l'opérateur de Schrödinger.

Rappelons le théorème spectral :

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Théorème 2. Soit $\mathcal{H}$ un espace Hilbertien et $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint borné. Pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, on définit

$$(1.1) \quad \mathcal{H}_\psi = \{\omega \in \mathcal{H} \mid \omega = \sum_{n=0}^M \alpha_n H^n(\psi), \alpha_n \in \mathbb{C}, M \geq 0\},$$

appelé sous espace cyclique de $\mathcal{H}$ associé à (ψ, H) .

Alors il existe une mesure borélienne μ à support compact et un opérateur $U : \mathcal{H}_\psi \mapsto L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ unitaire avec $U\psi = 1$ et tels que pour tout $\omega \in \mathcal{H}_\psi$

$$H(\omega) = U^{-1}TU(\omega)$$

où T est l'opérateur dit de position, $Tf(x) = xf(x)$.

La mesure μ dépend de H et ψ et est appelée mesure spectrale.

Il découle des propriétés de la mesure spectrale des propriétés dynamiques pour le système. Nous rappelons quelques définitions qui nous seront utiles pour justifier ce fait :

Définition 3. On dit qu'une mesure μ est absolument continue par rapport à une mesure ν si pour tout borélien S , $\nu(S) = 0$ implique $\mu(S) = 0$.

Définition 4. L'état $\psi(0)$ est dit lié s'il vérifie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_t \sum_{|n| > R} a(n, t) = 0.$$

L'état $\psi(0)$ est propageant au sens faible si pour tout R

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n: |n| < R} a(n, T) = 0.$$

Rappelons le théorème de RAGE [43] qui relie les propriétés de la mesure spectrale avec les propriétés dynamiques du système :

Théorème 5 (RAGE). (i) Si μ_ψ est purement ponctuelle, alors ψ est lié.

(ii) Si μ_ψ est continue, alors ψ est propageant au sens faible.

Ce résultat est qualitatif et lie les propriétés spectrales avec le comportement dynamique. En effet, si la mesure spectrale est continue alors le système tendra à sortir avec le temps de toute boule compacte. A contrario, si la mesure spectrale est purement ponctuelle alors la probabilité que le système soit en dehors d'une boule compacte de rayon R tend vers 0 lorsque R grandit uniformément dans le temps.

Mais il ne contient pas de résultats quantitatifs sur la vitesse de propagation au cas où la propagation a lieu.

Un premier résultat quantitatif de Guarneri-Combes ([5],[19],[20]) est que le degré de continuité de la mesure spectrale minore la vitesse de diffusion du paquet d'ondes.

La définition suivante rappelle ce que l'on entend par degré de continuité pour la mesure spectrale.

Définition 6. On dira que la mesure μ est uniformément α -continue s'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\sup_{\varepsilon \in [0, 1]} \frac{\mu(x - \varepsilon, x + \varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \right) < \infty.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant qui relie la continuité de la mesure spectrale avec la vitesse de propagation du système.

Théorème 7. [21] Si μ est uniformément α -continue alors

$$\beta^-(p) \geq \frac{\alpha}{d}$$

où d est la dimension de l'espace coordonnée.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Ainsi plus la mesure spectrale est continue et plus le système se propage rapidement. Dans ce travail lorsque l'on considérera des modèles précis, ils seront unidimensionnels c'est à dire $d = 1$. Ce résultat sera ensuite étendu par de nombreux auteurs ([5], [21], [30], [27]).

Ces résultats très généraux ont été appliqués au modèle qui nous intéresse.

Nous considérons dans ce travail un opérateur de Schrödinger, discret, unidimensionnel et associé à un potentiel quasipériodique aussi appelé sturmien. Précisément, on définit l'opérateur H_β agissant de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui même par

$$(1.2) \quad [H_\beta \psi](n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V_\beta(n)\psi(n).$$

La fonction $V_\beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée potentiel, β est un nombre irrationnel.

On définit le potentiel Sturmien de la façon suivante

$$(1.3) \quad V_\beta(n) = ([(n+1)\beta] - [n\beta])V$$

où $V > 0$ et $[.]$ est la fonction partie entière.

Le modèle dit de Fibonacci est celui défini comme ceci avec $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Théorème 8 ([10]). *Soit H_β un opérateur de Schrödinger associé à un potentiel sturmien, comme en (1.2), (1.3). La mesure spectrale associée à H_β et n'importe quel état initial ψ_0 est continue.*

Le théorème RAGE implique pour ce modèle que tous les états sont propagateants.

Le théorème 7 a aussi été utilisé pour ce modèle ([10]).

Définition 9. Si on note le développement en fraction continue de β de la façon suivante $\beta = [a_1, \dots, a_n, \dots]$, on dira que β est un nombre à densité bornée s'il vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j < \infty.$$

Théorème 10 ([10]). *Soit H_β défini comme en (1.2), (1.3) avec β un irrationnel à densité bornée. Alors il existe une constante α strictement positive telle que la mesure spectrale associée à H_β est uniformément α -continue.*

Plutôt que d'avoir une hypothèse de continuité uniforme pour la mesure, on peut montrer que la partie "la plus continue" donne une borne inférieure pour les exposants de transports [21]. Ainsi, on a

$$\beta^-(p) \geq \frac{1}{d} \dim_H(\mu)$$

et

$$\beta^+(p) \geq \frac{1}{d} \dim_P(\mu).$$

Les notations $\dim_H$ et $\dim_P$ représentent respectivement la dimension de Hausdorff et la dimension de boîte de la mesure borélienne μ .

Ces dimensions sont définies comme suit $\dim_H(\mu) = \inf\{\dim_H(S) | \mu(S) = 1\}$ avec S un ensemble borélien. La dimension $\dim_P(\mu)$ est définie de la même façon. Même si ces résultats constituent une amélioration, ils n'étaient clairement pas optimaux. Une première remarque, si on a une mesure spectrale purement ponctuelle le membre de droite est nul dans les deux cas. Il est certes possible que l'on ait localisation dynamique donc $\beta^\pm(p) = 0$, mais il est possible également que $\beta^+(p) > 0$ comme dans l'exemple pathologique dans [17]. Remarquons également que des calculs numériques indiquent que pour certains modèles les moments croissent en p ce qui n'est pas le cas de la borne. Néanmoins ces défauts seront corrigés dans un résultat plus récent [2, 46].

Ainsi, on a le résultat suivant très général :

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Théorème 11. [2] *Pour tout p*

$$\beta^\pm(p) \geq \frac{1}{d} D_\mu^\pm(1/(1+p/d) + 0).$$

Ici $D_\mu^\pm(q)$ sont les dimensions fractales généralisées de la mesure borélienne μ , la mesure spectrale associée à H , $\psi(0)$. Elles sont définies de la façon suivante. Pour $0 < q < 1$

$$D_\mu^+(q) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log I_\mu(q, \varepsilon)}{(q-1) \log \varepsilon},$$

$$D_\mu^-(q) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log I_\mu(q, \varepsilon)}{(q-1) \log \varepsilon},$$

avec

$$I_\mu(q, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} (\mu([x-\varepsilon, x+\varepsilon]))^{q-1} d\mu(x).$$

Déjà, signalons que ce résultat implique les précédents puisque $D_\mu^-(q) \geq \dim_H(\mu)$ et $D_\mu^+(q) \geq \dim_B(\mu)$ pour $q < 1$. De plus, contrairement aux quantités $\dim_H(\mu)$ et $\dim_B(\mu)$, il est possible que $D_\mu^\pm(q) > 0$ quelque soit $q \in]0, 1[$ pour μ une mesure purement ponctuelle. Enfin le membre de droite est croissant (au sens non strict du terme) parce que les dimensions $D_\mu^\pm(q)$ décroissent en q . Ces diverses remarques rappellent combien cette dernière borne constitue un intérêt théorique en soi.

En plus de cela, cette borne a permis d'obtenir des résultats non triviaux dans nombre de modèles précis comme les potentiels épars, l'exemple pathologique ou encore les potentiels aléatoires à décroissance lente [18].

Pour les exposants critiques, cela donne en passant à la limite

$$\alpha_u^\pm \geq \frac{1}{d} D_\mu^\pm(0+0),$$

et

$$\alpha_l^\pm \geq \frac{1}{d} D_\mu^\pm(1-0).$$

Il faut préciser que ce résultat, bien qu'il soit meilleur que les bornes de Guarneri-Combes-Last, n'est en général pas optimal non plus. Par exemple, pour le modèle de Fibonacci [16] :

$$\alpha_u^- > D_\mu^-(0+0)$$

Notons également qu'il est possible de relier les dimensions fractales généralisées $D_\mu^\pm(0+0)$ avec la dimension de boîte du spectre de l'opérateur au prix de quelques hypothèses supplémentaires que nous préciserons plus tard.

On peut donc étudier la dynamique en passant par les informations sur la mesure spectrale mais on peut aussi avoir une approche plus directe.

Cette deuxième approche qui consiste à faire une analyse "directe" de la dynamique peut servir à la fois pour des bornes dynamiques supérieures et inférieures. Le point de départ est la formule de Parseval,

$$2\pi \int_0^\infty e^{-2t/T} |\langle e^{-itH} \psi(0), \delta_n \rangle|^2 dt = \int_{-\infty}^\infty |\langle (H - E - \frac{i}{T})^{-1} \psi(0), \delta_n \rangle|^2 dE.$$

En dimension 1 et pour les bornes inférieures, cette approche a l'avantage qu'elle donne des informations dynamiques directement sans avoir à connaître les propriétés de la mesure spectrale. Néanmoins, une telle connaissance permet d'améliorer les résultats et une combinaison des deux approches (Parseval et analyse dynamique basée sur les propriétés de μ) a mené à des bornes optimales pour les modèles avec potentiel épars et à la meilleure borne dynamique inférieure (connue à ce jour) pour le modèle de Fibonacci.

Il n'y avait jusqu'à récemment que peu de résultats concernant les bornes supérieures. Prouver de tels résultats demande de contrôler entièrement le paquet d'ondes. De fait, les bornes inférieures sont plus facilement prouvées en minorant les parties les plus rapides

2. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

du paquet d'ondes. De même, un premier résultat de Killip, Kiselev et Last sur les bornes supérieures consiste à borner la partie la plus lente du paquet d'onde.

Plus précisément, ils ont montré pour le modèle de Fibonacci qu'il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que

$$P(C_2 T^p, T) \leq 1 - \delta.$$

où $p < 1$ et dépend de la force du potentiel. Notamment, si l'on note V la force du potentiel, on a $p(V) \sim \frac{1}{\log V}$. Ici $f \sim g$ signifie qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telle que $C_1 f \leq g \leq C_2 f$.

Si cette inégalité précise où se trouve une partie du paquet d'ondes, il s'agit de la partie la plus lente. Rien ne peut être déduit pour la partie la plus rapide et en particulier, on ne peut déduire aucun résultat sur les exposants de transport.

Une première borne supérieure pour les exposants de transport sera trouvée par Damanik et Tcheremchantsev et appliquée au modèle de Fibonacci. Ils ont développé une méthode très générale pour donner une borne supérieure. Les auteurs remarquent eux-mêmes que la méthode peut être étendue à tous les opérateurs de cette classe et il s'agit, du reste, du principal objet de la première partie de ce travail.

Ainsi, on rappelle le résultat suivant :

Théorème 12. [14] *Pour le modèle de Fibonacci, avec $V \geq 8$, on a*

$$\alpha_u^+ \leq \alpha(V)$$

$$\text{avec } \alpha(V) = \frac{2 \log \frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\log \xi(V)} \text{ et } \xi(V) = \frac{V-4+\sqrt{(V-4)^2-12}}{2}.$$

Il est utile de remarquer que la quantité $\alpha(V)$ décroît en V , si bien qu'on obtient pour V suffisamment grand une borne non triviale (plus petite que la borne balistique égale à 1).

2. Présentation des résultats

Le résultat principal de la première partie de cette thèse est l'obtention de bornes dynamiques pour un opérateur de Schrödinger associé à un potentiel sturmien quasi-périodique. Littéralement, on souhaite obtenir une borne supérieure et une inférieure pour les exposants critiques $\alpha_u^\pm$.

La première partie de la thèse est donc consacrée à l'analyse dynamique de la partie rapide (polynomiatement petite) du paquet d'ondes.

On considère H un opérateur de Schrödinger discret et unidimensionnel défini par,

$$[H\psi](n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n)$$

sur $l^2(\mathbb{Z})$.

On considère dans ce travail un potentiel particulier, appelé potentiel sturmien. Le modèle sturmien dépend d'un nombre irrationnel β que l'on choisira ici dans $[0, 1]$ et d'une constante V qui sera la force du potentiel (aussi appelé couplage).

On définit ce potentiel de la façon suivante

$$V(n) = (\lfloor (n+1)\beta \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor)V$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière.

Le développement en fraction continue de β peut aider à construire ce potentiel par concaténation successive de mots. Nous reviendrons sur ce point plus tard. On rappelle que β possède une écriture unique, appelé développement en fraction continue, dont on fixe la notation :

$$\beta = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_1, a_2, \dots], a_k \in \mathbb{N}^*.$$

On définit les suites des réduites

$$p_{-1} = 1, p_0 = 0,$$

2. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

$$q_{-1} = 0, q_0 = 1,$$

$$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}$$

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$$

Il est bien connu que la suite $\{\frac{p_k}{q_k}\}_k$ approxime β rapidement. On a

$$\left| \beta - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre principal résultat :

Théorème 13. *Soit β un nombre irrationnel et H_β défini comme en (1.2) avec un potentiel sturmien associé à β défini comme en (1.3). Si $V > 20$ et si $D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k}$ est fini alors*

$$\alpha_u^+ \leq \frac{2D}{\log\left(\frac{V-8}{3}\right)}.$$

De plus, si le développement en fraction continue de β ne contient pas de 1, la borne dynamique devient alors

$$\alpha_u^+ \leq \frac{D}{\log\left(\frac{V-8}{3}\right)}.$$

Encore une fois, pour V suffisamment grand, on a une borne non triviale. Ce résultat général est valide pour tous les nombres irrationnels, bien que trivial si $D = +\infty$. Néanmoins, nous rappelons que la condition $\{D \text{ fini}\}$ est de mesure de Lebesgue 1 et donc notre résultat est non trivial presque sûrement. Il est possible aller encore plus loin, un lemme de Khintchine donne même la valeur presque sûre de D , c'est à dire qu'elle est identique pour presque tous les nombres irrationnels ([29],[31]).

Lemme 14. (Khintchine) *Pour $\beta \in [0, 1]$, soit la suite*

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}, q_0 = 1, q_{-1} = 0.$$

Alors pour presque tout β par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k} = D_K = \frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

et

$$M = \liminf_k (a_1 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} = C_K = 2.685\dots$$

C_K est appelé la constante de Khintchine.

Ce résultat nous permet de donner une valeur presque sûre pour nos bornes :

Corollaire 15. *Pour presque tout nombre irrationnel β , $V > 20$, on a*

$$\alpha_u^+ \leq \frac{\pi^2}{6 \log 2 \log\left(\frac{V-8}{3}\right)}.$$

Même si ce résultat est valable presque sûrement, il n'est connu aucun exemple explicite de nombre irrationnel qui vérifie le lemme de Khintchine.

On peut avoir encore une autre approche pour déduire un peu plus d'informations de la borne générale. En considérant des cas particuliers, comme les nombres précieux, nous pourrions calculer explicitement la valeur de D .

Corollaire 16. *Pour un nombre précieux $\beta = [a, a, a, a, \dots]$ la borne devient*

$$\beta^\pm(p) \leq \alpha_u^+ \leq \frac{\log(a + \beta)}{\log\left(\frac{V-8}{3}\right)}, p > 0.$$

2. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

L'absence de résultat pour les nombres irrationnels vérifiant $D = +\infty$ amène à la question : une borne non triviale est-elle possible pour ces nombres ?

Nous apportons ici une réponse partielle. En effet, nous exhibons un nombre irrationnel avec $D = +\infty$ et ayant une propagation quasi-balistique.

Théorème 17. *Il existe un nombre irrationnel β avec $D = +\infty$ tel que pour tout $V > 20$,*

$$\alpha_u^+ = 1.$$

Cela indique donc qu'il n'est pas possible d'étendre notre borne non triviale, plus petite que 1 à tous les nombres irrationnels. Néanmoins, il ne nous est pas possible de dire si tous les nombres irrationnels avec $D = +\infty$ ont ce même comportement dynamique ou si les deux cas de figure sont possibles, c'est à dire, certains balistiques, d'autres pas.

Nous présentons maintenant un autre de nos résultats qui est une borne inférieure pour la dimension de boîte du spectre de l'opérateur.

En effet les différents outils qui nous ont permis de donner une borne supérieure pour les exposants critiques peuvent servir à trouver une borne pour la dimension fractale de cet ensemble de Cantor qu'est le spectre de l'opérateur. Les outils en question sont des estimations précises du nombre et de la taille d'ensembles qui recouvrent le spectre. Ces informations précieuses nous permettent de montrer le résultat suivant.

Théorème 18. *On note $C_k = \frac{3}{k} \sum_{j=1}^k \log(a_j + 2)$. Pour un nombre irrationnel β vérifiant $C = \limsup C_k < +\infty$ et pour $V \geq 20$ on a*

$$\dim_B^\pm(\sigma) \geq \frac{1}{2} \frac{\log 2}{C + \log(V + 5)}$$

où σ est le spectre de l'opérateur H_β .

Encore une fois, ce résultat est valide pour tout nombre irrationnel mais trivial si $C = +\infty$. La condition sur C est vraie si et seulement si celle sur D est vraie et est vérifiée sur un ensemble de nombre irrationnels de mesure de Lebesgue 1. Nous obtenons ainsi une nouvelle borne inférieure pour la dimension de boîte du spectre pour presque tous les opérateurs sturmiens.

Cette dimension de boîte peut ensuite donner une information sur la dynamique au prix de quelques restrictions. En effet, avec quelques hypothèses supplémentaires, on peut minorer les dimensions fractales généralisées de μ associée à $\psi(0) = e_1$ par la dimension de boîte du spectre de l'opérateur.

Nous devons ajouter deux assertions, la première consiste à ne devoir considérer que les nombres à densité bornée. Un irrationnel β est dit à densité bornée si son développement en fraction continue vérifie

$$\limsup_k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j < +\infty.$$

Contrairement à la condition précédente sur les irrationnels (D fini), cette condition est de mesure de Lebesgue 0. Il est clair également que cette condition implique C et D finis.

La deuxième consiste à prendre comme état initial un vecteur cyclique.

Définition 19. Un vecteur cyclique est un vecteur pour lequel l'espace cyclique défini en (1.1) est égal à tous l'espace $\mathcal{H}$.

Dans un premier temps, nous considérons l'opérateur $\tilde{H}_\beta$ l'opérateur de $l^2(\mathbb{N})$ dans $l^2(\mathbb{N})$ avec $\psi(0) = e_1$ et le potentiel défini comme en (1.3). L'intérêt de restreindre l'espace coordonnée aux entiers naturels se trouve dans la proposition suivante que nous rappelons :

Proposition 1. *Le vecteur e_1 est un vecteur cyclique pour l'opérateur $\tilde{H}_\beta$.*

2. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Remarque 20. Le vecteur e_1 n'est pas cyclique pour H_β , l'opérateur défini sur l'axe des entiers relatifs tout entier.

Au prix de toutes ces restrictions, nous pouvons dire :

Théorème 21. Soit β un nombre irrationnel à densité bornée et $\tilde{H}_\beta$ défini sur $l^2(\mathbb{N})$ comme en (1.2) avec un potentiel sturmien associé à β défini comme en (1.3) avec $V > 20$. Pour $\psi(0) = e_1$, on a

$$\alpha_u^- \geq \frac{1}{2} \frac{\log 2}{C + \log(V + 5)}$$

avec $C = \limsup \frac{3}{k} \sum_{j=1}^k \log(a_j + 2)$.

Nous démontrons ensuite grâce à la symétrie du potentiel sturmien le même résultat pour l'opérateur dont l'espace coordonnée est défini sur l'axe des entiers relatifs.

Théorème 22. Soit β un nombre irrationnel à densité bornée et H_β défini comme en (1.2) avec un potentiel sturmien associé à β défini comme en (1.3) avec $V > 20$. Pour $\psi(0) = e_1$, on a

$$\alpha_u^- \geq \frac{1}{2} \frac{\log 2}{C + \log(V + 5)}$$

avec $C = \limsup \frac{3}{k} \sum_{j=1}^k \log(a_j + 2)$.

Notre dernier résultat est restreint à l'opérateur sturmien associé au nombre irrationnel $\beta = [2, 2, \dots]$ et une force de couplage suffisamment grande. Nous montrons que le spectre de cet opérateur est la section transversale d'un ensemble de Cantor hyperbolique, localement maximal. Signalons que parallèlement à notre travail, S. Cantat a démontré, avec une autre méthode que la nôtre, l'hyperbolicité pour tous les nombres quadratiques et toutes les forces de couplages.

Définition 23. Un ensemble Ω inclus dans une variété M est dit hyperbolique ou possédant une structure hyperbolique associé à une application T si son fibré tangent peut être scindé en deux sous fibrés invariants par T , appelés variété stable et instable. Nous noterons ces deux espaces E^s et E^i respectivement. De plus, on demande qu'il existe une constante $0 < \lambda < 1$ telle que

$$\begin{aligned} \|DT^n v\| &\leq \lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E^s, n > 0 \\ \|DT^{-n} v\| &\leq \lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E^i, n > 0. \end{aligned}$$

En d'autres termes, la restriction de DT à E^s doit être une contraction et la restriction de DT à E^i doit être une expansion.

Définition 24. On dira d'un ensemble Ω qu'il est localement maximal s'il existe un voisinage U de Ω tel que

$$\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U).$$

Pour démontrer cela, nous utilisons la même méthode que dans [4] où est démontré ce même résultat pour le modèle de Fibonacci.

Nous pouvons déduire de la théorie générale de ces ensembles, comme cela a été dans [8] des propriétés pour le spectre de cet opérateur. Elles sont regroupées dans le théorème suivant :

Théorème 25. Pour V assez grand, $\beta = [2, 2, \dots]$, on a les propriétés suivantes :

- (1) Le spectre $\sigma(H_\beta)$ dépend continûment de V avec la métrique de Hausdorff.
- (2) On a $\dim_H(\sigma(H_\beta)) = \dim_B(\sigma(H_\beta))$.
- (3) Pour tout $\varepsilon > 0$ petit et tout $E \in \sigma(H_\beta)$, on a

$$\dim_H([E - \varepsilon, E + \varepsilon] \cap \sigma(H_\beta)) = \dim_H(\sigma(H_\beta)).$$

2. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

et

$$\dim_B([E - \varepsilon, E + \varepsilon] \cap \sigma(H_\beta)) = \dim_B(\sigma(H_\beta)).$$

(4) *La dimension de Hausdorff $\dim_H(\sigma(H_\beta))$ est une fonction C^∞ de V .*

CHAPITRE 2

Modèle Sturmien

Ce chapitre est appelé à contenir toutes les généralités concernant le potentiel sturmien. Nous définirons également les mots (ou suites) sturmiennes. Ensuite nous nous attarderons sur les spécificités qu'engendre ce type de potentiel pour l'étude des propriétés de l'opérateur.

1. Propriétés du modèle Sturmien

On considère un β irrationnel appartenant à $]0, 1[$. On définit le potentiel par

$$V(n) = (\lfloor (n+1)\beta \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor)V$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière.

D'après la définition du potentiel, cette restriction de β à l'ensemble $]0, 1[$ se fait sans perte de généralités. Ici V une constante positive appelée force du potentiel. Il est clair que ce potentiel ne peut prendre que deux valeurs, 0 et V .

Une des propriétés élémentaires de ce potentiel que l'on trouve dans [44] est d'être symétrique. Plus précisément

$$V(-n) = V(n-1), \forall n \leq 0.$$

Cette symétrie du potentiel permettra de montrer certains résultats sur la demi-droite $\mathbb{N}$ puis de les étendre aux entiers négatifs sans le moindre effort.

2. Mot Sturmien

Il est possible de construire de façon itérative un mot qui coïncide avec les termes de notre potentiel.

Cette construction dépend évidemment de l'irrationnel considéré, $\beta = [a_1, \dots, a_n, \dots]$. Nous allons définir la construction des mots sturmiens. On considère un alphabet à deux lettres $\{0, V\}$.

On pose $W_{-1} = V$ et $W_0 = 0$ comme mots initiaux. On obtient un mot de longueur finie de plus en plus grande avec la règle de concaténation suivante

$$(2.1) \quad W_{k+1} = W_k^{a_{k+1}} W_{k-1}, \quad k \geq 0.$$

Exemple 26. On obtient de cet façon, le début du mot de Fibonacci associé à $\beta = [1, 1, \dots]$

$$\begin{aligned} W_{-1} &= V \\ W_0 &= 0 \\ W_1 &= 0V \\ W_2 &= 0V0 \\ W_3 &= 0V00V \end{aligned}$$

Proposition 2. *Le k -ième mot obtenu en suivant la règle 2.1 est de longueur $p_k + q_k$.*

3. MATRICES DE TRANSFERT

Ces mots ont la particularité de coïncider avec les valeurs du potentiel. Plus précisément, si on note $W(0)$ la première lettre du mot (en partant de la gauche), $W(1)$ la deuxième, jusqu'à $W(l)$ la dernière (donc l est la longueur du mot), on a

$$W(i) = V(i), 0 \leq i \leq l.$$

Par cet algorithme, on obtient ainsi les $p_k + q_k$ premiers éléments du potentiel en seulement k opérations.

Ces mots ont la particularité d'être de complexité minimale. Rapellons quelques définitions :

Définition 27. On dira qu'un mot (fini ou infini) u est un facteur d'un mot v s'il existe deux mots x, y tels que $v = xuy$.

