



**UNIVERSITÉ D'ORLÉANS**



**ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES**

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS,  
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE D'ORLÉANS**

**THÈSE** présentée par :

**Phuong Chi NGUYEN**

soutenue le : **12 avril 2011**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : **MATHÉMATIQUES**

**Identification de paramètres**

**dans la fabrication de matériaux composites**

**THÈSE dirigée par :**

**Maïtine BERGOUNIOUX  
Damien SOULAT**

Professeur, Université d'Orléans  
MCF HDR, Université d'Orléans

**RAPPORTEURS :**

**Van Ngai HUYNH  
Pierre MARECHAL**

MCF HDR, Université de Qui Nhon  
Professeur, Université Paul Sabatier

**JURY :**

**Didier AUSSEL  
Maïtine BERGOUNIOUX  
Pierre MARECHAL  
Yannick PRIVAT  
Damien SOULAT**

Professeur, Université de Perpignan  
Professeur, Université d'Orléans  
Professeur, Université Paul Sabatier  
Chargé de Recherches, ENS Cachan  
MCF HDR, Université d'Orléans



IDENTIFICATION DE PARAMÈTRES  
DANS LA FABRICATION DE MATÉRIAUX COMPOSITES

Thèse présentée par  
Phuong Chi NGUYEN

Sous la direction de

Maïtine BERGOUNIOUX & Damien SOULAT

Université d'Orléans  
Laboratoire MAPMO  
12 avril 2011



« *Ce qui est important, ça ne se voit pas.* »

Antoine de Saint-Exupéry

---

# Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu Maïtine Bergounioux et Damien Soulat, mes directeurs de thèse, pour leur disponibilité, leur aide précieuse et leur patience. Merci de m'avoir encadrée tout au long de ces années d'étude et aussi d'avoir corrigé attentivement ce manuscrit.

J'exprime ma profonde gratitude à Michel Zinsmeister pour sa générosité, ses conseils ainsi que son soutien et sa motivation qui m'ont redonné espoir et inspiration dans les périodes de doute.

Je remercie vivement Messieurs Pierre Marechal et Huynh Van Ngai d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail. J'exprime mes sincères remerciements à Messieurs Didier Aussel et Yannick Privat pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être membres de mon jury.

Ma gratitude s'adresse aussi aux membres du MAPMO qui m'ont accueillie pendant ces années. Je remercie Mounir Haddou pour son aide sur Matlab ; merci également à Cécile Louchet qui a gentiment proposé de relire une partie de cette thèse et qui m'a donné des conseils précieux. Je leur en suis très reconnaissante.

Je souhaite aussi remercier les (ex-)thésards du MAPMO pour leur convivialité et leur encouragement. Je remercie plus personnellement Cristiana, Guillaume et Roland pour leur amitié adorable. Un grand merci à Mouhamad (Jradeh) pour sa gentillesse et son accueil pendant ma première année. Merci à vous tous pour les moments passés ensemble.

Je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont soutenue pendant ces trois années de thèse.

Merci à Thao et Jérôme de m'avoir toujours accueillie chaleureusement ;

Merci à Hai et Y, pour leur discussions apaisantes ;

Merci à Chên, mon amie d'enfance ;

Merci à Marie, pour son écoute et sa confiance ;

Merci à Angéline d'être une amie si généreuse et sensible, avec laquelle j'ai partagé de bons moments de guitare, de cinéma, de voyage, de discussion (parfois en silence).

Une pensée particulière pour mes amis « internationaux » à la résidence universitaire et mes autres amis vietnamiens que je ne vais pas citer ici pour éviter d'oublier quelqu'un. . .

Enfin, je sais gré aux membres de ma famille, notamment mes soeurs du soutien moral inconditionnel de toujours.

## REMERCIEMENTS

---

# Table des matières

|                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Remerciements</b>                                                  | <b>iii</b> |
| <b>Table des matières</b>                                             | <b>iv</b>  |
| <b>Introduction</b>                                                   | <b>1</b>   |
| <b>1 Contexte mécanique</b>                                           | <b>5</b>   |
| 1.1 Présentation des matériaux composites . . . . .                   | 5          |
| 1.1.1 Définition . . . . .                                            | 5          |
| 1.1.2 Structure et mécanique des renforts . . . . .                   | 6          |
| 1.1.3 NCF - Renfort testé dans cette étude . . . . .                  | 8          |
| 1.2 Essai de flexion . . . . .                                        | 9          |
| 1.2.1 Description et traitement d'un essai . . . . .                  | 10         |
| 1.2.2 Profils expérimentaux . . . . .                                 | 11         |
| 1.2.3 Comportement en flexion . . . . .                               | 11         |
| 1.2.3.1 Détermination de la courbure et du moment . . . . .           | 12         |
| 1.2.3.2 Exemple d'évolution du moment en fonction de la courbure      | 13         |
| 1.3 Modèles de comportement en flexion . . . . .                      | 14         |
| 1.3.1 Modèle de Grosberg . . . . .                                    | 14         |
| 1.3.2 Modèle de Dahl . . . . .                                        | 14         |
| 1.3.3 Modèle Elastique Non Linéaire Plastique (ENLP) . . . . .        | 15         |
| 1.4 Stratégie d'optimisation . . . . .                                | 15         |
| 1.4.1 Approche menée par E. de Bilbao . . . . .                       | 16         |
| 1.4.1.1 Modélisation de l'essai par éléments finis . . . . .          | 16         |
| 1.4.1.2 Méthode « d'identification inverse » . . . . .                | 16         |
| 1.4.1.3 Résultats obtenus . . . . .                                   | 17         |
| 1.4.1.4 Bilan de la démarche d'optimisation . . . . .                 | 18         |
| 1.4.2 Proposition alternative pour le modèle d'optimisation . . . . . | 19         |
| 1.4.2.1 Obtention d'un profil continu sous l'hypothèse de coques .    | 19         |
| 1.4.2.2 Approximation de la courbure et du moment . . . . .           | 21         |
| 1.4.2.3 Problème d'identification . . . . .                           | 21         |
| 1.5 Conclusion . . . . .                                              | 22         |

|          |                                                                 |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2</b> | <b>Problèmes d'identification avec le modèle de Grosberg</b>    | <b>23</b> |
| 2.1      | Étude théorique du modèle . . . . .                             | 23        |
| 2.1.1    | Problème d'optimisation . . . . .                               | 23        |
| 2.1.2    | Existence et unicité. Conditions d'optimalité . . . . .         | 27        |
| 2.1.2.1  | Existence et unicité . . . . .                                  | 27        |
| 2.1.2.2  | Conditions d'optimalité . . . . .                               | 30        |
| 2.2      | Étude numérique . . . . .                                       | 32        |
| 2.2.1    | Identification des bornes $B_m$ , $B_M$ . . . . .               | 32        |
| 2.2.2    | Méthode empirique . . . . .                                     | 32        |
| 2.2.3    | Résultats numériques . . . . .                                  | 38        |
| 2.3      | Validation du modèle . . . . .                                  | 42        |
| 2.4      | Conclusion . . . . .                                            | 43        |
| <b>3</b> | <b>Problème d'identification avec le modèle de Dahl</b>         | <b>45</b> |
| 3.1      | Étude théorique du modèle . . . . .                             | 45        |
| 3.1.1    | Problème d'optimisation . . . . .                               | 45        |
| 3.1.2    | Existence et unicité . . . . .                                  | 54        |
| 3.2      | Première étude numérique du modèle . . . . .                    | 57        |
| 3.2.1    | Méthode empirique . . . . .                                     | 62        |
| 3.2.2    | Résultats numériques . . . . .                                  | 62        |
| 3.2.3    | Première conclusion . . . . .                                   | 67        |
| 3.3      | Formulation « contrôle optimal » . . . . .                      | 69        |
| 3.3.1    | Méthode directe : discrétisation . . . . .                      | 70        |
| 3.3.1.1  | Discrétisation de l'équation d'état . . . . .                   | 71        |
| 3.3.1.2  | Discrétisation des contraintes . . . . .                        | 72        |
| 3.3.1.3  | Discrétisation de la fonctionnelle . . . . .                    | 73        |
| 3.3.2    | Résultats numériques pour la méthode directe . . . . .          | 74        |
| 3.3.2.1  | Résultats numériques pour $(\mathcal{P}'_c)$ . . . . .          | 74        |
| 3.3.2.2  | Résultats numériques pour $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ . . . . . | 79        |
| 3.3.3    | Conclusions . . . . .                                           | 81        |
| 3.3.4    | Méthode indirecte . . . . .                                     | 82        |
| 3.3.4.1  | Existence . . . . .                                             | 83        |
| 3.3.4.2  | Conditions d'optimalité . . . . .                               | 83        |
|          | <b>Conclusions et perspectives</b>                              | <b>91</b> |
| <b>A</b> | <b>Concepts mécaniques</b>                                      | <b>95</b> |
| A.1      | Étude des déformations . . . . .                                | 95        |
| A.1.1    | Notation de déformation . . . . .                               | 95        |
| A.1.2    | Tenseur des déformations . . . . .                              | 96        |
| A.1.3    | Tenseur des contraintes . . . . .                               | 98        |
| A.1.4    | Loi de Hooke . . . . .                                          | 98        |
| A.2      | Petites déformations dans les coques . . . . .                  | 98        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|       |                                          |     |
|-------|------------------------------------------|-----|
| A.2.1 | Définition d'une coque . . . . .         | 98  |
| A.2.2 | Hypothèses de Love-Kirchhoff . . . . .   | 98  |
| A.2.3 | Déformation d'une coque mince . . . . .  | 100 |
| A.3   | Loi de comportement . . . . .            | 102 |
| A.3.1 | Modèle de comportement . . . . .         | 102 |
| A.3.2 | Evolution du moment de flexion . . . . . | 104 |



# Introduction

Ce travail est une contribution à l'étude du comportement de certains matériaux composites. Un travail important a été accompli du point de vue « mécanique » par E. de Bilbao [5] et ses coauteurs [8, 6, 7]. Notre point de départ est [5] dont nous reprenons ici quelques extraits. Notre travail a consisté à formaliser les observations de ce travail expérimental du point de vue mathématique, à faire une étude « critique » des différents modèles utilisés et proposer des techniques génériques d'identification de paramètres dans ce contexte.

Les matériaux composites utilisés dans les domaines industriels, notamment dans les secteurs de l'aéronautique et de l'automobile, offrent de nombreux avantages par rapport à [37] : gains de masse, absence de corrosion, amortissement des vibrations, bonne tenue en fatigue, complexité des formes réalisables. Pour ces raisons, leur utilisation est en progression constante dans ces secteurs (par exemple dans le programme Airbus A380).

Ces composites sont constitués d'une matrice résineuse (thermodurcissable ou thermoplastique) et d'un renfort. L'utilisation d'un renfort textile (fibres continues, multidirectionnelles) permet de réaliser des formes complexes tridimensionnelles, non développables, avec des performances mécaniques élevées. Les procédés de fabrication des pièces composites sont nombreux et variés, l'étude mécanique menée par E. de Bilbao s'est inscrite dans la famille des procédés LCM (Liquid Composite Molding) [22, 10] qui sont de plus en plus utilisés pour la production de pièces composites constituées de ces renforts textiles. Parmi eux on distingue les procédés de transfert de résine par injection et plus particulièrement le procédé RTM qui est le plus utilisé [11, 23, 53]. Ce dernier comporte deux phases principales :

1. Une étape de mise en forme du renfort, lors de laquelle on vient faire prendre la forme de la pièce au renfort fibreux,
2. La phase d'injection de la matrice, lors de laquelle la résine, sous forme fluide, est injectée dans la préforme de renfort qui est maintenue en compression.

L'étape de préformage du renfort sec reste une phase délicate à mettre en œuvre, surtout pour les pièces fortement non développables. Il est pourtant primordial de maîtriser au mieux cette phase puisque son résultat, c'est-à-dire, l'état de la préforme après la mise en forme, aura une influence sur la phase suivante ainsi que sur la qualité de la pièce finale. La question de la déformabilité d'un renfort fibreux et par conséquent de la faisabilité d'obtenir une forme spécifique se pose lors de cette étape. De nombreux auteurs ont répondu à cette

question par l'utilisation de moyens de simulations de cette étape. Si certains de ces outils s'appuient sur des approches géométriques [57, 45, 12], ces méthodes ont montré leurs limites, en effet ne pas prendre en compte le comportement mécanique spécifique des renforts conduit à des limitations en terme de résultat.

Les travaux d'E. de Bilbao se sont inscrits dans cette problématique :

- d'une part comprendre les phénomènes de déformabilité des renforts de composites,
- d'autre part déterminer le comportement mécanique, et ce en s'attachant au comportement spécifique en flexion.

Le comportement mécanique des renforts fibreux est très spécifique. De nombreuses études [35, 17, 14, 15, 20, 1, 40, 41, 16, 12, 36, 43], à partir des déformations engendrées par le renfort lors des procédés de fabrication, se sont portées sur la détermination du comportement mécanique. Il s'avère que le comportement prépondérant est membranaire. Le renfort est assujéti principalement à des allongements dans la direction des mèches [20, 40, 41, 16] mais également du cisaillement plan, par rotation entre les deux directions des mèches [36, 33]. Le comportement hors-plan reste bien moins étudié, la compaction [24] (écrasement dans l'épaisseur), ou la flexion. Concernant la flexion, des études numériques [49] ont montré l'importance de la prise en compte de ce phénomène pour la modélisation des défauts survenant lors de la mise en forme, la compréhension et l'identification de lois de comportement se sont donc avérées nécessaires.

La thèse d'E. de Bilbao a été consacrée à l'identification de modèles de comportements en flexion. Ces travaux ont associé une démarche expérimentale qui a été couplée à une démarche de modélisation (de l'essai de flexion) afin d'identifier les paramètres entrant en compte dans les modèles de comportement postulés. Cette démarche, dite de méthode inverse est couramment utilisée en mécanique des structures, surtout lors de comportements complexes pour lesquels les paramètres à identifier, et donc le nombre d'essais à réaliser, est important. L'idée est, à partir de courbes expérimentales, obtenues à partir d'essais, de simuler numériquement l'essai, en postulant un modèle, et à l'aide d'un algorithme d'optimisation qui minimise l'écart entre la courbe expérimentale et le résultat de la simulation d'identifier les paramètres du modèle de comportement.

Cette méthodologie a été conduite dans [5] avec succès, mais elle présente certains inconvénients. D'une part elle nécessite une simulation numérique, qui dans le cas présent a été réalisée par éléments finis. Associée à une technique d'optimisation, cette méthode a nécessité un certain nombre de calculs, non linéaires, donc coûteux. Enfin l'optimisation, soit la détermination des paramètres de comportement, n'a pu être réalisée sur toutes les plages de valeurs potentielles.

Notre travail s'inscrit donc à ce niveau, et tente de dépasser ces inconvénients. À partir d'un modèle simplifié, continu directement issu de la modélisation mécanique, qui ne nécessite pas l'utilisation de simulations numériques nous allons conduire une démarche d'optimisation mathématique afin, comme dans la méthodologie d'E. de Bilbao d'identifier les paramètres de comportement. Nous souhaitons également couvrir d'une manière plus large, grâce à la formulation employée, les plages de valeurs potentielles. Pour ce faire nous repartirons des résultats expérimentaux obtenus mais également des modèles de compor-

tement introduits. Les résultats expérimentaux nous fournissent des jeux de données que nous allons ajuster grâce à une méthode de moindres carrés. Dans un premier temps nous allons calculer la forme analytique de la solution à ajuster grâce à des calculs explicites de façon à traiter un problème d'optimisation sans contraintes. Toutefois cette méthode n'est réaliste que si le modèle de loi de comportement est suffisamment simple pour conduire des calculs explicites. Ce n'est pas le cas dans le cadre général et nous proposons donc, après cette étape qualifiée « d'empirique », une formulation qui, en conservant l'équation différentielle vérifiée par la fonction à ajuster, permet d'éviter la résolution exacte. Cette équation sera traitée comme une équation d'état dépendant des paramètres du modèle qui, eux, joueront le rôle d'un contrôle. Nous avons donc affaire à un problème de **contrôle optimal**. Nous présenterons alors deux approches : la première, quantitative, consiste à résoudre le problème avec une méthode directe en discrétisant fonction coût, contraintes et équation d'état. La résolution sera alors faite via des méthodes classiques d'optimisation discrète implémentées sous AMPL<sup>1</sup> (*A Mathematical Programming Language*). La deuxième approche est plus qualitative : elle consiste à étudier le problème dans le cadre « continu » et écrire un système d'optimalité pour obtenir des informations indépendantes de la discrétisation. Il s'agit d'une méthode indirecte. Nous proposons alors de résoudre numériquement le système d'optimalité obtenu.

Le manuscrit se divise en trois chapitres (outre cette introduction) et une annexe. Le chapitre 1 rappelle les principes élémentaires et le contexte mécanique de cette étude. On rappellera la démarche expérimentale conduite par E. de Bilbao, puisque nous nous servirons des résultats expérimentaux comme données comparatives. De manière similaire ce chapitre permettra d'introduire les différents modèles de comportements dont les paramètres sont à identifier. Enfin nous développerons, à partir d'hypothèses simplificatrices, le modèle continu. L'écriture de la fonctionnelle sous contraintes à minimiser terminera ce chapitre. Le chapitre 2 est consacré à la modélisation du problème inverse avec utilisation du modèle de **Grosberg** et à son étude théorique et numérique. Nous nous bornerons à l'étude par la méthode dite « empirique » car nous montrerons ensuite que ce modèle est « inclus » dans le modèle de Dahl. Le chapitre 3 reprend la démarche du chapitre précédent avec le modèle de **Dahl**. Outre la méthode numérique utilisée précédemment, nous développons l'approche « contrôle optimal » et présentons des résultats plus rigoureux obtenus avec AMPL. Nous terminons avec la présentation de la méthode indirecte et d'un algorithme générique pour résoudre le système d'optimalité.