Définition 28. Pour un mot W , on appelle fonction de complexité ou complexité

$$P_n(W) = \#\{\omega \text{ facteur de } W \text{ de longueur } n\}$$

Proposition 3. Un mot W est sturmien si et seulement si

$$P_n(W) = n + 1.$$

Il est démontré qu'une complexité inférieure implique la périodicité du mot. De fait la réciproque est vraie également puisque pour un mot périodique, la complexité maximum est n . Ainsi les mots sturmiens sont des mots apériodiques mais possédant une structure d'une complexité minimale. Cette propriété illustre les propriétés de la structure particulière de ces mots. Nous ne nous étendons pas dessus et laissons le lecteur intéressé par plus de précisions consulter [33].

Nous sommes plus intéressés par la construction de ces mots qui coïncidant avec le potentiel nous donne toutes les informations dont nous pourrions avoir besoin sur la structure de celui-ci.

Définition 29. On dit d'un mot W qu'il est quasipériodique, s'il n'est pas périodique et si tout facteur arbitrairement long est répété une infinité de fois dans W .

Proposition 4. Les mots sturmiens sont quasipériodiques.

Par extension, nous dirons que le potentiel est quasipériodique.

3. Matrices de transfert

Les propriétés des vecteurs propres de l'opérateur H sont d'une grande utilité pour caractériser le spectre de celui-ci. On est intéressé par l'équation suivante :

$$(3.1) \quad \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + V(n)\psi_n = z\psi_n$$

avec $z \in \mathbb{C}$ et ψ un vecteur non nul.

Pour z dans l'ensemble résolvant, $z \in \rho(H)$, il n'existe pas de solutions ψ dans $l^2(\mathbb{Z})$. Si $z \in \sigma(H)$, alors il est possible que $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$ pour certaines conditions initiales.

Il faut préciser qu'il n'existe pas toujours de vecteurs propres, néanmoins il nous suffit de considérer tous vecteurs qui vérifieraient cette équation mais qui ne seraient pas forcément des vecteurs de $l^2(\mathbb{Z})$. On appelle ces vecteurs des vecteurs propres généralisés.

Le fait d'être avec un modèle unidimensionnel (i.e. le vecteur ψ ne dépend que d'une coordonnée) va nous permettre de réécrire cette équation matriciellement en terme de matrice de transfert (appelée parfois aussi matrice de passage).

Le vecteur ψ vérifie (3.1) si et seulement si on a

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = F(n, z) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$$

3. MATRICES DE TRANSFERT

avec

$$F(n, z) = \begin{cases} T(n, z) \dots T(1, z) & n \geq 1, \\ Id & n = 0, \\ [T(n, z)]^{-1} \dots [T(0, z)]^{-1} & n \leq -1, \end{cases}$$

et

$$T(m, z) = \begin{pmatrix} z - V(m) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'espace des solutions généralisées est de dimension 2. En effet, si on connaît deux valeurs consécutives d'une solution alors grâce aux matrices de transfert, on connaît toutes les valeurs de la solution en question.

De même, il est possible de définir deux solutions généralisées associées à z et qui forment une base pour l'espace des solutions. On note $u_0(n, z)$ la solution qui vérifie $Hu_0 = zu_0$ et les conditions initiales $u_0(0, z) = 0$ et $u_0(1, z) = 1$ et on note $u_1(n, z)$ la solution de qui vérifie $Hu_1 = zu_1$ et les conditions initiales $u_1(0, z) = 1$ et $u_1(1, z) = 0$.

Pour en revenir aux matrices de transfert, il est utile de considérer le passage sur certains sites particuliers. Cela nous permettra d'utiliser une relation de récurrence sur les matrices. Cette relation sera très utile pour évaluer la vitesse de croissance des normes des matrices.

On note maintenant

$$M_k(z) = F(q_k, z) = \begin{cases} T(q_k, z) \dots T(1, z) & k \geq 1, \\ Id & k = 0, \\ [T(q_k, z)]^{-1} \dots [T(0, z)]^{-1} & k \leq -1, \end{cases}$$

la matrice de transfert sur les q_k éléments.

On rappelle maintenant la relation de récurrence suivante sur ces matrices (voir [1])

Proposition 5. *La suite de matrices M_k vérifie la relation suivante :*

$$(3.2) \quad M_{k+1}(z) = M_{k-1}(z)M_k(z)^{a_{k+1}}, k \geq 0.$$

Nous aurons besoin de minorer la norme des matrices de transfert pour avoir des bornes dynamiques supérieures et de les majorer pour obtenir des bornes dynamiques inférieures. Nous reviendrons sur ce point. Nous ne sommes d'autre part pas limité dans le choix de la norme sur les matrices puisqu'elles sont toutes équivalentes.

Prenons par exemple la somme des modules de tous les coefficients. Pour minorer les normes, il nous suffit de minorer les modules des traces des matrices de transferts. Les traces au même titre que les matrices de transfert possèdent des relations de récurrence encore une fois très utiles pour évaluer leurs comportements.

Notons également que les matrices de transfert dépendent de z mais que dans un souci de simplicité, nous omettrons souvent l'argument lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Proposition 6. [42] *Soit $t_{k,p}$ la trace de la matrice $M_{k-1}M_k^p$, p un entier.*

L'évolution selon l'indice p est donnée par

$$t_{k,p+1} = t_{k+1,0}t_{k,p} - t_{k,p-1},$$

et en conséquence, on a

$$(3.3) \quad t_{k,p+1} = S_p(t_{k+1,0})t_{k,1} - S_{p-1}(t_{k+1,0})t_{k,0}$$

Ici, S_l est le l^{me} polynôme de Chebychev du second type,

$$S_{-1}(x) = 0,$$

$$S_0(x) = 1,$$

$$S_{l+1}(x) = xS_l(x) - S_{l-1}(x), \quad \forall l \geq 0,$$

L'évolution selon $k \geq 0$ est reliée avec celle de p

$$t_{k+2,0} = t_{k,a_{k+1}},$$

4. APPROXIMATION PÉRIODIQUE

$$t_{k+1,1} = t_{k,a_{k+1}+1},$$

$$t_{k+1,-1} = t_{k,a_{k+1}-1}.$$

Si on note $x_k = t_{k+1,0}$ la trace de M_k et $z_k = t_{k,1}$ la trace de $M_{k-1}M_k$, cela réduit la relation (3.3) en

$$x_{k+1} = z_k S_{a_{k+1}-1}(x_k) - x_{k-1} S_{a_{k+1}-2}(x_k),$$

$$z_{k+1} = z_k S_{a_{k+1}}(x_k) - x_{k-1} S_{a_{k+1}-1}(x_k),$$

avec les conditions initiales $x_{-1} = 2$, $x_0 = z$ et $z_0 = z - V$.

Remarque 30. Comme pour les matrices de transfert, ces deux suites dépendent de z qui sera omis pour alléger les notations.

Les polynômes de Chebychev vérifient la relation suivante très utile :

$$S_l(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin((l+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \forall l \geq -1, \forall \theta \in \mathbb{C}$$

Nous rappelons maintenant un invariant qui joue un rôle central dans tout ce travail :

Proposition 7 ([42]). Pour tout $k \geq 0$, $p \geq 0$, on a

$$t_{k,p}^2 + t_{k,p-1}^2 + t_{k+1,0}^2 - t_{k,p} t_{k,p-1} t_{k+1,0} = 4 + V^2$$

En termes de suites (x, z) cela donne pour tout $k \geq 0$,

$$x_k^2 + x_{k-1}^2 + z_k^2 - x_k x_{k-1} z_k = 4 + V^2.$$

Cet invariant très utile permet de fixer par la suite la structure des approximants périodiques. La quasi-totalité (pour ne pas dire tous) des résultats nécessite cet invariant dans leurs preuves.

Les traces des matrices de transfert seront notre principal outil dans tous ce travail. Cette omniprésence sera rapidement justifiée grâce au paragraphe suivant qui rappelle comment les traces sont liées intimement au spectre de l'opérateur.

4. Approximation périodique

Dans cette partie, nous rappelons comment on peut se servir des matrices de transferts et de leurs traces pour approximer le spectre $\sigma(H)$ de notre opérateur H .

L'idée générale est d'approcher l'opérateur quasipériodique par des opérateurs périodiques de périodes de plus en plus grandes et dont les potentiels coïncident sur la première période.

Ces opérateurs périodiques sont définis de la même façon que l'opérateur H mais en remplaçant l'irrationnel β par ses meilleures approximations rationnelles. Il est bien connu que la suite $\{\frac{p_k}{q_k}\}_k$ approxime β rapidement. On a

$$\left| \beta - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Nous noterons la suite d'opérateurs issue de cette substitution $\{H_k\}_k$. Le fait de prendre un rationnel à la place de β fait que le potentiel est maintenant périodique.

La définition du potentiel reste la même et sa construction à l'aide de l'algorithme de concaténation également du moins tant que les développements en fraction continue de β et $\frac{p_k}{q_k}$ coïncident c'est à dire sur les k premières étapes. La construction peut être continuée pour le mot périodique en prenant $a_{k+1} = \infty$.

Il est possible de montrer que H est la limite forte de cette suite d'opérateur H_k . Plus précisément, il est démontré dans [44] :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|H\psi - H_k\psi\| = 0, \quad \forall \psi \in l^2(\mathbb{Z}).$$

4. APPROXIMATION PÉRIODIQUE

Les propriétés du spectre de l'opérateur H sont d'un intérêt particulier. Or, il est démontré qu'il s'agit d'un ensemble de Cantor ce qui rend toute étude directe compliquée (voir [44], [1]). La méthode d'approximation décrite plus haut se révèle encore utile pour caractériser la forme de cet ensemble. En effet, les spectres des opérateurs périodiques H_k vont approcher de façon de plus en plus précise le spectre de l'opérateur H . En plus de cela, il est possible de relier ces spectres (que nous appellerons approximaux périodiques) avec les traces des matrices de transferts.

Les quelques définitions qui suivent seront utiles pour tout le reste de ce travail :

Définition 31. On note les ensembles :

$$\begin{aligned}\sigma_{k,p} &= \{z \in \mathbb{C}, |t_{k,p}(z)| \leq 2\}, \\ \sigma_{k,p}^\delta &= \{z \in \mathbb{C}, |t_{k,p}(z)| \leq 2 + \delta\}, \\ (\sigma_{k,p}^\delta)^\mathbb{R} &= \{E \in \mathbb{R}, |t_{k,p}(E)| \leq 2 + \delta\}.\end{aligned}$$

Les approximaux périodiques sont les ensembles $(\sigma_{k,0}^\delta)^\mathbb{R}$. Ce sont évidemment des sous ensembles de $\mathbb{R}$, ils sont connus et étudiés depuis longtemps.

L'originalité de la méthode de ce travail consiste à utiliser les deux autres définitions qui elles sont dans le plan complexe. La présence du δ dans $\sigma_{k,p}^\delta$ est purement technique et son utilité apparaîtra à la fin de la troisième partie quand nous exposerons notre borne supérieure pour les exposants dynamiques. Signalons ici que δ a pour vocation d'être petit, nous aurons besoin qu'il soit fixe et non nul mais nous tenons à ce qu'il soit suffisamment petit pour conserver toutes les propriétés des ensembles $\sigma_{k,p}$.

Mais pour l'heure, revenons aux approximaux périodiques. Il est démontré dans [44] et [1] le théorème suivant :

Théorème 32. *Le spectre de l'opérateur périodique H_k coïncide avec l'ensemble $(\sigma_{k,0}^0)^\mathbb{R}$.*

Il est ainsi possible de déduire pas mal d'informations sur les spectres en étudiant les propriétés de ces ensembles définis à partir des traces de matrices de transfert.

Ainsi, nous rappelons quelques propriétés très utiles des ensembles $\sigma_{k,p}$. Nous verrons plus tard que ces propriétés s'étendent facilement aux ensembles $\sigma_{k,p}^\delta$.

Proposition 8. ([48],[42],[1]) *La suite des spectres des approximaux périodiques de H est telle que :*

- (i) *l'ensemble $(\sigma_{k,p}^0)^\mathbb{R}$ est composé de $p q_k + q_{k-1}$ intervalles.*
- (ii) *$\sigma \subset \sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k,0} \subset \sigma_{k-1,0} \cup \sigma_{k-2,0}$ et $\sigma_{k,p+1} \subset \sigma_{k+1,0} \cup (\sigma_{k+1,0}^c \cap \sigma_{k,p})$, $\forall k \in \mathbb{N}, p \geq -1$. Plus précisément, $\sigma(H) = \sigma_\infty = \bigcap_{k=N}^\infty (\sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k,0})$, pour n'importe quel N .*
- (iii) *$\sigma_{k+1,0} \cap \sigma_{k,p} \cap \sigma_{k,p-1} = \emptyset$, $\forall V > 4$ et $\forall k \in \mathbb{N}, p \geq 0$.*

Faisons quelques remarques sur ces 3 propriétés :

(i) Le résultat est le fait que le spectre d'un opérateur périodique de période d est composé de d intervalles distincts. La démonstration consiste en l'étude des traces des matrices de transferts en tant que polynômes. Il y a autant d'intervalles que de racines, la difficulté restante est juste de montrer que les intervalles sont disjoints. Cela va nous être très utile quand nous voudrions démontrer une borne inférieure pour la dimension de boîte du spectre. En effet, nous aurons alors besoin d'estimations les plus précises possible du nombre d'intervalles composant un approximant de rang de plus en plus grand.

(ii) signifie que la suite des $\sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k,0}$ est décroissante (par rapport à l'inclusion des ensembles) et tend vers $\sigma(H)$. L'ensemble σ_∞ est appelé pseudo-spectre. La coïncidence du pseudo-spectre et du spectre de l'opérateur est établie dans [44, 1]. Le pseudo-spectre pour cette raison constitue un outil essentiel pour l'étude du spectre.

(iii) est la relation de base qui permet de donner une structure précise au spectre. Sa démonstration découle de l'invariant de la proposition 7.

4. APPROXIMATION PÉRIODIQUE

C'est encore une question ouverte que de savoir si toute la théorie qui utilise ce résultat reste valide pour une force de potentiel inférieure à 4. Par exemple la démonstration du résultat suivant qui sera la base de notre travail nécessite ce résultat.

Ce résultat de Raymond permet de caractériser la structure des approximants périodiques précisément, à des rangs aussi grands que souhaité. Il nécessite quelques définitions que nous rappelons ici.

Définition 33. Pour k fixé, on note :

- une bande de type I : une bande de $\sigma_{k,1}$ incluse dans une bande de $\sigma_{k,0}$ et dans $\sigma_{k+1,0}^c$,
- une bande de type II : une bande de $\sigma_{k+1,0}$ incluse dans une bande de $\sigma_{k,-1}$ et dans $\sigma_{k,0}^c$,
- une bande de type III : une bande de $\sigma_{k+1,0}$ incluse dans une bande de $\sigma_{k,0}$ et dans $\sigma_{k,1}^c$.

L'intérêt de ces trois définitions vient du fait qu'elles décrivent l'intégralité des approximants périodiques. En effet, chaque intervalle qui les compose (et que nous aurons tendance à appeler bande désormais) est une bande d'un des trois types définis ci-dessus. Cet état de fait se démontre par récurrence. Le lemme suivant donne la façon dont se succède les bandes et est essentiel dans la théorie.

Les bandes de types II et III sont les éléments des approximants périodiques. Les bandes de type I au contraire ne sont pas des éléments de ces spectres mais vont néanmoins servir à le caractériser. En effet, le lemme suivant décrit la façon dont les différents types de bandes sont incluses les unes dans les autres.

Lemme 34 ([42]). Au rang k ,

- (i) Une bande de type I contient une unique bande de type II au rang $k + 1$ dans $\sigma_{k+2,0}$.
- (ii) Une bande de type II contient $(a_{k+1} + 1)$ bandes de type I au rang $k + 1$ dans $\sigma_{k+1,1}$. Elles sont alternées avec a_{k+1} bandes de type III au rang $k + 1$ dans $\sigma_{k+2,0}$.
- (iii) Une bande de type III contient (a_{k+1}) bandes de type I au rang $k + 1$ dans $\sigma_{k+1,1}$. Elles sont alternées avec $a_{k+1} - 1$ bandes de type III au rang $k + 1$ dans $\sigma_{k+2,0}$.

Ce lemme permet d'affirmer que tous les cas possibles sont décrits avec ces trois types de bandes. En effet, il est facile de voir que le premier rang est composé d'une bande de type III et d'une bande de type I, puis de vérifier que le nombre de bande de type II et III correspond bien à la taille de la période de l'opérateur de rang k .

On rappelle maintenant un résultat obtenu dans [32] qui permet de contrôler la taille des bandes des approximants périodiques. Pour cela, on définit les quelques notations suivantes.

Soit l'alphabet $\mathcal{A} = \{I, II, III\}$, alors pour chaque bande B du spectre de l'approximant périodique au rang k , il existe un unique mot $i_0 i_1 \dots i_k \in \mathcal{A}^{n+1}$ tel que B soit une bande de type i_k incluse dans une bande de type i_{k-1} au rang $k - 1, \dots$, incluse dans une bande de type i_0 au rang 0. On appellera ce mot l'index de la bande. Plusieurs bandes peuvent avoir le même index. Soit $T = T_n$ une suite de matrices $T_n = (t_{i,j}(n))_{3 \times 3}$ et $\tau = i_0 i_1 \dots i_k$ un index, on définit :

$$L_\tau(T) = t_{i_0, i_1}(1) t_{i_1, i_2}(2) \dots t_{i_{k-1}, i_k}(k).$$

On peut maintenant énoncer le théorème :

Théorème 35 ([32]). Soit $\beta = [a_1, a_2, \dots]$ un irrationnel dans $[0, 1]$ et H_β l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel avec $V > 20$ alors pour n'importe quelle bande B d'index τ ,

$$4L_\tau(Q) \leq |B| \leq 4L_\tau(P)$$

4. APPROXIMATION PÉRIODIQUE

où $P = (P_n)_{n>0}$

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & c_1^{a_n-1} & 0 \\ c_1/a_n & 0 & c_1/a_n \\ c_1/a_n & 0 & c_1/a_n \end{pmatrix}$$

avec $c_1 = \frac{3}{V-8}$

et $Q = (Q_n)_{n>0}$

$$Q_n = \begin{pmatrix} 0 & c_2^{a_n-1} & 0 \\ c_2(a_n+2)^{-3} & 0 & c_2(a_n+2)^{-3} \\ c_2(a_n+2)^{-3} & 0 & c_2(a_n+2)^{-3} \end{pmatrix}$$

avec $c_2 = \frac{1}{V+5}$.

Ce théorème donne des estimations précises de la taille des différentes bandes en fonction de β et de l'index de la bande. La preuve consiste à démontrer par récurrence que les dérivées par rapport à la variable E des quantités $x_k(E)$, $z_k(E)$, vérifient :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} L_\tau(Q) &\leq |x'_k(E)| \leq L_\tau(P), \\ L_\tau(Q) &\leq |z'_k(E)| \leq L_\tau(P). \end{aligned}$$

avec E tel que $x_k(E)$ parcourt la bande d'indice τ considérée. Cette relation sur les dérivées à laquelle il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis pour avoir le théorème précédent, nous sera utile pour estimer la taille de ces ensembles généralisés au plan complexe. D'autre part, ce résultat nous servira également pour donner une estimation de la dimension fractale du spectre.

CHAPITRE 3

Méthode pour borne supérieure

1. Analyse dans le plan complexe

Nous exposons enfin dans cette section le principal résultat de ce travail à savoir une borne supérieure pour le coefficient dynamique α_u^+ . Cette borne sera dépendante de l'irrationnel qui définit le potentiel sturmien et sera non triviale pour presque tous les nombres irrationnels (par rapport à la mesure de Lebesgue) lorsque V sera assez grand.

L'idée de la méthode est la suivante. Il est possible de relier les probabilités extérieures avec les normes de matrices de transferts. Cette relation permet ensuite d'utiliser une borne inférieure sur les normes des matrices de transferts pour donner une borne supérieure pour α_u^+ . Plus précisément, on a le théorème suivant très général :

Théorème 36. [14] *Soit H défini comme en (1.2), avec V une fonction réelle bornée et $K \geq 4$ tel que $\sigma(H) \subseteq [-K + 1, K - 1]$. Alors les probabilités extérieures peuvent être majorées avec les normes des matrices de transferts :*

$$P_d(N, T) \lesssim \exp(-cN) + T^3 \int_{-K}^K \left(\max_{1 \leq n \leq N} \left\| F(n, E + \frac{i}{T}) \right\|^2 \right)^{-1} dE,$$

$$P_g(N, T) \lesssim \exp(-cN) + T^3 \int_{-K}^K \left(\max_{-N \leq n \leq -1} \left\| F(n, E + \frac{i}{T}) \right\|^2 \right)^{-1} dE.$$

Les constantes ne dépendant que de K .

Il en découle ce corollaire qui donne une borne dynamique supérieure pour les exposants critiques.

Corollaire 37. [14] *Soit H défini comme en (1.2), avec V une fonction réelle bornée et $K \geq 4$ tel que $\sigma(H) \subseteq [-K + 1, K - 1]$. Supposons que pour $C \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in]0, 1[$, on ait*

$$\int_{-K}^K \left(\max_{1 \leq q_k \leq CT^\alpha} \|M_k(E + \frac{i}{T})\|^2 \right)^{-1} dE = O(T^{-m})$$

et

$$\int_{-K}^K \left(\max_{1 \leq q_k \leq CT^\alpha} \|M_{-k}(E + \frac{i}{T})\|^2 \right)^{-1} dE = O(T^{-m})$$

pour tout $m \geq 1$. Alors

$$\alpha_u^+ \leq \alpha.$$

En particulier,

$$\beta^+(p) \leq \alpha, \quad \forall p > 0.$$

A cela s'ajoute la remarque suivante, si les conditions du théorème sont vérifiées mais seulement pour une suite de temps T_k tendant vers l'infini alors on obtient une borne supérieure pour α_u^- .

Notre opérateur vérifie bien toutes les conditions de ces théorèmes. Le potentiel sturmien est évidemment réel et borné et le spectre est inclus dans $[-V - 2, V + 2]$.

Le problème est ainsi déplacé vers les normes des matrices de transferts qu'il convient de minorer pour aboutir. En fait, il suffira de minorer les modules des traces de ces matrices.

1. ANALYSE DANS LE PLAN COMPLEXE

Pour cela, on est amené à considérer la dynamique de la suite $x_k(z)$, $k \rightarrow \infty$, pour z fixé.

Les modules des traces ont deux comportements possibles en fonction de leurs arguments. Si l'énergie considérée est dans le spectre alors la suite entière des modules des traces de matrices de transferts est bornée, sinon la suite n'est pas bornée et croît (à partir d'un certain rang) de façon super exponentielle. Il sera beaucoup plus commode pour nous d'utiliser un critère sur les traces elles-mêmes que sur le spectre de l'opérateur. Grâce aux relations d'évolution dans la proposition 6, il est possible d'avoir un critère.

Proposition 9. *Soient les suites x_n et z_n définies comme précédemment et soit $\delta > 0$. S'il existe un indice N tel que*

$$|x_{N-1}| \leq 2 + \delta, |x_N| > 2 + \delta \quad \text{et} \quad |z_N| > 2 + \delta.$$

alors les modules de ces deux suites sont croissantes super exponentiellement.

$$|x_{k+1}| \geq |z_k| \geq e^{cG_{k-N}} + 1 \quad \forall k > N.$$

avec $c = \log(1 + \delta) > 0$ fixe et

$$G_k = G_{k-1} + a_k G_{k-2}, G_0 = 1, G_{-1} = 1.$$

Avant de fournir ici une preuve de cette proposition, faisons quelques remarques. Une proposition similaire de Sũto dans [44] démontre ce genre de résultat restreint au cas du modèle de Fibonacci. Il est démontré que sous une condition de ce type, la suite des traces croît super-exponentiellement et que si cette condition n'est jamais remplie alors la suite est bornée. Cela permet de caractériser le spectre de l'opérateur à l'aide des approximants périodiques, comme cela est rappelé dans la proposition 8 (ii). La preuve est basée sur la récurrence plus simple des traces de matrice de transfert pour le modèle de Fibonacci. Cette proposition sera ensuite étendue par Bellisard et al dans [1]. La preuve de [1] utilise les propriétés des polynômes de Chebyshev qu'on peut réécrire avec les fonctions trigonométriques. Leur proposition donne sous le même type de condition que celle de Sũto, une estimation de la croissance super-exponentielle et l'équivalence du spectre avec l'intersection deux à deux des approximants périodiques.

Nous avons besoin pour notre travail d'estimation plus précise de la croissance super-exponentielle. Nous avons surtout besoin que les constantes qui apparaissent dans ces estimations soient uniformes en N , l'indice à partir duquel les valeurs des traces de matrice de transfert explosent. Par exemple, si on a une estimation, comme celle dans [1] :

$$|x_n| > C_N^{q_n}, C_N > 1, n > N.$$

Pour N fixé, on a bien une croissance super-exponentielle mais l'estimation ne reste pas bonne quand N tend vers l'infini, or c'est précisément ce qu'on veut faire.

Pour contourner cet obstacle technique, Tcheremchantsev et Damanik ont remanié l'hypothèse de la proposition de Sũto en supposant que deux traces consécutives soient plus grandes que $2 + \delta$ (au lieu de simplement 2). Ici, δ est une constante fixe et son ajout permet de montrer le même résultat avec une constante uniforme en N . Ils obtiennent ainsi

$$|x_n| > C^{q_n}, C > 1, n > N$$

avec C une constante uniforme en N .

L'objectif de notre proposition est de généraliser ce résultat à tous les opérateurs sturmiens. Nous proposons une preuve alternative, plus proche de celle de Sũto et avec les constantes *ad hoc* de la version Damanik-Tcheremchantsev.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 9. On commence par observer l'inégalité suivante sur les polynômes de Chebychev qui nous sera utile pour la suite des calculs.