---

1. <http://www.ampl.com/>



# Chapitre 1

## Contexte mécanique

Cette thèse s’inscrit dans un contexte mécanique largement décrit dans les travaux d’Emmanuel de Bilbao mais qu’il est nécessaire de rappeler, et c’est l’objectif de ce chapitre. Nous allons décrire la conception des matériaux composites, support de cette étude, ainsi que les travaux expérimentaux et numériques réalisés précédemment. A l’issue de ces parties les objectifs de ces travaux seront rappelés. Notons qu’un certain nombre de notions mécaniques décrites en annexe vient compléter ce chapitre.

### 1.1 Présentation des matériaux composites

#### 1.1.1 Définition

Un matériau composite peut être défini comme un assemblage de plusieurs constituants de natures différentes à l’échelle microstructurale mais également comme une combinaison d’au moins deux matériaux distincts à l’échelle macroscopiques distinctes. L’un est la matrice (ou résine) et l’autre est le renfort qui est inséré dans cette matrice. L’objectif est d’obtenir un matériau qui a des propriétés différentes de celles des deux constituants [4, 37].

Les matrices peuvent être des métaux (on parle de composites à matrices métalliques), ou organiques (résines thermodurcissables, ou résines thermoplastiques). Le rôle de la matrice est de figer le renfort, elle n’apporte pas de résistance mécanique. Les renforts peuvent être sous forme de poudre, fibres, ou de granulés. On utilise pour les renforts la terminologie de **charge**, car le renfort est présent pour apporter la rigidité au matériau composite. Dans le cas des renforts fibreux, cas de l’étude, ces fibres peuvent être de différentes longueurs, on parle ainsi de renforts sous forme de fibres courtes (quelque micromètre de longueurs) ou de fibres longues (jusqu’à plusieurs centimètres).

La caractéristique principale des composites est de pouvoir tirer avantage des propriétés de chacun des constituants qui les compose. Les matériaux composites se caractérisent par cette constitution, mais également par leur caractère anisotrope et fortement hétérogène. L’adhésion entre la matrice et les renforts constitue un des principaux facteurs de succès pour l’obtention de matériaux composites aux propriétés mécaniques optimales. Cette

caractéristique est à suivre lors du procédé de fabrication mais également lors de l'étude de la durée de vie des pièces. (On parle alors de délaminage ou de décohésion entre les renforts et la matrice).

Les composites sont généralement utilisés pour leurs propriétés mécaniques relativement à leur densité (rapport de résistance comparativement au poids de la structure) mais également pour leur résistance à la corrosion (relativement aux matériaux métalliques). Le choix des constituants (quelle matrice, quel renfort) ainsi que la fraction volumique (quantité de chacun des constituants), de même que la faisabilité de réaliser une pièce (aspects procédés de fabrications) dépendent des applications visées. De nos jours les composites sont utilisés dans de nombreux secteurs industriels (aéronautique, automobile, etc..) mais également dans la vie quotidienne (sports de loisirs, médical). Notons enfin que le coût des constituants mais également des procédés dédiés à ces matériaux n'est pas négligeable.

### 1.1.2 Structure et mécanique des renforts

Le renfort du matériau composite est le constituant qui va apporter la rigidité à la pièce composite. Dans le cadre d'applications structurales, pour des pièces fortement chargées, de dimensions complexes, les renforts fibreux sont le plus couramment utilisés [25]. Parmi les fibres les plus employées, on peut citer :

- **Les fibres de verre** qui ont un faible coût de production par rapport aux autres matériaux, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (bâtiment, nautisme et autres applications non structurales aéronautiques).
- **Les fibres de carbone** [46] qui sont utilisées pour des applications structurales. Elles sont ainsi utilisées dans l'aéronautique et pour les équipements de sport de compétition. D'un coût de revient plus élevé que les fibres de verre, leur champ d'application s'élargit et leur production augmente, car elles disposent de propriétés mécaniques plus élevées que celles du verre.
- **Les fibres d'aramide** [9, 25] qui sont légères et ont une bonne résistance aux chocs. Elles sont utilisées pour les protections balistiques ainsi que pour certains articles de sport (raquettes de tennis, skis, etc.). Elles n'ont cependant pas une très bonne résistance à la compression, à la flexion ni au flambement et elles sont sensibles au cisaillement interlaminaire. Les fibres d'aramide sont aussi difficiles à découper.
- **Les fibres naturelles** (d'origine végétale ou animales) [9] présentent l'avantage d'être particulièrement écologiques car mises en œuvre à partir de produits naturels, tel que le chanvre, le lin, ou le bambou pour les fibres végétales. Ces fibres sont de plus en plus étudiées car elles disposent de bonnes propriétés mécaniques à un coût intéressant et répondent par ailleurs à des problématiques de recyclabilité des pièces [52].

Ces fibres se présentent en tant que renfort sous différentes formes. Dans le cadre des applications traitées, elles sont assemblées sous forme de mèches. Ces mèches se présentent alors soit en tant que renfort :

- **Unidirectionnel (ou UD)** : les mèches sont orientées dans une seule direction. Les propriétés mécaniques du composite sont fortement dépendantes de cette orientation. Notons dans ce cas que plusieurs plis d'unidirectionnels peuvent être superposés à des orientations différentes (figure 1.1(d)).
- **Tissé** : Les tissus sont constitués de mèches, disposées dans deux directions orthogonales, (nommées chaîne et trame), reliées entre elles par une armature de tissage, c'est-à-dire par un enchevêtrement (contrairement à la superposition d'unidirectionnels). L'armure définit la séquence de passage de la trame au-dessus puis au-dessous de la chaîne. En fonction de l'armure, on obtient :
  - + le **taffetas** : Les mèches se croisent alternativement. Le pli est stable mais peu déformable (figure 1.1(a)).
  - + Le **sergé  $m \times n$**  : Les mèches de trame passent au-dessus de  $m$  mèches chaîne alors que les mèches de chaîne passent au-dessus de  $n$  mèches trame (figure 1.1(b)).
  - + Le **satins de  $n$**  : Chaque mèche de trame passe au-dessus de  $n-1$  mèche(s) de chaîne. Les satins sont déformables (figure 1.1(c)).
- **Tricot** : Comme pour les renforts tissés c'est un renfort bidirectionnel mais les mèches, contrairement aux renforts tissés, ne sont pas droites et plates, mais courbées. Les renforts tricotés sont par conséquent plus déformables.
- **Multidirectionnel** : Le renfort multidirectionnel existe sous une grande variété de configurations. C'est un renfort très utilisé dans l'aéronautique. Dans une autre configuration, la tresse obtenue par tissage cylindrique permet d'obtenir des pièces de révolutions de formes ogivales (figure 1.1(e)). Tissage volumique 3D ou plus, le renfort permet d'obtenir des volumes très complexes aussi utilisés dans l'aéronautique [32].
- **Non tissés** : Les textiles non tissés (appelés également *Non Crimp Fabric*, NCF) sont multidirectionnels, c'est-à-dire constitués d'au moins deux plis d'unidirectionnels superposés (figure 1.1(f)), sans tissage, avec des orientations différentes. On y rajoute un point de couture qui va relier les différents plis mais seulement à certains endroits. Ces points de couture permettent à chaque pli de se déformer mais également de les retenir où il faut.

Pour les pièces composites minces constituées de renforts dont l'épaisseur est petite devant les autres dimensions, on parle alors de **renforts surfaciques**. Pour des pièces de géométrie développable (caractérisée que par une courbure simple) l'utilisation d'UD (ou de superposition d'UD) est possible. Par contre pour des pièces de géométrie non développable (double courbure), il est nécessaire d'avoir une déformation (maîtrisée) dans les deux directions du renfort, par conséquent il faut un lien entre les deux directions de renforts (par tissage, tricotage ou comme un NCF).

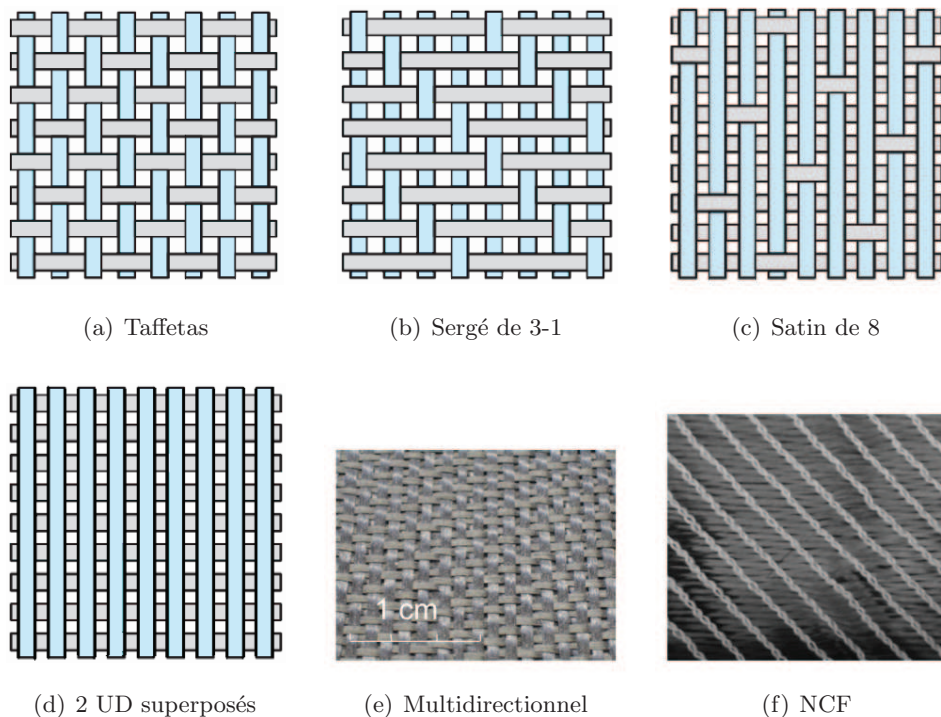


FIGURE 1.1 – Exemples de renforts

Notons que pour des pièces très épaisses (applications aéronautiques) on utilise des renforts qui sont tissés dans la troisième direction.

### 1.1.3 NCF - Renfort testé dans cette étude

L'étude de Bilbao [5] a porté sur plusieurs renforts de composites minces pour applications aéronautiques en fibres de carbone. Les structures concernent principalement des renforts tissés, mais également non tissés de type NCF (*Non Crimp Fabric*). Dans le cadre de ce travail, nous ne reprendrons que les résultats obtenus avec un renfort non tissé de carbone NCF.

**Il s'agit d'un laminé de 2 plis unidirectionnels à  $\pm 45^\circ$  par rapport à la couture de la liaison entre les deux plis. Sa masse surfacique est de  $568 \text{ g/m}^2$  et son épaisseur de  $1,1 \text{ mm}$ . Le point de liaison est droit et a une longueur de  $4 \text{ mm}$ .**

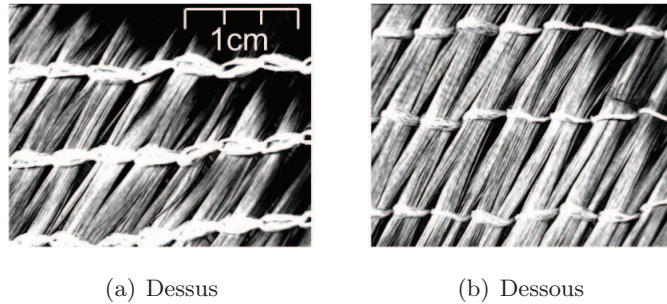


FIGURE 1.2 – Renfort NCF - Non tissé de carbone (*Non Crimp Fabric*)

### 1.2 Essai de flexion

Le travail de Bilbao a été consacré à l'étude du comportement en flexion des renforts de composite à fibres continues [6, 7]. Cette étude était motivée par la volonté de mieux comprendre le comportement spécifique des renforts sous sollicitation en flexion qui est rarement pris en compte dans les études. En effet les rigidités principales des renforts fibreux sont membranaires [36, 16]. Par conséquent, le comportement hors plan et le comportement en flexion est souvent considéré comme négligeable relativement aux rigidités en traction dans le sens des fibres [21], ou en cisaillement plan [42]. La finalité consistait également, après un travail expérimental d'identification, à modéliser le comportement afin de l'intégrer dans des simulations par éléments finis. Ce travail s'inscrivait donc dans la continuité des travaux sur l'identification du comportement mécanique des renforts de composites [13]. Dans un contexte spécifique à la flexion, E. de Bilbao a développé la méthodologie suivante :

- Réalisation et validation d'un dispositif expérimental reproduisant le comportement en flexion d'un renfort composite, sec soit sans résine, sous poids propre. La partie fléchie dépend des longueurs de flexion considérée. Pour chaque essai, pour chaque longueur de flexion, l'image de l'échantillon est capturée par une caméra.
- Un travail de seuillage (filtrage, binarisation) est associé, afin d'extraire de l'image le profil de l'échantillon défini par une ligne de référence pour chaque longueur de flexion.
- Développement d'une méthode d'identification, pour déduire des profils mesurés la loi de comportement (expérimentale). Cette loi de comportement en flexion est définie par la relation reliant le moment de flexion, noté  $M$ , à la courbure, notée  $\kappa$ .
- Superposition à ces résultats des modèles théoriques de comportement dont les coefficients sont corrélés à ces résultats expérimentaux. Cette étape a permis de définir ces modèles de comportement.

Puisque les travaux présentés dans ce mémoire s'appuient sur le travail d'E. de Bilbao, nous allons dans les paragraphes suivants détailler les notions nécessaires à notre étude, issues de cette méthodologie, puis nous fixerons les objectifs de nos propres travaux.

### 1.2.1 Description et traitement d'un essai

Le banc expérimental est basé sur le principe dit « de cantilever » qui consiste à encastrier l'échantillon de renfort le long d'un de ses bords dans la largeur et à le laisser pendre sous son poids propre sans aucun autre appui. Le système a été développé pour prendre en compte des longueurs de surplomb variable, soit des longueurs de flexions différentes. Cette spécificité permet d'identifier des comportements non élastiques. Ce banc expérimental comprend deux modules : un module mécanique et un module optique. L'échantillon est une éprouvette découpée de renfort composite, elle est caractérisée par **sa faible épaisseur relativement à la longueur et la largeur**.

Le module mécanique permet de placer l'échantillon dans la configuration de cantilever sous son poids propre. Le module optique permet de capturer le profil de l'échantillon fléchi. La structure complète est montée sur des pieds réglables pour obtenir l'horizontalité du dispositif.

L'échantillon étant placé entre une plaque fixe et un ensemble de lames amovibles, les différentes longueurs de flexions sont obtenues par la libération successive de ces lames de sorte que l'échantillon se retrouve sous son poids propre au niveau des lames libérées. Cet échantillon reste en liaison encastrement entre la prochaine lame à libérer et la plaque fixe. La longueur de flexion va donc augmenter avec le nombre croissant de lames libérées.

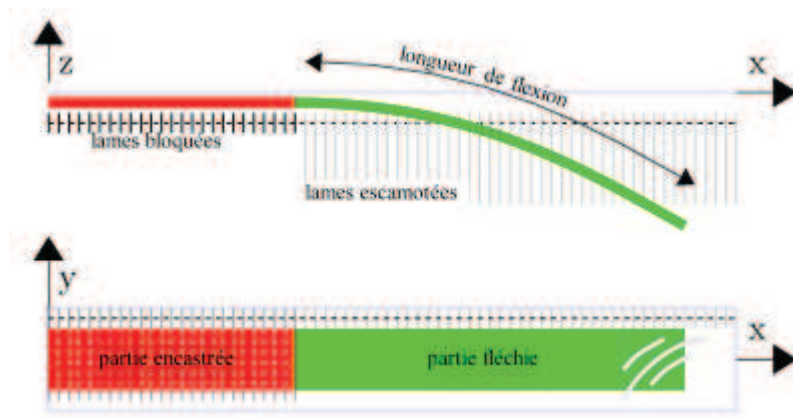


FIGURE 1.3 – Essai de flexion - Surface déformée

Au cours de l'essai, une photographie numérique de l'échantillon fléchi est prise grâce au système optique. Chaque position fléchie de l'échantillon correspond ainsi à un état quasi-statique.

Dans la méthodologie, largement détaillée et validée dans la thèse d'E. de Bilbao, l'image du profil fléchi est traitée, pour être recadrée, filtrée, binarisée, afin d'extraire la ligne moyenne du renfort fléchi, pour chaque longueur.

La notion de ligne moyenne (ou ligne de référence) s'associe à l'épaisseur moyenne de l'échantillon. Rappelons en effet que cette étude porte sur des renforts de composites minces.

### 1.2.2 Profils expérimentaux

Le traitement numérique des images permet d'extraire la ligne de référence de chaque profil de flexion. Ces résultats expérimentaux se présentent sous de fichiers numériques (ou couple de points) :

$$(X, Z) = (x_i, z_i)_{1 \leq i \leq N}$$

où le nombre de points noté  $N$  dépend de la longueur de flexion  $L$ .

Nous présentons sur la figure 1.4 quelques profils expérimentaux sur le renfort NCF pour 3 longueurs de flexion  $L$  différentes.