1. ANALYSE DANS LE PLAN COMPLEXE

$$\begin{aligned} |S_l(x)| - |S_{l-1}(x)| &\geq (|x| - 1)|S_{l-1}(x)| - |S_{l-2}(x)| \\ &\geq (|x| - 1)[|S_{l-1}(x)| - |S_{l-2}(x)|] \end{aligned}$$

pour $x > 2 + \delta$

$$\geq (|x| - 1)^l.$$

On fait la démonstration par récurrence. L'hypothèse de récurrence H_k est la suivante :

On a $|x_k| > 2 + \delta$ et $|z_k| > 2 + \delta$. De plus $|x_{k-1}| \leq |z_k|$.

Il est clair que l'énoncé de la proposition implique cette hypothèse au rang N . Nous allons montrer que l'hypothèse au rang k implique celle au rang $k + 1$.

Pour cela, nous montrons la croissance des deux suites, plus exactement nous allons montrer que l'hypothèse H_k implique les trois relations suivantes :

$$(1.1) \quad |z_{k+1}| > |z_k|,$$

$$(1.2) \quad |x_{k+1}| > |z_k|,$$

et que

$$(1.3) \quad |x_k| \leq |z_{k+1}|.$$

Il est facile de voir que ces trois relations associées à H_k implique H_{k+1} .

Supposons H_k vraie, on a alors :

$$\begin{aligned} |z_{k+1}| &\geq |z_k S_{a_{k+1}}(x_k)| - |x_{k-1} S_{a_{k+1}-1}(x_k)| \\ &\geq |z_k| [|S_{a_{k+1}}(x_k)| - |S_{a_{k+1}-1}(x_k)|] \\ (1.4) \quad &\geq |z_k| (|x_k| - 1)^{a_{k+1}}. \end{aligned}$$

Cela montre d'une part que $|z_{k+1}| > |z_k|$ avec l'hypothèse $|x_k| \geq 2 + \delta$. On a également que $|z_{k+1}| > |x_k|$. En effet, on peut écrire également que

$$\begin{aligned} |z_{k+1}| &\geq |z_k| (|x_k| - 1) \\ &\geq |x_k| + (|z_k| - 1)|x_k| - |z_k| \\ &\geq |x_k| + 2(|z_k| - 1) - |z_k| \\ &\geq |x_k| + |z_k| - 2 \geq |x_k|. \end{aligned}$$

Il nous reste la dernière inégalité à vérifier.

On montre avec les mêmes arguments que

$$\begin{aligned} |x_{k+1}| &\geq |z_k S_{a_{k+1}-1}(x_k)| - |x_{k-1} S_{a_{k+1}-2}(x_k)| \\ &\geq |z_k| [|S_{a_{k+1}-1}(x_k)| - |S_{a_{k+1}-2}(x_k)|] \\ &\geq |z_k| (|x_k| - 1)^{a_{k+1}-1}. \end{aligned}$$

Cela nous permet d'affirmer que $|x_{k+1}| > |z_k|$.

En prenant le logarithme de (1.4), on obtient :

$$\log |z_{k+1}| \geq \log |z_k| + a_{k+1} \log(|x_k| - 1).$$

En utilisant $|z_{k+1}| > |z_k|$ et $|z_{k-1}| < |x_k|$, on en déduit que

$$\log(|z_{k+1}| - 1) \geq \log(|z_k| - 1) + a_{k+1} \log(|z_{k-1}| - 1).$$

La suite $\{\log(|z_k| - 1)\}_{k \geq N}$ croît plus vite qu'une suite exponentielle G_k .

$$G_k = G_{k-1} + a_{k+N} G_{k-2}, G_0 = 1, G_{-1} = 1.$$

$$G_k \geq F_k, \forall k \in \mathbb{N},$$

1. ANALYSE DANS LE PLAN COMPLEXE

où F_k est la suite de Fibonacci, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $F_0 = 1$, $F_{-1} = 1$, dont la croissance est exponentielle :

$$F_k \gtrsim \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^k, k \gg 1.$$

Ainsi,

$$|x_{k+1}| \geq |z_k| \geq e^{cG_{k-N}} + 1 \quad \forall k > N.$$

avec $c = \log(1+\delta) > 0$ fixe. Cette constante c provient de la différence entre les conditions initiales des suites $\{G_k\}_k$ et la suite $\{\log(|z_k| - 1)\}_{k > N}$. $\square$

Ici, nous disposons d'une borne inférieure pour les traces à condition d'être sûr que l'argument de celle ci ne soit pas dans deux ensembles σ_k^δ consécutifs (en k). L'argument en question peut être réel ou complexe sans que cela change la définition des traces ou leur relation de récurrence. Dans la suite, l'argument en question sera complexe. Cela fournit l'avantage qu'il est plus facile, en regardant la partie imaginaire de donner un critère pour ne pas être dans deux ensembles σ_k^δ consécutifs.

La forme des ensembles $\sigma_k^\delta \cap \mathbb{R}$ est bien connue, on sait de combien d'intervalles il est composé et on a une estimation sur les tailles de ces intervalles. La seule chose que l'on ignore ce sont les emplacements de ces intervalles ce qui est embêtant pour dire si une énergie va vérifier la borne inférieure ou pas. L'intérêt de passer dans le plan complexe est le suivant, les estimations par des arguments de déformation habituels vont être valables en hauteur également. L'ensemble complexe σ_k^δ va ressembler ainsi à une suite d'ovales disjointes centrées sur l'axe réel. Il sera possible de l'éviter à condition de passer suffisamment haut (ou bas pour les parties imaginaires négatives). Ainsi il convient de calculer à partir de quelle hauteur la partie imaginaire est suffisante pour garantir une borne supérieure pour l'inverse des traces.

Nous précisons maintenant les propriétés des ensembles $\sigma_{k,0}^\delta$. Elles découlent des propriétés de ces ensembles à $\delta = 0$.

Le principal ingrédient est le suivant :

Lemme 38. *Si on suppose que $V > V_\delta = (16 + 24\delta + 9\delta^2 + 4\delta^3)^{\frac{1}{2}}$ alors on a*

$$\sigma_{k,0}^\delta \cap \sigma_{k+1,0}^\delta \cap \sigma_{k,1}^\delta = \emptyset$$

La preuve de ceci comme le résultat pour $\delta = 0$ utilise l'invariant de la proposition 7. Son extension permet d'étendre aux ensembles $\sigma_{k,0}^\delta$ la structure que possède les approximations périodiques. Plus précisément, on a

Proposition 10. *Soit δ fixé, petit et $V > V_\delta$. Les ensembles $\{(\sigma_{k,0}^\delta)^\mathbb{R}\}$ consistent en q_{k-1} intervalles fermés deux à deux disjoints. Chacune des bandes contient un unique zéro de x_k et chaque fossé entre deux bandes contient un unique point critique de x_k .*

DÉMONSTRATION. La preuve pour $\delta = 0$ est connue et se trouve dans [42]. Elle utilise uniquement l'invariant et la structure qui en découle pour $V > 4$. Il est alors possible d'étendre du lemme 38 cette même structure. La même démonstration avec $V > V_\delta$ implique le résultat. $\square$

Proposition 11. *Soit δ fixé, petit et $V > V_\delta$. Les ensembles $\{\sigma_{k,0}^\delta\}$ ont exactement q_{k-1} composantes connexes. Chacune de ses composantes est un disque topologique qui est symétrique par rapport à l'axe des réels.*

DÉMONSTRATION. Comme les coefficients de x_k sont réels, on a que chaque composante est symétrique par rapport à l'axe réel. Le degré du polynome x_k étant q_{k-1} , il y'a au plus q_{k-1} composantes. D'autre part, la proposition 10 montre que les ensembles $\{(\sigma_{k,0}^\delta)^\mathbb{R}\}$ consistent en exactement q_{k-1} composantes connexes. Alors, en appliquant le

1. ANALYSE DANS LE PLAN COMPLEXE

principe du maximum, on obtient que chaque composante est un disque topologique et qu'il y'en a exactement q_{k-1} . $\square$

A partir de là, il ne nous reste plus qu'à étendre les bornes sur les ensembles $\{(\sigma_{k,0})^{\mathbb{R}}\}$ du théorème 35 aux ensembles $\{(\sigma_{k,0}^{\delta})\}$ par des arguments de déformation habituels.

Proposition 12. *Soit $k \geq 3$, $\delta > 0$ et $V > \max(20, V_{\delta})$. Alors il existe des constantes $c_{\delta}, d_{\delta} > 0$ telles que*

$$\bigcup_{j=1}^{q_{k-1}} B(x_k^{(j)}, r_k) \subseteq \sigma_{k,0}^{\delta} \subseteq \bigcup_{j=1}^{q_{k-1}} B(x_k^{(j)}, R_k)$$

où $\{x_k^{(j)}\}_{1 \leq j \leq q_{k-1}}$ sont les zéros de x_k , $r_k = c_{\delta} \inf_{\tau} L_{\tau}(Q)$ et $R_k = d_{\delta} \sup_{\tau} L_{\tau}(P)$.

DÉMONSTRATION. La preuve est la même que dans [14]. Soit C_j une composante connexe de $\sigma_{k,0}^{2\delta}$. Avec $V > \max\{20, \lambda(2\delta)\}$, il est facile de voir que cette composante contient exactement un des q_{k-1} zéros de $\sigma_{k,0}^{\delta}$, $x_k^{(j)}$. De même, il est clair que C_j contient une composante connexe de $\sigma_{k,0}^{\delta}$, notée $\tilde{C}_j$. Il suffit de montrer que

$$(1.5) \quad B(x_k^{(j)}, r_k) \subseteq \tilde{C}_j \subseteq B(x_k^{(j)}, R_k).$$

pour obtenir le résultat souhaité.

Comme x_k est une fonction propre et que C_j contient un unique zéro, son degré est 1.

$$x_k : \text{int}(C_j) \rightarrow B(0, 2 + 2\delta)$$

est holomorphe injective et donc que

$$x_k^{-1} : B(0, 2 + 2\delta) \rightarrow \text{int}(C_j)$$

est bien défini et également holomorphe injective. En conséquence, la fonction suivante

$$F : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, F(z) = \frac{x_k^{-1}((2 + 2\delta)z) - x_k^{(j)}}{(2 + 2\delta)(x_k^{-1})'(0)}$$

est holomorphe, injective sur $B(0, 1)$. Clairement, on a $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$.

En appliquant le théorème de distorsion de Koebe, on obtient

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |F(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}, |z| \leq 1.$$

Évalué pour $|z| = \frac{2+\delta}{2+2\delta}$, on obtient

$$\frac{(2 + \delta)(2 + 2\delta)}{(4 + 3\delta)^2} \leq F(z) \leq \frac{(2 + \delta)(2 + 2\delta)}{\delta^2}.$$

D'après la définition de F , cela donne

$$\begin{aligned} |x_k^{-1}((2 + 2\delta)z) - x_k^{(j)}| &\leq \frac{(2 + \delta)(2 + 2\delta)}{\delta^2} |(x_k^{-1})'(0)|, \\ |x_k^{-1}((2 + 2\delta)z) - x_k^{(j)}| &\geq \frac{(2 + \delta)(2 + 2\delta)}{(4 + 3\delta)^2} |(x_k^{-1})'(0)|. \end{aligned}$$

Et donc pour $|z| = 2 + \delta$,

$$\begin{aligned} |x_k^{-1}(z) - x_k^{(j)}| &\leq \frac{(2 + \delta)(2 + 2\delta)}{\delta^2} |(x_k^{-1})'(0)|, \\ |x_k^{-1}(z) - x_k^{(j)}| &\geq \frac{(2 + \delta)(2 + 2\delta)}{(4 + 3\delta)^2} |(x_k^{-1})'(0)|. \end{aligned}$$

Il reste à remarquer avec $|(x_k^{-1})'(0)| = |x'_k(x_k^{(j)})|$ et (4.1) que

$$r_k \leq |(x_k^{-1})'(0)| \leq R_k$$

2. BORNE SUPÉRIEURE

et qu'avec $|z| = 2 + \delta$, $x_k^{-1}(z)$ parcourt le bord de $\tilde{C}_j$ pour conclure. $\square$

2. Borne supérieure

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour montrer notre résultat principal :

Théorème 39. *Soit β un nombre irrationnel et H_β défini comme en (1.2) avec un potentiel sturmien défini avec β . Si $D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k}$ est fini alors*

$$\alpha_u^+ \leq \frac{2D}{\log \frac{V-8}{3}}.$$

DÉMONSTRATION. On rappelle la suite

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, q_0 = 1, q_{-1} = 0.$$

On a, avec la proposition 12

$$\sigma_{k,0}^\delta \subseteq B(x_k^{(j)}, R_k)$$

Comme les points $x_k^{(j)}$ sont sur l'axe réel, on a

$$\sigma_{k,0}^\delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < R_k\}.$$

L'ensemble $\sigma_{k,0}^\delta$ est contenu dans une bande du plan complexe dont l'épaisseur est donnée par la taille de la plus grande bande du spectre périodique à un rang k donné. On rappelle que R_k est le supremum des produits de k éléments des matrices P_k . Tous les coefficients sont maximaux si $a_k = 1$ à n'importe quel rang k . Le coefficient le plus grand est alors quand on passe d'une bande de type I à une bande de type II, dans ce cas le coefficient de la matrice vaut 1. Seulement d'après la dynamique des bandes des spectres périodiques, cela ne peut se produire plus de la moitié du temps. On obtient ainsi pour R_k la borne suivante :

$$R_k \leq c_1^{k/2}.$$

On obtient donc,

$$\sigma_{k,0}^\delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < R_k\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < c_1^{k/2}\}.$$

Pour l'ensemble $\sigma_{k,1}^\delta$, la proposition 8 (ii) appliqué avec $p = 0$ donne

$$\sigma_{k,1}^\delta \subset \sigma_{k+1,0}^\delta \cup ((\mathbb{C} \setminus \sigma_{k+1,0}^\delta) \cap \sigma_{k,0}^\delta)$$

Comme les quantités R_k décroissent en k , cela donne :

$$(2.1) \quad \sigma_{k,0}^\delta \cup \sigma_{k,1}^\delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < c_1^{k/2}\}.$$

Revenons à la relation (2.1).

Pour $\varepsilon = \operatorname{Im} z > 0$, on obtient une borne inférieure pour $|x_n(E + i\varepsilon)|$ uniforme pour $E \in [-K, K] \subset \mathbb{R}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit k avec $c_1^{k/2} < \varepsilon$. En clair, on a choisi une partie imaginaire plus grande que la hauteur de la bande du plan complexe contenant $\sigma_{k,0}^\delta \cup \sigma_{k,1}^\delta$. Avec (2.1), on a donc que $E + i\varepsilon \notin \sigma_{k,0}^\delta \cap \sigma_{k,1}^\delta$,

Cela indique par la définition de ces ensembles que $|x_k(E + i\varepsilon)| > 2 + \delta$ et $|z_k(E + i\varepsilon)| > 2 + \delta$. Soit $|x_{k-1}(E + i\varepsilon)| \leq 2 + \delta$ et alors on est dans la situation de la proposition 9. Sinon $|x_{k-1}(E + i\varepsilon)| > 2 + \delta$ et alors la proposition 8 (ii) implique que $|z_{k-1}(E + i\varepsilon)| > 2 + \delta$. En effet, appliqué en $p = 0$,

$$\sigma_{k,p+1}^\delta \subset \sigma_{k+1,0}^\delta \cup ((\mathbb{C} \setminus \sigma_{k+1,0}^\delta) \cap \sigma_{k,p}^\delta),$$

donne

$$(\mathbb{C} \setminus \sigma_{k+1,0}^\delta) \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma_{k,0}^\delta) \subset (\mathbb{C} \setminus \sigma_{k,1}^\delta).$$

On peut ensuite répéter ce processus, soit on est dans le cas de la proposition 9, soit on descend l'indice d'un cran supplémentaire. Comme $|x_{-1}(E + i\varepsilon)| = 2 \leq 2 + \delta$, on est

2. BORNE SUPÉRIEURE

toujours dans la situation de la proposition 9 pour un certain indice N inférieur ou égal à k et on a la borne (uniforme en E)

$$|x_j| \geq e^{\log(1+\delta)G_{j-N}} + 1 \quad \forall j > N.$$

Tout cela motive les définitions :

Définition 40. Pour $T > 1$, on note $k(T)$ l'unique entier tel que

$$c_1^{\frac{-(k(T)-1)}{2}} \leq T \leq c_1^{\frac{-k(T)}{2}}$$

et soit

$$N(T) = q_{k(T)+\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}.$$

Lemme 41. Pour tout $\nu > 0$ et une constante κ , $N(T)$ vérifie les estimations suivantes :

$$(2.2) \quad T^\kappa \lesssim N(T) \lesssim T^{-\frac{2D}{\log c_1}} T^\nu.$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition 40, on a $k(T) \sim \log T$. Comme la suite $\{q_k\}_k$ est une suite exponentielle en k , on a bien que $T^\kappa \lesssim N(T)$ pour un certain $\kappa > 0$.

Pour l'autre inégalité, on écrit simplement que

$$\begin{aligned} \frac{\log N(T)}{\log T} &= \frac{\log q_{k(T)+\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}}{k(T) + \lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor} \frac{k(T) + \lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}{\log T} \\ &\leq \frac{\log q_{k(T)+\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}}{k(T) + \lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor} \frac{k(T) + \lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}{(-k(T) + 1)/2 \log c_1} \\ &\leq 2D \frac{k(T) + \lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}{(-k(T) + 1) \log c_1}. \end{aligned}$$

Lorsque $k(T)$ est assez grand, la dernière expression est proche de $\frac{1}{\gamma(V)} = \frac{2D}{-\log c_1}$. Donc pour T assez grand, on a bien

$$N(T) \lesssim C_\nu T^{-\frac{2D}{\log c_1}} T^\nu$$

avec ν arbitrairement petit. □

En appliquant le théorème 36 à $N(T) = q_{k(T)+\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}$

$$\begin{aligned} P_d(N(T), T) &\lesssim \exp(-cN(T)) + T^3 \int_{-K}^K \left(\max_{1 \leq q_n \leq N(T)} \left\| M_n(E + \frac{i}{T}) \right\|^2 \right)^{-1} dE, \\ &\lesssim \exp(-cN(T)) + T^3 \int_{-K}^K \left(\left\| M_{k(T)+\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}(E + \frac{i}{T}) \right\|^2 \right)^{-1} dE, \end{aligned}$$

Par définition de $k(T)$, on a

$$c_1^{k/2} < \frac{1}{T}.$$

Ceci implique avec la borne uniforme en E que

$$(2.3) \quad |x_j(E + \frac{i}{T})| \geq e^{\log(1+\delta)G_{j-k(T)}} + 1 \quad \forall j > k(T).$$

En particulier, pour $j = k(T) + \lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor$ et en prenant l'inverse de (2.3), on obtient

$$|x_{k(T)+\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}(E + \frac{i}{T})|^{-1} \leq e^{-\log(1+\delta)G_{\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}}$$

On obtient ainsi

$$(2.4) \quad P_d(N(T), T) \lesssim \exp(-cN(T)) + T^3 e^{-2 \log(1+\delta)G_{\lfloor \sqrt{k(T)} \rfloor}}$$

2. BORNE SUPÉRIEURE

Comme la suite G_n croît au moins comme la suite de Fibonacci et que $k(T) \sim \log T$, cela suffit pour dire que $P_d(N(T), T)$ tend vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance inverse de T . On obtient la même borne pour $P_g(N(T), T)$ par symétrie du potentiel. Et finalement on peut appliquer le corollaire 37 avec (2.2) et on a

$$\alpha = \frac{1}{\gamma(V)} + \nu$$

sachant que l'on peut prendre ν arbitrairement petit. $\square$

Ce résultat, même s'il tient compte de l'irrationnel de départ dans sa borne avec la valeur de D , nécessite des estimations qui elles sont valables pour tous les irrationnels et donc ne sont pas optimales. L'estimation en question est sur la taille minimum d'une bande qui dépend évidemment d'une part du nombre mais également de l'historique de celle-ci. D est indépendant d'une permutation de l'ordre des éléments du développement en fraction continue de β ce qui n'est pas le cas avec les tailles des bandes. Le pire cas pour une contribution au rang k est si $a_k = 1$ et si en plus on passe par une bande de type I à ce rang. Dans ce cas, il n'y a pas de contribution et on passe au rang $k + 1$ sans diminution de la taille. Heureusement, il est impossible que cette situation arrive plus de deux fois de suite à cause des règles de récurrence des types de bandes. Ainsi si on a par exemple, pour trois rangs consécutifs $k, k + 1, k + 2$, $a_k = 1, a_{k+1} = 1, a_{k+2} = 2$, on aura au minimum 2 contributions, une avec des deux 1 consécutifs et une automatiquement avec le 2. Si on permute a_{k+1} et a_{k+2} , ce qui ne change rien pour notre borne, nous aurons alors non plus deux mais qu'une seule contribution au minimum ! L'estimation qui sert pour la preuve est donnée pour le nombre d'or qui en terme de taille de bande est le pire cas possible. En effet, l'occurrence exclusive du nombre 1 dans le développement en fraction continue maximise cette "non contribution" et de plus les contributions effectives sont minimales pour la valeur 1.

On ne peut pas éliminer la possibilité d'un index de bande gênant car ils sont tous possibles et se réalisent tous au moins un fois (à la condition initiale près qui ne peut pas être II). Par contre, on peut ajouter des hypothèses supplémentaires sur notre irrationnel pour améliorer cette estimation et c'est le but du corollaire suivant :

Corollaire 42. *Pour un nombre dont le développement en fraction continue ne contient pas de 1, la borne dynamique devient*

$$\beta(p) \leq \alpha_u^+ \leq \frac{D}{\log \frac{V-8}{3}}, p > 0.$$

DÉMONSTRATION. L'amélioration de la borne par un facteur 2 vient du fait qu'au lieu d'avoir

$$R_k \leq c_1^{k/2}$$

comme dans le cas général, on a

$$R_k \leq c_1^k.$$

En effet, comme cela est mentionné plus haut, du fait que $a_n > 1$ même le passage d'une bande de type I à une type II apporte une contribution non triviale. Le reste de la preuve est identique. $\square$

Le corollaire suivant fixe le cas des nombres précieux. Nous utilisons le corollaire précédent pour l'amélioration de l'estimation. Ici comme nous fixons précisément notre irrationnel, nous sommes capable de calculer explicitement la quantité D .

Corollaire 43. *Pour un nombre précieux $\omega = [a, a, a, a, \dots]$ la borne devient*

$$\beta(p) \leq \alpha_u^+ \leq \frac{\log(a + \omega)}{\log \frac{V-8}{3}}, p > 0.$$

3. BORNE PRESQUE SÛRE

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour un nombre précieux, la suite q_k est une suite régulière à deux pas que l'on étudie à l'aide de son équation caractéristique et d'appliquer le corollaire précédent. $\square$

Comme nous en avons déjà fait la remarque précédemment, notre borne est valide pour presque tous les irrationnels. En fait, il est même possible de donner une valeur presque sûre pour les quantités que nous considérons.

3. Borne presque sûre

Lemme 44. (*Khintchine*)([29],[31]) Pour $\beta \in [0, 1]$, soit la suite

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}, q_0 = 1, q_{-1} = 0.$$

Alors pour presque tout β par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k} = D_K = \frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

et

$$M = \liminf_k (a_1 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} = C_K = 2.685\dots$$

C_K est appelé la constante de Khintchine.

Ce lemme est très intéressant. Déjà, il contient une information numérique, exploitable et nous donnera une valeur précise pour notre borne et ceci pour presque tous les irrationnels. De plus, même si cela n'est pas mentionné le résultat de Khintchine garantit en plus l'existence des limites. Malgré cela, nous avons laissé volontairement les notations de limite supérieure ou inférieure pour ne pas oublier que cette existence n'est que presque sûre et que considérant un nombre irrationnel donné rien ne nous permet à priori de dire s'il appartient de façon sûre au nombre de type Khintchine.

Du reste, la plupart des nombres que nous considérons comme des exemples ne rentre pas dans ce schéma. Les nombres précieux donnent une valeur précise et finie pour ces quantités mais différente des constantes presque sûres. Plus généralement, les nombres algébriques de degré 2, c'est à dire ceux qui ont un développement en fraction continue périodique, eux aussi donnent des valeurs finies et différentes. Il y'a ensuite évidemment les nombres qui ne vérifient pas la condition $D < +\infty$, comme les nombres de type Liouville, etc.

Il n'existe pas de preuve qu'un nombre irrationnel particulier vérifie cette condition pourtant valable presque sûrement. Signalons tout de même que des calculs numériques tendent à montrer que π et la constante de Khintchine elle même seraient dans ce cas là.

A défaut de donner une démonstration ici (voir [29], [31]), nous donnons une explication heuristique de cet étonnant résultat. Prenons un irrationnel au hasard et écrivons le en base 10. On numérote la suite infinie des décimales de ce nombre par la suite $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et on note la quantité m (si elle existe), la moyenne arithmétique de ces décimales

$$m = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} d_k.$$

Il est facile de se convaincre avec la loi des grands nombres que cette moyenne sera presque sûrement égale à l'espérance d'une décimale choisie au hasard. Et comme $P\{d_l = i\} = \frac{1}{10}$, pour $i = 0, 1, \dots, 9$ et pour tout l , cela est facile à calculer.

$$m = \frac{1 + 2 + \dots + 9}{10}$$

Maintenant, on considère le développement en fraction continue d'un irrationnel. Que vaut la quantité

$$M = \limsup_n \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}}?$$

3. BORNE PRESQUE SÛRE

Déjà, il est facile de trouver un irrationnel tel que M ne soit pas fini. Rien n'indique en effet que M puisse ou doive être fini, chaque a_k pouvant prendre n'importe quelle valeur entière strictement positive. Le logarithme de M est la moyenne arithmétique de la suite $\{\log a_k\}$.

L'algorithme du développement en fraction nous dit que $a_1 = 1$ si notre irrationnel appartient à $] \frac{1}{2}, 1[$, $a_1 = 2$ si notre irrationnel appartient à $] \frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ et plus généralement $a_1 = k$ si notre irrationnel appartient à $] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[$. La probabilité pour un irrationnel que $a_1 = k$ est la mesure de cet ensemble soit simplement $\frac{1}{k(k+1)}$. Les probabilités pour les a_n suivants sont les mêmes. En effet, l'algorithme du développement en fraction continue découpe chaque intervalles de la même façon que $[0, 1]$, la première moitié pour $a_2 = 1$, le sixième suivant pour $a_2 = 2$, etc...