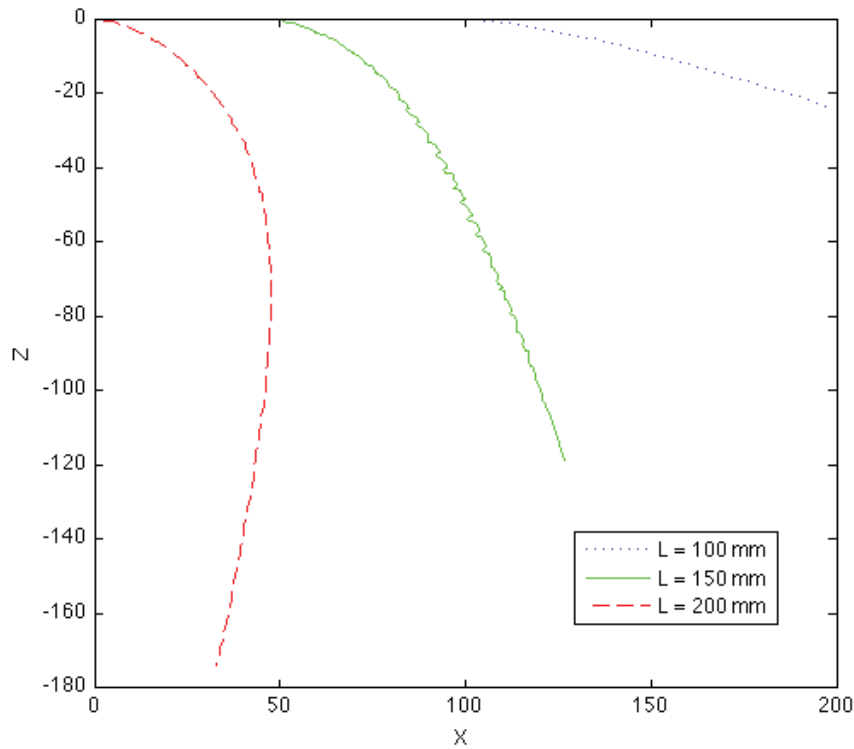


FIGURE 1.4 – Profils expérimentaux pour  $L = 100$  mm,  $L = 150$  mm et  $L = 200$  mm

Notons que ces résultats expérimentaux, sous forme de position de profils, constitueront une donnée d'entrée pour le problème d'identification que nous allons traiter.

### 1.2.3 Comportement en flexion

Le comportement mécanique est caractérisé par une relation liant les contraintes et les déformations (voir annexe). Dans le cadre de la flexion des renforts minces, cette relation se limite à exprimer la relation entre le **moment de flexion**, noté  $M$ , et la **courbure**, notée  $\kappa$  :  $M = f(\kappa)$ .

La méthode d'identification directe, développée dans le cadre des travaux d'E. de Bilbao, à partir des profils, consiste à déterminer directement l'évolution du moment en fonction de la courbure. Ainsi pour chaque profil mesuré, il est nécessaire de calculer :

- la courbure en chaque point de la ligne de référence,
- le moment exercé en ce point par la partie libre.

On obtient alors une courbe *moment - courbure*, pour chaque longueur de flexion issue de ces résultats expérimentaux. L'ensemble des courbes obtenues permet d'analyser la nature du comportement en flexion élastique ou inélastique, linéaire ou non linéaire. La démarche est détaillée ci-dessous.

### 1.2.3.1 Détermination de la courbure et du moment

L'échantillon est assimilé à une poutre de longueur  $L$ , encastrée au point  $E$  et libre au point  $F$ . Elle est soumise à l'action de son poids propre (voir figure 1.5).

La courbe  $\widetilde{EF}$  suit la surface moyenne déformée. Un point  $P$  sur cette courbe a pour abscisse curviligne  $s$  et  $(x(s), z(s))$  pour coordonnées cartésiennes.

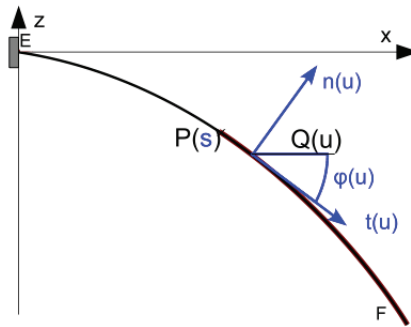


FIGURE 1.5 – Schéma de calcul du moment de flexion  $M(s)$

La courbure  $\kappa(s)$  de la courbe au point  $P$  est calculée par

$$|\kappa| = \frac{|x'z'' - x''z'|}{(x'^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (1.1)$$

où  $x'$  désigne la dérivée de  $x$  par rapport à  $s$  et  $x''$  la dérivée seconde. Le moment de flexion  $M(s)$  est le moment exercé au point  $P(s)$  par la partie suspendue  $\widetilde{PF}$ . On obtient donc

$$M(s) = q \int_s^L |x(t) - x(s)| dt$$

où  $q$  est la masse surfacique du matériau. Par d'ailleurs, notant  $\varphi(s)$  l'angle tangent au point  $P(s)$ , on a

$$|\kappa(s)| = \left| \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|. \quad (1.2)$$

## 1.2. ESSAI DE FLEXION

---

Pour obtenir une relation entre  $M(s)$  et  $\varphi(s)$  nous utilisons le fait que :

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos \varphi(u) du , \\ z(s) &= \int_0^s \sin \varphi(u) du . \end{aligned}$$

Le moment de flexion  $M(s)$  devient donc

$$M(s) = q \int_s^L \left| \int_s^t \cos \varphi(u) du \right| dt . \quad (1.3)$$

### 1.2.3.2 Exemple d'évolution du moment en fonction de la courbure

Cette méthode de caractérisation directe a été réalisée sur l'ensemble des profils mesurés pour le renfort NCF considéré. L'échantillon testé est de largeur 100 mm et les longueurs de flexion  $L$  ont évolué de 80 mm à 170 mm. La figure 1.6 représente les courbes *moment - courbure* pour toutes les longueurs de flexion testées.

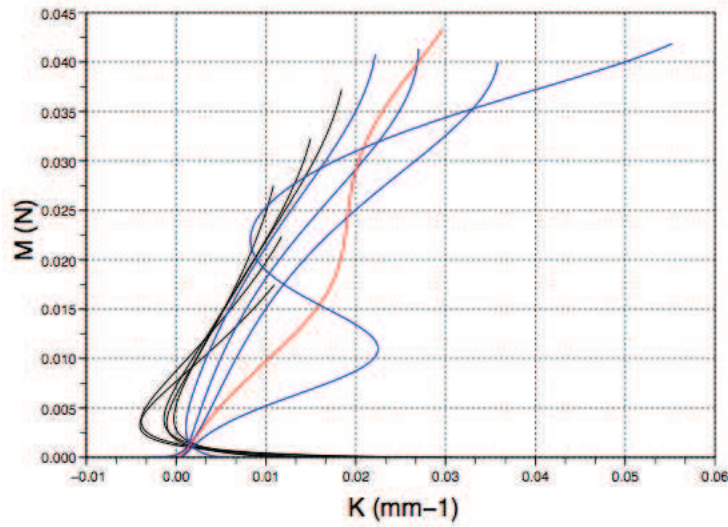


FIGURE 1.6 – Courbes moment-courbure  $M = f(\kappa)$  -  $L = 80$  mm à  $L = 170$  mm

A l'issue de cette démarche expérimentale, et plus spécifiquement pour le renfort NCF, nous disposons d'une succession de profils sous forme de couples de points position. La suite de la méthodologie, mise en place par E. de Bilbao et rappelée ci-dessous, permet d'introduire les différents modèles de comportement dont nous allons nous servir, mais également de discuter de la stratégie menée par l'auteur afin d'identifier les paramètres de ces modèles.

### 1.3 Modèles de comportement en flexion

Le comportement en flexion, qui influe sur la spécificité des profils obtenus, est **intrinsèque à chaque renfort**. A partir des résultats expérimentaux, E. de Bilbao s'est intéressé à trois lois de comportement spécifiques : le modèle de **Grosberg**, le modèle de **Dahl** et un modèle élastique non linéaire plastique (**ENLP**). L'idée est de postuler des modèles et d'identifier les paramètres par « corrélation » avec les résultats expérimentaux.

#### 1.3.1 Modèle de Grosberg

Le modèle de Grosberg [39] est un modèle à deux paramètres qui sont : le **moment de friction**, noté  $M_0$ , et la **rigidité élastique**, notée  $B$ . Ce modèle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \kappa = 0 & \text{si } M \leq M_0, \\ M = M_0 + B \cdot |\kappa| & \text{si } M \geq M_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Avec un tel modèle, dans un plan *moment de flexion – courbure*, le comportement du renfort se dissocie en deux parties. Une première partie au cours de laquelle la courbure est nulle et le moment de flexion augmente jusqu'à atteindre une valeur notée  $M_0$ , suivi d'une deuxième partie où le moment croît linéairement en fonction de la courbure. **Dans ce modèle, le paramètre  $M_0$  est en fait la valeur du moment de flexion au point où le renfort commence à se courber.**

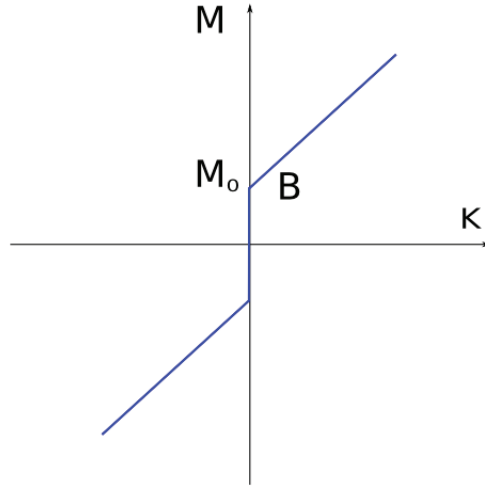


FIGURE 1.7 – Le modèle de Grosberg comme modèle de comportement *moment-courbure*

#### 1.3.2 Modèle de Dahl

Le modèle de Dahl [29] a été développé pour simuler le contrôle dynamique de systèmes mécaniques comportant des phénomènes de friction :

$$\frac{dM(\kappa)}{d\kappa} = B \left( 1 - \frac{M(\kappa)}{M_0} \text{signe}(\dot{\kappa}) \right)^n \quad (1.5)$$

## 1.4. STRATÉGIE D'OPTIMISATION

où  $\dot{\kappa}$  désigne la dérivée de  $\kappa$  par rapport à  $s$ ,  $B$  est la **rigidité** du matériau et  $M_0$  le **moment de friction**;  $B$ ,  $M_0$  et  $n$  sont des paramètres du modèle.

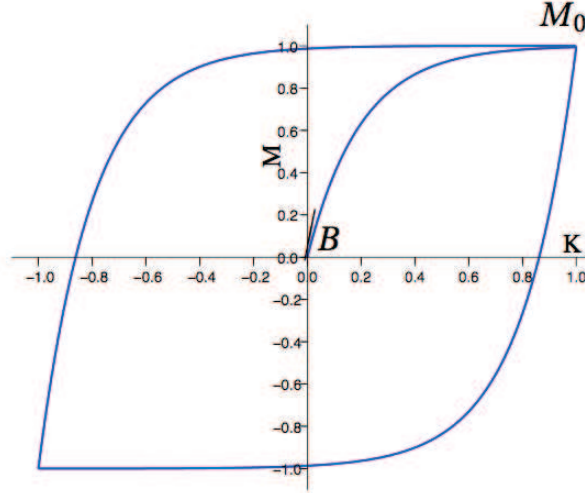


FIGURE 1.8 – Le modèle de Dahl comme modèle de comportement moment-courbure

La figure 1.8 représente la courbe de flexion avec  $B = 5$ ,  $M_0 = 1$  et  $n = 1$ .  $B$  est la pente à l'origine; elle détermine le comportement quasi élastique pour les faibles courbures.  $M_0$  constitue l'asymptote; c'est le moment limite du comportement « quasi plastique » lorsque la courbure devient élevée. L'entier  $n$  est le coefficient de forme de la loi.

**Dans notre étude nous ne considérons que le cas où  $n = 1$ .**

### 1.3.3 Modèle Elastique Non Linéaire Plastique (ENLP)

C'est un modèle proposée par E. de Bilbao dans son travail de thèse :

$$\frac{dM}{d\kappa} = B^{EL}(\kappa) = B_m + (B_M - B_m)e^{-\eta|\kappa|}. \quad (1.6)$$

Dans ce modèle, la partie non élastique a été choisie non linéaire de forme exponentielle pour contrôler les limites maximale et minimale de la rigidité. La rigidité n'est fonction que de la composante élastique de la courbure. Elle atteint la valeur maximale  $B_M$  quand la courbure est nulle et elle tend vers la valeur minimale  $B_m$  quand la courbure tend vers l'infini. Le coefficient  $\eta$  permet de contrôler la vitesse de convergence vers l'asymptote. Notons que dans ce modèle le moment de friction n'intervient plus.

## 1.4 Stratégie d'optimisation

Disposant de résultats expérimentaux et de modèles de comportement, les travaux de cette thèse consistent à déterminer les paramètres présents dans ces modèles, les résultats expérimentaux servant de résultats de référence. Nos travaux s'inscrivent dans cet objectif.

Cette stratégie d'optimisation a été également menée par E. de Bilbao dans une approche différente. Afin de préciser les avantages et inconvénients de chacune des deux approches, nous allons les décrire dans cette section.

### 1.4.1 Approche menée par E. de Bilbao

E. de Bilbao a développé une approche par une méthode d'identification inverse qui a pour objectif de déterminer les paramètres des modèles de comportement introduits par comparaison entre la réponse expérimentale et celle obtenue par la simulation de l'essai. Deux étapes sont donc présentes dans la stratégie menée par Bilbao : d'une part obtenir un profil à l'aide d'un des modèles de comportement, cette étape ayant été réalisée par l'utilisation d'un logiciel de simulations par éléments finis, d'autre part réaliser l'optimisation des paramètres de comportement par corrélation entre le profil simulé et les résultats expérimentaux, cette étape ayant été réalisée par une méthode d'identification inverse.

#### 1.4.1.1 Modélisation de l'essai par éléments finis

La technique des éléments finis est une approche discrète qui repose sur certaines hypothèses, mais qui a permis, dans le cadre de cette étude, de calculer le profil de l'échantillon fléchi pour chaque longueur de flexion et pour chaque modèle de comportement considéré à partir des données suivantes :

- géométrie de l'échantillon,
- chargement,
- conditions aux limites.

Dans cette modélisation l'échantillon est maillé (discrétisé) par des éléments finis de type coque, les caractéristiques géométriques permettant de s'inscrire dans cette hypothèse. Des développements numériques ont été nécessaires afin de programmer les lois de comportement spécifiques en flexion. La mise en donnée du chargement et des conditions aux limites est effectuée afin de reproduire l'essai expérimental de flexion. Notons que cette analyse en éléments finis est non linéaire car l'hypothèse des grands déplacements est retenue et certains des modèles de comportement sont non linéaires.

#### 1.4.1.2 Méthode « d'identification inverse »

Avec un modèle du type « éléments finis » de simulation de l'essai de flexion et une loi de comportement, il est possible de lancer **manuellement des analyses avec différents jeux de paramètres du modèle de comportement, puis de comparer les résultats simulés avec les résultats expérimentaux, jusqu'à trouver un jeu satisfaisant, à condition que le modèle soit approprié.**

Cette démarche n'est donc pas « systématisée » et nécessite de tester plusieurs jeux de paramètres, sans être totalement certain que la « solution » retenue soit la meilleure possible.

Une stratégie alternative, développée dans ces travaux, a consisté à programmer une méthode inverse utilisant une formulation par moindres carrés. La formulation est es-

## 1.4. STRATÉGIE D'OPTIMISATION

sentiellement discrète et la résolution utilise l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Ce programme permet dans un premier temps de lancer les simulations, de communiquer avec le logiciel « éléments finis » pour lui fournir le jeu de paramètres, et de récupérer les résultats simulés. Et dans un second temps de calculer les écarts entre les résultats simulés et expérimentaux et d'appliquer l'algorithme de recherche du jeu de paramètres.

La corrélation entre les simulations et les résultats expérimentaux ainsi que le calcul des écarts s'effectuent sur les profils.

### 1.4.1.3 Résultats obtenus

E. de Bilbao a montré que le modèle de Grosberg est valide pour une petite longueur de flexion, c'est-à-dire que ce modèle est capable de décrire le comportement élastique. Pour le cas des grandes longueurs de flexion, ce modèle n'est plus valide. Le comportement du matériau a changé et dévie de son régime linéaire. Il a donc poursuivi avec le modèle non linéaire de Dahl.

Pour le modèle de Dahl, l'optimisation a été réalisée sur le plus grand profil mesuré ( $L = 200$  mm). Le profil optimisé est proche du profil expérimental. Toutefois, avec les valeurs optimales trouvées, les profils simulés pour  $L = 100$  mm et  $L = 150$  mm ne sont pas assez proches des profils mesurés (voir figure 1.9). Bilbao en a conclu que le modèle de Dahl n'est capable de décrire que le comportement non élastique, et ne convient pas pour les faibles courbures qui comportent un comportement élastique.

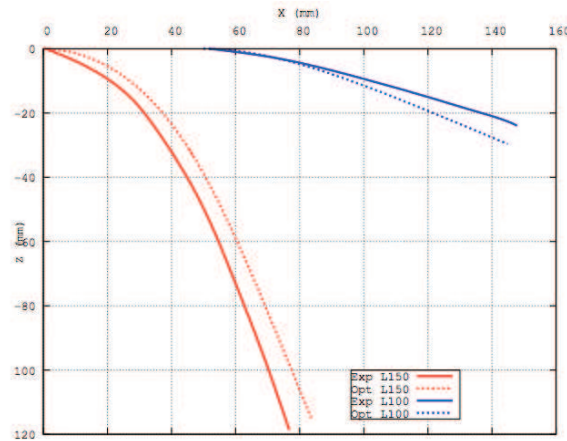


FIGURE 1.9 – Modèle de Dahl - L'optimisation est effectuée sur  $L = 200$  mm. Profils expérimentaux et optimisés pour  $L = 100$  mm et  $L = 150$  mm.

Le modèle ENLP a été proposé dans le but d'intégrer un comportement élastique au modèle de Dahl. Le moment de friction n'apparaît plus dans ce modèle et la rigidité est caractérisée par deux valeurs extrêmes  $B_m$  et  $B_M$ .

L'optimisation a été faite à la fois sur les deux profils  $L = 100$  mm et  $L = 200$  mm pour tenir compte des deux comportements élastique et non élastique. Pour les deux longueurs

## 1.4. STRATÉGIE D'OPTIMISATION

d'optimisation, les profils optimisés sont très proches des profils expérimentaux. En plus, pour  $L = 150$  mm, le profil simulé est aussi très proche du profil expérimental (voir figure 1.10). Le modèle proposé est donc capable de décrire correctement le comportement du matériau dans tous les cas.

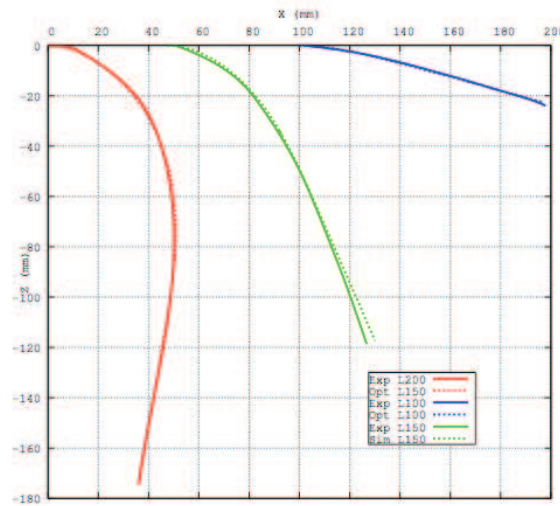


FIGURE 1.10 – Modèle ENLP - L'optimisation est effectuée sur  $L = 100$  mm et  $L = 200$  mm. Profils expérimentaux et optimisés pour  $L = 100$  mm,  $L = 150$  mm et  $L = 200$  mm.

### 1.4.1.4 Bilan de la démarche d'optimisation

Les motivations de nos travaux sont issues du bilan de la stratégie d'optimisation menée par E. de Bilbao rappelée dans les paragraphes précédents. On peut ainsi faire un certain nombre de constats.

D'une part l'obtention d'un profil comparatif à ceux obtenus expérimentalement nécessite des simulations éléments finis. Ces calculs, non linéaires, donc itératifs, génèrent un coût (en terme de temps de calcul) inhérent aux hypothèses réalisées et à la méthode utilisée. Par ailleurs cette méthode de discrétisation dépend de la taille des éléments et il est nécessaire que le maillage soit assez raffiné. Enfin cette stratégie implique que le coût, inhérent à chaque simulation élément fini, soit multiplié par le nombre de jeu de paramètre issu de l'optimisation.

La première question est donc : comment, pour chaque modèle de comportement, disposer d'un profil comparatif ? Afin de suppléer à cette méthode des éléments finis et donc à une approche purement discrète, nous sommes partis d'une solution **continue** du déplacement, formulée à partir des équations de la mécanique et d'un certain nombre d'hypothèses.

Par ailleurs, dans l'étude d'E. de Bilbao, l'optimisation n'a été réalisée que sur **certains** profils expérimentaux pour identifier les valeurs optimales des paramètres, pour chaque modèle de comportement. Les profils mesurés mais non utilisés dans cette stratégie d'op-

## 1.4. STRATÉGIE D'OPTIMISATION

timisation n'ont servi qu'à la vérification du modèle. On peut conclure que ces paramètres ont été considérés comme des constantes indépendantes de la longueur de flexion.

Le second objectif de ces travaux est donc d'introduire, dans les deux premiers modèles de comportement proposés, une **dépendance de ces paramètres en fonction de la longueur de flexion**.

### 1.4.2 Proposition alternative pour le modèle d'optimisation

Afin de répondre aux objectifs énoncés dans le paragraphe précédent, la première étape consiste à formuler une solution simple, continue, qui reproduit le comportement en flexion du renfort sous son poids propre (problème **direct**).

#### 1.4.2.1 Obtention d'un profil continu sous l'hypothèse de coques

On considère une plaque mince, maintenue dans une direction horizontale par un encastrement partiel, l'autre partie de son bord étant libre. On considère un repère orthonormé  $Oxyz$  tel que le plan moyen de la plaque soit le plan  $Oxy$ . On appelle  $e$  l'épaisseur de la plaque. Ainsi, on appelle  $\left\{z = -\frac{e}{2}\right\}$  le plan inférieur et  $\left\{z = \frac{e}{2}\right\}$  le plan supérieur. La plaque peut être définie par

$$V = \left\{ \bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in \Omega ; -\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2} \right\}$$

où l'on pose

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq L ; 0 \leq y \leq l\}.$$

L'épaisseur  $e$  est supposée petite devant les dimensions de  $\Omega$ .

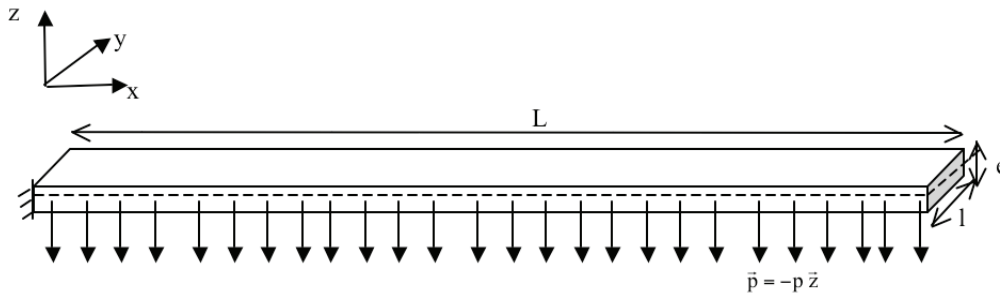


FIGURE 1.11 – Flexion d'une plaque

La structure est soumise à l'action de son propre poids selon  $\bar{z}$  (effort de volume, noté  $\bar{p}$ ). Les quantités sont indépendantes du temps (hypothèse statique). On étudie l'évolution de la plaque juste après son encastrement.

Nous rappelons ici la définition du champ de déplacement.

**Définition 1.4.1** (Champ de déplacement). *Soit  $M(x, y, z)$  un point de la plaque et  $G(x, y, 0)$  le point correspondant dans le plan moyen à l'instant  $t = 0$ . Ils deviennent à l'instant  $t$  les points  $M'$  et  $G'$ . On appelle*

$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{MM'} := \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}(G) = \overrightarrow{GG'} := \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \\ v_z(x, y) \end{pmatrix}$$

*les champs de déplacement de  $M$  et  $G$  respectivement.*

Les essais de flexion sur différents renforts minces dans [5] nous ont montré que le champ de déplacement  $\vec{u}(G)$  des points  $G$  au plan moyen ne dépend que de  $x$ . La surface moyenne est donc une surface à symétrie cylindrique, ce qui nous permet de paramétrer la plaque moyenne déformée par une courbe en 2D dans le plan  $Oxz$ .

De plus, le déplacement selon  $y$  est petit par rapport à l'unité ( $v_y \ll 1$ ) et peut donc être négligé. Après la déformation, un point  $G(x, y, 0)$  du plan moyen devient donc un point  $G'(x + v_x(x), y, v_z(x))$  de la surface moyenne déformée. La surface moyenne déformée est engendrée par la courbe

$$\begin{cases} x + v_x(x) & x \in [0, L] \\ v_z(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans les cas de petits déplacements et de petites déformations, les hypothèses de **Love-Kirchhoff** sont valides (voir Annexe) et le déplacement selon  $x$  est petit par rapport à celui selon  $z$  ( $v_x(x) \ll v_z(x)$  pour tout  $x \in [0, L]$ ). On peut donc le négliger et la courbe (1.7) devient

$$v_z(x), \quad x \in [0, L].$$

On appelle  $v_z(x)$  la **flèche** et la note par  $w(x)$  pour simplifier les notations. La surface moyenne déformée se caractérise donc par la flèche  $w(x)$  :

$$w(x), \quad x \in [0, L]. \quad (1.8)$$

On se place dans la configuration où l'on suppose que **la flexion prédomine le long de l'axe des  $x$ , comparativement aux déformations membranaires, aux déformations de cisaillement transverse, ou autres termes de flexion**. Les lois de la mécanique nous disent que le comportement en flexion de la plaque est gouverné par une relation entre le moment de flexion  $M$  et de la courbure  $\kappa$  du type

$$M = \mathbf{f}(\kappa)$$

que l'on appelle une loi de comportement (voir Annexe). La fonction  $\mathbf{f}$  dans la relation peut-être linéaire ou non suivant les modèles de comportement proposés.

### 1.4.2.2 Approximation de la courbure et du moment

Compte tenu de (1.1), la courbure  $\kappa(x)$  d'un point sur la courbe  $(x, w(x))_{x \in [0, L]}$  s'écrit <sup>1</sup>

$$\kappa(x) = \frac{-w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

où  $w'$  (respectivement  $w''$ ) est la dérivée première (respectivement seconde) de  $w$  par rapport à  $x$ . Dans le cas de petits déplacements, la dérivée  $w'$  est supposée très petite (par rapport à l'unité), et on obtient

$$\kappa(x) = -w''(x). \quad (1.9)$$

De la même façon, l'angle tangent  $\varphi$  est petit ce qui nous permet de supposer

$$\cos \varphi(u) \simeq 1$$

pour tout  $u \in [0, L]$ . D'après (1.3), le moment  $M(x)$  d'un point sur la courbe est donné par :

$$\begin{aligned} M(x) &= q \int_x^L \left| \int_x^t \cos \varphi(u) du \right| dt = q \int_x^L \left| \int_x^t du \right| dt \\ &= q \int_x^L |t - x| dt = \frac{q(t - x)^2}{2} \Big|_x^L = \frac{q(x - L)^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

### 1.4.2.3 Problème d'identification

Comme indiqué au début de ce chapitre, nous considérerons le comportement en flexion sur le renfort NCF :

- la masse surfacique est  $\rho = 0.568 \text{ g/m}^2$  et l'épaisseur  $e = 1.1 \text{ mm}$ ,
- la largeur des plaques testées est de  $10 \text{ mm}$ ,
- les longueurs de flexion  $L$  vont de  $80 \text{ mm}$  à  $200 \text{ mm}$  avec un pas de  $10 \text{ mm}$ .

Pour chaque longueur de flexion  $L$  fixée, on veut identifier les paramètres de chaque loi de comportement : pour cela les profils optimisés correspondant au modèle doivent être les plus proches possibles des profils expérimentaux. Nous utilisons (classiquement) une formulation par moindres carrés :

- Pour chaque modèle de comportement, on résout les équations suivantes :

$$M = f(\kappa), \quad M = \frac{q(x - L)^2}{2} \quad \text{et} \quad \kappa = -w''(x), \quad x \in [0, L]$$

avec les conditions aux limites ad-hoc. Cela donne la solution  $w$  sous la forme d'une fonction de  $x, S$  et  $L$  :

$$w = w(x, S, L)$$

---

1. dans notre étude nous considérons le cas où  $\kappa > 0$

où  $x \in [0, L]$  est la variable et  $S$  l'ensemble des paramètres du modèle de comportement apparus dans  $f$ . Nous avons alors une famille de fonctions  $w(x, S, L)_{S \in \mathcal{C}}$  où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble de contraintes sur  $S$ .

La formulation par moindres carrés permet de minimiser l'écart entre la fonction  $w(\cdot, S, L)$  issue du modèle et les données expérimentales. Nous introduisons donc ces données expérimentales et la formulation discrète du problème d'optimisation.

- Les **données expérimentales** (profils mesurés) sont de la forme d'un ensemble de  $N(L)$  points

$$(X, Z) = (x_i, z_i)_{1 \leq i \leq N(L)}$$

avec  $x_i \in [0, L]$  et  $z_i$  est la mesure de la flèche au point  $x_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, N(L)\}$ . On remarque expérimentalement que pour tous les profils mesurés,  $z_i \leq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N(L)$ , cela qui est tout-à-fait cohérent car les flèches sont toujours négatives. Désormais on notera  $N := N(L)$  pour simplifier.

- Les **données (discrètes) du modèle** sont

$$(X, W(S, L)) = (x_i, w_i(S, L))_{1 \leq i \leq N}$$

où  $w_i(S, L) := w(x_i, S, L)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N(L)\}$ . Une contrainte physique est la négativité des flèches et nous imposerons donc  $w_i \leq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N(L)\}$ .

- Enfin, pour chaque longueur de flexion  $L$ , nous définissons la fonction coût :

$$J(S) = \frac{1}{2} \sum_1^N (w(x_i, S, L) - z_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_1^N (w_i(S, L) - z_i)^2 = \frac{1}{2} \|W(S, L) - Z\|^2. \quad (1.11)$$

Le problème d'optimisation se formule de la manière suivante :

$$\min J(S), \quad S \in \mathcal{C}_L, \quad (1.12)$$

où  $\mathcal{C}_L$  est l'ensemble des contraintes que l'on précisera pour chaque modèle de comportement étudié.

## 1.5 Conclusion

Nous avons dans ce premier chapitre rappelé le contexte mécanique dans lequel s'inscrit notre travail et les objectifs par rapport aux travaux développés précédemment. Dans les chapitres suivants nous allons développer les stratégies mises en place pour résoudre le problème d'optimisation, pour respectivement les modèles de Grosberg et de Dahl.

## Chapitre 2

# Problèmes d'identification avec le modèle de Grosberg

### 2.1 Étude théorique du modèle

#### 2.1.1 Problème d'optimisation

On considère le modèle de Grosberg que nous rappelons ci-dessous. C'est un modèle à deux paramètres : le couple de friction  $M_0$  et la rigidité élastique  $B$ . La courbure  $\kappa$  et le moment  $M$  sont reliés par

$$\begin{cases} \kappa = 0 & \text{si } M \leq M_0, \\ M = M_0 + B \cdot |\kappa| & \text{si } M \geq M_0. \end{cases}$$

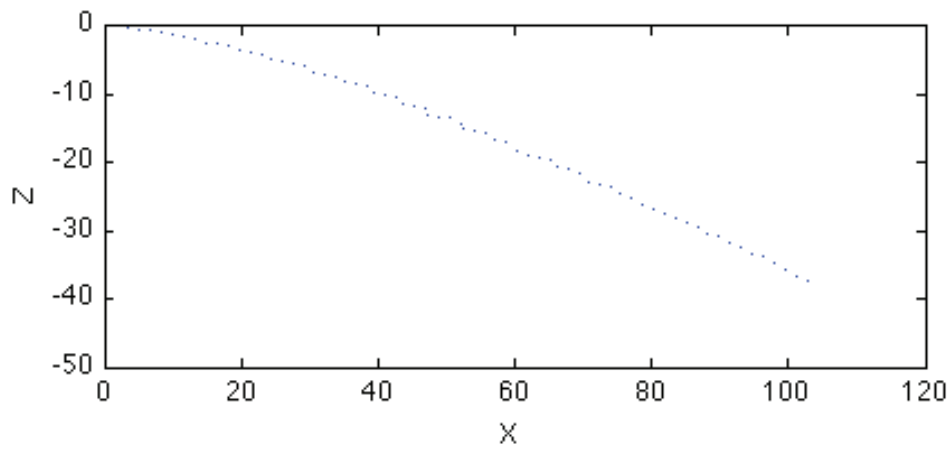
Le signe de la courbure  $\kappa$  indique la direction dans laquelle le vecteur tangent unitaire tourne en fonction du paramètre le long de la courbe. Si la tangente unitaire tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, alors  $\kappa > 0$ . Si elle tourne dans le sens contraire horaire, alors  $\kappa < 0$ . On remarque expérimentalement que dans notre cas  $\kappa > 0$ . On va donc imposer cette condition de sorte que  $|\kappa| = \kappa$ . Le modèle de Grosberg devient donc

$$\begin{aligned} \kappa &= 0 & \forall M \leq M_0, \\ M &= M_0 + B \cdot \kappa & \forall M \geq M_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

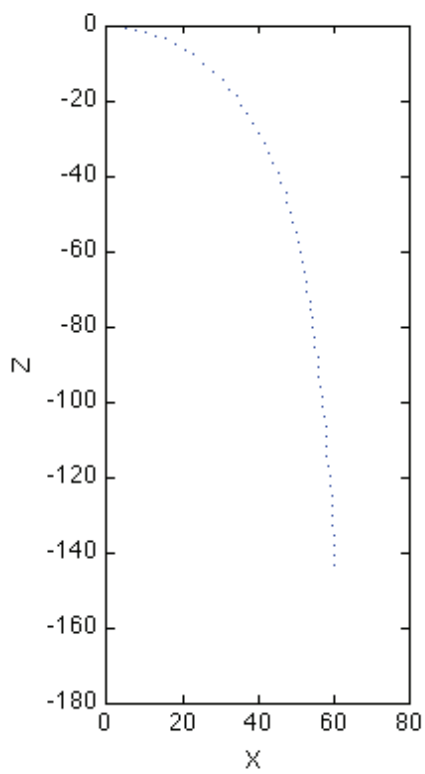
$M_0$  est le moment du point qui divise la courbe  $x \mapsto w(x)$  où  $w$  est le déplacement (flèche) en deux parties (droite donc de courbure nulle et courbe avec courbure positive). Nous redonnons ci-dessous des exemples de courbes expérimentales :

## 2.1. ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

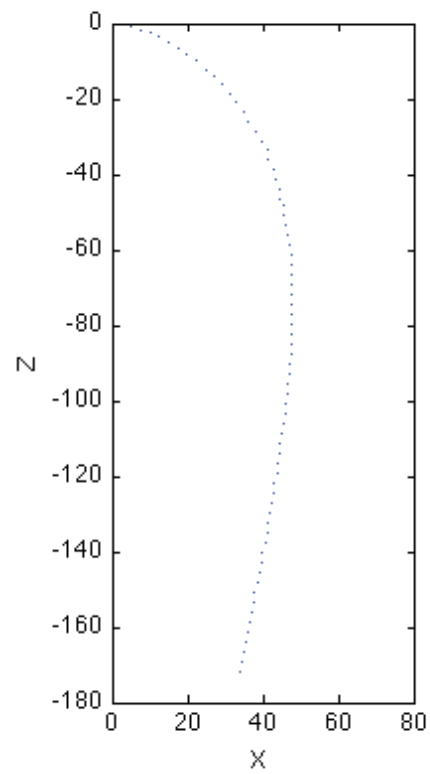
---



(a) Courbe expérimentale :  $L=110$  mm



(b) Courbe expérimentale :  $L=170$  mm



(c) Courbe expérimentale :  $L=200$  mm

FIGURE 2.1 – Courbes expérimentales pour différentes longueur de flexion  $L$

## 2.1. ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

Compte tenu de la relation (1.10), on a

$$M_0 \geq 0.$$

De plus, sur la partie courbe où  $M > M_0$ , la relation (2.1) nous donne

$$B = \frac{M - M_0}{\kappa} > 0.$$

Avec (1.9) et  $M = M_0 - B \cdot \kappa$ , on obtient

$$\kappa = \frac{M}{B} - \frac{M_0}{B}$$

et donc

$$w_{,xx} = -\frac{q}{2B}(x - L)^2 + \frac{M_0}{B}$$

où  $w$  est le déplacement vertical<sup>1</sup>.