Ainsi l'espérance de $\log(a_i)$ est la série convergente $\sum_k \frac{\log k}{k(k+1)}$.

La démonstration rigoureuse étudie l'algorithme du développement en fractions continues en tant que système dynamique. La preuve découle des propriétés habituelles que peuvent posséder ce genre de système (ergodicité, conjugaison avec un shift etc...).

Corollaire 45. *Pour presque tout β , $V > 20$, on a*

$$\alpha_u^+ \leq \frac{2D_K}{\log \left(\frac{V-8}{3} \right)}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'ajouter le lemme de Khintchine à la borne du théorème 13. □

4. UN CONTRE EXEMPLE

4. Un contre exemple

La condition sur la suite q_k sans pouvoir affirmer qu'elle soit nécessaire est tout de même raisonnable. Pour justifier cette affirmation, nous allons exhiber un exemple de nombre dont le comportement dynamique est à l'inverse de celui que nous venons de démontrer pour presque tous les nombres.

Ce nombre irrationnel est choisi aussi proche que nécessaire des nombres rationnels. Nous montrons que cette proximité induit pour l'opérateur quasipériodique associé le même comportement dynamique que celui des opérateurs périodiques, à savoir balistique.

Nous montrons le théorème suivant :

Théorème 46. *On pose comme condition initiale $\psi(0) = \delta_0$. Il existe un nombre irrationnel ω , avec $D = +\infty$, tel que pour tout $V > 20$, on a*

$$\alpha_u^+ = 1.$$

DÉMONSTRATION. On construit ce nombre par récurrence. Supposons donc que $\omega_n = [a_1, \dots, a_n]$ soit fixé. Nous démontrons ce petit lemme essentiel pour la suite :

Lemme 47. *Les potentiels sturmiens des opérateurs H_ω et H_{ω_n} coïncident sur les $p_{n+1} + q_{n+1}$ premières valeurs.*

DÉMONSTRATION. Pour prouver ceci, il suffit de rappeler la construction des mots sturmiens qui coïncident avec les potentiels. On pose $W_0 = 0$ et $W_1 = 0^{a_1-1}V$ et on obtient un mot de longueur finie de plus en plus grande avec la règle suivante

$$W_{k+1} = W_k^{a_{k+1}} W_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Chaque mot W_k est de longueur $p_k + q_k$.

Comme le développement en fraction continue est le même sur les n premiers termes, les mots $W_0, W_1, \dots, W_n$ sont les mêmes pour H_ω et H_{ω_n} .

Pour H_{ω_n} , le mot est périodique et répète sans fin le mot W_n . Comme $W_n = W_{n-1}^{a_n} W_{n-2}$, on a

$$W_n^\infty = W_n^{a_{n+1}} W_{n-1}^{a_n} W_{n-2} W_n^\infty.$$

On voit ainsi que le mot périodique pour H_{ω_n} débute par $W_n^{a_{n+1}} W_{n-1} = W_{n+1}$ le mot d'ordre $n+1$ pour H_ω . Le lemme est démontré sachant que la taille de W_{n+1} est $p_{n+1} + q_{n+1}$. $\square$

Revenons à la construction de ω .

Comme H_{ω_n} est un opérateur à potentiel périodique, on a l'inégalité suivante sur les moments d'ordre 2 ([30]),

$$(4.1) \quad \langle |X|_{H_{\omega_n}}^2 \rangle_T > C_n T^2.$$

Ce qu'on voudrait c'est pouvoir affirmer la même chose pour l'opérateur quasipériodique. Pour cela, nous rappelons un lemme dans [30] qui démontre la chose suivante, pour une échelle de temps fixée, les moments d'ordre 2 de deux opérateurs de Schrödinger associés à des potentiels bornés sont arbitrairement proches à condition que les potentiels des deux opérateurs le soient sur une échelle de temps suffisamment grande. Plus clairement, le résultat est le suivant :

Lemme 48. [30] *Soit $H_1 = \Delta + V_1$ et $H_2 = \Delta + V_2$ sur $l^2(\mathbb{Z})$, et tels que $|V_1(k)|, |V_2(k)| < C$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et une constante C . Soit $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés alors il existe $L(T, \varepsilon), \delta > 0$ tel que si $|V_1(k) - V_2(k)| < \delta$ pour tout $|k| < L$, alors*

$$|\langle |X|_{H_1, \delta_0}^2 \rangle_T - \langle |X|_{H_2, \delta_0}^2 \rangle_T| < \varepsilon.$$

On peut choisir dans la relation (4.1) T_n assez grand tel que

$$C_n > \frac{1}{\log T_n}.$$

4. UN CONTRE EXEMPLE

On peut ensuite choisir a_{n+1} pour que $T_n \leq p_{n+1} + q_{n+1}$ et que $L(T_n, 1) \leq p_{n+1} + q_{n+1}$. On obtient ainsi par récurrence un nombre irrationnel ω et une suite de temps T_n avec les propriétés qui nous intéressent.

On est maintenant en mesure d'appliquer le lemme 48 à l'opérateur quasipériodique associé à ω . La relation (4.1) avec $L(T_n, 1) \leq p_{n+1} + q_{n+1}$ implique pour le moment d'ordre 2 de l'opérateur quasipériodique H_ω

$$(4.2) \quad \langle |X|^2 \rangle_{T_n} > \frac{T_n^2}{\log T_n} - 1.$$

Ceci étant vrai pour tout n , on a ainsi une suite de temps T_n qui tend vers l'infini avec

$$\langle |X|^2 \rangle_{T_n} > \frac{T_n^2}{\log T_n} - 1 > T_n^{2-\varepsilon} - 1, \forall n \geq 1.$$

Ainsi

$$\alpha_u^+ \geq \beta^+(2) = 1$$

□

Méthode pour borne inférieure

Pour obtenir des informations dynamiques, nous allons utiliser le lien entre la dimension de boîte du spectre et les coefficients dynamiques. Ce lien existe à la condition de quelques restrictions sur nos conditions initiales et notre modèle. Nos résultats ne sont valides que pour le vecteur initial $\psi(0) = \delta_1$, ensuite nous devons nous restreindre aux nombres irrationnels à densité bornée.

1. Borne inférieure pour la dimension de boîte du spectre

Rappelons la définition de la dimension de boîte d'un ensemble σ .

Si on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boule de taille ε nécessaire pour couvrir l'ensemble σ , alors sa dimension de boîte supérieure (respectivement inférieure) est

$$\dim_B^+(\sigma) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

$$\dim_B^-(\sigma) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Si la limite existe, on note plus simplement cette limite $\dim_B$. Il est connu que

$$\dim_H(\sigma) \leq \dim_B^-(\sigma) \leq \dim_B^+(\sigma).$$

La méthode pour obtenir une borne inférieure pour la dimension de boîte dans ce travail sera toujours la même. Nous allons utiliser les informations très précises sur la forme du spectre approximé de manière de plus en plus précise par les spectres périodiques. En effet, les informations sur le nombre et sur la taille des bandes permet de donner une borne inférieure pour le nombre de boules nécessaires pour recouvrir le spectre.

L'objectif est donc de trouver une borne pour le nombre de boules d'une taille donnée à un rang donné pour le spectre périodique.

1.1. Le cas Fibonacci. Dans [8], les auteurs étudient la valeur de la dimension de boîte de spectre du modèle de Fibonacci.

Théorème 49. *Pour $V > 16$, la dimension de boîte de σ existe et vérifie*

$$\dim_H(\sigma) = \dim_B(\sigma).$$

Ce premier résultat sera fort pratique car il est plus facile de minorer une dimension de boîte que de la majorer. A contrario, il est plus facile de majorer une dimension de Hausdorff que de la minorer. Avec le théorème, ils pourront ainsi déduire un encadrement des dimensions du spectre du modèle Fibonacci qui sera optimal asymptotiquement en V .

Pour le démontrer, les auteurs ont fait appel à des résultats de Casdagli qui a montré que l'application trace peut être vue comme un système dynamique hyperbolique ([4]).

Les auteurs montrent ce résultat et son corollaire immédiat qui résolvent la question pour le cas Fibonacci.

Théorème 50. [8] *Soit $V > 8$. Alors*

$$\dim_B^-(\sigma) \geq \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\log(2V + 22)},$$

1. BORNE INFÉRIEURE POUR LA DIMENSION DE BOÎTE DU SPECTRE

et

$$\dim_H(\sigma) \leq \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\log S(V)}$$

$$\text{avec } S(V) = \frac{1}{2} \left((V - 4) + \sqrt{(V - 4)^2 - 12} \right)$$

Corollaire 51. Si on note $\dim(\sigma) = \dim_H(\sigma) = \dim_B^\pm(\sigma)$,

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \dim(\sigma) \cdot \log V = \log(1 + \sqrt{2}).$$

Pour l'opérateur de Fibonacci, il est connu numériquement que la dimension du spectre se comporte asymptotiquement en V comme $(\log(V))^{-1}$. L'objectif restait à prouver et à améliorer au maximum les constantes au numérateur.

Ce résultat est optimal et donne la meilleure constante possible.

La méthode pour montrer la borne inférieure pour la dimension de boîte est la suivante. Les auteurs considèrent le nombre de bandes de chaque type au rang k qui ont une certaine taille. Plus précisément, les types de bandes I et III coïncident. On note donc $I_{k,m}$ le nombre de bandes de type I au rang k dont l'historique a rencontré m fois le spectre. A chaque passage dans le spectre, la taille de la bande est multipliée par un facteur V^{-1} . On note de la même façon, $II_{k,m}$ le nombre de bandes de type II. $II_{k,m}$ donne donc le nombre de bandes de type II qui ont pour taille V^{-m} . Ces deux quantités vérifient une relation de récurrence facile à déduire à partir des résultats dans [42].

Il s'avère que cette récursion est la même celle des coefficients de polynômes de Chebychev dont la formule est connue, ainsi

$$I_{k,m} = II_{k-1,m-1} = 2^{2k-3m-1} \frac{m}{k-m} \binom{k-m}{2m-k}$$

pour $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq m \leq \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$. En dehors de ces valeurs, ces deux quantités valent 0.

Ils montreront ensuite que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_m \frac{1}{m} I_{k,m} = \log(1 + \sqrt{2}).$$

Cette quantité donne la constante recherchée.

Il est notable de remarquer que le ratio optimal entre m et k est l'irrationnel $\frac{12-2\sqrt{2}}{17}$. Ce résultat est loin d'être trivial.

1.2. Exemple du nombre d'argent. Le cas du nombre d'argent est présenté ici à part car plus trivial que le nombre d'Or pour les quantités qui nous intéressent. Car autant la succession des bandes et leurs genres est plus simple dans le cas Fibonacci, autant les tailles pour Fibonacci varient au rang k entre $C_k V^{-k/2}$ et $C_k V^{-k}$. Pour le nombre d'argent, la difficulté est inversée : il possède les trois types de bandes distinctes avec la récurrence décrite dans [42] mais toutes les bandes font la même taille, à une constante près, V^{-k} au rang k .

Ainsi, il nous suffit de compter l'intégralité des bandes à un rang donné. La suite $\{q_k\}_k$ est alors une suite récurrente à deux pas dont on peut calculer explicitement la valeur avec les racines du polynôme caractéristique.

On a $q_k \sim (1 + \sqrt{2})^k$ pour de grande valeur de k .

Et ainsi

$$\dim_B(\sigma) \geq \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\log 12(V + 5)}.$$

De la même façon, on peut montrer une borne supérieure pour la dimension de Hausdorff. Rappelons sa définition :

1. BORNE INFÉRIEURE POUR LA DIMENSION DE BOÎTE DU SPECTRE

Définition 52. Un δ -recouvrement d'un ensemble σ est une famille d'intervalle U_i de diamètre plus petit que δ , tel que $\sigma \subset \bigcup_i U_i$. On note la mesure extérieure de Hausdorff de σ , la quantité

$$\mathcal{H}^s(\sigma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\delta\text{-recouvrement}} \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s.$$

La dimension de Hausdorff est l'unique valeur qui vérifie, pour tout $0 \leq s < \dim_H(\sigma)$, $\mathcal{H}^s(\sigma) = \infty$ et pour $s > \dim_H(\sigma)$, $\mathcal{H}^s(\sigma) = 0$.

L'idée pour la borne est d'exhiber une suite de recouvrement de diamètre δ_k de plus en plus fin, $(U_i(k))_i$, qui vérifie que $\sum_{i=0}^{\infty} |U_i(k)|^s$ tende vers 0 quand k tend vers l'infini. Par définition, s est alors plus grand que la dimension de Hausdorff.

Comme recouvrement, on prend $\{\sigma_k \cup \sigma_{k+1}\}_k$ comme suite de recouvrement de σ au diamètre de plus en plus petit. Le nombre d'éléments du recouvrement est alors q_k que l'on a déjà calculé précédemment.

$$\sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s \leq q_k (V - 8)^{-ks}$$

On trouve que pour $s = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\log V}$, $\sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s \leq 1$, ce qui est suffisant pour dire que

$$\dim_H(\sigma) \leq \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\log V}.$$

Ce résultat permet de dire qu'encore une fois, nous avons la meilleure constante possible, à savoir $\log(1+\sqrt{2})$. Il est assez surprenant de voir que l'on trouve la même constante pour le nombre d'or et d'argent.

1.3. Cas général. Pour le cas général, on suit la méthode initiée pour le nombre d'argent. Évidemment, le comptage des bandes sera moins facile puisque qu'il y'a pour un nombre quelconque une multitude de tailles différentes disponibles.

Ici, nous compterons le nombre de bandes au rang k qui seront de taille $C.V^{-k}$. Avant d'aller plus loin, expliquons notre démarche, pourquoi nous avons choisi cette taille et pas une autre.

Le résultat optimal voudrait que l'on évalue le nombre de bandes de toutes les tailles disponibles et qu'on choisisse la taille pour lequel le ratio logarithme du nombre par logarithme de la taille soit le plus grand possible. Nous avons rappelé dans le premier paragraphe, c'est que cette taille optimale, qui donne le meilleure ratio est pour le nombre d'Or d'ordre $V^{-\gamma_k}$ au rang k , avec $\gamma = \frac{12-2\sqrt{2}}{17}$. Dans le paragraphe précédent, on a vu au contraire que pour le nombre d'argent le ratio est optimal est obtenu au rang k pour les bandes de taille V^{-k} . Ces deux exemples montrent si cela n'était pas évident que les bornes optimales dépendent évidemment du nombre considéré (et donc d'une infinité de paramètres).

Dans ce travail, à défaut de donner une borne optimale, nous donnons une borne uniforme, valable pour tous les nombres irrationnels. Pour se faire, nous examinons le ratio obtenu en comptant les bandes d'une certaine taille, à savoir V^{-k} au rang k . L'approche est différente du premier paragraphe où on fixe l'irrationnel, le nombre d'Or puis on regarde tous les ratios possibles et on prend le meilleur. Ici, on fixe un ratio possible pour tous irrationnels (le meilleur pour le nombre d'argent mais pas pour le nombre d'Or) puis on regarde la valeur de ratio pour tous les irrationnels.

Cette motivation nous incite à considérer les bandes de tailles V^{-k} au rang k car il s'agit de la seule taille commune à tous les irrationnels. En effet, le passage répété par des bandes de type III garantit des bandes de cette taille quelque soit le nombre. Toutes les autres tailles possibles sont tributaires du développement en fraction continue de l'irrationnel. L'occurrence de 1 donnera des bandes plus grandes et l'occurrence de nombre

1. BORNE INFÉRIEURE POUR LA DIMENSION DE BOÎTE DU SPECTRE

strictement plus grand que 2 des bandes plus petites. Ainsi, on retrouve bien que les bandes les plus petites pour le modèle de Fibonacci sont de taille V^{-k} et la seule taille possible pour le nombre d'Argent.

L'estimation du ratio associé à la taille de bande V^{-k} donne le résultat suivant valable pour tous les irrationnels.

Théorème 53. *On note $C_k = \frac{3}{k} \sum_{j=1}^k \log(a_j + 2)$. Pour un irrationnel vérifiant $C = \liminf C_k < +\infty$, on a*

$$(1.1) \quad \dim_B^\pm(\sigma) \geq \frac{1}{2} \frac{\log 2}{C + \log(V + 5)}$$

Nous démontrons le lemme suivant qui contient toutes les informations dont nous aurons besoin pour montrer le théorème.

Lemme 54. *On note $n_{k,I}$, $n_{k,II}$ et $n_{k,III}$ le nombre de bandes de type respectivement I, II et III dans respectivement $\sigma_{k,1}$, $\sigma_{k+1,0}$, $\sigma_{k+1,0}$ et de taille supérieure à $\varepsilon_k = 4 \prod_{j=1}^k (V + 5)^{-1} (a_j + 2)^{-3}$.*

On a pour tout k , la relation de récurrence suivante :

$$n_{k+1,I} = (a_{k+1} + 1)n_{k,II} + a_{k+1}n_{k,III},$$

$$n_{k+1,II} = 1_{\{a_{k+1} \leq 2\}} n_{k,I},$$

$$n_{k+1,III} = a_{k+1}n_{k,II} + (a_{k+1} - 1)n_{k,III},$$

avec les conditions initiales $n_{0,I} = 1$, $n_{0,II} = 0$, $n_{0,III} = 1$.

Ces trois suites vérifient les propriétés suivantes :

$$n_{k,II} \neq 0 \vee n_{k,III} \neq 0$$

$$n_{k,I} \neq 0$$

$$n_{k,I} > n_{k,III}$$

Et enfin

$$n_{k,II} + n_{k,III} > 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

DÉMONSTRATION. La relation de récurrence est évidente avec les propriétés de récursion des bandes et les estimations de leurs tailles minimum.

Les deux premières propriétés se font par récurrence. Les conditions initiales les vérifient au rang 0. Si elle est vérifiée au rang n , alors comme $a_{k+1} > 0$, $n_{k,II} \neq 0 \vee n_{k,III} \neq 0$, implique que $n_{k+1,I} \neq 0$. Pour l'autre, soit $a_{k+1} \leq 2$ et alors $n_{k+1,II} \neq 0$, soit $a_{k+1} > 2$ ce qui implique $n_{k+1,III} \neq 0$ par hypothèse.

Pour

$$n_{k,I} > n_{k,III}$$

il suffit d'écrire

$$n_{k,I} = n_{k,III} + n_{k-1,II} + n_{k-1,III}$$

pour conclure avec ce qui précède.

Enfin pour la dernière propriété, il suffit de montrer que

$$n_{k,II} + n_{k,III} \geq 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III})$$

En utilisant la relation de récurrence, on obtient

$$n_{k,II} = [(a_{k-1} + 1)n_{k-2,II} + a_{k-1}n_{k-2,III}]1_{\{a_k \leq 2\}},$$

$$n_{k,III} = (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1} - 1)n_{k-2,III}) + a_k n_{k-2,I} 1_{\{a_{k-1} \leq 2\}}.$$

On distingue maintenant 4 cas, en fonction des valeurs de a_k et a_{k-1} .

1. BORNE INFÉRIEURE POUR LA DIMENSION DE BOÎTE DU SPECTRE

- Si $a_k > 2$ et $a_{k-1} > 2$, alors

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1} - 1)n_{k-2,III}) \\ &\geq (a_k - 1)(a_{k-1} - 1)(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &\geq 4(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}). \end{aligned}$$

- Si $a_k \leq 2$ et $a_{k-1} > 2$, alors

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1} - 1)n_{k-2,III}) \\ &\quad + (a_{k-1} + 1)n_{k-2,II} + a_{k-1}n_{k-2,III} \\ &\geq a_k a_{k-1}(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &\geq 3(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}). \end{aligned}$$

- Si $a_k > 2$ et $a_{k-1} \leq 2$, alors

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1} - 1)n_{k-2,III}) + a_k n_{k-2,I} \\ &\geq (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1} - 1)n_{k-2,III}) + a_k n_{k-2,III} \\ &\geq (a_k - 1)a_{k-1}(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &\geq 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}). \end{aligned}$$

- Si $a_k \leq 2$ et $a_{k-1} \leq 2$, alors

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1} - 1)n_{k-2,III}) + \\ &\quad a_k n_{k-2,I} + (a_{k-1} + 1)n_{k-2,II} + a_{k-1}n_{k-2,III}. \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &\geq ((a_k - 1)a_{k-1} + a_{k-1} + 1)n_{k-2,II} \\ &\quad + ((a_k - 1)(a_{k-1} - 1) + (a_{k-1} + a_k))n_{k-2,III} \\ &\geq (a_k a_{k-1} + 1)n_{k-2,II} + (a_{k-1} + a_k)n_{k-2,III} \\ &\geq 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}). \end{aligned}$$

□

PREUVE DU THÉORÈME. Pour recouvrir le spectre avec un ε_k recouvrement, il nous faut au moins $1/2(n_{k,II} + n_{k,III})$ boules de diamètre ε_k . Comme il y'a $(n_{k,II} + n_{k,III})$ bandes étant de taille au moins ε_k , si on ne considère qu'une bande sur deux, chaque bande restante est ainsi espacée d'au moins une bande de taille ε_k et nécessite au moins une boule pour être recouverte.

D'après la définition de la dimension de boîte,

$$\dim_B^\pm(\sigma) \geq \liminf_k \frac{\log 1/2(n_{k,II} + n_{k,III})}{-\log \varepsilon_k},$$

ce qui donne le résultat souhaité. □

Il est utile de remarquer deux choses.

Premièrement, notre résultat est valide pour tous les irrationnels mais notre borne a le défaut de ne pas dépendre du moins fortement du nombre. Plus clairement, alors que σ dépend de l'irrationnel associé à l'opérateur dont il est le spectre, notre borne n'est reliée au nombre qu'à travers C qui est au dénominateur et qui influe vraiment pour des valeurs raisonnable de V . Il est donc clair que cette borne est plus ou moins bonne en fonction du nombre considéré.

Remarque 55. La borne précédente qui se trouve dans [32] est

$$\dim_B^\pm(\sigma) \geq \dim_H(\sigma) \geq \max \left\{ \frac{\log 2}{10 \log 2 - 3 \log t_2}, \frac{\log M - \log 3}{\log M - \log t_2/3} \right\}.$$

2. DIMENSION DE BOÎTE DU SPECTRE ET DYNAMIQUE

où $M = \liminf_{k \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}}$ et $t_2 = \frac{1}{4(V+8)}$.

Pour presque tout nombre, c'est à dire avec M égal à la constante de Khintchine (2.685...), notre borne est meilleure et ce pour tout $V > 20$. D'autre part, pour les nombres plus proches des rationnels, on peut préférer l'ancienne borne. Prenons l'exemple précis des nombres précieux $a_k = c$ pour tout k . Pour des valeurs de c aussi grandes que souhaitées, la borne ci-dessus tend vers 1 alors que (1.1) tend vers 0. Cette différence s'explique facilement. La borne précédente est fortement liée au nombre. Ainsi si un nombre proche des rationnels est considéré, la borne de la dimension se rapproche de la valeur de la dimension pour les rationnels (la dimension n'est pas fractale pour eux et est égale à 1). A contrario, notre borne est meilleure pour des nombres "loin" des rationnels ce qui constitue la quasi-totalité des irrationnels.

2. Dimension de boîte du spectre et dynamique

Si une borne inférieure pour la dimension de boîte du spectre possède un intérêt théorique en soi, nous sommes ici intéressé par les retombées en terme de dynamique. Aussi rappelons nous ici comment ces deux éléments peuvent être reliés. Nous commençons par rappeler un premier théorème sur la mesure spectrale de l'opérateur qui relie sa dimension fractale avec la dimension de boîte du support de la mesure.

Théorème 56. [2] *Supposons qu'il existe deux constantes positives C, A telles que*

$$\mu([x - \varepsilon, x + \varepsilon]) \geq C\varepsilon^A$$

pour tout $x \in \text{supp}(\mu)$. Alors pour tout $q \in]0, 1[$

$$\frac{\dim_B^\pm(\text{supp}(\mu)) - qA}{1 - q} \leq D_\mu^\pm(q) \leq \frac{\dim_B^\pm(\text{supp}(\mu))}{1 - q}.$$

En particulier,

$$\lim_{q \rightarrow 0} D_\mu^\pm(q) = \dim_B^\pm(\text{supp}(\mu)).$$

Encore une fois, nous allons déduire l'hypothèse du théorème précédent des propriétés des matrices de transferts. Nous rappelons dans la proposition suivante comment une borne supérieure pour les normes des matrices de transport peut fournir une borne inférieure pour la mesure spectrale. La proposition qui suit est valide pour tout opérateur de Schrödinger dont le potentiel à une croissance au plus polynomiale.

Proposition 13. [18] *Soit H un opérateur de Schrödinger associé à un potentiel sturmien et I un intervalle compact, $\psi(0) = \delta_1$. Alors il existe une constante universelle C_1 et pour tout $M > 0$ et $\delta > 0$ une constante C_2 (dépendant de I, M, δ et H) telles que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et pour tout $x \in I$, on ait*

$$(2.1) \quad \mu_{\psi(0)}(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \geq C_1 \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^2} - C_2 \varepsilon^M$$

avec $N = \lfloor \varepsilon^{-1-\delta} \rfloor$.

Un des intérêts de cette proposition est que, si on suppose que les normes des matrices de transfert sont polynomialement bornées, c'est à dire qu'on ait

$$\|T(E, N, 0)\| \leq CN^\gamma, \gamma > 0, E \in \sigma(H)$$

où C est une constante uniforme en E et N , alors (2.1) donne [8]

$$\mu(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \geq C' \varepsilon^{1+2\gamma+2\delta}$$

Il est démontré dans [23] que les opérateurs sturmiens associés à des irrationnels à densité bornée vérifient cette propriété. Plus précisément, on a

2. DIMENSION DE BOÎTE DU SPECTRE ET DYNAMIQUE

Théorème 57. [23] Si β vérifie

$$d(\beta) = \limsup_N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j \right) < +\infty,$$

alors il existe $\gamma \geq 0$ tel que $T(N) \leq CN^\gamma$, $E \in \sigma(H)$

Il nous reste à remarquer pour conclure que si vecteur initial est un vecteur cyclique pour l'opérateur H alors $\dim_B(\text{supp}(\mu)) = \dim_B(\sigma(H))$. Or e_1 est connu pour être cyclique pour les opérateurs sturmiens définis sur $l^2(\mathbb{N})$. En regroupant tous ces résultats ensuite avec notre borne, nous obtenons le résultat du théorème 21.