Les conditions aux limites en  $x = 0$  sont les suivantes :

$$w = 0, \quad w_{,x} = 0. \quad (2.2)$$

Finalement

$$w = w(x, B, M_0, L) = -\frac{q}{24B}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2 - 12M_0) \quad (2.3)$$

sur la partie courbe où  $M > M_0$ , c'est-à-dire :

$$\frac{q}{2}(x - L)^2 > M_0 \Leftrightarrow |x - L| > \sqrt{\frac{2M_0}{q}} \Leftrightarrow x < L - \sqrt{\frac{2M_0}{q}}.$$

Soit  $L_c = L - \sqrt{\frac{2M_0}{q}}$ . Sur la partie droite où  $x \geq L_c$ , nous avons

$$w = w(x, B, M_0, L) = kx + p \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} w(L_c^+) &= w(L_c^-), \\ w'(L_c^+) &= w'(L_c^-) = k. \end{aligned}$$

Les données du modèle de Grosberg sont :

$$(X, W) = (x_i, w_i)_{1 \leq i \leq N}$$

avec

$$w_i = w(x_i, B, M_0, L)$$

---

1. nous adopterons les notations en usage dans la communauté des mécaniciens (voir Annexe), ici  $w_{,x}$  désigne la dérivée par rapport à  $x$  et  $w_{,xx}$  la dérivée seconde.

## 2.1. ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

défini soit par (2.3), soit par (2.4), selon les valeurs de  $x_i$ . Grâce aux données expérimentales, on constate que la partie droite est petite par rapport à la partie courbe, c'est-à-dire

$$L_c \simeq L.$$

On va donc supposer que la courbe n'a pas de partie droite. On a alors

$$\begin{aligned} w_i &= w(x_i, B, M_0, L) \\ &= -\frac{q}{24B}x_i^2(x_i^2 - 4Lx_i + 6L^2 - 12\frac{M_0}{q}) \\ &= \frac{x_i^2(M_0 - \alpha_i)}{2B} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où l'on a posé

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \alpha_i = \frac{q}{12}(x_i - 2L)^2 + \frac{qL^2}{6} > 0. \quad (2.6)$$

Soit  $\alpha := \min\{\alpha_i, 1 \leq i \leq N\}$ . Comme  $B > 0$ , on a

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad w_i \leq 0 \Leftrightarrow M_0 \leq \alpha. \quad (2.7)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} J(B, M_0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( w_i(B, M_0, L) - z_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i^2(M_0 - \alpha_i)}{2B} - z_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i^4 M_0^2}{4B^2} - \frac{x_i^4 M_0 \alpha_i}{2B^2} + \frac{x_i^4 \alpha_i^2}{4B^2} - \frac{x_i^2 M_0 z_i}{B} + \frac{x_i^2 \alpha_i z_i}{B} + z_i^2 \right) \\ &= a \frac{M_0^2}{B^2} - b \frac{M_0}{B^2} + \frac{c}{B^2} + d \frac{M_0}{B} - \frac{e}{B} + f \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec  $a, b, c, d, e, f > 0$  et définis par :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N x_i^4, & b &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N x_i^4 \alpha_i, & c &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N x_i^4 \alpha_i^2, \\ d &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 z_i, & e &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \alpha_i z_i, & f &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N z_i^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Le problème d'optimisation s'écrit donc

$$\begin{cases} \min J(B, M_0) = a \frac{M_0^2}{B^2} - b \frac{M_0}{B^2} + \frac{c}{B^2} + d \frac{M_0}{B} - \frac{e}{B} + f \\ B > 0 \\ 0 \leq M_0 \leq \alpha \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.1.2 Existence et unicité. Conditions d'optimalité

#### 2.1.2.1 Existence et unicité

Remarquons tout d'abord que nous ne sommes pas dans un cadre "classique" car :

- La fonction  $J$  n'est pas coercive. En effet,

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} J(B, 0) = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left( \frac{c}{B^2} - \frac{e}{B} + f \right) = f \neq +\infty.$$

- L'ensemble des contraintes

$$\mathcal{C} = \{B > 0; 0 \leq M_0 \leq \alpha\}$$

est non-vidé mais n'est ni borné, ni fermé.

On ne peut donc assurer directement l'existence de solutions du problème par des théorèmes généraux. Toutefois, nous allons montrer que l'on peut toujours rajouter des contraintes  $0 \leq B_m \leq B \leq B_M$ ,  $B_m$  très petit et  $B_M$  très grand, sans changer la solution du problème. L'ensemble des contraintes sera alors fermé et borné, ce qui garantira l'existence de solutions.

**Théorème 2.1.1.** *Il existe  $B_m > 0$  et  $B_M > 0$  tels que le problème (2.10) est équivalent au problème suivant :*

$$\begin{cases} \min J(B, M_0) = a \frac{M_0^2}{B^2} - b \frac{M_0}{B^2} + \frac{c}{B^2} + d \frac{M_0}{B} - \frac{e}{B} + f \\ B_m \leq B \leq B_M \\ 0 \leq M_0 \leq \alpha \end{cases} \quad (2.11)$$

*Démonstration* - Remarquons pour tout  $M_0 \in [0, \alpha]$  :

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow 0} J(B, M_0) &= \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i^2(M_0 - \alpha_i)}{2B} - z_i \right)^2 = +\infty, \\ \lim_{B \rightarrow +\infty} J(B, M_0) &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i^2(M_0 - \alpha_i)}{2B} - z_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N z_i^2 = f > 0. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout  $M_0 \in [0, \alpha]$ , pour tout  $C \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe des valeurs  $B_1 = B_1(M_0, C)$  et  $B_2 = B_2(M_0, \varepsilon)$  telles que :

$$\begin{aligned} J(B, M_0) &> C \quad \forall B < B_1(M_0, C), \\ J(B, M_0) &> f - \varepsilon \quad \forall B > B_2(M_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous allons montrer que  $B_1$  et  $B_2$  ne dépendent pas de  $M_0$ .

Soit  $i_M$  l'indice vérifiant  $\alpha_{i_M} = \max\{\alpha_i, 1 \leq i \leq N\}$  et posons

$$\delta = \alpha_{i_M} - \alpha = \max\{\alpha_i, 1 \leq i \leq N\} - \min\{\alpha_i, 1 \leq i \leq N\}.$$

## 2.1. ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

On remarque (expérimentalement) que  $\delta > 0$ . Par ailleurs, en éliminant tous les points  $(0, 0)$  dans les données expérimentales, on a  $x_{i_M} \neq 0$  et  $z_{i_M} < 0$ .

Pour tout  $M_0 \in [0, \alpha]$ , on obtient :

$$M_0 - \alpha_{i_M} \leq \alpha - \alpha_{i_M} = -\delta ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x_{i_M}^2 (M_0 - \alpha_{i_M})}{2B} - z_{i_M} \leq -\frac{x_{i_M}^2 \delta}{2B} - z_{i_M}. \quad (2.13)$$

Pour tout  $C \geq 0$

$$-\frac{x_{i_M}^2 \delta}{2B} - z_{i_M} < -\sqrt{2C}$$

et alors

$$\frac{x_{i_M}^2 \delta}{2B} > \sqrt{2C} - z_{i_M} > 0$$

d'où

$$B < \frac{x_{i_M}^2 \delta}{2(\sqrt{2C} - z_{i_M})}. \quad (2.14)$$

Posons

$$B_1 = \frac{x_{i_M}^2 \delta}{2(\sqrt{2C} - z_{i_M})} .$$

On voit que  $B_1$  ne dépend pas de  $M_0$  et que pour tout  $B < B_1$ , (2.13) et (2.14) nous donnent :

$$\begin{aligned} \frac{x_{i_M}^2 (M_0 - \alpha_{i_M})}{2B} - z_{i_M} &< -\sqrt{2C} \leq 0 , \\ \left( \frac{x_{i_M}^2 (M_0 - \alpha_{i_M})}{2B} - z_{i_M} \right)^2 &> 2C \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$J(B, M_0) > C. \quad (2.15)$$

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $|J(B, M_0) - f| < \varepsilon$  et donc

$$\left| \frac{aM_0^2 - bM_0 + c}{B^2} + \frac{dM_0 - e}{B} \right| < \varepsilon. \quad (2.16)$$

D'autre part, on constate que

$$\lambda = \max\{|aM_0^2 - bM_0 + c|, M_0 \in [0, \alpha]\} = c$$

et

$$\mu = \max\{|dM_0 - e|, M_0 \in [0, \alpha]\} = e.$$

En effet, compte tenu de (2.8),

$$g(M_0) := |aM_0^2 - bM_0 + c| = \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^4 (M_0 - \alpha_i)^2 \right| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^4 (M_0 - \alpha_i)^2,$$

## 2.1. ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

et donc

$$g'(M_0) = \sum_{i=1}^N x_i^4 (M_0 - \alpha_i) \leq 0, \quad \forall M_0 \in [0, \alpha].$$

Par conséquent, le maximum de  $g$  sur  $[0, \alpha]$  est atteint en  $M_0 = 0$  et

$$\lambda = g(0) = c.$$

De la même façon, pour tout  $M_0 \in [0, \alpha]$ ,

$$M_0 d - e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 (\alpha_i - M_0) z_i \leq 0 \quad (\text{car } z_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N),$$

ce qui entraîne

$$h(M_0) := |M_0 d - e| = e - M_0 d.$$

De plus  $h'(M_0) = -d < 0$ , et le maximum de  $h$  sur  $[0, \alpha]$  est donc atteint en  $M_0 = 0$  :

$$\mu = h(0) = e.$$

Finalement, pour tout  $M_0 \in [0, \alpha]$ , on a

$$\left| \frac{aM_0^2 - bM_0 + c}{B^2} \right| \leq \frac{c}{B^2} \quad (2.17)$$

et

$$\left| \frac{dM_0 - e}{B} \right| \leq \frac{e}{B}. \quad (2.18)$$

Posons

$$B_2 = \max \left\{ \sqrt{\frac{2c}{\varepsilon}}, \frac{2e}{\varepsilon} \right\}, \quad (2.19)$$

de sorte que

$$B > B_2 \implies \frac{c}{B^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{e}{B} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$B_2$  ne dépend pas de  $M_0$  et pour tout  $B > B_2$ , ce qui précède nous donne :

$$\begin{aligned} \left| \frac{aM_0^2 - bM_0 + c}{B^2} + \frac{dM_0 - e}{B} \right| &\leq \left| \frac{aM_0^2 - bM_0 + c}{B^2} \right| + \left| \frac{dM_0 - e}{B} \right| \leq \frac{c}{B^2} + \frac{e}{B} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Par suite, avec (2.16), nous obtenons

$$\forall B > B_2 \quad |J(B, M_0) - f| < \varepsilon$$

et en particulier

$$\forall B > B_2 \quad J(B, M_0) > f - \varepsilon.$$

## 2.1. ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

Enfin, pour finir la démonstration de l'existence on considère le point  $(\frac{2c}{e}, 0)$  :

$$J(\frac{2c}{e}, 0) = c \cdot \frac{e^2}{4c^2} - e \frac{e}{2c} + f = f - \frac{e^2}{4c} . \quad (2.20)$$

Posons

$$C = J(\frac{2c}{e}, 0) = f - \frac{e^2}{4c} \geq 0 ,$$

car la fonction  $J$  est positive. D'après ce qui précède, on peut trouver

$$B_m = \frac{x_{i_M}^2 \delta}{2 \left( \sqrt{2f - \frac{e^2}{2c}} - z_{i_M} \right)}$$

et

$$B_M = \max \left\{ \sqrt{\frac{2c}{\varepsilon}}, \frac{2e}{\varepsilon} \right\}$$

tels que

$$\forall (B, M_0) \in (0, B_m) \cup (B_M, +\infty) \times [0, \alpha] \quad J(B, M_0) > f - \frac{e^2}{4c} = J(\frac{2c}{e}, 0) .$$

Par conséquent  $(\frac{2c}{e}, 0)$  ne peut pas être un élément de  $(0, B_m) \cup (B_M, +\infty) \times [0, \alpha]$ . Donc

$$(\frac{2c}{e}, 0) \in [B_m, B_M] \times [0, \alpha] .$$

On a alors

$$\min \{ J(B, M_0) \mid B > 0; 0 \leq M \leq \alpha \} = \min \{ J(B, M_0) \mid B_m \leq B \leq B_M; 0 \leq M \leq \alpha \} .$$

Donc il existe  $B_m > 0$  et  $B_M > 0$  tels que le problème (2.10) est équivalent au problème (2.11) :

$$\begin{cases} \min J(B, M_0) = a \frac{M_0^2}{B^2} - b \frac{M_0}{B^2} + \frac{c}{B^2} + d \frac{M_0}{B} - \frac{e}{B} + f \\ B_m \leq B \leq B_M \\ 0 \leq M_0 \leq \alpha \end{cases}$$

qui admet au moins une solution.  $\square$

L'existence des solutions est donc prouvée. Toutefois, la fonction  $J$  n'est pas convexe, on ne peut donc assurer l'unicité.

### 2.1.2.2 Conditions d'optimalité

On considère désormais le problème suivant :

$$\begin{cases} \min J(B, M_0) = a \frac{M_0^2}{B^2} - b \frac{M_0}{B^2} + \frac{c}{B^2} + d \frac{M_0}{B} - \frac{e}{B} + f \\ B_m \leq B \leq B_M \\ 0 \leq M_0 \leq \alpha \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

## 2.1. ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

Le problème  $(\mathcal{P})$  est un problème d'optimisation avec contraintes en inégalité. Nous allons établir des conditions d'optimalité du premier ordre (conditions de Karush-Kuhn-Tucker, voir [3] par exemple).

Vérifions que les hypothèses d'obtention des relations de KKT sont satisfaites :

- L'ensemble des contraintes  $\mathcal{C} = [B_m, B_M] \times [0, \alpha]$  est fermé borné et non-vide donc le problème  $(\mathcal{P})$  admet au moins une solution  $(B^*, M_0^*) \in \mathcal{C}$  ;
- La régularité du point  $(B^*, M_0^*)$  est assurée avec le fait que l'intérieur  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  de l'ensemble  $\mathcal{C}$  est non-vide (condition de Slater) :

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}} = (B_m, B_M) \times (0, \alpha) \neq \emptyset.$$

D'après [3] (Théorème 3.2.5), si  $(B^*, M_0^*)$  est une solution optimale du problème, les conditions de KKT sont satisfaites. Nous les précisons ci-dessous.