Théorème 58. Pour un nombre irrationnel à densité bornée, on a la borne dynamique suivante pour l'opérateur $\tilde{H}_\beta : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$

$$\alpha_u^- \geq \frac{1}{2} \frac{\log 2}{C + \log(V + 5)}$$

avec $C = \limsup_k \frac{3}{k} \sum_{j=1}^k \log(a_j + 2)$.

Corollaire 59. Sous les mêmes hypothèses, l'opérateur défini sur $l^2(\mathbb{Z})$ vérifie également

$$\alpha_u^- \geq \frac{1}{2} \frac{\log 2}{C + \log(V + 5)}$$

avec $C = \limsup_k \frac{3}{k} \sum_{j=1}^k \log(a_j + 2)$.

DÉMONSTRATION. Un premier rappel est l'estimation suivante prouvée dans [14] pour l'opérateur sur $l^2(\mathbb{Z})$:

$$(2.2) \quad CT^{-3}I_d(N, T) \leq P_d(N, T) \leq Ce^{-cN} + CT^3I_d(N, T),$$

où

$$I_d(N, T) = \int_{-K}^K \|T\left(N, 1, E + \frac{i}{T}\right)\|^{-2} dE.$$

Il est possible d'étendre cette estimation au cas de $\tilde{H}_\beta$. Avec les mêmes arguments, il est obtenu pour les probabilités extérieures de $\tilde{H}_\beta$,

$$(2.3) \quad CT^{-3}I_+(N, T) \leq \tilde{P}(N, T) \leq Ce^{-cN} + CT^3I_+(N, T),$$

où

$$I_+(N, T) = \int_{-K}^K \|T(N, 1, E + \frac{i}{T})\|^{-2} dE.$$

Les matrices de transfert, qui sont définies localement, sont les mêmes pour les deux opérateurs. Cela implique que les quantités $I_d(N, T)$ et $I_+(N, T)$ sont égales. Si les matrices de transferts sont polynomialement bornées, le théorème 21 implique

$$\tilde{\alpha}_u^\pm \geq \dim_B^\pm(\sigma(\tilde{H}_\beta))$$

pour la dynamique de $\tilde{H}_\beta$. Supposons que $\dim_B^-(\sigma(\tilde{H}_\beta)) > 0$ (sinon le résultat est trivialement vrai) et montrons que $\alpha_u^- \geq \dim_B^-(\sigma(H_\beta))$. Soit $0 < \alpha < \dim_B^-(\sigma(\tilde{H}_\beta)) \leq \tilde{\alpha}_u^-$. Par définition de $\tilde{\alpha}_u^-$, il suit que

$$(2.4) \quad \tilde{P}(T^\alpha - 2, T) \geq T^{-M}$$

avec $M > 0$ fini et T suffisamment grand. Comme $I_d(N, T) = I_+(N, T)$, on obtient avec les équations (2.2) et (2.3) que

$$P_d(N, T) \geq CT^{-3}I_+(N, T) \geq CT^{-6}(\tilde{P}(N, T) - Ce^{-cN}).$$

Cela implique avec (2.4) que pour T suffisamment grand,

$$P_d(T^\alpha - 2, T) \geq CT^{-M-6}.$$

2. DIMENSION DE BOÎTE DU SPECTRE ET DYNAMIQUE

Finalement, on trouve pour les probabilités extérieures :

$$\begin{aligned} P(T^\alpha - 2, T) &= \frac{2}{T} \int_0^\infty e^{-2t/T} \sum_{|n| > T^\alpha} |\langle e^{-itH} e_1, e_n \rangle|^2 dt \\ &\geq CT^{-M-6}. \end{aligned}$$

La définition de α_u^- implique alors que $\alpha_u^- \geq \alpha$. Comme cela est vrai pour tout $\alpha < \dim_{\bar{B}}(\tilde{H}_\beta)$, le résultat suit. Pour α_u^+ la preuve est identique, il suffit de considérer l'équation (2.4) valable alors sur une certaine suite de temps. $\square$

Étude du spectre via un système dynamique

Nous reprenons maintenant quelques propriétés mentionnées plus haut pour étudier à l'aide d'outils de dynamique symbolique l'application de renormalisation et le spectre de l'opérateur H . L'étude que nous allons faire a déjà été faite pour cette application associée au nombre d'Or et une force de couplage plus grande que 8 [4] et a donné pour le spectre associé des résultats intéressants, y compris du point de vue de la dynamique [8].

Ce lien entre l'hyperbolicité du spectre et la dynamique du système motive la généralisation de ce type de résultat à d'autres nombres que le nombre d'Or. Signalons deux résultats qui ont été obtenus en même temps que les notres.

Le premier de Damanik et Gorodetski [9] étend l'hyperbolicité du spectre associé au nombre d'Or et des petites valeurs, proches de 0, pour la force de couplage. Parallèlement à leurs travaux et aux notres, Serge Cantat a démontré dans [3] que le spectre est hyperbolique pour tous les nombres algébriques de degré 2 et toutes les forces de couplages. Ce résultat englobe le résultat antérieur de Casdagli et les résultats récents de Damanik et Gorodetski ainsi que ceux de cette section. Néanmoins nous utilisons une méthode qui reprend les méthodes constructives initiées dans [4] et qui est différente de celle de Cantat.

La méthode utilisée ici sera la suivante. Soit le système dynamique (S_V, T) , où T est une application qui laisse la surface S_V invariante. La méthode pour étudier la dynamique de T est de construire une représentation symbolique, c'est à dire un codage des points non errant de T par une séquence de symbole dont l'application T serait le shift.

Pour cela, on construit sur la surface S_V une partition $R_1, \dots, R_i$ d'ensembles fermés et disjoints. Nous coderons alors chaque point x de l'ensemble non errant en considérant à quel ensemble de la partition appartient l'itéré $T^n(x)$. Cela résulte en une séquence infinie qui codera le point. Une telle partition est appelée partition de Markov où partition markovienne.

1. Définition du modèle et premières propriétés

Nous pouvons maintenant définir le modèle que nous étudions dans cette section. Pour cette section, nous nous proposons d'étendre les résultats au cas du nombre d'Argent et pour des forces de couplages suffisamment grande. Pour ce cas, l'application de renormalisation est définie par

$$T(x, y, z) = (x(y^2 - 1) - zy, xy - z, y).$$

Nous rappelons quelques propriétés simples de T qui nous seront utiles pour toute la suite :

- (1) T est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $T^{-1} = \rho o T o \rho$ avec $\rho(x, y, z) = (y, z, x)$
- (2) T préserve la famille de surface cubique $\{S_V | V \in \mathbb{R}^+\}$ définie par

$$S_V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 - xyz = V^2 + 4\}.$$

On note T_V la restriction de T à S_V . Dans toute la suite, nous supposons que la force du potentiel V est supérieure à 4.

- (3) T shifté les suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définies à partir des traces de matrices de transfert. Plus précisément,

$$T(z_n, x_n, x_{n-1}) = (z_{n+1}, x_{n+1}, x_n)$$

1. DÉFINITION DU MODÈLE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Le lien avec le spectre de H est le suivant, on note la ligne $\ell_V(E) = (E - V, E, 2)$ pour $E \in [-2, 2]$.

Lemme 60. *Une énergie E appartient au spectre $\sigma(H)$ de H si et seulement si la semi-orbite positive du point $(E - V, E, 2)$ itéré par l'application T est bornée.*

Ce lemme est une simple réécriture de la coïncidence du pseudo spectre avec le spectre de l'opérateur. Cette écriture sous forme de système de fonction itérée plutôt que sous forme matricielle fait le lien entre le spectre et le pseudo spectre vu comme les orbites non errantes de T .

Notre objectif est de démontrer que pour V assez grand, l'ensemble non errant, noté Ω_V de T_V est un ensemble de Cantor avec une structure hyperbolique. Une fois ceci fait, nous pourrions déduire des propriétés pour le spectre de la théorie générale de ses ensembles.

Une fois encore nous nous servons des critères d'explosion sur les suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, (voir [44], [1], et la proposition 9). Les deux suites ne sont pas bornées si et seulement si les modules de deux termes consécutifs sont plus grands que deux.

Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que l'orbite de T soit non errant et que deux termes consécutifs dans le triplet (z_n, x_n, x_{n-1}) ne soit jamais simultanément plus grand que 2 en module.

Ces critères vont nous permettre de construire un ensemble compact R_V tel que l'orbite de tout point extérieur à R_V soit non bornée. Cela implique que Ω_V est contenu dans l'ensemble $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T_V^n(R_V)$.

On verra que l'ensemble R_V est constitué d'un nombre fini de régions disjointes et fermées, $R_1, \dots, R_N$. On montrera que leurs images par l'application T_V intersectent les régions $R_1, \dots, R_N$ à la manière d'un fer à cheval de Smale. Des estimations précises sur la forme et la taille de ces images nous permettront de déduire que l'ensemble Λ est hyperbolique en tout point. Ces points peuvent être codés de manière unique par une séquence bi-infini de symboles choisis dans $\{1, \dots, N\}$ en fonction de quels ensembles $R_1, \dots, R_N$ contiennent les images et images inverses successives. Il suit que les points de Λ peuvent être mis en correspondance avec un ensemble de Cantor et l'action de l'application T_V peut être décrite par une dynamique symbolique. Il est alors facile de construire une orbite dense pour cette dynamique symbolique et déduire que $\Omega_V = \Lambda$, et que Ω_V est un ensemble de Cantor.

On précise maintenant ces idées à commencer par la construction la construction de l'ensemble R_V .

On définit les ensembles suivants $s = [-2, 2]$, $L^+ = [2, +\infty[$, $L^- =]-\infty, -2]$

ainsi que les sous parties $R_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ de la surface S_V définies par les sous ensembles auxquels appartiennent les coordonnées x, y et z .

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} s \\ L^+ \\ s \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} s \\ L^- \\ s \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} s \\ s \\ L^+ \end{bmatrix}, R_4 = \begin{bmatrix} s \\ s \\ L^- \end{bmatrix} \\ R_5 &= \begin{bmatrix} L^+ \\ s \\ s \end{bmatrix}, R_6 = \begin{bmatrix} L^- \\ s \\ s \end{bmatrix}, R_7 = \begin{bmatrix} L^+ \\ s \\ L^+ \end{bmatrix}, R_8 = \begin{bmatrix} L^+ \\ s \\ L^- \end{bmatrix} \\ R_9 &= \begin{bmatrix} L^- \\ s \\ L^- \end{bmatrix}, R_{10} = \begin{bmatrix} L^- \\ s \\ L^+ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Plus clairement et pour prendre un exemple, $R_1 = \{(x, y, z) \in S_V \cap (s \times L^+ \times s)\}$ Cette notation, en forme de L, prendra son sens un peu plus tard. On définit l'ensemble $R_V = \cup_{i=1 \dots 10} R_i$.

Lemme 61. *L'ensemble R_V est un compact qui vérifie $\Omega_V \subset \Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T_V^n(R_V)$.*

1. DÉFINITION DU MODÈLE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que R_V est borné. Comme on considère un ensemble inclus dans la surface S_V , on a l'invariant de la proposition 7

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz = V^2 + 4.$$

Si on considère le cas de R_i avec $i = 1 \dots 6$, on a deux des trois coordonnées de $\mathbb{R}^3$ qui appartiennent à $s = [-2, 2]$. On peut sans perte de généralité, supposer que x et y appartiennent à s . Dans ce cas, on obtient pour z , en utilisant l'invariant de la proposition 7 que

$$(1.1) \quad z = \frac{xy}{2} \pm \sqrt{V^2 + \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) \left(2 - \frac{y^2}{2}\right)}.$$

Ceci donne que $z \in [-V - 2, -V + 2] \cup [V - 2, V + 2]$. Ainsi, on peut remplacer pour $V > 4$, L^+ par l'intervalle bornée $[V - 2, V + 2]$ et L^- par $[-V - 2, -V + 2]$ dans R_i avec $i = 1 \dots 6$.

On peut ensuite, quitte à remplacer R_i , $i = 7 \dots 10$ par $R_i \cap T(R_V)$, remplacer L^+ et L^- par $[V - 2, V + 2]$ et $[-V - 2, -V + 2]$ respectivement, dans la dernière coordonnée, parce que T shifte la coordonnée y en z . En injectant ces informations dans (1.1), on obtient que la première coordonnée est elle aussi bornée (mais pas nécessairement disjointe de s).

Il est clair que R_V est fermé comme union finie de parties fermées.

D'après les critères, l'orbite d'un point n'appartenant à aucun des R_i , $i = 1, \dots, 10$ est nécessairement non bornée. Donc $\Omega_V \subset \Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T_V^n(R_V)$.

Il est également facile de voir que ces dix ensembles représentent toutes les combinaisons possibles. La combinaison sss étant interdite par l'invariant pour $V > 4$. $\square$

Dans la suite, lorsque nous considérerons L^+ et L^- dans R_i avec $i = 1 \dots 6$, nous considérerons en fait les intervalles $[V - 2, V + 2]$ et $[-V - 2, -V + 2]$. Cela nous permettra en particulier de paramétrer facilement le bord de ces parties.

L'action de T sur la partition R_V

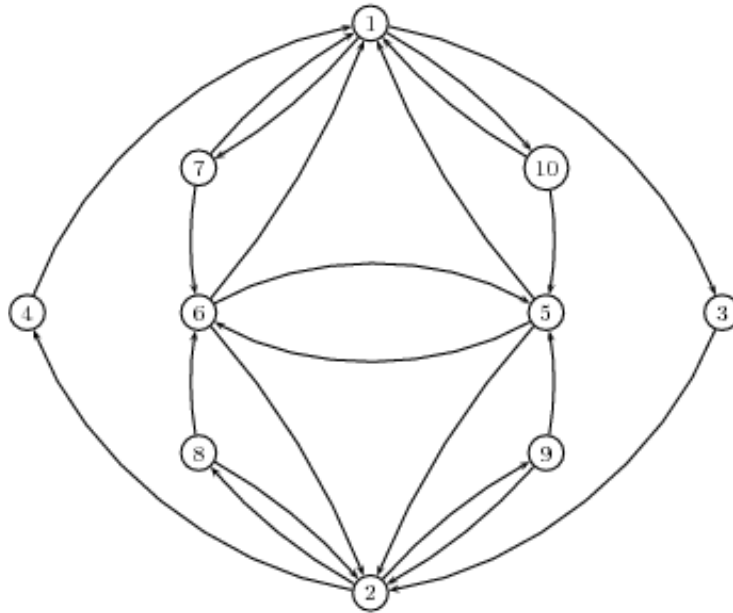


Figure 1

1. DÉFINITION DU MODÈLE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Lemme 62. *L'action à priori de T sur R_V est décrite entièrement par le graphe ci dessus.*

DÉMONSTRATION. Expliquons comment nous obtenons ce graphe. La première étape pour la construction est de se servir du fait que T shifte la coordonnée y en z . Cela donne par exemple que T ne peut envoyer R_1 que dans R_3, R_7, R_{10} . En exploitant ce fait, on obtient que R_2 ne peut être envoyé que dans R_4, R_8, R_9 . Tous les autres, ayant "s" pour la coordonnée y , sont donc envoyés dans R_1, R_2, R_5, R_6 à priori. Nous excluons certains de ces cas qui en fait sont impossibles.

A partir de maintenant, on va utiliser le symbolisme suivant pour faciliter la preuve.

On définit $w(x, y, z)$ la table de 7 éléments définie comme suit

$$(1.2) \quad w(x, y, z) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x(y^2 - 1) - zy & x & yz - x & \\ \hline xy - z & y & z & x(y^2 - 1) - zy \\ \hline \end{array}$$

en prenant $(x, y, z) = (z_n, x_n, x_{n-1})$ on obtient

$$(1.3) \quad w(z_n, x_n, x_{n-1}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z_{n+1} & z_n & z_{n-1} & \\ \hline x_{n+1} & x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ \hline \end{array}.$$

Cela veut dire en particulier que les trois tables en forme de L et qui se chevauchent
contenues dans (1.2) définissent respectivement de gauche à droite :

$$(1.4) \quad T_V(x, y, z), \quad (x, y, z), \quad T_V^{-1}(x, y, z).$$

Pour finir avec les notations, nous noterons l'ensemble $* = L^+ \cup s \cup L^-$

Nous montrons maintenant quels cas nous excluons.

Pour commencer, R_3 ne peut être envoyé que dans R_2 . En terme de table cela revient à dire qu'il n'y a qu'une possibilité pour $w(s, s, L^+)$:

$$w(s, s, L^+) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s & s & s & \\ \hline L^- & s & L^+ & s \\ \hline \end{array}$$

Il suffit de remarquer pour $(x, y, z) \in s \times s \times L^+$, on a $xy - z \in L^-$. Cela implique l'unique possibilité écrite plus haut.

Le même raisonnement donne que T envoie R_4 uniquement sur R_1 .

On montre également que les deux tables suivantes

$$(1.5) \quad w(L^+, s, *) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L^+ & L^+ & * & \\ \hline s & s & * & * \\ \hline \end{array}$$

$$(1.6) \quad w(L^-, s, *) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L^- & L^- & * & \\ \hline s & s & * & * \\ \hline \end{array}$$

sont impossibles.

Nous donnons l'argument pour la première table, celui pour la deuxième étant strictement identique. Si l'on a (1.5), alors la case en haut à gauche est donnée par la formule

$$x(y^2 - 1) - zy = y(xy - z) - x.$$

Or, par hypothèse, $x \in L^+, y \in s, (xy - z) \in s$ ce qui rentre en contradiction avec $y(xy - z) - x \in L^+$.

Avec ceci, nous pouvons exclure que T envoie R_5 et R_6 sur eux même mais aussi que T envoie R_7 et R_8 sur R_5 et R_9 et R_{10} sur R_6 .

Nous finissons avec un dernier argument.

On ne peut pas avoir

$$(1.7) \quad w(L^+, s, L^+) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s & L^+ & s & \\ \hline L^- & s & L^+ & s \\ \hline \end{array}$$

1. DÉFINITION DU MODÈLE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Cela signifie que T n'envoie pas R_7 dans R_2 . Supposons que cela soit le cas, alors par hypothèse, on a venant de la case en haut à droite que

$$zy - x \in s$$

Comme par hypothèse également $x \in L^+$ et $z \in L^+$, cela implique que $y > 0$. Alors en ajoutant ceci à l'hypothèse $(xy - z) \in L^-$, cela donne que

$$y(xy - z) - x \in L^-.$$

ce qui donne une contradiction.

Le même raisonnement permet de démontrer que T n'envoie pas R_8 dans R_1 , R_9 dans R_1 , R_{10} dans R_2 .

A partir de toutes ces possibilités et restrictions sont obtenus le graphe. A ce stade, nous parlons d'action à priori puisque rien n'empêche de supposer que d'autres restrictions puissent exister. En vérité cela ne sera pas le cas et nous montrerons par la suite que toutes les flèches restantes sont justifiées lors des calculs à venir sur les images de R_V par T et T^{-1} .

□

A partir de ce graphe, on peut définir une matrice A de taille 10×10 avec $A_{ij} = 1$ s'il y'a une connexion $i \rightarrow j$ dans le graphe, $A_{ij} = 0$ sinon. Cela donne,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 63. Pour $V > 4$, les régions $R_1, \dots, R_{10}$ sont fermées et disjointes, et $A_{ij} = 0$ implique $T(R_i) \cap R_j = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Nous remettons à plus loin les calculs qui montrent que $A_{ij} = 0$ implique $T(R_i) \cap R_j = \emptyset$. Lors des calculs, nous montrerons d'une part que ces ensembles sont non-vides, mais nous caractériserons leurs formes ainsi que leurs localisations. Le seul point litigieux qui nous reste à justifier dans ce lemme est le caractère disjoint. A proprement parler, ce n'est pas le cas, en l'état actuel de la définition de R_V . En effet, les bordures de R_7 et R_3 coïncident sur la ligne $x = 2$. De la même façon, un des bords de R_{10} coïncident avec celui de R_3 . Cependant, on peut remplacer R_3 par $R_3 \cap T(R_1) \cap T^{-1}(R_2)$, par exemple, sans que cela ne change quoi que ce soit à la preuve. La nouvelle définition de R_3 donne que " R_3 " est maintenant disjoint de R_7 et R_{10} . La preuve de ceci viendra des calculs précis sur les images par T et T^{-1} qui sont à venir. Ces calculs nous dirons notamment que cette autre définition est un fermé. Le même changement pour R_4 finit la preuve. □

Nous introduisons maintenant quelques définitions de dynamique symbolique. Étant donné un "alphabet" $\{1, \dots, m\}$ de m symboles, on définit l'ensemble Σ_m des suites bi-infinies de symboles par $\Sigma_m = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \{1, \dots, m\}$. Avec $\{1, \dots, m\}$ équipé de la topologie discrète et Σ_m de la topologie produit, Σ_m est appelé un "shift space" et est homéomorphe à un ensemble de Cantor. On définit le shift $S : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ par $S(u)_n = u_{n+1}$, où u_n est le n -ème symbole de la suite u .

1. DÉFINITION DU MODÈLE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit la matrice A de taille 10×10 définie plus haut. On définit $\Sigma(A)$ par

$$\Sigma(A) = \{u \in \Sigma_{10} \mid A_{u_i u_{i+1}} = 1 \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}\}$$

et le shift associé $S_A = S|_{\Sigma(A)}$. Maintenant considérant l'action de T_V sur R_V , notre objectif est de conjuguer le shift S_A et T_V , c'est à dire qu'on doit construire une application $g : \Sigma(A) \rightarrow R_V$ telle que $goS_A = T_Vog$.

On définit l'application g comme suit. Pour $u \in \Sigma(A)$, on définit les ensembles V_{u+} et H_{u-} par

$$V_{u+} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{u_0 u_1 \dots u_n} \text{ et } H_{u-} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_{u_0 u_{-1} \dots u_{-n}},$$

où

$$V_{u_0 u_1 \dots u_n} = R_{u_0} \bigcap T^{-1} R_{u_1} \bigcap \dots \bigcap T^{-n} R_{u_n}$$

et

$$H_{u_0 u_{-1} \dots u_{-n}} = R_{u_0} \bigcap T^1 R_{u_{-1}} \bigcap \dots \bigcap T^n R_{u_{-n}}.$$

Alors l'application g est définie par $g(u) = V_{u+} \cap H_{u-}$.

C'est une conséquence immédiate de cette construction que $goS_A = T_Vog$. Le problème qui reste est de montrer que l'application g est bien définie, c'est à dire que $g(u)$ correspond à un unique point de R_V et est continue. Dans cette optique, nous préciserons la forme et nous donnerons des bornes sur les tailles des ensembles $V_{u_0 u_1 \dots u_n}$ et $H_{u_0 u_{-1} \dots u_{-n}}$.

Pour préciser la forme, nous introduisons quelques concepts géométriques.

Définition 64. Soit $I^2 = [a, b] \times [a, b]$ un carré de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mu \in]0, 1[$, on appelle une courbe de I^2 une courbe horizontale si elle est le graphe $\text{gr}(u)$, d'une fonction continue $u : I \mapsto I$ satisfaisant $|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2|$ pour tout x_1, x_2 dans I . Si on a deux courbes horizontales telles que $u_1(x) < u_2(x)$ pour tout x dans I , alors on appelle l'ensemble J défini par

$$J = \{(x, y) \in I^2 \mid x \in I, u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

une bande horizontale de diamètre $d(J) = \max_{x \in I} |u_2(x) - u_1(x)|$. Les bandes verticales sont définies de la même façon.

Dans la suite, et notamment le théorème suivant, nous utiliserons ces concepts dans le système de coordonnées x - z lorsque l'on considérera des bandes appartenant aux ensembles R_1 ou R_2 et dans le système de coordonnées y - z pour des bandes horizontales ou verticales appartenant à R_5 ou R_6 .

Théorème 65. Pour V assez grand fixé et $u_0 \in \{1, 2, 5, 6\}$, il existe $\nu \in]0, 1[$ tel que $V_{u_0 u_1 \dots u_n}$ (respectivement $H_{u_0 u_{-1} \dots u_{-n}}$) est une bande verticale (respectivement horizontale) de diamètre inférieur à ν^n , à la condition que $A_{u_i u_{i+1}} = 1$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$. De plus si $A_{u_i u_{i+1}} = 0$ pour un i donné, alors $V_{u_0 u_1 \dots u_n}$ et $H_{u_0 u_{-1} \dots u_{-n}}$ sont vides.

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'il montre que l'application g est bien définie. Nous expliquons brièvement les idées qui vont impliquer le résultat qui nous intéresse. Chaque suite (en n) de bandes verticales $V_{u_0 u_1 \dots u_n}$ est une suite de bandes incluses les unes dans les autres et dont le diamètre tend vers zéro avec n . Il est très simple de se convaincre qu'à la limite, chaque codage valide donne une courbe verticale. De même, on peut associer une courbe horizontale à la suite infinie de bandes horizontales. Ces deux courbes se coupent en un point unique. Ceci nous permet d'associer à chaque suite bi-infinie valide, un unique point de la façon décrite par l'application g .

La structure hyperbolique est obtenue dans ce schéma de manière constructive. Nous expliquons là encore brièvement l'idée de la construction. A chaque point de l'ensemble de Cantor correspond une suite bi-infinie. A ce codage correspond une courbe horizontale et une courbe verticale. Il est alors possible de voir que les vecteurs tangents de ces deux courbes au point satisfont aux assertions et définissent la structure hyperbolique pour cet ensemble.

2. PLAN DE LA PREUVE

Corollaire 66. *Pour V assez grand fixé, l'application g est bien définie, satisfait $goS_A = T_Vog$ et est un homéomorphisme sur Ω_V . De plus, Ω_V possède une structure hyperbolique, et est homéomorphe à un ensemble de Cantor.*

DÉMONSTRATION. Nous allons maintenant montrer le théorème 65. Pour cela on va définir une nouvelle application qui va simplifier l'écriture de la dynamique de T . L'idée est la suivante, dans le graphe plutôt que de regarder les flèches une par une, on considère les chemins qui vont et qui viennent de R_1, R_2, R_5 et R_6 . Ils n'existent pas de parcours infini sur le graphe qui ne passent pas une infinité de fois par au moins une de ces quatre parties (ce qui n'est pas le cas des autres). On veut donc coder par bloc, il nous faudra 16 blocs pour coder entièrement l'action décrite dans le graphe de T et autant de symboles pour sa dynamique symbolique associée. Nous aurions pu à ce stade, numéroter chaque blocs, de 1 à 16 par exemple. Le nom des symboles n'ayant aucune importance et dans un souci de simplicité et de cohérence avec les notations utilisées jusqu'à présent, nous ne le ferons pas. Nous gardons la numérotation associée à notre partition de S_V . Nous précisons maintenant ces idées.

On considère une application ϕ définie sur $\bigcup_{u \in B_V} V_u$ où

$$B_V = \{24, 17, 110, 13, 28, 29, 110_5, 29_5, 28_6, 17_6, 5_1, 5_2, 5_6, 6_1, 6_2, 6_5\}$$

On définit maintenant également la base de blocs pour les bandes horizontales

$$B_H = \{14, 17, 110, 23, 28, 29, 510, 59, 68, 67, 1_5, 2_5, 6_5, 1_6, 2_6, 5_6\}$$

On définit ϕ comme ceci :

$$\phi(x) = \begin{cases} T_V & \text{si } x \in V_i, i \in \{5_1, 5_2, 5_6, 6_1, 6_2, 6_5\} \\ T_V^2 & \text{si } x \in V_i, i \in \{24, 17, 110, 13, 28, 29, 110_5, 29_5, 28_6, 17_6\} \end{cases}$$

L'avantage d'étudier ϕ à la place de T_V est que l'on considère uniquement des bandes verticales des régions R_1, R_2, R_5 et R_6 . Ceci va nous permettre d'appliquer plus simplement les concepts géométriques que nous avons rappelés plus haut. Dans les régions R_1, R_2 , l'étude des bandes horizontales (et verticales) se fera dans le système de coordonnées $x - z$ qui est adapté (dans un sens que nous préciserons plus tard), pour R_5 et R_6 il se fera dans les coordonnées $y - z$ pour les mêmes raisons. Il faut noter que, comme promis, toute la dynamique de T_V est incluse dans celle de ϕ . Pour ce qui est de la notation des bases B_V et B_H , les termes en indice sont là pour éliminer toute ambiguïté, ainsi par définition, $H_{1_5} = R_1 \cap T_V R_5$. L'élément en indice indique juste par quel élément sera suivi le bloc. Si cela n'est pas indispensable pour définir le codage, cela nous sera utile pour étudier la taille des bandes.

S'il n'y a aucun indice, c'est qu'il n'y a pas d'ambiguïté (voir le graphe), par exemple par définition $H_{17} = R_1 \cap T_V R_7$ mais il est possible d'ajouter $H_{17} = R_1 \cap T_V R_7 \cap T_V^2 R_1$.

Maintenant que toutes les notations sont mises en place, donnons le plan de la preuve.

2. Plan de la preuve

Nous allons vérifier les 5 points suivants :

- (a) Pour tout $i \in B_H$, H_i est une bande horizontale.
- (b) Pour tout $i \in B_V$, V_i est une bande verticale.
- (c) Si $i \in B_H$ et $j \in B_V$ commencent par le même chiffre alors $H_i \cap V_j \neq \emptyset$, sinon l'intersection est trivialement vide.
- (d) L'application ϕ envoie V_t difféomorphiquement sur H_s où t et s sont respectivement le n -ème élément des bases B_V et B_H respectivement. Plus précisément, on a

$$(2.1) \quad \phi(V_t) = H_s$$

et ϕ envoie le bord vertical (resp. horizontal) de V_t sur le bord vertical (resp. horizontal) de H_s .

3. BANDES HORIZONTALES

(e) Si on note (ξ, ζ, η) un élément du plan tangent à S_V au point (x, y, z) , on définit les cônes suivants :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} S_1^+ &= \{|\eta| \leq \frac{1}{3}|\xi|\} \\ S_2^+ &= \{|\eta| \leq \frac{1}{3}|\zeta|\} \end{aligned}$$

avec

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \pi S_1^+ &= (R_1 \cup R_2) \cap \left(\bigcup_{i \in B_V} V_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in B_H} H_j \right) \\ \pi S_2^+ &= (R_5 \cup R_6) \cap \left(\bigcup_{i \in B_V} V_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in B_H} H_j \right), \end{aligned}$$

où π est la projection canonique des cônes sur leurs espaces de définition. De tels cônes sont envoyés par $d\phi$ sur eux même, i.e.

$$(2.4) \quad d\phi(S_1^+ \cup S_2^+) \subset S_1^+ \cup S_2^+.$$

De plus, si $(\xi_0, \zeta_0, \eta_0) \in S_1^+ \cup S_2^+$ et (ξ_1, ζ_1, η_1) est son image par $d\phi$, alors

$$(2.5) \quad \begin{cases} |\xi_1| \geq 3|\xi_0| & \text{si } (\xi_0, \zeta_0, \eta_0) \in S_1^+, (\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in S_1^+ \\ |\zeta_1| \geq 3|\xi_0| & \text{si } (\xi_0, \zeta_0, \eta_0) \in S_1^+, (\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in S_2^+ \\ |\xi_1| \geq 3|\zeta_0| & \text{si } (\xi_0, \zeta_0, \eta_0) \in S_2^+, (\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in S_1^+ \\ |\zeta_1| \geq 3|\zeta_0| & \text{si } (\xi_0, \zeta_0, \eta_0) \in S_2^+, (\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in S_2^+ \end{cases}$$

De la même façon, on définit les cônes

$$(2.6) \quad \begin{aligned} S_1^- &= \{|\xi| \leq \frac{1}{3}|\eta|\} \\ S_2^- &= \{|\zeta| \leq \frac{1}{3}|\eta|\} \end{aligned}$$

respectivement sur les mêmes espaces que S_1^+ et S_2^+ (i.e. $\pi S_{1,2}^+ = \pi S_{1,2}^-$), on a

$$(2.7) \quad d\phi^{-1}(S_1^- \cup S_2^-) \subset S_1^- \cup S_2^-.$$

De plus si $(\xi_0, \zeta_0, \eta_0) \in S_1^- \cup S_2^-$ et (ξ_1, ζ_1, η_1) est son image par $d\phi^{-1}$, alors

$$(2.8) \quad |\eta_1| \geq 3|\eta_0|.$$

Tous ces points impliquent le théorème 65. Il s'agit là de la méthode constructive classique pour montrer ce genre de situation. Il est important de noter que l'on peut remplacer la constante 3 par n'importe quelle autre constante strictement plus grande que 1. Le lecteur intéressé pourra par exemple consulter [37].

3. Bandes Horizontales

Dans cette partie, nous produisons les calculs pour les 16 symboles de la base B_H . La méthode est toujours la même, on paramètre le bord de l'ensemble de départ, on regarde son image par ϕ et l'intersection de cette courbe paramétrée avec les différentes parties de R_V . Cela nous amène à traiter ces calculs selon un ordre différent de celui de la base.

Calculs pour $H_{17}, H_{110}, H_{23}, H_{510}, H_{67}$. Nous commençons avec toutes les bandes qui nous seront données par l'image des bords de R_1 par T^2 . Ainsi, on rappelle que

$$H_{17} = R_1 \cap TR_7 \cap T^2 R_1$$

$$H_{110} = R_1 \cap TR_{10} \cap T^2 R_1$$

$$H_{23} = R_2 \cap TR_3 \cap T^2 R_1$$

$$H_{510} = R_5 \cap TR_{10} \cap T^2 R_1$$

$$H_{67} = R_6 \cap TR_7 \cap T^2 R_1$$

On paramètre le bord haut de R_1 par la courbe suivante $B^+(E) = \{E, V+E, 2\}$ avec $E \in [-2, 2]$.

3. BANDES HORIZONTALES

Il est facile de vérifier que $B^+(E)$ est bien une courbe de S_V décrivant le bord de R_1 . La surface S_V ayant beaucoup de symétrie, tous les paramétrages que nous utiliserons seront de cette forme, aux signes et permutations près.

On obtient pour les images

$$TB^+(E) = \{E((V+E)^2 - 1) - 2(V+E), E(V+E) - 2, V+E\},$$

$$T^2B^+(E) = \{x(E), y(E), z(E)\}$$

avec

$$x(E) = (E((V+E)^2 - 1) - 2(V+E))((E(V+E) - 2)^2 - 1) - (V+E)(E(V+E) - 2),$$

$$y(E) = (E((V+E)^2 - 1) - 2(V+E))(E(V+E) - 2) - V - E,$$

$$z(E) = E(V+E) - 2.$$

On peut réécrire $x(E)$ de la façon suivante en fonction de $z(E)$:

$$x(E) = (z(E)(V+E) - E)(z(E)^2 - 2) - E.$$

Notre objectif à partir d'ici est double. D'une part, nous voulons montrer que chacun des symboles correspond à une unique bande horizontale, mais d'autre part, nous voulons des estimations précises de leurs localisations. En d'autre terme, on veut connaître un encadrement précis de la variable z pour ces cinq bandes. Ces estimations nous seront utiles pour la partie (e) de la preuve.

Les calculs que nous faisons exploitent essentiellement la relation entre $x(E)$ et $z(E)$. Ils règlent à la fois, l'existence des bandes et l'encadrement pour z . De fait, on montre que pour un encadrement de z donné, la courbe traverse bien la partie de la surface de Markov prévue.

Calculs pour H_{17} . On commence par H_{17} . Nous allons montrer son existence d'une part mais aussi que pour $(x, y, z) \in H_{17}$, on a $z \in [\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$.

On commence par le petit lemme suivant :

Lemme 67. Si on a $z(E) \in [\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$ alors $E > 0$.

DÉMONSTRATION. Comme $V > 4$ et $|E| \leq 2$, l'expression $E(V+E)$ est du signe de EV . Par hypothèse, on a $E(V+E) > 0$ et $V > 0$, d'où $E > 0$. $\square$

Avec ceci, on peut montrer que cette portion de courbe traverse R_1 .

On a d'une part,

$$\bullet z(E) = \sqrt{2} + \frac{1}{V} \Rightarrow x(E) \geq 2$$

$$x(E) \geq (\sqrt{2}V + 1)\left(\frac{2\sqrt{2}}{V} + \frac{1}{V^2}\right) - E$$

$$\geq 4 - E \geq 2$$

Et d'autre part,

$$\bullet z(E) = \sqrt{2} - \frac{1}{V} \Rightarrow x(E) \leq -2$$

$$x(E) \leq (\sqrt{2}V - 1)\left(\frac{-2\sqrt{2}}{V} + \frac{1}{V^2}\right) - E$$

$$\leq -4 - E \leq -2$$

En utilisant le fait que E est positif et $V > 4$.

Il est de plus facile de voir en écrivant

$$y(E) = z(E)((V+E)z(E) - E) - V - E$$

que pour $z(E) \in [\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$, $y(E)$ appartient à L^+ et donc $T^2B^+(E)$ intersecte R_1 .

3. BANDES HORIZONTALES

De la même façon, il est facile de vérifier que $TB^+(E)$ intersecte R_7 pour $z(E) \in [\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$.

Il est d'autre part facile de vérifier que cette courbe est une courbe horizontale puisque il est possible de voir que $dx(E)/dz(E) < -1$ en utilisant $E > 0$, $z(E) \in [\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$ et V assez grand ($V \geq 20$ est suffisant par exemple).

On peut procéder de la même façon avec le bord bas $\{-E, E + V, -2\}$. On trouve alors pour le même intervalle en z une intersection avec R_1 . Il est alors possible de vérifier que les 2 courbes sont disjointes et que H_{17} est une bande horizontale. Nous n'allons pas procéder de cette façon. Il est également possible en utilisant les nombreuses symétries que possède la surface, d'exploiter les calculs sur le bord haut de R_1 pour obtenir immédiatement les mêmes résultats pour le bord inférieur. Nous développerons cet argument à la fin des calculs avec le bord haut de R_1 .

Calculs pour H_{110} . On utilise les mêmes expressions.

Cette fois l'on considère $z(E)$ appartenant à $[-\sqrt{2} - \frac{1}{V}, -\sqrt{2} + \frac{1}{V}]$.

On trouve facilement comme $z(E)$ est un polynôme de degré 2 en E que $E \in [0, 1/2]$.

On montre alors que

$$\bullet z(E) = -\sqrt{2} - \frac{1}{V} \Rightarrow x(E) \leq -2$$

$$\begin{aligned} x(E) &\leq (-\sqrt{2}V - 1)\left(\frac{+2\sqrt{2}}{V} + \frac{1}{V^2}\right) - E \\ &\leq -4 - E \leq -2. \end{aligned}$$

$$\bullet z(E) = -\sqrt{2} + \frac{1}{V} \Rightarrow x(E) \geq 2$$

$$\begin{aligned} x(E) &\geq (-\sqrt{2}(V + E) + 1 + \frac{E}{V} - E)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{V} + \frac{1}{V^2}\right) - E \\ &\geq 4 - \frac{3E\sqrt{(2)}}{V^2} - \frac{3\sqrt{(2)}}{V} - E \geq 2 \end{aligned}$$

, en utilisant $E \in [0, 1/2]$.

Une fois de plus, on vérifie simplement que pour $z(E) \in [-\sqrt{2} - \frac{1}{V}, -\sqrt{2} + \frac{1}{V}]$, $y(E)$ appartient à L^+ et donc $T^2B^+(E)$ intersecte bien R_1 .

De la même façon, il est facile de vérifier que $TB^+(E)$ intersecte R_{10} pour $z(E) \in [-\sqrt{2} - \frac{1}{V}, -\sqrt{2} + \frac{1}{V}]$.

Enfin il s'agit encore d'une courbe horizontale puisque $dx/dz(E) < -1$ pour les valeurs de $z(E)$, E considérées et $V > 20$.

Calculs pour H_{23} . Pour cette bande, on considère $z(E) \in [-\frac{2}{V}, +\frac{2}{V}]$.

$$\bullet z(E) = \frac{2}{V} \Rightarrow x(E) \leq -2$$

$$\begin{aligned} x(E) &\leq \left(2 + \frac{2E}{V} - E\right)\left(\frac{4}{V^2} - 2\right) - E \\ &\leq -4 + E - \frac{4E}{V} - \frac{4E}{V^2} + \frac{8}{V^2} + \frac{8E}{V^3} \leq -4 + E + \frac{8}{V^2} + \frac{8E}{V^3} \leq -2 \end{aligned}$$

en utilisant que $0 < E < \frac{3}{V}$ et $V > 4$.

$$\bullet z(E) = -\frac{2}{V} \Rightarrow x(E) \geq 2$$

$$\begin{aligned} x(E) &\geq \left(-2 - \frac{2E}{V} - E\right)\left(\frac{4}{V^2} - 2\right) - E \\ &\geq 4 + E + \frac{4E}{V} - \frac{4E}{V^2} - \frac{8}{V^2} - \frac{8E}{V^3} \geq 2 \end{aligned}$$

en utilisant que $E > 0$.

3. BANDES HORIZONTALES

Une fois de plus, on vérifie simplement que pour $z(E) \in [-\frac{2}{V}, +\frac{2}{V}]$, $y(E)$ appartient à L^- et donc $T^2B^+(E)$ intersecte R_2 .

De la même façon, il est facile de vérifier que $TB^+(E)$ intersecte R_3 pour $z(E) \in [-\frac{2}{V}, +\frac{2}{V}]$.

Enfin il s'agit encore d'une courbe horizontale puisque $dx/dz(E) < -V$ pour les valeurs de $z(E)$ considérées.

Calculs pour H_{510} . Cette fois l'on considère $z(E)$ appartenant à $[-1 - \frac{2}{V}, -1 + \frac{2}{V}]$.

Autre différence avec les trois premiers calculs, H_{510} est une bande de R_5 et donc on se place dans le système de coordonnées $y - z$.

Ainsi, on montre

$$\bullet z(E) = -1 + \frac{2}{V} \Rightarrow y(E) \leq -2$$

$$\begin{aligned} y(E) &\leq -4 + E + \frac{4}{V} - \frac{4E}{V} + \frac{4E}{V^2} \\ &\leq -2 \end{aligned}$$

$$\text{avec } 0 \leq E \leq \frac{1}{2}.$$

$$\bullet z(E) = -1 - \frac{2}{V} \Rightarrow y(E) \geq 2$$

$$\begin{aligned} y(E) &\geq 4 + \frac{4}{V} + E \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Une fois de plus, on vérifie simplement que pour $z(E) \in [-1 - \frac{2}{V}, -1 + \frac{2}{V}]$, $x(E)$ appartient à L^+ et donc $T^2B^+(E)$ intersecte R_5 .

De la même façon, il est facile de vérifier que $TB^+(E)$ intersecte R_{10} pour $z(E) \in [-1 - \frac{2}{V}, -1 + \frac{2}{V}]$.

Enfin il s'agit encore d'une courbe horizontale puisque $dy/dz(E) \leq -V$ pour les valeurs de $z(E)$ considérées.

Calculs pour H_{67} . Cette fois, on considère $z(E)$ appartenant à $[1 - \frac{2}{V}, 1 + \frac{2}{V}]$.

$$\bullet z(E) = 1 + \frac{2}{V} \Rightarrow y(E) \geq 2$$

$$\begin{aligned} y(E) &\geq 4 - E + \frac{4E}{V^2} + \frac{4}{V} + \frac{2E}{V} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

$$\bullet z(E) = 1 - \frac{2}{V} \Rightarrow y(E) \leq -2$$

$$\begin{aligned} y(E) &\leq -4 - E + \frac{4}{V} - \frac{2E}{V} + \frac{4E}{V^2} \\ &\leq -2 \end{aligned}$$

en utilisant $E \geq 0$.

Une fois de plus, on vérifie simplement que pour $z(E) \in [1 - \frac{2}{V}, 1 + \frac{2}{V}]$, $x(E)$ appartient à L^- et donc T^2B^+ intersecte bien R_6 .

De la même façon, il est facile de vérifier que $TB^+(E)$ intersecte R_7 pour $z(E) \in [1 - \frac{2}{V}, 1 + \frac{2}{V}]$.

Enfin il s'agit encore d'une courbe horizontale puisque $dy/dz(E) > V$ pour les valeurs de $z(E)$ considérées.

Pour conclure, il est possible de vérifier qu'aucune autre intersection ne se produit hormis les 5 décrites dans les calculs précédents.

3. BANDES HORIZONTALES

Nous expliquons maintenant le raisonnement qui permet d'obtenir l'image du bord inférieur avec le calcul du bord supérieur de R_1 .

Lemme 68. *L'application T et la réflexion d'axe y , $S_y(x, y, z) = (-x, y, -z)$ vérifie la relation suivante*

$$T \circ S_y = S_z \circ T$$

avec $S_z(x, y, z) = (-x, -y, z)$

De plus, l'application T^2 et la réflexion d'axe y commute. On a

$$T^2 \circ S_y = S_y \circ T^2.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire

$$T(-x, y, -z) = (-x(y^2 - 1) + zy, -xy + z, y).$$

Pour la deuxième relation, on remarquera simplement que l'on a

$$(3.1) \quad T \circ S_z = S_y \circ T.$$

En composant ces deux relations, on obtient la relation pour T^2 . □

Nous allons voir maintenant que le calcul du bord bas revient au calcul que nous avons fait sur le bord haut. Première remarque, si on note B^- le bord bas, son paramétrage donne la courbe $B^-(E) = \{-E, V + E, -2\}$. On a $B^-(E) = S_y B^+(E)$.

Nous détaillons le processus pour H_{17} . On veut que $TB^-(E) \in R_7$ et que $T^2 B^-(E)$ traverse R_1 horizontalement. On a par le lemme 68 que

$$(3.2) \quad T^2 B^-(E) = S_y T^2 B^+(E).$$

On a d'autre part que

$$TB^-(E) = S_z TB^+(E).$$

Ainsi $TB^-(E) \in R_7$ est équivalent à $TB^+(E) \in R_{10}$. Il faut aussi remarquer que $S_y T^2 B^+(E)$ traverse R_1 si et seulement si $T^2 B^+(E)$ traverse R_1 . Or d'après nos calculs précédent, $T^2 B^+(E)$ traverse une unique fois R_1 en vérifiant l'hypothèse supplémentaire $TB^+(E) \in R_{10}$. Il s'agit du calcul pour H_{110} dont la courbe horizontale vérifie

$$z(E) \in [-\sqrt{2} - \frac{1}{V}, -\sqrt{2} + \frac{1}{V}].$$

Cela implique avec (3.2) que l'image du bord bas par T^2 coupe horizontalement R_1 pour les valeurs de z comprise dans l'intervalle $[\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$. On obtient au passage le même intervalle que pour le bord haut. On a déjà vérifié qu'il s'agissait bien du bord de H_{17} . De plus, ces symétries préservent le caractère horizontal.

A partir de là, on peut conclure que H_{17} est une bande horizontale incluse dans R_1 pour les valeurs de z comprise dans l'intervalle $[\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$ et donc de diamètre au plus $\frac{2}{V}$.

Ainsi le calcul du bord de H_{17} provenant du bord bas de R_1 revient à calculer le bord de H_{110} provenant du bord haut de R_1 . De la même façon, les calculs pour H_{110} , H_{23} , H_{67} , H_{510} sont respectivement associés aux calculs précédents pour H_{17} , H_{23} , H_{510} , H_{67} .

Calculs pour H_{14} , H_{29} , H_{28} , H_{59} , H_{68} . Ces cinq cas sont regroupés ensemble car ils résultent de l'image par T^2 de R_2 . Nous pourrions produire le même genre de calcul pour $T^2 R_2$ et d'obtenir ce qu'on veut mais une fois encore on peut se servir de calculs précédents pour conclure plus rapidement par un argument de symétrie.

Lemme 69. *On a la relation suivante*

$$T^2 \circ S_z = S_z \circ T^2.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'exploiter la relation (3.2) avec la relation (3.1). □

3. BANDES HORIZONTALES

Nous détaillons cet argument pour H_{29} , les autres étant strictement identiques.

Le bord haut de R_2 peut s'écrire $B_2^+(E) = \{-E, -(V + E), 2\}$ avec $E \in [-2, 2]$. Comme on a $B_2^+(E) = S_z B^+(E)$, le lemme 69 donne que $T^2 B_2^+(E) = S_z T^2 B^+(E)$ et on a $T B_2^+(E) = S_y T B^+(E)$. On cherche l'intersection entre la courbe $T^2 B_2^+(E)$ et R_2 avec en plus $T B_2^+(E) \in R_9$. Cela se produit uniquement si $T^2 B^+(E)$ traverse R_1 et $T B^+(E) \in R_7$. Cela correspond au calcul pour H_{17} . On en déduit que le bord haut de H_{29} consiste en une seule courbe horizontale dont la coordonnée z varie dans l'intervalle $[\sqrt{2} - \frac{1}{V}, \sqrt{2} + \frac{1}{V}]$.

Ce même argument permet de déduire des calculs qui précèdent l'existence et la localisation de $H_{14}, H_{29}, H_{28}, H_{59}, H_{68}$. Précisément, le bord haut de $H_{29}, H_{28}, H_{14}, H_{68}, H_{59}$ respectivement est associé au bord haut de $H_{17}, H_{110}, H_{23}, H_{510}, H_{67}$ respectivement. On conserve les mêmes estimations.

Il est possible ensuite d'obtenir le bord bas en utilisant son argument de symétrie préféré (les deux marchent). Tout ceci permet de conclure que $H_{14}, H_{29}, H_{28}, H_{59}, H_{68}$ sont des bandes horizontales et d'avoir de bonnes estimations de leurs localisations.

Calculs pour H_{15}, H_{25}, H_{65} . Les bandes codées par $1_5, 2_5, 6_5$ sont issues de l'image par T de R_5 .

On paramètre le bord haut de R_5 par $B_5^+(E) = \{V + E, E, 2\}$ avec $E \in [-2, 2]$. On obtient pour $T B_5^+(E) = \{x(E), y(E), E\}$ avec

$$x(E) = E((E + V)E - 2) - E - V,$$

$$y(E) = (E + V)E - 2.$$

Les calculs sont beaucoup plus simples puisque les polynômes en E que nous regardons sont au plus de degré 3 (contre 7 précédemment).

Calcul de H_{15} . On vérifie donc très simplement que

$$\bullet E = 1 + \frac{2}{V} \Rightarrow x(E) \geq 2$$

et que

$$\bullet E = 1 - \frac{2}{V} \Rightarrow x(E) \leq -2$$

Pour cet intervalle de valeurs, on trouve que $y(E) \in L^+$. On intersecte donc bien R_1 .

$dx(E)/dE = 3E^2 + 2EV - 3 > V$ pour $E \in [1 - \frac{2}{V}, 1 + \frac{2}{V}]$, on a donc bien une courbe horizontale.

Calcul de H_{25} . Pour H_{25} les calculs sont très similaires. On vérifie très simplement que

$$\bullet E = -1 - \frac{2}{V} \Rightarrow x(E) \geq 2$$

et que

$$\bullet E = -1 + \frac{2}{V} \Rightarrow x(E) \leq -2$$

Pour cet intervalle de valeurs, on trouve que $y(E) \in L^-$. On intersecte donc bien R_2 .

$dx(E)/dE = 3E^2 + 2EV - 3 < -V$ pour $E \in [-1 - \frac{2}{V}, -1 + \frac{2}{V}]$, on a donc bien une courbe horizontale.