**Définition 2.1.1.** *Le Lagrangien du problème  $(\mathcal{P})$  est la fonction définie par*

$$\mathcal{L}(B, M_0, \mu) = J(B, M_0) + \sum_{j=1}^4 \mu_j g_j(B, M_0)$$

avec

$$\begin{aligned} g_1(B, M_0) &= B - B_M, \quad g_2(B, M_0) = -B + B_m, \\ g_3(B, M_0) &= M_0 - \alpha \quad \text{et} \quad g_4(B, M_0) = -M_0. \end{aligned}$$

Dire que les conditions de KKT sont satisfaites équivaut à dire qu'il existe un multiplicateur de Lagrange  $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$  tel que

$$\forall j = 1, \dots, 4 \quad \mu_j^* \geq 0, \tag{2.21a}$$

$$\forall j = 1, \dots, 4 \quad g_j(B^*, M_0^*) \geq 0, \tag{2.21b}$$

$$\forall j = 1, \dots, 4 \quad \mu_j^* g_j(B^*, M_0^*) = 0, \tag{2.21c}$$

$$\nabla J(B^*, M_0^*) + \sum_{j=1}^4 \mu_j^* \nabla g_j(B^*, M_0^*) = 0, \tag{2.21d}$$

où  $\nabla J$  désigne le gradient de  $J$ . On peut aussi écrire la relation (2.21d) :

$$\nabla \mathcal{L}(B^*, M_0^*, \mu^*) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B}(B^*, M_0^*, \mu^*) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_0}(B^*, M_0^*, \mu^*) = 0.$$

Finalement, il existe  $\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^* \geq 0$  tels que

$$B_m \leq B^* \leq B_M, \quad 0 \leq M_0^* \leq \alpha, \tag{2.22a}$$

$$\mu_1^*(B^* - B_M) = 0, \quad \mu_2^*(-B^* + B_m) = 0, \quad \mu_3^*(M_0^* - \alpha) = 0, \quad -\mu_4^* M_0^* = 0, \tag{2.22b}$$

$$-\frac{2(aM_0^{*2} - bM_0^* + c)}{B^{*3}} - \frac{dM_0^* - e}{B^{*2}} + \mu_1^* - \mu_2^* = 0, \tag{2.22c}$$

$$\frac{2aM_0^* - b}{B^{*2}} + \frac{d}{B^*} + \mu_3^* - \mu_4^* = 0. \tag{2.22d}$$

## 2.2 Étude numérique

### 2.2.1 Identification des bornes $B_m$ , $B_M$

Tout d'abord, on va identifier les bornes des contraintes  $B_m \leq B \leq B_M$ , c'est-à-dire que l'on va trouver des valeurs de  $B_m$  et  $B_M$  telles que les solutions du problème (2.10) et du problème (2.11) sont les mêmes. Comme on l'a montré dans la démonstration du Théorème 2.1.1,  $B_m$  et  $B_M$  peuvent être calculés par

$$B_m = \frac{x_{i_M}^2 \delta}{2(\sqrt{2C} - z_{i_M})} \text{ et } B_M = \max \left\{ \sqrt{\frac{2c}{\varepsilon}}, \frac{2e}{\varepsilon} \right\},$$

avec  $C = f - \frac{e^2}{4c}$  et  $\varepsilon = \frac{e^2}{4c}$ . On a alors

$$B_m = \frac{x_{i_M}^2 \delta}{2\left(\sqrt{2f - \frac{e^2}{2c}} - z_{i_M}\right)} \text{ et } B_M = \max \left\{ \frac{2\sqrt{2c}}{e}, \frac{8c}{e} \right\} = \frac{8c}{e}.$$

Vu que l'on a supposé qu'il n'y a pas de partie droite dans la courbe, on rajoute les contraintes

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad x_i \leq L_c,$$

ce qui nous donne

$$M_0 \leq \frac{q}{2}(\max\{x_i, 1 \leq i \leq N\} - L)^2.$$

Soit

$$\beta = \min\left\{\alpha, \frac{q}{2}(\max\{x_i, 1 \leq i \leq N\} - L)^2\right\}.$$

Les contraintes sur  $M_0$  deviennent donc

$$0 \leq M_0 \leq \beta.$$

### 2.2.2 Méthode empirique

Pour fixer les idées on va d'abord tracer la surface  $(B, M_0) \mapsto J(B, M_0)$  sur le domaine correspondant  $[0, B_M] \times [0, \beta]$ , pour chaque  $L$  fixé. Comme les valeurs du domaine sont très petites ( $\beta \ll 1$  et  $B_M \ll 1$ ) nous allons faire un changement d'échelle pour éviter des erreurs importantes dans les calculs. On pose donc :

$$B = B' \times 10^{-5}, \quad M_0 = M'_0 \times 10^{-5},$$

et ici

$$(B', M'_0) \in [B'_m, B'_M] \times [0, \beta']$$

avec

$$\beta' = \beta \times 10^5, \quad B'_m = B_m \times 10^5, \quad B'_M = B_M \times 10^5.$$

## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE

De même, on considère la fonction  $J'$  définie par

$$J'(B', M'_0) := J(B, M_0).$$

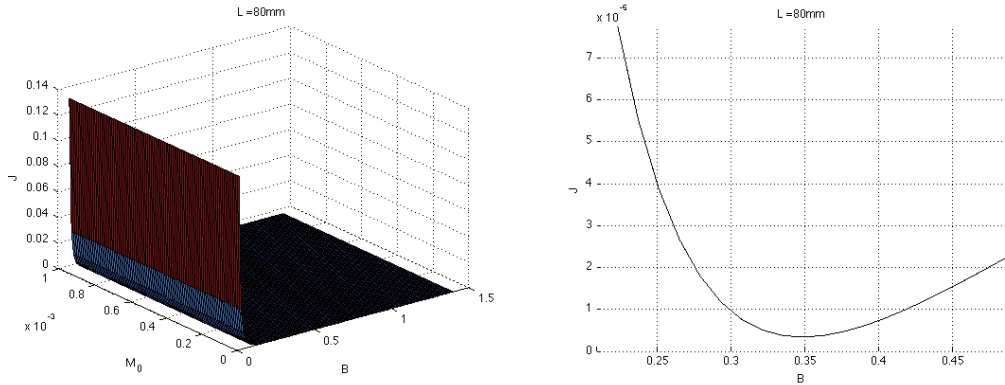
On définit de la même façon

$$\begin{aligned} a' &= a, & b' &= b \times 10^5, & c' &= c \times 10^{10}, \\ d' &= d, & e' &= e \times 10^5, & f' &= f, \end{aligned}$$

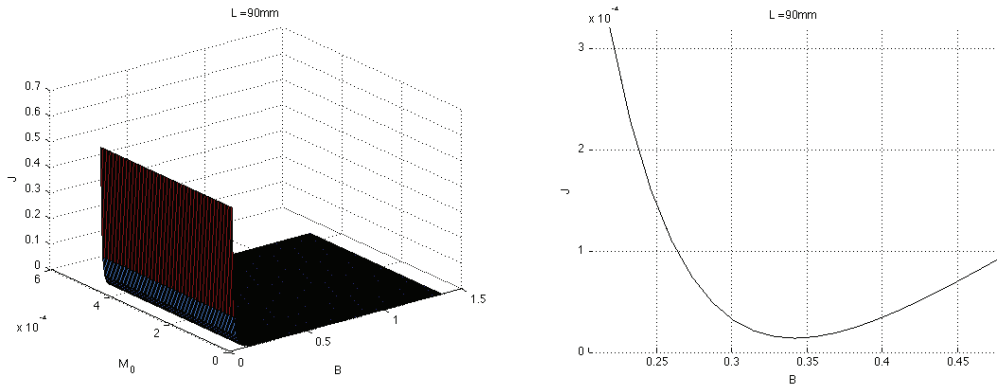
ce qui conduit à la formulation équivalente suivante du problème

$$\begin{cases} \min J'(B', M'_0) = a' \frac{M_0'^2}{B'^2} - b' \frac{M_0'}{B'^2} + \frac{c'}{B'^2} + d' \frac{M_0'}{B'} - \frac{e'}{B'} + f' \\ B'_m \leq B' \leq B'_M \\ 0 \leq M'_0 \leq \beta' \end{cases} \quad (\mathcal{P}')$$

Traçons maintenant les différentes surfaces (lorsque  $L$  varie) après ce changement d'échelle.



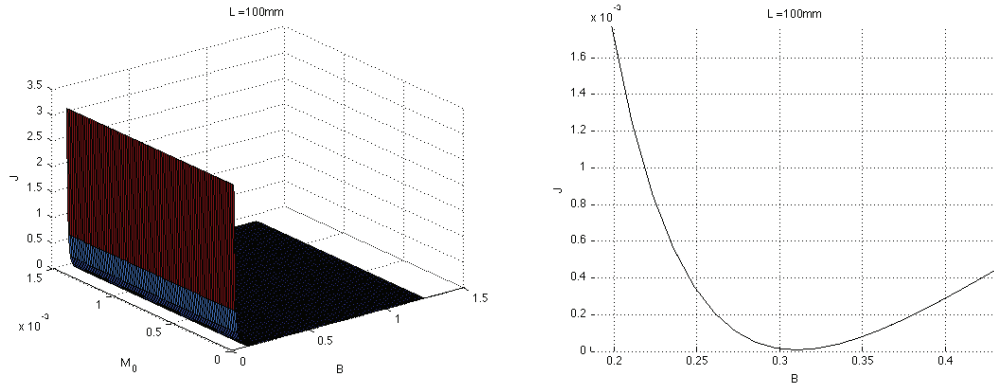
(a)  $L = 80$  cm



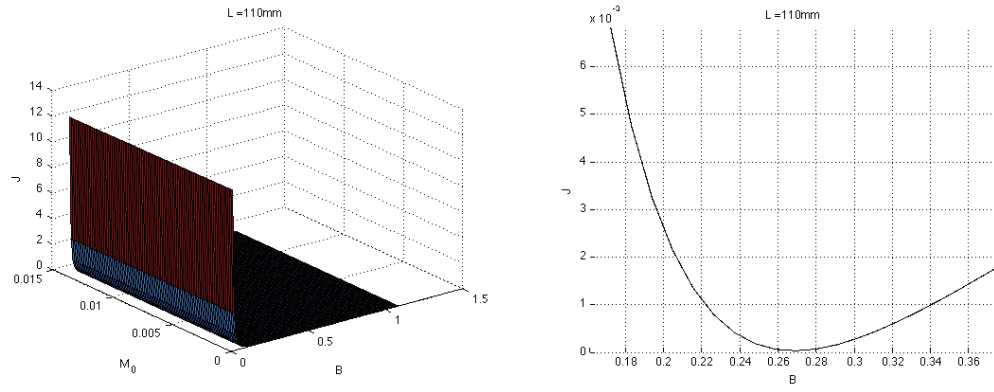
(b)  $L = 90$  cm

FIGURE 2.2 – Surfaces et lignes de niveau pour  $M_0$  petit,  $L = 80, 90$  mm.

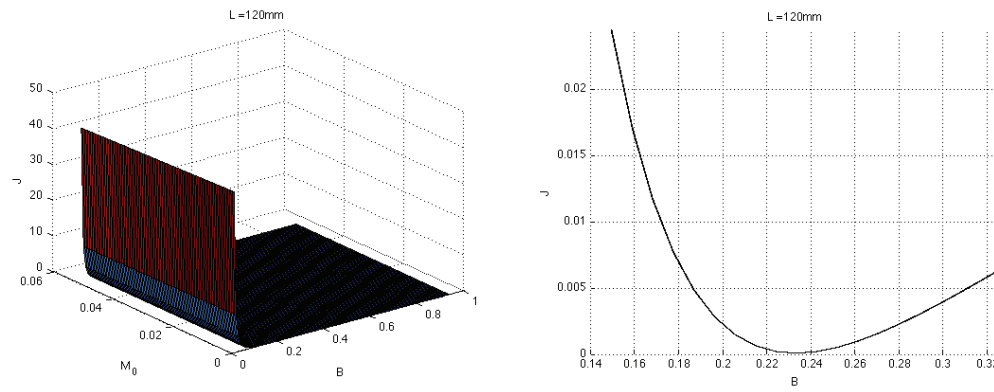
## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE



(a)  $L = 100 \text{ mm}$



(b)  $L = 110 \text{ mm}$



(c)  $L = 120 \text{ mm}$

FIGURE 2.3 – Surfaces et lignes de niveau pour  $M_0$  petit,  $L = 100 - 120 \text{ mm}$

## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE

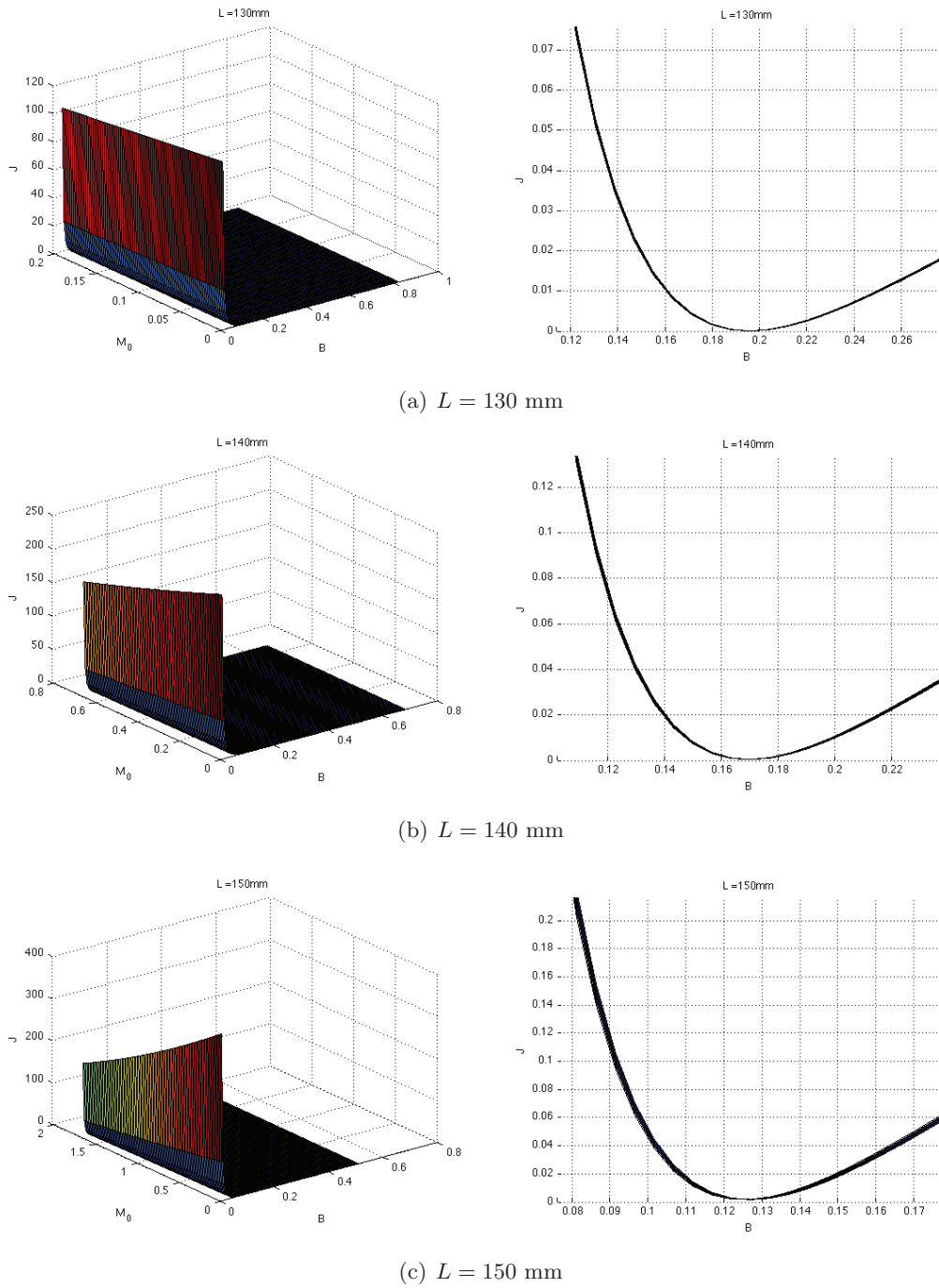
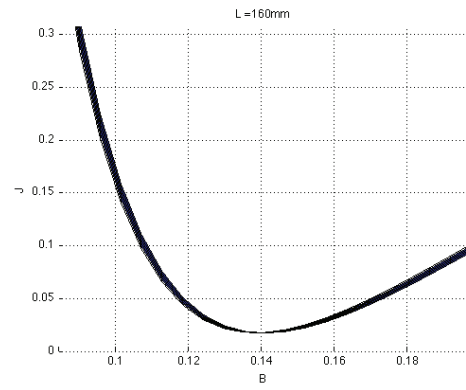
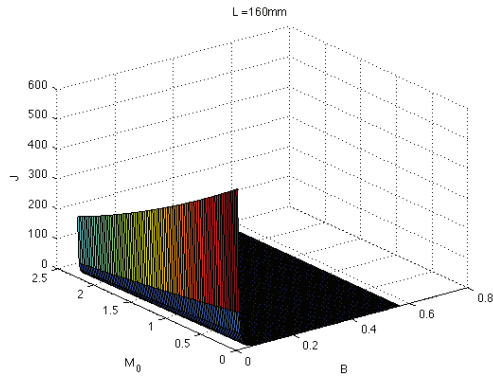
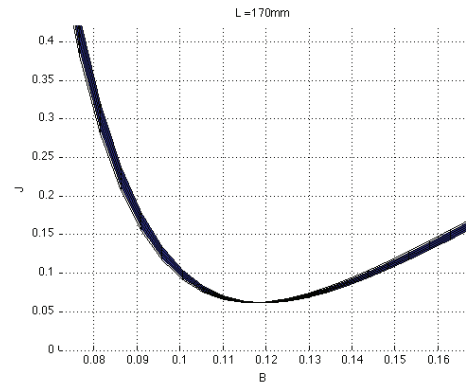
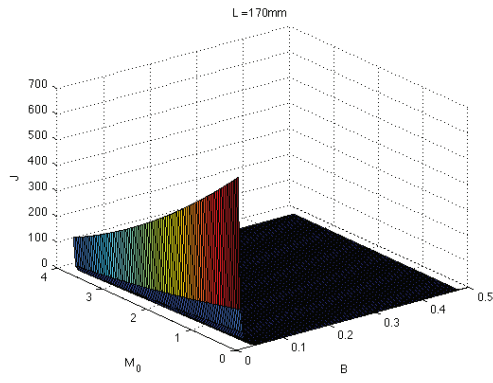


FIGURE 2.4 – Surfaces et lignes de niveau pour  $M_0$  petit,  $L = 130 - 150$  mm