Calcul de H_{65} . Le calcul de H_{65} est encore plus simple car on veut observer cette fois une bande horizontale mais en projection y-z, ce qui nous amène à faire des calculs sur un polynôme de degré 2. Il est alors facile de calculer explicitement les valeurs pour lesquelles l'image de R_5 par T intersecte le bord de R_6 . On trouve ainsi une bande horizontale avec $E \in [\frac{V - \sqrt{V^2 + 16}}{2}, \frac{\sqrt{V^2 + 16} - V}{2}]$.

Pour l'image du bord bas, on applique une fois encore un argument de symétrie.

Lemme 70. On note $S_x(x, y, z) = (x, -y, -z)$. On a la relation suivante :

$$T \circ S_x = S_x \circ T$$

4. BANDES VERTICALES

Le bord bas de R_5 vérifie la relation $B_5^-(E) = S_x B_5^+(E)$. On a donc $T B_5^-(E) = S_x T B_5^+(E)$ par le lemme 70. La courbe $T B_5^-(E)$ coupe donc R_1 (resp. R_2, R_6) quand $T B_5^+(E)$ coupe R_2 (resp. R_1, R_6). On obtient donc l'intersection et l'estimation pour le bord bas de H_{1_5} (resp. H_{2_5}, H_{6_5}) avec l'intersection et l'estimation du bord haut de H_{2_5} (resp. H_{1_5}, H_{6_5}). La symétrie S_x préserve le caractère horizontal de la courbe et on conclut que $H_{1_5}, H_{2_5}, H_{6_5}$ sont des bandes horizontales.

Calculs pour $H_{1_6}, H_{2_6}, H_{5_6}$. Encore une fois on peut tout déduire des calculs précédents.

Le bord haut de R_6 s'écrit $B_6^+(E) = \{-V - E, -E, 2\} = S_z B_5^+(E)$. En exploitant la relation (3.1), on obtient que l'image par $T B_6^+(E)$ traverse R_1 (resp. R_2, R_5) quand $T B_5^+(E)$ traverse R_1 (resp. R_2, R_6). Les estimations obtenues pour $H_{1_6}, H_{2_6}, H_{5_6}$ sont respectivement associées à l'inverse de celles obtenues pour $H_{1_5}, H_{2_5}, H_{6_5}$. L'image et la localisation du bord bas pour $H_{1_6}, H_{2_6}, H_{5_6}$ est obtenue de la même façon que dans la section précédente.

Il est facile de voir d'après nos estimations que toutes les bandes horizontales sont disjointes pour $V \geq 10$. Il est également possible de vérifier qu'il n'y a pas d'autres bandes horizontales.

4. Bandes Verticales

Contrairement à ce qu'on pourrait penser de prime abord, T^{-2} ne donne pas du tout le même genre d'équation que T^2 . Désormais pour trouver les courbes verticales, ils nous faut trouver les zéros de polynômes de degré 3 ou 4. Pour les bandes verticales nous fournissons une analyse beaucoup moins fine que pour les bandes horizontales. Nous nous contenterons de démontrer leurs existences sans calculer précisément les intervalles dans lesquelles elles sont situées. Là encore les nombreuses symétries restent valides avec T^{-1} et permettent de réduire les 32 courbes à calculer à 8 cas bien choisis. On traitera ainsi en détails le bord gauche de ces huit cas : $V_{5_1}, V_{6_1}, V_{17}, V_{110}, V_{24}, V_{6_5}, V_{110_5}, V_{28_5}$.

Les cinq premiers correspondent à l'image par T^{-1} ou T^{-2} de R_1 , les trois derniers à l'image par T^{-1} ou T^{-2} de R_5 . Il nous suffira de faire le calcul sur le bord gauche uniquement.

On rappelle l'expression de T^{-1} :

$$T^{-1}(x, y, z) = (yz - x, z, y(z^2 - 1) - xz)$$

Si l'on commence par le bord gauche de R_1 paramétré par $B^l(E) = \{-2, V + E, -E\}$ avec $E \in [-2, 2]$.

On obtient

$$T^{-1} B^l(E) = \{-E(E + V) + 2, -E, (V + E)(E^2 - 1) - 2E\}$$

Calculs pour V_{5_1} et V_{6_1} . On commence par deux cas simples V_{5_1} et V_{6_1} .

Comme ce sont des bandes de R_5 et R_6 on cherche des bandes verticales en projections $y - z$. Il est facile pour V_{6_1} de voir si on note $z(E) = (V + E)(E^2 - 1) - 2E$ que

- $z(1) = -2$
- $z(1 + 2/V) = 2 + \frac{4}{V} + \frac{3}{V^2} + \frac{8}{V^3}$

Il est facile de vérifier que pour $E \in [1, 1 + 2/V]$, $x(E) \in L^-$ et donc la courbe $T^{-1} B^l(E)$ a une intersection avec R_6 . Il est d'autre part possible de vérifier le caractère vertical avec $\frac{dz}{dy}(E) < -V$ pour $E \in [1, 1 + 2/V]$.

Pour V_{5_1} , on obtient de la même façon,

- $z(-1) = 2$
- $z(-1 + 3/V) = -4 + \frac{9}{V} - \frac{27}{V^2} + \frac{27}{V^3} < -2$

4. BANDES VERTICALES

Il est facile de vérifier que pour $E \in [-1, -1 + 3/V]$, $x(E) \in L^+$ et donc la courbe $T^{-1}B^l(E)$ a une intersection avec R_5 . Il est d'autre part possible de vérifier le caractère vertical avec $\frac{dz}{dy}(E) > V$ pour $E \in [-1, -1 + 3/V]$.

Calculs pour V_{17}, V_{110}, V_{24} . Pour V_{17}, V_{110}, V_{24} , il nous faut calculer l'image du bord gauche de R_1 par T^{-2} .

Cela donne $T^{-2}B^l(E) = \{x(E), y(E), z(E)\}$ avec

$$x(E) = -E(V + E)(E^2 - 2) + 2E^2 - 2,$$

$$y(E) = (V + E)(E^2 - 1) - 2E,$$

$$z(E) = x(E)y(E) + E.$$

Les polynômes étant plus compliqués, nous nous contentons comme annoncé d'une analyse moins précise.

Calculs pour V_{110} . On obtient

- $x(\sqrt{2}) = 2, z(\sqrt{2}) > V$
- $x(\sqrt{2} + \frac{1}{V} - \frac{2}{V^2}) \in [-2, -0.4], z(\sqrt{2} + \frac{1}{V} - \frac{2}{V^2}) < -2$

On vérifie que $y(E) \in L^+$ ce qui implique une intersection de la courbe avec R_1 . On vérifie le caractère verticale de la courbe sur cet intervalle de paramètre. Précisément, on a pour $V \geq 4$ et $E \in [\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{V} - \frac{2}{V^2}] : \frac{dz}{dx}(E) \leq -50$. Il est facile de voir que $T^{-1}B^l(E) \in R_{10}$ et qu'il s'agit donc bien de V_{110} .

Calculs pour V_{17} . On obtient

- $x(-\sqrt{2}) = 2, z(-\sqrt{2}) > V$
- $x(-\sqrt{2} + \frac{1}{V} - \frac{1}{V^2}) \in [-2, -0.6], z(-\sqrt{2} + \frac{1}{V} - \frac{1}{V^2}) < -2$

On vérifie le caractère vertical de la courbe sur cet intervalle de paramètre. Précisément, on a pour $V \geq 13$ et $E \in [-\sqrt{2}, -\sqrt{2} + \frac{1}{V} - \frac{1}{V^2}] : \frac{dz}{dx}(E) \leq -1$.

On vérifie que $y(E) \in L^+$ ce qui implique une intersection de la courbe avec R_1 . Il est facile de voir que $T^{-1}B^l(E) \in R_7$ et qu'il s'agit donc d'une courbe définissant V_{17} .

Calculs pour V_{24} . Exceptionnellement, on peut pour ce cas simplement calculer les racines du polynôme $x(E)$ ce qui donne les résultats suivants :

- $x(0) = -2, z(0) = 2V$
- $x(\frac{\sqrt{V^2+8}-V}{2}) = 2, z(\frac{\sqrt{V^2+8}-V}{2}) < -V$

On vérifie le caractère verticale de la courbe sur cet intervalle de paramètre. Précisément, on a pour $V \geq 5$ et $E \in [0, \frac{\sqrt{V^2+8}-V}{2}] : \frac{dz}{dx}(E) \leq -1$.

On vérifie que $y(E) \in L^-$ ce qui implique une intersection de la courbe avec R_2 . Il est facile de voir qu'il s'agit bien de V_{24} .

Calculs pour $V_{65}, V_{1105}, V_{285}$. Passons maintenant aux bandes issues de R_5 . On paramètre le bord gauche par $B^g(E) = \{V + E, -2, -E\}$ avec $E \in [-2, 2]$.

Calculs pour V_{65} . Cela donne

$$T^{-1}B^g(E) = \{E - V, -E, -E^2 + VE + 2\}$$

Il est facile de vérifier que

- $z(0) = 2$
- $z(-\frac{\sqrt{V^2+8}-V}{2}) = -2$

et que donc la courbe possède une unique intersection qui est verticale dans R_6 .

5. INTERSECTION ET CORRESPONDANCE

Calculs pour V_{110_5}, V_{28_5} . Les calculs donnent

$$T^{-2}B^g(E) = \{x(E), y(E), z(E)\}$$

avec

$$x(E) = -E(-E^2 + VE + 2) - E + V,$$

$$y(E) = -E^2 + VE + 2,$$

$$z(E) = -E((-E^2 + VE + 2)^2 - 1) - (E - V)(-E^2 + VE + 2).$$

Pour V_{110_5} ,

$$\bullet x(1) = -2, z(1) = -2V + 1,$$

$$\bullet x(1 - 2/V) = 2 - \frac{4}{V} + \frac{12}{V^2} - \frac{8}{V^3}, z(1 - 2/V) > 2.$$

Pour $E \in [1 - 2/V, 1]$ et $V \geq 4$, on voit que $\frac{dz}{dx}(E) \geq 2$. Cela prouve l'existence d'une intersection avec R_1 et qu'il s'agit bien de V_{110_5} .

Pour V_{28_5} ,

$$\bullet x(-1) = 2,$$

$$\bullet z(-1) = 2V + 1,$$

$$\bullet x(-1 - 2/V + \frac{3}{V^2}) = -2 + \frac{2}{V} - \frac{19}{V^2} - \frac{9}{V^4} + \frac{54}{V^5} - \frac{27}{V^6} \in [-2, -1] \forall V \geq 4,$$

$$\bullet z(-1 - 2/V + \frac{3}{V^2}) < -2.$$

Pour $E \in [-1 - 2/V + \frac{3}{V^2}, -1]$ et $V \geq 5$, on voit que $\frac{dz}{dx}(E) \leq -1$. Cela prouve donc une intersection de la courbe avec R_2 et qu'il s'agit bien de V_{28_5} .

On peut déduire tout le reste avec ces calculs (bord droit, R_2, R_6) et des arguments de symétrie similaires à ceux de la section 3.

Toutes les bandes sont disjointes par bijectivité des applications T et T^2 .

5. Intersection et correspondance

Nous devons voir que ϕ envoie les bandes verticales sur les bandes horizontales. Plus précisément, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 71. Notons s le i ème élément de la base B_V et t le i ème élément de la base B_H , avec $i = 1 \dots 16$, alors

$$\phi(V_s) = H_t.$$

DÉMONSTRATION. Considérons par exemple, le premier élément de la base B_V , 24. Il est alors facile de voir que

$$\begin{aligned} \phi(V_{24}) &= T^2(R_2 \cap T^{-1}R_4 \cap T^{-2}R_1) \\ &= T^2R_2 \cap TR_4 \cap R_1 \\ &= H_{14} \end{aligned}$$

Le premier élément de la base B_H étant 14 cela conclut cet exemple. Les quinze autres éléments se vérifient tout à fait facilement de manière similaire. □

Il est de même clair d'après les calculs précédents que les bords verticaux (resp. horizontaux) des bandes verticales sont envoyés sur les bords verticaux (resp. horizontaux) des bandes horizontales.

Pour ce qui est des points concernant l'intersection, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 72. La projection $\pi_2|_{R_i} : (x, y, z) \mapsto (x, z)$ avec $i = 1$ ou 2 est inversible.

La projection $\pi_1|_{R_i} : (x, y, z) \mapsto (y, z)$ avec $i = 5$ ou 6 est inversible.

Ce lemme justifie les projections que nous avons choisi pour travailler. Il nous garantit que nous ne perdons pas d'information en projetant.

6. CÔNES POUR LES BANDES HORIZONTALES

DÉMONSTRATION. Supposons que le couple (x, z) soit fixé, il suffit d'écrire l'invariant et de voir que

$$y(x, z) = \frac{xz}{2} \pm \sqrt{V^2 + (2 - \frac{x^2}{2})(2 - \frac{z^2}{2})}.$$

Il y'a une unique solution dans R_1 et une autre unique solution dans R_2 . Ainsi la projection restreinte à l'un ou l'autre de ces deux ensembles est inversible. On obtient le même résultat en permutant x et y dans cette expression pour R_5 et R_6 avec π_1 . $\square$

Le deuxième lemme est un peu trivial mais nous l'énonçons tout de même afin de rendre le raisonnement clair.

Lemme 73. *Un courbe horizontale et une courbe verticale qui traversent de part en part un carré se rencontrent en un point unique.*

Cela implique que l'intersection des bandes horizontales et verticales commençant par le même symbole (c'est à dire située dans la même région) sont non vides (les autres étant trivialement vides). Le lemme 73 implique que l'intersection dans l'espace projeté adéquat est non vide. Le lemme 72 permet alors de conclure sur S_V notre surface plongée dans $\mathbb{R}^3$.

6. Cônes pour les bandes horizontales

Nous montrons que les propriétés souhaitées sur les cônes sont valides à partir du moment où l'on prend V assez grand. On commence par la partie la plus simple, celle en rapport avec les bandes horizontales.

Nous commençons par quelques faits et notations généraux.

Le plan tangent au point (x, y, z) est donné par $\{(\xi, \zeta, \eta), (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2\}$ avec $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ satisfaisant

$$(6.1) \quad (2x - yz)\xi + (2y - xz)\zeta + (2z - xy)\eta = 0.$$

On doit vérifier que les cônes

$$(6.2) \quad \begin{aligned} S_1^- &= \{|\xi| \leq \frac{1}{3}|\eta|\} \\ S_2^- &= \{|\zeta| \leq \frac{1}{3}|\eta|\} \end{aligned}$$

sont préservés par $d\phi^{-1}$:

$$(6.3) \quad d\phi^{-1}(S_1^- \cup S_2^-) \subset S_1^- \cup S_2^-.$$

De plus si $(\xi_0, \zeta_0, \eta_0) \in S_1^- \cup S_2^-$ et (ξ_1, ζ_1, η_1) est son image par $d\phi^{-1}$, alors

$$(6.4) \quad |\eta_1| \geq 3|\eta_0|.$$

On obtient pour la matrice Jacobienne de T^{-1}

$$MT^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & z & y \\ 0 & 0 & 1 \\ -z & z^2 - 1 & 2yz - x \end{pmatrix}$$

Pour la matrice jacobienne de T^{-2} notée

$$MT^{-2}(x, y, z) = MT^{-1}(T^{-1}(x, y, z))MT^{-1}(x, y, z) \\ MT^{-2}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - z^2 & z(z^2 - 2) & 3yz^2 - 2xz - 2y \\ -z & z^2 - 1 & 2yz - x \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= -2yz^4 + 2xz^3 + 4yz^2 - 2xz - y \\ B &= 2yz^5 - 2xz^4 - 6yz^3 + 4xz^2 + 4yz - x \\ C &= 5y^2z^4 - 8xyz^3 + (3x^2 - 9y^2)z^2 + 8xyz + 2y^2 - x^2 - 1 \end{aligned}$$

L'image (ξ_1, ζ_1, η_1) de (ξ_0, ζ_0, η_0) par ϕ^{-1} est alors donnée par l'équation matricielle :

$$(6.5) \quad (\xi_1, \zeta_1, \eta_1) = MT^{-2}(x, y, z)(\xi_0, \zeta_0, \eta_0)$$

6. CÔNES POUR LES BANDES HORIZONTALES

6.1. Cônes dans $H_{14}, H_{17}, H_{110}, H_{23}, H_{28}, H_{29}$. Précisément, on montrera que pour $(x, y, z) \in H_{1*} \cup H_{2*}$ que $d\phi^{-1}(S_1^-) \subset S_1^-$.

Par linéarité, on peut supposer que $\eta_0 = 1$ et $\xi_0 \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Lemme 74. *Pour $V > 10$, $(x, y, z) \in H_{1*} \cup H_{2*}$, on a*

$$\zeta_0 \in [-4, 4].$$

DÉMONSTRATION. Nous montrons le lemme pour $(x, y, z) \in R_1$, la démonstration étant strictement identique dans R_2 . On utilise l'expression (6.1) pour écrire

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{(xy - 2z)\eta_0 + (yz - 2x)\xi_0}{2y - xz} \\ &\leq \frac{4(2V + 8)}{3(2V - 8)}. \end{aligned}$$

Le dernier terme en tant que fonction de V décroît vers $\frac{4}{3}$ et est en particulier inférieure à 4 pour $V > 10$.

L'autre inégalité est strictement identique. $\square$

Nous fournissons une analyse des cônes asymptotiquement en V . Nous considérons maintenant notre point (x, y, z) comme une fonction de V en quelque sorte. Puisque $(x, y, z) \in R_1 \cup R_2$, les variables x et z varient entre -2 et 2 et donc sont petits devant V alors que la variable y est d'ordre V et croît infiniment avec lui.

Lemme 75. *Tous les termes de la matrice M^2 à l'exception du terme C sont au plus d'ordre V . Le terme C lui est d'ordre V^2 .*

DÉMONSTRATION. Pour prouver la première assertion, il suffit de vérifier que dans chaque terme les occurrences de la variable y .

Le terme C est d'ordre V^2 à condition que le polynôme $5z^4 - 9z^2 + 2$ ne soit pas nul. Il est très facile de calculer les quatre racines de ce polynôme.

Nous utilisons alors nos estimations sur les bandes horizontales. Nous savons en effet précisément où se situe z pour $(x, y, z) \in H_{14}, H_{17}, H_{110}, H_{23}, H_{28}, H_{29}$. Il est alors facile de voir que ce polynôme ne s'annule pas. $\square$

Corollaire 76. *Pour V assez grand, $(x, y, z) \in H_{1*} \cup H_{2*}$, on a les estimations*

$$(6.6) \quad \xi_1 \approx V$$

$$(6.7) \quad \eta_1 \approx V^2$$

Cela implique que $d\phi^{-1}(S_1^-) \subset S_1^-$ et $|\eta_1| \geq 3|\eta_0|$

DÉMONSTRATION. On obtient directement (6.6) et (6.7) en injectant les résultats du lemme 75 dans l'équation (6.5). Le reste suit aisément des estimations (6.6) et (6.7). Cela donne le résultat pour $H_{14}, H_{17}, H_{110}, H_{23}, H_{28}, H_{29}$. $\square$

6.2. Cônes pour les bandes horizontales $H_{510}, H_{59}, H_{68}, H_{67}$. On procède de la même façon mais avec le cône S_2^- pour le départ. Précisément, on montrera $d\phi^{-1}(S_2^-) \subset S_1^-$ et $|\eta_1| \geq 3|\eta_0|$.

Par linéarité, on peut supposer que $\eta_0 = 1$ et $\zeta_0 = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Lemme 77. *Pour $V > 10$, $(x, y, z) \in H_{5*} \cup H_{6*}$, on a*

$$\xi_0 \in [-4, 4].$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est rigoureusement identique à celle du lemme 74. $\square$

7. CÔNES POUR LES BANDES VERTICALES

Puisque les bandes que l'on étudie sont maintenant dans R_5 ou dans R_6 les termes dominants dans la matrice M^2 sont déterminés par les termes avec des puissances de la variable x . A présent, x est la variable variant autour de V et y et z sont les variables bornées en module par 2. On est maintenant intéressé par les expressions résultant de la première et troisième ligne de la matrice puisque le cône d'arrivée est S_1^- . La multiplication matricielle avec le triplet (ξ_0, ζ_0, η_0) donne le lemme suivant :

Lemme 78. Pour $(x, y, z) \in H_{5*} \cup H_{6*}$, ξ_1 et η_1 vérifient les estimations suivantes :

$$\xi_1 \approx V,$$

$$\eta_1 \approx V^2.$$

DÉMONSTRATION. Pour la première estimation, il suffit de remarquer que le terme dominant est donné par $-2zx$ qui est d'ordre V si z n'est pas proche de zéro. Or, c'est le cas d'après nos estimations sur z lors de la section 3.

Pour l'estimation de η_1 , le terme dominant est donné par $(3z^2 - 1)x^2$ qui est d'ordre V^2 si $3z^2 - 1 \neq 0$. Il est ensuite facile de vérifier que les racines de ce polynôme n'appartiennent pas aux intervalles de z des bandes horizontales de $H_{5*} \cup H_{6*}$. Avec ces deux estimations, il est facile de conclure que pour V assez grand, les propriétés souhaitées sont vraies. $\square$

Pour les dernières bandes $H_i, i \in \{1_5, 2_5, 6_5, 1_6, 2_6, 5_6\}$, on procède aux mêmes types de calculs mais avec la matrice MT^{-1} . Pour ces cas, on considère maintenant l'équation :

$$(6.8) \quad (\xi_1, \zeta_1, \eta_1) = MT^{-1}(x, y, z)(\xi_0, \zeta_0, \eta_0).$$

Nous traitons séparément les cas $\{1_5, 2_5, 1_6, 2_6\}$ et $\{6_5, 5_6\}$ parce que les cônes de départ sont différents.

Cas $\{1_5, 2_5, 1_6, 2_6\}$. Pour les cas $\{1_5, 2_5, 1_6, 2_6\}$, nous allons voir que le cône S_1^- est envoyé par dT^{-1} sur S_2^- avec la condition supplémentaire $\eta_1 \geq 3|\eta_0|$.

Lemme 79. On a les estimations suivantes

$$\zeta_1 = 1,$$

et

$$\eta_1 \approx V.$$

DÉMONSTRATION. Pour ζ_1 , il suffit de l'écrire pour trouver l'égalité. Pour η_1 le terme dominant est le plus grand terme en puissance de y . Il s'agit du terme $2zy$. Là encore, nous nous servons de nos estimations sur z pour affirmer que ce terme est d'ordre V . $\square$

Il est facile de voir que $\zeta_1 = 1$ et $\eta_1 \approx V$ impliquent les propriétés souhaitées.

Cas $\{6_5, 5_6\}$. Pour les cas $\{6_5, 5_6\}$, nous voyons que le cône S_2^- est envoyé sur lui-même avec $\eta_1 \geq 3|\eta_0|$. Une fois de plus $\zeta_1 = 1$. Le terme dominant pour η_1 est le terme $-x$ qui est automatiquement d'ordre V . Il est facile de voir que pour V assez grand $\zeta_1 = 1$ et $\eta_1 \approx V$ implique le résultat attendu.

7. Cônes pour les bandes verticales

Nous procédons de la même façon pour les bandes verticales i.e en faisant une analyse asymptotique en V . La preuve pour les bandes verticales est un peu plus compliquée. En effet, nous ne disposons pas pour ces bandes de bonnes estimations sur leur localisation. Pour palier à ce manque, nous utiliserons deux astuces.

La première est un argument de symétrie. Pour le cas Fibonacci, toute l'analyse sur les cônes associés aux bandes verticales avait pu être totalement évitée par un argument de symétrie. En effet, les bandes verticales peuvent être vues comme l'image des bandes

7. CÔNES POUR LES BANDES VERTICALES

horizontales par une isométrie, cette isométrie étant celle qui conjugue l'application et son inverse. Pour notre cas, un argument similaire peut être appliqué pour certaines bandes. En effet, les bandes verticales obtenues avec une seule itération de T^{-1} sont les images par ρ des bandes horizontales définies par une seule itération de T . Pour les 10 autres bandes (qui sont des images de $T^{\pm 2}$, nous ne pensons pas qu'il existe une telle isométrie qui envoie les bandes horizontales sur les bandes verticales. Ce manque de symétrie est probablement dû au fait que nous n'avons plus la conjugaison entre T et T^{-1} . Même incomplet, cet argument permet pour les bandes pour lesquelles il marche, de transposer nos estimations venant des bandes horizontales.

Malheureusement, il reste toujours 10 cas à traiter. Pour une partie d'entre eux (6 cas exactement), on va se servir de l'argument suivant. On s'est restreint au départ pour le calcul des cônes sur les intersections des images et pré-images de R_V . En considérant uniquement, l'intersection des bandes horizontales et verticales, on peut évidemment alors utiliser les estimations valides sur les bandes horizontales.

Enfin pour régler les derniers cas, nous démontrerons que ces bandes ne sont pas situées dans des localisations où la preuve ne marcherait pas.

Nous produisons maintenant les calculs qui seront valides pour toutes les bandes.

On obtient pour les matrices jacobiniennes de T et T^2 ,

$$MT = \begin{pmatrix} y^2 - 1 & 2xy - z & -y \\ y & x & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MT^2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & x^2(3y^2 + 1) - 4xyz + z^2 - 1 & 2y(z - xy) + x \\ y & x & -1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 3x^2y^4 + (3y^2 - 1)z^2 + (4xy - 6xy^3)z - (3x^2 + 2)y^2 + 1, \\ B &= 4x^3y^3 - z^3 + 6xyz^2 + (2x^2 + 2 - 9x^2y^2)z - (2x^3 + 4x)y, \\ C &= -3yz^2 + (6xy^2 - 2x)z - 3x^2y^3 + (2x^2 + 2)y, \\ D &= 2x(y^3 - y) + (1 - 2y^2)z. \end{aligned}$$

7.1. Cônes pour $V_{5_1}, V_{5_2}, V_{6_1}, V_{6_2}$. Pour ces cas, nous aurons besoin d'estimations précises comme pour les bandes horizontales, nous les démontrons sans efforts dans le lemme suivant par un argument de symétrie.

Lemme 80. *On a*

$$\rho H_{2_5} = V_{6_1}, \rho H_{2_6} = V_{6_2}, \rho H_{1_5} = V_{5_1}, \rho H_{1_6} = V_{5_2}$$

DÉMONSTRATION. On observe dans un premier temps l'action de ρ sur les morceaux de la partition de Markov, $R_i, i = 1, \dots, 6$. Il est facile de vérifier à partir de la définition de ces morceaux et de p que

$$\begin{aligned} \rho R_1 &= R_5, \rho R_2 = R_6, \rho R_3 = R_1, \\ \rho R_4 &= R_2, \rho R_5 = R_3, \rho R_6 = R_4. \end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant d'écrire

$$\begin{aligned} \rho H_{2_5} &= \rho(R_2 \cap T(R_5)) \\ &= \rho R_2 \cap \rho T(R_5) \\ &= R_6 \cap T^{-1}\rho^{-1}(R_5) \\ &= R_6 \cap T^{-1}R_1 = V_{6_1}. \end{aligned}$$

Des calculs similaires donnent les autres résultats. $\square$

Comme $\rho(x, y, z) = (y, z, x)$, cela implique que nos estimations précises de la variable z pour les bandes horizontales deviennent des estimations de la variable y pour ces 4 bandes verticales. Précisément, cela implique $y \in [-1 - \frac{3}{V}, -1 + \frac{3}{V}] \cup [1 - \frac{3}{V}, 1 + \frac{3}{V}]$.

7. CÔNES POUR LES BANDES VERTICALES

Nous pouvons maintenant finir la preuve pour ces 4 cas.

Lemme 81. *Pour $(x, y, z) \in V_{5_1} \cup V_{5_2} \cup V_{6_1} \cup V_{6_2}$, on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 1, \\ \xi_1 &\approx V.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On trouve facilement que $\eta_1 = 1$. La multiplication du cône S_2^+ avec la matrice MT donne comme terme dominant pour ξ_1 le terme $2yx$ qui est d'ordre V car y n'est pas proche de 0. $\square$

Comme à chaque fois, les deux estimations impliquent le résultat souhaité.

Cas de V_{5_6}, V_{6_5} . Le traitement des deux cas $\{5_6, 6_5\}$ est plus simple. Le même argument de symétrie donnerait également des estimations pour ces deux bandes verticales. Néanmoins, le calcul direct donne $\zeta_1 \approx V$ et $\eta_1 = 1$ qui donne les propriétés souhaitées.

Nous passons maintenant aux cas associés à la matrice jacobienne de T^2 . Ce sont tous des cas où le cône de départ est celui associé aux parties R_1 et R_2 .

Cas $\{24, 17, 110, 13, 28, 29\}$. Nous commençons par les cas $\{24, 17, 110, 13, 28, 29\}$.

On doit voir alors que le cône $|\eta_0| \leq |\xi_0|/3$ est envoyé par la matrice jacobienne de T^2 sur le cône $|\eta_1| \leq |\xi_1|/3$ avec la propriété supplémentaire $|\xi_1| \geq 3|\xi_0|$.

Puisque nous nous trouvons pour ces cas dans les parties R_1 et R_2 , c'est la variable y qui se comporte comme V . La multiplication de la matrice jacobienne par le triplet (ξ_0, ζ_0, η_0) donne

$$\eta_1 \approx V.$$

Pour ξ_1 , on allons devoir séparer deux cas. Mais dans tous les cas, on a le lemme suivant

Lemme 82. *On a l'estimation suivante pour ξ_1 ,*

$$\xi_1 \gtrsim V^2.$$

DÉMONSTRATION. Premier cas, la variable x n'est pas proche de zéro, précisément $x \gtrsim \frac{1}{V}$. On a alors le terme dominant x^2y^4 qui est d'ordre au moins 2 d'après l'hypothèse d'où

$$\xi_1 \gtrsim V^2$$

Sinon, si on a $x \lesssim \frac{1}{V}$, le terme x^2y^4 n'est pas dominant. Il est facile de voir que tous les autres termes avec à la fois les variables x et y sont encore plus petits (en ordre de grandeur de V). Le terme dominant devient alors le terme $(3z^2 - 2)y^2$ qui est un terme de A . C'est maintenant que nous nous servons du fait que nous sommes placé sur les intersections des bandes horizontales et verticales. Comme $3z^2 - 2$ n'a pas de racine pour z appartenant à une bande horizontale de R_1 et R_2 , cela nous permet de dire que dans ce cas

$$\xi_1 \approx V^2.$$

$\square$

Cette dernière estimation implique les propriétés souhaitées.

Les derniers cas. Il nous reste enfin ces quatre derniers cas à traiter $\{110_5, 29_5, 28_6, 17_6\}$.

On doit vérifier que le cône $|\eta_0| \leq |\xi_0|/3$ est envoyé par la matrice jacobienne de T^2 sur le cône $|\eta_1| \leq |\xi_1|/3$ avec la propriété supplémentaire $|\xi_1| \geq 3|\xi_0|$.

On obtient tout de suite pour η_1 que

$$\eta_1 = V + O(1).$$

Pour ζ_1 la conclusion est moins immédiate. Nous aurons besoin du lemme suivant qui statue que dans les cas que l'on considère, les variables x et z ne peuvent pas être petite en même temps.

8. IMPLICATIONS POUR LE SPECTRE.

Lemme 83. Pour $i \in \{110_5, 29_5, 28_6, 17_6\}$, V_i n'a pas d'intersection avec la bande verticale de R_1 (respectivement R_2) définie par

$$(7.1) \quad \frac{z - 1/V}{V - 2} \leq x \leq \frac{z + 1/V}{V - 2}$$

respectivement

$$\frac{z - 1/V}{-V + 2} \leq x \leq \frac{z + 1/V}{-V + 2}$$

La variable z variant de -2 à 2 . Cela implique que l'on a pour $(x, y, z) \in V_i$, avec $i \in \{110_5, 29_5, 28_6, 17_6\}$:

$$|xy - z| \gtrsim \frac{1}{V^\alpha}, \alpha > 0.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit que montrer que cette propriété est vraie sur le bord des bandes verticales pour que celle ci soit vraie pour les points de l'intérieur. Chaque point du bord de V_i a pu être paramétré en fonction d'un paramètre E variant entre -2 et 2 , on a obtenu la relation (valable sur le bord uniquement) :

$$(7.2) \quad z(E) = x(E)y(E) + E.$$

Il a de plus été démontré lors des calculs précédents que le paramètre E varie soit autour de 1 soit autour de -1 pour les bandes en question.

En utilisant (7.2), $x = \frac{z-E}{y}$ n'appartient pas à la bande verticale définie en (7.1) pour V assez grand.

Pour la seconde partie, il est facile de voir que $xy - z \in [-\frac{1}{V}, \frac{1}{V}]$ implique que x appartiennent à la bande définie en (7.1). On peut ensuite refaire la preuve en remplaçant $\frac{1}{V}$ dans (7.1) par $\frac{c}{V^\alpha}$ avec c et α des constantes positives. Cela implique que

$$|xy - z| \gtrsim \frac{1}{V^\alpha}, \alpha > 0.$$

□

Nous pouvons maintenant finir la preuve. Avec les estimations du lemme précédent, nous allons pouvoir estimer ζ_1 . Premier cas, si $x \gtrsim \frac{1}{V^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, le terme dominant est alors xy^3 et alors la multiplication de matrice donne

$$\zeta_1 = V^{3-\alpha} + O(V^2)$$

ce qui suffit pour conclure, sinon $x \lesssim V^{-1}$, dans ce cas, il y'a deux termes d'ordre au plus V^2 dans D et deux termes d'ordre au plus 1 dans $2y(z - xy) + x$. On utilise le lemme pour dire que la quantité $(xy - z) \gtrsim \frac{1}{V^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et ainsi que

$$|2y^2(xy - z)| \gtrsim V^{2-\alpha}.$$

On obtient ainsi pour ζ_1 que

$$\zeta_1 = V^{2-\alpha} + O(V).$$

et on conclut comme précédemment.

□

8. Implications pour le spectre.

Il ne nous reste plus qu'à tirer les conséquences du théorème 65 pour le spectre de l'opérateur H .

Déjà, il est possible de remarquer de l'ensemble non errant Ω_V de T est localement maximal.

Par définition, cela signifie qu'il existe un voisinage U de Ω_V tel que

$$\Omega_V = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U).$$

Il suffit de prendre pour voisinage l'ensemble R_V .

8. IMPLICATIONS POUR LE SPECTRE.

Étant donné le corollaire 66, on peut appliquer un certain nombre de résultats généraux à l'application trace de notre opérateur. Nous rappelons maintenant ces résultats qui vont donner des propriétés intéressantes pour le spectre.

On considère un ensemble hyperbolique $\Lambda \subset M$, $\dim M = 2$ localement maximal et invariant d'un difféomorphisme $f \in \text{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$.

On a $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U(\Lambda))$ pour un voisinage $U(\Lambda)$. On suppose également $\dim E^u = \dim E^s = 1$. On a alors les propriétés suivantes :

8.1. Stabilité. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$ de l'application f tel que pour $g \in \mathcal{U}$, l'ensemble $\Lambda_g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U(\Lambda))$ est un ensemble hyperbolique, localement maximal et invariant de g . De plus, il existe un homéomorphisme $h : \Lambda \rightarrow \Lambda_g$ qui conjugue $f|_\Lambda$ et $g|_{\Lambda_g}$, c'est à dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f|_\Lambda} & \Lambda \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g|_{\Lambda_g}} & \Lambda_g \end{array}$$

8.2. Variétés invariantes. Pour $x \in \Lambda$ et un petit $\varepsilon > 0$, on considère les ensembles stable and instable locaux définis par :

$$W_\varepsilon^s(x) = \{w \in M : d(f^n(x), f^n(w)) \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^i(x) = \{w \in M : d(f^n(x), f^n(w)) \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \leq 0\}.$$

Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, ces ensembles sont des disques C^r avec $T_x W_\varepsilon^s(x) = E_x^s$ et $T_x W_\varepsilon^i(x) = E_x^u$. On définit les ensembles stable and instable globaux :

$$W^s(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_\varepsilon^s(x)), \quad W^i(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(W_\varepsilon^i(x)).$$

On définit également

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x) \quad \text{and} \quad W^i(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^i(x).$$

8.3. Feuilletages invariants. Un feuilletage stable pour Λ est un feuilletage $\mathcal{F}^s$ d'un voisinage de Λ tel que

- (1) Pour tout $x \in \Lambda$, $\mathcal{F}^s(x)$, la feuille contenant x , est tangente à E_x^s ,
- (2) Pour chaque x suffisamment proche de Λ , $f(\mathcal{F}^s(x)) \subset \mathcal{F}^s(f(x))$.

Un feuilletage instable $\mathcal{F}^i$ peut être défini de la même façon.

Pour un ensemble hyperbolique et localement maximal $\Lambda \subset M$ d'un difféomorphisme de classe C^1 $f : M \rightarrow M$, $\dim M = 2$, on peut construire des feuilletages stable and instable de classe C^0 avec des feuilles de classes C^1 [36]. Dans le cas d'un difféomorphisme de classe C^2 , des feuilletages invariants et de classe C^1 existent (voir [38], théorème 8 dans Appendix 1, par exemple).

8.4. Dimensions Locales de Hausdorff et de Boîte. Soit pour $x \in \Lambda$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'ensemble $W_\varepsilon^i(x) \cap \Lambda$. Sa dimension de Hausdorff ne dépend pas de $x \in \Lambda$ et $\varepsilon > 0$. De plus, elle coïncide avec sa dimension de boîte (voir [35],[45]) :

$$\dim_H W_\varepsilon^i(x) \cap \Lambda = \dim_B W_\varepsilon^i(x) \cap \Lambda.$$

De la même façon,

$$\dim_H W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda = \dim_B W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda.$$

Si on note $h^s = \dim_H W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda$ et $h^i = \dim_H W_\varepsilon^i(x) \cap \Lambda$. On dira que h^s et h^i sont les dimensions locales de Hausdorff stable et instable de Λ .

8. IMPLICATIONS POUR LE SPECTRE.

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, les ensembles $W_\varepsilon^i(x) \cap \Lambda$ et $W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda$ sont des ensembles de Cantor définis dynamiquement (voir [39] pour la définition et la preuve), cela implique en particulier que

$$h^s < 1 \text{ et } h^i < 1,$$

voir, e.g. le Theorem 14.5 dans [41].

8.5. Dimension de Hausdorff Globale. La dimension de Hausdorff de Λ est égale à sa dimension de Boîte et on a

$$\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = h^s + h^i,$$

voir [35, 40]

8.6. Continuité de la Dimension de Hausdorff. Les dimensions locales de Hausdorff $h^s(\Lambda)$ et $h^i(\Lambda)$ dépendent continûment de $f : M \rightarrow M$ dans la topologie C^1 ; voir [35, 40]. De plus, $\dim_H \Lambda_f = \dim_B \Lambda_f = h^s(\Lambda_f) + h^i(\Lambda_f)$ dépend aussi continûment de f dans la topologie C^1 . Par suite, pour difféomorphisme de classe C^r , $f : M \rightarrow M$, $r \geq 2$, la dimension de Hausdorff d'un ensemble hyperbolique Λ_f est une fonction C^{r-1} de f , voir [34].

Remarque 84. Pour des ensembles hyperboliques de dimension plus grande que deux, la plupart de ces propriétés ne sont pas vraies en général, voir [41] pour plus de détails.

8.7. Applications au spectre. Pour V suffisamment grand, toutes les propriétés de la section précédentes peuvent être appliquées à l'ensemble hyperbolique Ω_V associé à l'application trace $T_V : S_V \rightarrow S_V$.

On a

Lemme 85. *Pour V suffisamment grand et pour tout $x \in \Omega_V$, la variété stable $W^s(x)$ intersecte la ligne ℓ_V transversalement.*

L'existence d'un feuilletage C^1 , $\mathcal{F}^s$, permet de considérer localement l'ensemble

$W^s(\Omega_V) \cap \ell_V$ comme l'image C^1 de l'ensemble $W_\varepsilon^i(x) \cap \Omega_V$. Le théorème 60 implique les propriétés suivantes pour le spectre $\sigma(H)$ pour V suffisamment grand :

Théorème 86. *Pour V assez grand, on a les propriétés suivantes :*

- (1) *Le spectre $\sigma(H)$ dépend continûment de V avec la métrique de Hausdorff.*
- (2) *On a $\dim_H(\sigma(H)) = \dim_B(\sigma(H))$.*
- (3) *Pour tout $\varepsilon > 0$ petit et tout $E \in \sigma(H)$, on a*

$$\dim_H([E - \varepsilon, E + \varepsilon] \cap \sigma(H)) = \dim_H(\sigma(H))$$

et

$$\dim_B([E - \varepsilon, E + \varepsilon] \cap \sigma(H)) = \dim_B(\sigma(H)).$$

- (4) *La dimension de Hausdorff $\dim_H(\sigma(H))$ est une fonction C^∞ de V .*

Bibliographie

- [1] J. Bellissard, B. Iochum, E. Scoppola, And D. Testard, Spectral properties of one dimensional quasicrystals, *Commun. Math. Phys.* **125** (1989), 527–543.
- [2] J.-M. Barbaroux, F. Germinet, and S. Tcheremchantsev, Fractal dimensions and the phenomenon of intermittency in quantum dynamics, *Duke Math. J.* **110** (2001), 161–193
- [3] S. Cantat, Bers and Hénon, Painlevé and Schrödinger, *Duke Math. Journal*, à paraître
- [4] M. Casdagli, Symbolic dynamics for the renormalization map of a quasiperiodic Schrödinger equation, *Commun. Math. Phys.* **107** (1986), 295–318.
- [5] J. M. Combes, Connections between quantum dynamics and spectral properties of time-evolution operators, In *Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*, (1993) 59–68, Academic Press, Boston.
- [6] D. Damanik, Dynamical upper bounds for one-dimensional quasicrystals, *J. Math. Anal. Appl.* **303** (2005), 327–341
- [7] D. Damanik, α -continuity properties of one-dimensional quasicrystals, *Commun. Math. Phys.* **192** (1998), 169–182.
- [8] D. Damanik, M. Embree, A. Gorodetski, S. Tcheremchantsev, The fractal dimension of the spectrum of the Fibonacci hamiltonian. (2007) *Commun. Math. Phys.* **280** (2008), 499–516.
- [9] D. Damanik, A. Gorodetski, Hyperbolicity of the trace map for the weakly coupled Fibonacci Hamiltonian, *Nonlinearity* à paraître.
- [10] D. Damanik, R. Killip, and D. Lenz, Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals. III. α -continuity, *Commun. Math. Phys.* **212** (2000), 191–204.
- [11] D. Damanik, D. Lenz, and G. Stolz, Lower transport bounds for one-dimensional continuum Schrödinger operators, *Math. Ann.* **336** (2006), 361–389.
- [12] D. Damanik, A. Sütő, and S. Tcheremchantsev, Power-Law bounds on transfer matrices and quantum dynamics in one dimension II., *J. Funct. Anal.* **216** (2004), 362–387.
- [13] D. Damanik and S. Tcheremchantsev, Power-Law bounds on transfer matrices and quantum dynamics in one dimension, *Commun. Math. Phys.* **236** (2003), 513–534.
- [14] D. Damanik, S. Tcheremchantsev, Upper bounds in quantum dynamics, (2005) *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2006), 799–827.
- [15] D. Damanik, S. Tcheremchantsev, Scaling estimates for solutions and dynamical lower bounds on wavepacket spreading, *J. d'Analyse Math.* **97** (2005), 103–131.
- [16] D. Damanik, S. Tcheremchantsev, Quantum Dynamics via Complex Analysis Methods : General Upper Bounds Without Time-Averaging and Tight Lower Bounds for the Strongly Coupled Fibonacci Hamiltonian, *J. Funct. Anal.* **255** (2008), 2872–2887.
- [17] R. del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, et B. Simon, Operators with singular continuous spectrum. IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization, *J. Anal. Math.* **69** (1996), 153–200.
- [18] F. Germinet, A. Kiselev, et S. Tcheremchantsev, Transfert matrices and transport for Schrödinger operators, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **54** (2004), 787–830.
- [19] I. Guarneri, Spectral Properties of Quantum Diffusion on Discrete Lattices, *Europhys. Lett.*, **10** (1989), 95–100.
- [20] I. Guarneri, On an Estimate Concerning Quantum Diffusion in the Presence of a Fractal Spectrum, *Europhys. Lett.*, **21** (1993), 729–733.
- [21] I. Guarneri and H. Schulz-Baldes, Lower bounds on wave packet propagation by packing dimensions of spectral measures, *Math. Phys. Electron. J.* **5** (1999), Paper 1, 16 pp.
- [22] I. Guarneri and H. Schulz-Baldes, Intermittent lower bounds on quantum diffusion, *Lett. Math. Phys.* **49** (1999), 317–324

-
- [23] B. Iochum, L. Raymond, D. Testard, Resistance of one-dimensional quasicrystals *Physica A* **187** (1992), 353–368.
 - [24] S. Jitomirskaya and Y. Last, Power-law subordinacy and singular spectra. I. Half-line operators, *Acta Math.* **183** (1999), 171–189.
 - [25] S. Jitomirskaya and Y. Last, Power-law subordinacy and singular spectra. II. Line operators, *Commun. Math. Phys.* **211** (2000), 643–658.
 - [26] S. Jitomirskaya, H. Schulz-Baldes, and G. Stolz, Delocalization in random polymer models, *Commun. Math. Phys.* **233** (2003), 27–48.
 - [27] A. Kiselev and Y. Last, Solutions, spectrum and dynamics for Schrödinger operators on infinite domains, *Duke Math. J.* **102** (2000), 125–150.
 - [28] R. Killip, A. Kiselev, et Y. Last, Dynamical upper bounds on wavepacket spreading, *Amer. J. Math.* **125** (2003), 1165–1198.
 - [29] A. Khinchin, Continued fractions, Mineola, N.Y. : Dover Publications, 1997, ISBN 0-486-69630-8 (first published in Moscow, 1935)
 - [30] Y. Last, Quantum dynamics and Decompositions of singular continuous spectra, *J. Funct. Anal.* **142** (1996), 406–445.
 - [31] T. Lelievre, Fractions continues : étude d’un algorithme sur une surface de Veech (2001).
 - [32] Q. Liu, Z. Wen, Hausdorff dimension of spectrum of one-dimensional Schrödinger operator with sturmian potentials, *Potential Anal* **20** (2004), 33–59.
 - [33] M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words, Chap. 2, 40–97.
 - [34] R. Mané, The Hausdorff dimension of Horseshoes of diffeomorphisms of surfaces, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **20** (1990), 1–24.
 - [35] A. Manning, H. McCluskey, Hausdorff dimension for horseshoes, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **3** (1983), 251–261.
 - [36] W. De Melo, Structural stability of diffeomorphisms on two-manifolds, *Invent. Math.* **21** (1973), 233–246.
 - [37] Moser J. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems* Princeton Univ. Press 1973
 - [38] J. Palis, F. Takens, Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations, Cambridge University Press, 1993.
 - [39] J. Palis, F. Takens, Homoclinic bifurcations and hyperbolic dynamics, 16^o Colo’quio Brasileiro de Matemática. [16th Brazilian Mathematics Colloquium] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.
 - [40] J. Palis, M. Viana, On the continuity of the Hausdorff dimension and limit capacity for horseshoes, *Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics* **1331** (1998), 150–160.
 - [41] Ya. Pesin, Dimension Theory in dynamical systems, Chicago Lectures in Mathematics Series, 1997.
 - [42] L. Raymond, A constructive gap labelling for the discrete Schrödinger operator on a quasiperiodic chain, preprint (1997)
 - [43] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics, *Scattering theory*, vol 3, Academic Press. New-York 1978.
 - [44] A. Sütő, The spectrum of a quasiperiodic Schrödinger operator, *Commun. Math. Phys.* **111** (1987), 409–415.
 - [45] F. Takens Limit capacity and Hausdorff dimension of dynamically defined Cantor sets, *Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics* **1331** (1988), 196–212.
 - [46] S. Tcheremchantsev, Mixed lower bound in quantum transport *J. Funct. Anal.* **197** (2003), 247–282.
 - [47] S. Tcheremchantsev, Dynamical analysis of Schrödinger operators with growing sparse potentials, *Commun. Math. Phys.* **253** (2005), 221–252.
 - [48] G. Teschl, Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices *Mathematical surveys and monographs*, **V. 72** ISSN 0076-5376.

Laurent MARIN
**Bornes Dynamiques pour des Opérateurs de Schrödinger
Quasi-périodiques**

Nous nous intéressons dans ce travail à la dynamique des opérateurs de Schrödinger unidimensionnels, discrets, associés à un potentiel sturmien quasi-périodique. Le résultat principal de cette thèse est une borne supérieure pour les exposants de transport qui mesurent la vitesse de propagation du système. Cette borne, valide pour presque tous les potentiels sturmiens, est sous balistique pour une force de couplage suffisante. La validité de la borne est couplée à une condition diophantienne liée au nombre irrationnel qui définit le potentiel. Cette condition est vraie presque sûrement. Nous exhibons par ailleurs un exemple d'irrationnel pour lequel une borne supérieure sous balistique est impossible indépendamment de la force de couplage. Nous faisons l'étude de la dimension fractale du spectre de l'opérateur qui minore sous certaines conditions les exposants de transport. Nous obtenons une nouvelle borne inférieure pour la dimension de boîte du spectre grâce aux propriétés connues sur la forme du pseudo spectre. Les restrictions pour obtenir une borne dynamique à partir de notre résultat sont d'avoir une condition initiale cyclique standard et que le potentiel soit associé à un irrationnel à densité bornée. Enfin dans la dernière partie de ce travail, nous démontrons que le spectre de l'opérateur associé au nombre d'argent $\beta = [2, 2, \dots]$ possède une structure hyperbolique. L'expression du pseudo spectre peut être vu comme un système dynamique. Nous conjugons ledit système à une dynamique symbolique abstraite selon la méthode dite des partitions de Markov. Le système se comporte comme un fer à cheval de Smale. Nous dérivons de l'hyperbolicité des propriétés pour les dimensions fractales du spectre. Dimensions dont l'attrait dynamique a été rappelé dans la partie précédente. Nous déduisons notamment l'égalité des dimensions de Hausdorff et de boîte pour cet opérateur.

Mots clés : opérateur de Schrödinger, sturmien, quasi-périodique, borne dynamique, hyperbolicité.

Dynamical bounds for Quasiperiodical Schrödinger Operators

In this thesis, we study the dynamics of discrete, one-dimensional, sturmian Schrödinger operators. The main result is a dynamical bound from above for transport exponents that valuate speed of the wavepacket spreading. This bound is true for almost every sturmian potential and is sub-ballistic for a coupling constant big enough. This bound is valid with respect to a diophantine condition on the irrational number that define the potential. This condition is true for almost every irrational numbers. We show an example of irrational number with ballistic motion at any coupling constant. We study the fractal dimension of the spectrum of these operators which can bound from below, under more restrictive assumptions, transport exponents. We get a new bound from below for the box dimension of the spectrum. Assumptions needed to use this bound on dynamical purpose are the initial condition to be cyclic and the potential associated to a bounded means irrational number. In the last part of the thesis, we show that the spectrum of the operator associated to the so-called silver mean $\beta = [2, 2, \dots]$ has a hyperbolic structure. The spectrum can be express as the non wandering set of a dynamical system. Using Markov partition method, we conjugate its dynamics to a symbolic one. The dynamical system behave like a Smale horseshoe. We derive from hyperbolicity spectral information, especially on fractal dimension. For example, we get that Hausdorff and box dimensions coincide for this operator.

Key words : Schrodinger Operator, sturmian, quasiperiodical, dynamical bounds, hyperbolicity.

MAPMO
Rue de Chartres, 45100 Orléans France