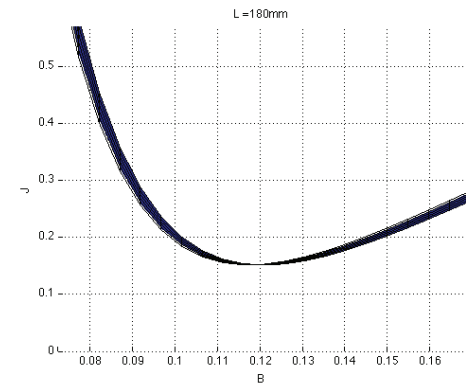
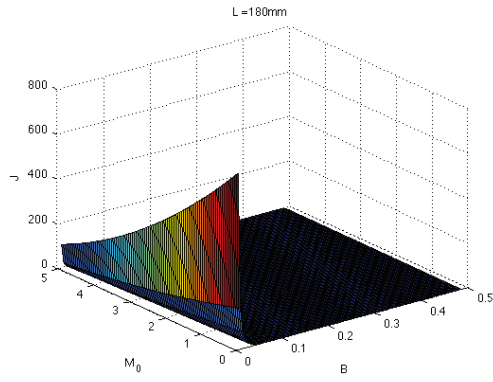
## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE



(a)  $L = 160 \text{ mm}$



(b)  $L = 170 \text{ mm}$



(c)  $L = 180 \text{ mm}$

FIGURE 2.5 – Surfaces et lignes de niveau pour  $M_0$  petit,  $L = 160 - 180 \text{ mm}$

## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE

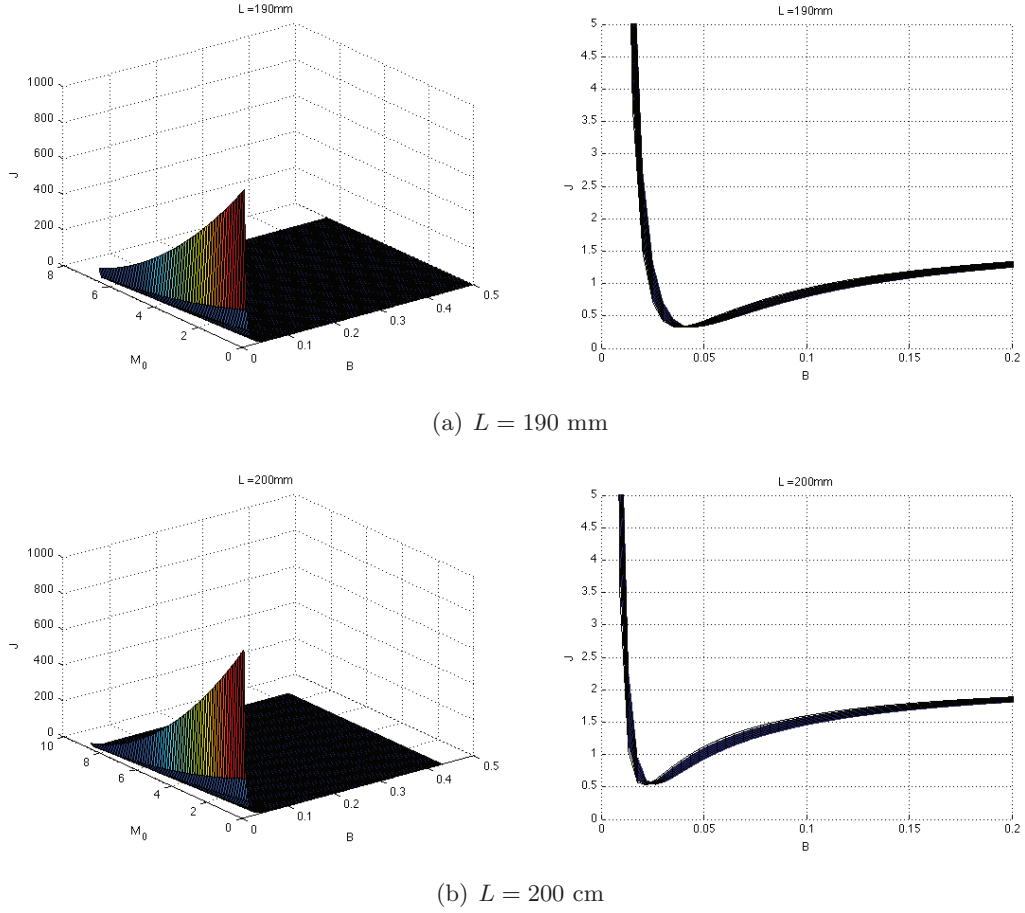


FIGURE 2.6 – Surfaces et lignes de niveau pour  $M_0$  petit,  $L = 190, 200$  mm.

Vu que l'ensemble des contraintes est un rectangle fermé dans  $\mathbb{R}^2$ , une méthode naturelle serait la méthode du gradient projeté. Mais en regardant sur les surfaces ci-dessus on constate qu'elles sont trop “plates” dans tous les cas. C'est pour cela que l'algorithme du gradient projeté ne converge pas, ce que nous avons constaté après plusieurs tests. Les autres méthodes testées (Uzawa, Newton projeté) ne fonctionnent pas non plus. Finalement, vu le petit nombre de données et la “petitesse” de l'ensemble des contraintes (même après le changement d'échelle), nous avons utilisé une méthode empirique.

- Choix de l'intervalle :  $\rho_B > 0$  pour  $B'$  et  $\rho_M > 0$  pour  $M'_0$ , on regarde la surface sur un quadrillage :  $[B'_m : \rho_B : B'_M] \times [0 : \rho_M : \beta']$
- Solution du problème ( $\mathcal{P}'$ ) : trouver un point  $(B', M'_0)$  sur le quadrillage pour que  $J(B', M'_0)$  soit minimale par comparaison des différentes valeurs ou par dichotomie :  $(B', M'_0)$  est une solution du problème ( $\mathcal{P}'$ ) avec l'erreur  $\varepsilon' = \max\{\rho_B, \rho_M\}$ .

## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE

---

- Solution du problème ( $\mathcal{P}$ ) : en posant  $B := B' \times 10^{-5}$ ,  $M_0 := M'_0 \times 10^{-5}$ .  
 $(B, M_0)$  est une solution du problème ( $\mathcal{P}$ ) avec l'erreur  $\varepsilon = \varepsilon' \times 10^{-5}$ .

### 2.2.3 Résultats numériques

Nous avons adopté les critères suivants :

- choix de l'intervalle :

$$\rho_B = \rho_M = 0.01 ;$$

- l'erreur  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = 0.01 \times 10^{-5} = 10^{-7} ;$$

- l'écart moyen  $\bar{r}$  :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |w(x_i, B, M_0, L) - z_i| \times 10^3 (\text{mm}).$$

Nous présentons ci-dessous les résultats numériques sur le renfort NCF :

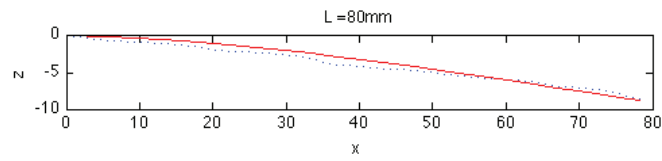
| L (mm)                      | 80     | 90     | 100     | 110     | 120     | 130     | 140    |
|-----------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $B$ (N.mm)                  | 0.0035 | 0.0034 | 0.0031  | 0.0027  | 0.0023  | 0.0020  | 0.0017 |
| $M_0$ ( $\times 10^{-5}$ N) | 0      | 0      | 0       | 0       | 0.0040  | 0.0060  | 0      |
| $\bar{r}$ (mm)              | 0.5214 | 0.7679 | 0.4391  | 0.7445  | 0.9314  | 0.6803  | 1.5796 |
| L (mm)                      | 150    | 160    | 170     | 180     | 190     | 200     | -      |
| $B$ (N.mm)                  | 0.0012 | 0.0014 | 0.0012  | 0.0012  | 0.0004  | 0.0002  | -      |
| $M_0$ ( $\times 10^{-5}$ N) | 0.0260 | 0      | 0       | 0.0030  | 0.6270  | 0.8560  | -      |
| $\bar{r}$ (mm)              | 3.0248 | 9.1645 | 16.3372 | 24.5473 | 34.4799 | 41.7402 | -      |

TABLE 2.1 – Résultats d'essais sur le renfort NCF - Modèle de Grosberg

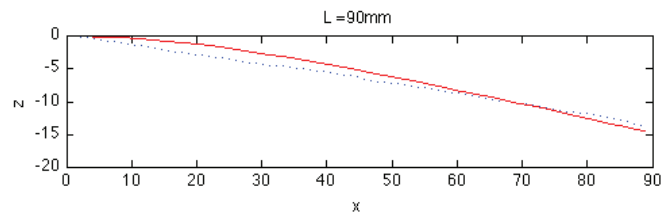
Les figures ci-dessous présentent les profils de flexion sur le renfort NCF pour les différentes longueurs pour le modèle de Grosberg.

## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE

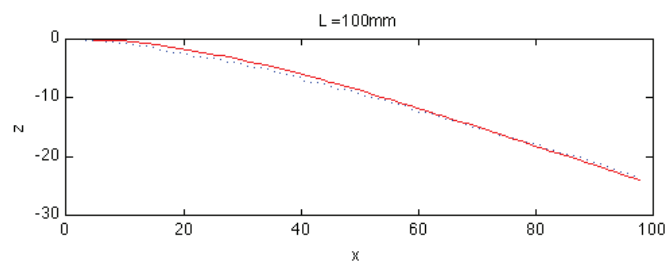
---



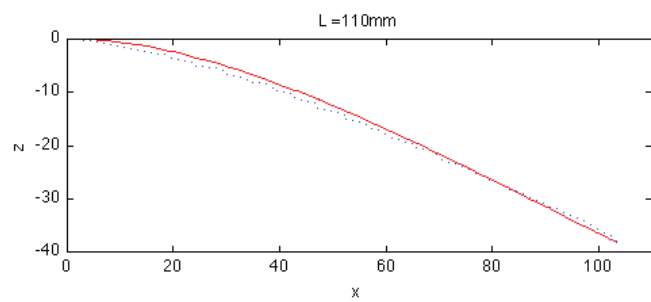
(a)  $L=80\text{ mm}$



(b)  $L=90\text{ mm}$



(c)  $L=100\text{ mm}$

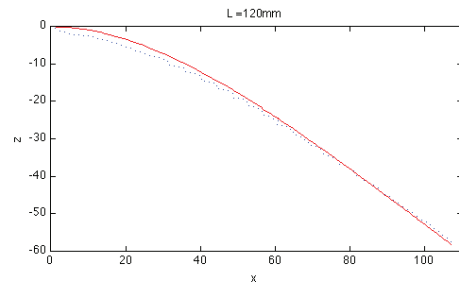


(d)  $L=110\text{ mm}$

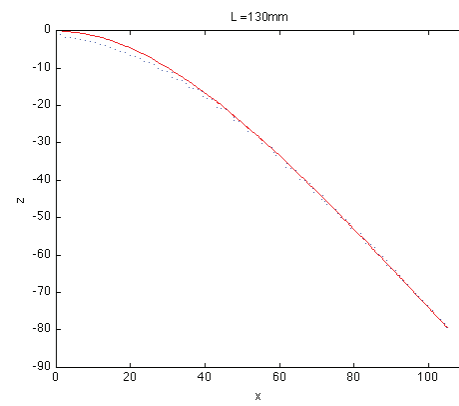
FIGURE 2.7 – Courbes expérimentales (en pointillés) et calculées (ligne continue) pour  $L = 80 - 110\text{ mm}$ .

## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE

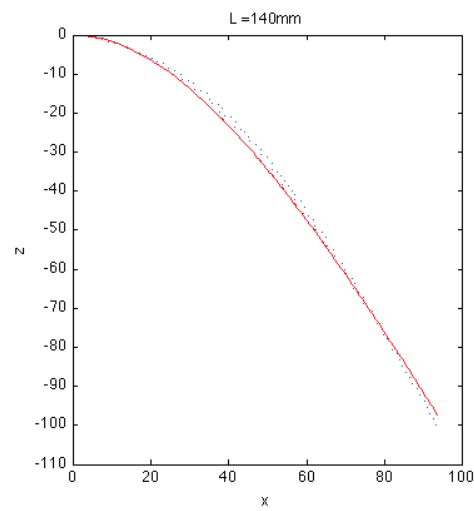
---



(a)  $L=120\text{ mm}$



(b)  $L=130\text{ mm}$



(c)  $L=140\text{ mm}$

FIGURE 2.8 – Courbes expérimentales (en pointillés) et calculées (ligne continue) pour  $L = 120 - 140\text{ mm}$ .

## 2.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE

---

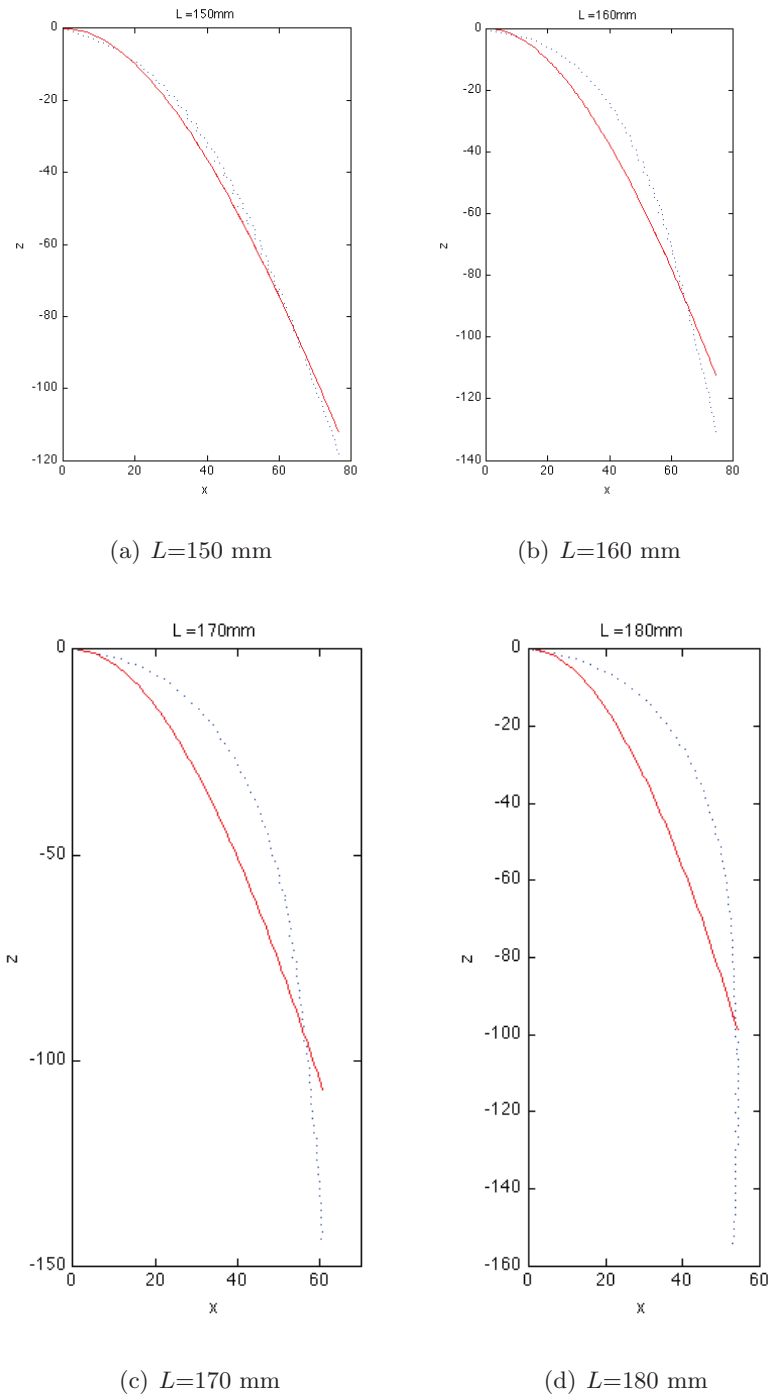


FIGURE 2.9 – Courbes expérimentales (en pointillés) et calculées (ligne continue) pour  $L = 150 - 180$  mm.

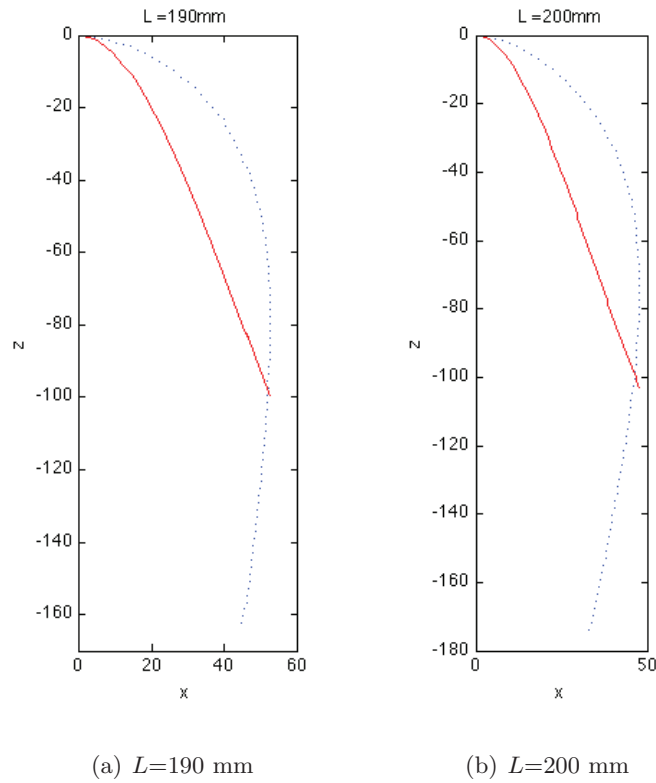


FIGURE 2.10 – Courbes expérimentales (en pointillés) et calculées (ligne continue) pour  $L = 190, 200\text{ mm}$ .

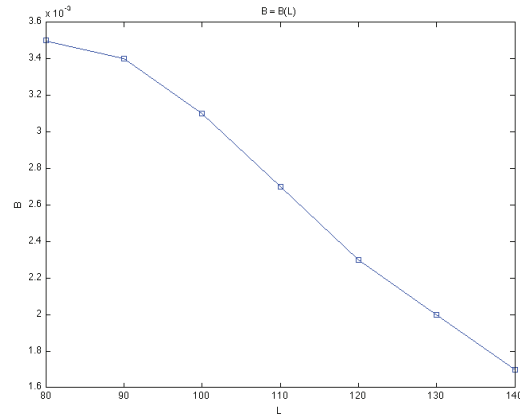
## 2.3 Validation du modèle

En regardant les figures ci-dessus, on constate que l'optimisation est très bonne sur les profils avec  $L \leq 140\text{ mm}$ . Elle ne l'est déjà plus pour  $L = 150\text{ mm}$  et elle est très mauvaise pour  $L$  plus grand. La valeur optimale de  $M_0$  est égale à 0 dans presque tous les cas, cela s'accorde avec le fait que l'on suppose qu'il n'y a pas de partie droite dans les courbures.

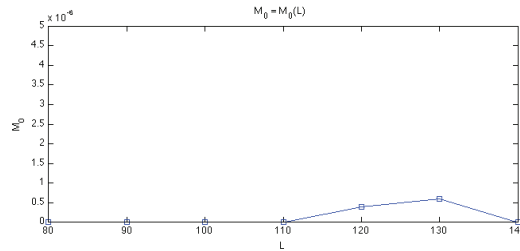
Dans ce qui suit on étudie les valeurs optimales de  $B$  et de  $M_0$  dans le cas où  $L \leq 140\text{ mm}$  pour voir si l'on peut établir des relations de  $B$  et de  $M_0$  en fonction de  $L$  :  $B = B(L)$  et  $M_0 = M_0(L)$ . On regarde l'évolution de chaque paramètre en fonction de  $L$ .

## 2.4. CONCLUSION

---



(a)  $B$  en fonction de  $L$



(b)  $M$  en fonction de  $L$

FIGURE 2.11 – Evolution de  $B$  et  $M$

Normalement, il faudrait résoudre le problème d'optimisation dans le cas général où la partie droite dans la courbure est prise en compte. Toutefois, vu la bonne optimisation dans le cas où  $L \leq 140$  mm et vu que le modèle n'est plus valide pour  $L > 140$  mm (alors que les données expérimentales confortent le fait qu'il n'y a pas de partie rectiligne), on n'étudiera plus ce modèle.

## 2.4 Conclusion

- Le modèle de Grosberg, sous l'hypothèse de L-K, est valide sur le renfort NCF pour les profils avec une longueur  $L$  assez petite, ici  $L \leq 140$  mm.
- L'optimisation n'est déjà plus bonne pour  $L = 150$  mm et très mauvaise pour  $L$  plus grand : le modèle n'est plus valide.

Il nous faut donc un modèle qui représente bien ce qui se passe lorsque  $L \geq 150$  mm et qui coïncide (si possible) avec le modèle Grosberg pour des petites longueurs. Un modèle répond partiellement à cette attente : le modèle de **Dahl** qui fait l'objet du chapitre suivant.

## 2.4. CONCLUSION

---

## Chapitre 3

# Problème d'identification avec le modèle de Dahl

Dans le chapitre précédent nous avons considéré le problème d'identification avec le modèle de Grosberg. Dans ce chapitre, nous considérons la deuxième loi de comportement qui correspond au modèle de Dahl.

La première partie est consacrée à l'étude théorique du modèle. Nous allons introduire le problème d'identification sous forme d'un problème d'optimisation non-linéaire avec contraintes d'inégalités. Nous montrerons ici l'existence du problème et constaterons que nous ne pouvons assurer l'unicité dans ce cas.

Dans un premier temps, on va faire une première étude numérique du problème pour avoir une idée *a priori* des solutions cherchées. Cela nous amène à un problème assez simple que l'on résoudra avec une méthode empirique comme dans le chapitre précédent.

Dans un deuxième temps, on formulera le problème sous forme de problème de contrôle optimal. Pour le résoudre, on considérera deux types de méthodes : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

### 3.1 Etude théorique du modèle

#### 3.1.1 Problème d'optimisation

Nous considérons le modèle de Dahl avec  $n = 1$  :

$$\frac{dM}{d\kappa} = B \left( 1 - \text{signe} \left( \frac{d\kappa}{dx} \right) \cdot \frac{M}{M_0} \right) \quad (3.1)$$

où  $M = M(x)$ ,  $\kappa = \kappa(x)$ . Nous ferons ici l'hypothèse physique qui vient de l'expérience (voir la figure ci-dessous) : quand la courbure  $\kappa$  est croissante, le moment de flexion  $M$  l'est aussi.

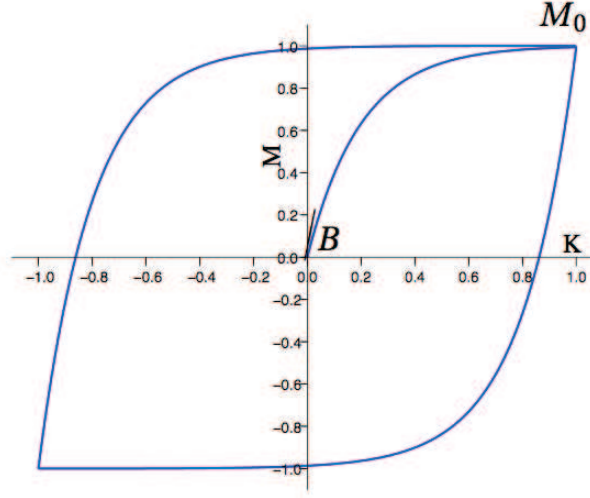


FIGURE 3.1 – Modèle de comportement moment-courbure de Dahl

Cela nous donne

$$\frac{dM}{d\kappa} > 0. \quad (3.2)$$

De plus  $|M| \leq |M_0|$  dans tous les cas et on a donc

$$\forall x \in [0, L] \quad 1 - \text{signe}\left(\frac{d\kappa}{dx}\right) \cdot \frac{M}{M_0} > 0. \quad (3.3)$$

Par conséquent

$$B > 0.$$

Par ailleurs, le problème mécanique que l'on considère correspond à la période où le matériau est chargé. On a alors

$$M_0 > 0.$$

Rappelons que

$$M = \frac{q}{2}(x - L)^2.$$

Comme  $M_0$  est le moment de flexion **maximal** de la plaque, on a pour tout  $x \in [0, L]$ ,  $M_0 \geq \frac{q(x - L)^2}{2}$ , et donc en particulier

$$M_0 \geq \frac{qL^2}{2} := \alpha(L). \quad (3.4)$$

Compte tenu de (3.1),

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dx}{d\kappa} &= B \left( 1 - \text{signe}\left(\frac{d\kappa}{dx}\right) \cdot \frac{M}{M_0} \right) \\ q(x - L) \cdot \frac{dx}{d\kappa} &= B \left( 1 - \text{signe}\left(\frac{d\kappa}{dx}\right) \cdot \frac{q(x - L)^2}{2M_0} \right) \\ \frac{d\kappa}{dx} &= \frac{q(x - L)}{B \left( 1 - \text{signe}\left(\frac{d\kappa}{dx}\right) \cdot \frac{q(x - L)^2}{2M_0} \right)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.1. ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

Remarquons que

$$\forall x \in [0, L[ \quad \frac{q(x-L)}{B} < 0.$$

Avec (3.3) et (3.5) nous avons  $\frac{d\kappa}{dx} < 0$ , on obtient donc

$$\frac{d\kappa}{dx}(x) = \frac{q(x-L)}{B \left(1 + \frac{q(x-L)^2}{2M_0}\right)}, \quad x \in [0, L[.$$

Par conséquent, en utilisant la condition  $\kappa(L) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= - \int_x^L \frac{q(s-L)}{B \left(1 + \frac{q(s-L)^2}{2M_0}\right)} ds \\ &= - \frac{M_0}{B} \int_x^L \frac{d \left(1 + \frac{q(s-L)^2}{2M_0}\right)}{1 + \frac{q(s-L)^2}{2M_0}} \\ &= - \frac{M_0}{B} \ln \left(1 + \frac{q(s-L)^2}{2M_0}\right) \Big|_x^L \\ &= \frac{M_0}{B} \ln \left(1 + \frac{q(x-L)^2}{2M_0}\right). \end{aligned}$$

On a alors

$$\forall x \in [0, L] \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, B, M_0) = - \frac{M_0}{B} \ln \left(1 + \frac{q(x-L)^2}{2M_0}\right). \quad (3.6)$$

Rappelons qu'ici  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  est le déplacement vertical de la surface moyenne. Désormais nous noterons  $M_0$  par  $M$  pour simplifier les notations.

Nous allons maintenant résoudre l'équation (3.6) avec les conditions initiales :

$$w(0, B, M) = 0, \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, B, M) = 0. \quad (3.7b)$$

Remarquons tout d'abord que grâce à ces conditions, la fonction  $w$  est bien négative pour tout  $x \in ]0, L]$ . En effet, compte tenu de (3.6),

$$\forall x \in [0, L] \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, B, M) \leq 0$$

$\frac{\partial w}{\partial x}$  décroît sur  $[0, L]$ . Avec (3.7b), on a

$$\forall x \in [0, L] \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x, B, M) \leq 0.$$

De la même façon et avec (3.7a), on obtient

$$\forall x \in [0, L] \quad w(x, B, M) \leq 0.$$

### 3.1. ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

Grâce à  $\frac{\partial w}{\partial x}(0, B, M) = 0$ , nous avons

$$\forall x \in ]0, L[ \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x, B, M) = -\frac{M}{B} \int_0^x \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) du.$$

En utilisant l'intégrale

$$\int \ln(1+t^2)dt = t \ln(1+t^2) + 2 \arctan t - 2t + C,$$

avec le changement de variable  $t = \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) du \\ &= \sqrt{\frac{2M}{q}} \int \ln(1+t^2)dt \\ &= \sqrt{\frac{2M}{q}} t \ln(1+t^2) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan t - 2\sqrt{\frac{2M}{q}} t + C \\ &= (u-L) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L) \right) - 2(u-L) + C \\ &= (u-L) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L) \right) - 2u + C. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(x, B, M) &= -\frac{M}{B} \int_0^x \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) du \\ &= -\frac{M}{B} \left[ (u-L) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L) \right) - 2u \right] \Big|_0^x \\ &= -\frac{M}{B} \left[ (x-L) \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(x-L) \right) - 2x \right. \\ &\quad \left. + L \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}L \right) \right]. \end{aligned}$$

### 3.1. ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

Par conséquent, compte tenu de (3.7a), on a

$$\begin{aligned}
& w(x, B, M) \\
&= -\frac{M}{B} \int_0^x \left[ (u-L) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L) \right) - 2u \right. \\
&\quad \left. + L \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}L \right) \right] du \\
&= -\frac{M}{B} \left[ \int_0^x (u-L) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) du + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \int_0^x \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L) \right) du \right. \\
&\quad \left. - x^2 + L \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) x + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}L \right) x \right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégrale

$$\int t \ln(1+t^2) dt = \frac{1}{2}(1+t^2) \ln(1+t^2) - \frac{t^2}{2} + C,$$

avec  $t = \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \int (u-L) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) du \\
&= \frac{2M}{q} \int t \ln(1+t^2) dt \\
&= \frac{2M}{q} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) - \frac{q(u-L)^2}{4M} + C \right] \\
&= \frac{M}{q} \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) - \frac{(u-L)^2}{2} + C.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Avec  $t = \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L)$ , dans l'intégrale

$$\int \arctan t dt = t \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \int \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L) \right) du \\
&= \sqrt{\frac{2M}{q}} \int \arctan t dt \\
&= \sqrt{\frac{2M}{q}} \left( t \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right) \\
&= (u-L) \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(u-L) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2M}{q}} \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) + C.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Compte tenu de (3.8) et (3.9), nous avons

$$\begin{aligned}
 w(x, B, M) &= -\frac{M}{B} \left[ \int_0^x (u-L) \ln \left( 1 + \frac{q(u-L)^2}{2M} \right) du \right. \\
 &\quad + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \int_0^x \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} (u-L) \right) du \\
 &\quad \left. - x^2 + L \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) x + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} L \right) x \right] \\
 &= -\frac{M}{B} \left[ \frac{M}{q} \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) - \frac{(x-L)^2}{2} \right. \\
 &\quad - \frac{M}{q} \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) + \frac{L^2}{2} \\
 &\quad + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \left( (x-L) \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} (x-L) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{2M}} \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) \right. \\
 &\quad \left. - L \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} L \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2M}{q}} \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) \right) - x^2 \\
 &\quad \left. + L \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) x + 2\sqrt{\frac{2M}{q}} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} L \right) x \right] \\
 &= \frac{1}{B} \left[ -\frac{M^2}{q} \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) - \frac{M(x-L)^2}{2} \right. \\
 &\quad + \frac{M^2}{q} \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) - \frac{ML^2}{2} \\
 &\quad - 2M \sqrt{\frac{2M}{q}} (x-L) \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} (x-L) \right) \\
 &\quad + \frac{2M^2}{q} \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) + 2M \sqrt{\frac{2M}{q}} L \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} L \right) \\
 &\quad - \frac{2M^2}{q} \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) + Mx^2 \\
 &\quad \left. - MLx \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) - 2M \sqrt{\frac{2M}{q}} x \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} L \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{B} \left[ -\frac{M}{2}(x-L)^2 \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) + \frac{M^2}{q} \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{M}{2} L^2 \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) - \frac{M^2}{q} \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) - MLx \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) \\
 &\quad - 2M \sqrt{\frac{2M}{q}} (x-L) \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} (x-L) \right) \\
 &\quad \left. - 2M \sqrt{\frac{2M}{q}} (x-L) \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} L \right) + \frac{3M}{2} x^2 - MLx \right].
 \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$w(x, B, M) = \frac{1}{B} f(x, M) \quad (3.10)$$

où l'on a défini

$$\begin{aligned}
 f(x, M) &:= \left( -\frac{M}{2}(x-L)^2 + \frac{M^2}{q} \right) \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{M}{2} L^2 - \frac{M^2}{q} - MLx \right) \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) \\
 &\quad - 2M \sqrt{\frac{2M}{q}} (x-L) \left( \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} (x-L) \right) + \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}} L \right) \right) \\
 &\quad + \frac{3M}{2} x^2 - MLx.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Donnons quelques propriétés de la fonction  $f$  ainsi définie. Tout d'abord, d'après (3.10) et comme  $w \leq 0$  et  $B > 0$ , cette fonction est toujours **négative**.

**Proposition 3.1.1.** *Pour tout  $x \in ]0, L[$  fixé, la fonction  $f_x : M \mapsto f(x, M)$  définie pour  $M \geq 0$ , est négative, vérifie  $f_x(0) = 0$  et admet le développement asymptotique suivant au voisinage de  $+\infty$  :*

$$f_x(M) = u_o(x) + \frac{1}{M} u_1(x) + o\left(\frac{1}{M}\right) \quad (3.12)$$

où on a posé

$$\begin{aligned}
 u_o(x) &:= -\frac{q(x-L)^4}{24} + \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^3x}{6}, \\
 u_1(x) &:= \frac{q^2(x-L)^6}{240} - \frac{q^2L^6}{240} + \frac{q^2L^5x}{40}.
 \end{aligned}$$

En particulier

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} f_x(M) = u_o(x).$$

### 3.1. ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $f_x(0) = 0$ . En effet, la fonction arctan est bornée et les fonctions polynômiales de degré 2 convergent vers 0 plus vite que la fonction logarithme.

Pour étudier le comportement de  $f$  lorsque  $M \rightarrow +\infty$  on fait un développement asymptotique au voisinage de  $+\infty$ . On a

$$\ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right) = \frac{q(x-L)^2}{2M} - \frac{q^2(x-L)^4}{8M^2} + \frac{q^3(x-L)^6}{24M^3} - \frac{q^4(x-L)^8}{32M^4} + o \left( \frac{1}{M^4} \right)$$

$$\text{et } \ln \left( 1 + \frac{qL^2}{2M} \right) = \frac{qL^2}{2M} - \frac{q^2L^4}{8M^2} + \frac{q^3L^6}{24M^3} - \frac{q^4L^8}{32M^4} + o \left( \frac{1}{M^4} \right).$$

De même

$$\begin{aligned} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}(x-L) \right) &= \sqrt{\frac{q}{2M}}(x-L) - \sqrt{\frac{q}{2M}} \frac{q}{2M} \frac{(x-L)^3}{3} \\ &\quad + \sqrt{\frac{q}{2M}}(x-L) - \sqrt{\frac{q}{2M}} \frac{q}{2M} \frac{(x-L)^3}{3} \\ &\quad + \sqrt{\frac{q}{2M}} \left( \frac{q}{2M} \right)^2 \frac{(x-L)^5}{5} - \sqrt{\frac{q}{2M}} \left( \frac{q}{2M} \right)^3 \frac{(x-L)^7}{7} \\ &\quad + o \left( \frac{1}{M^3\sqrt{M}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \arctan \left( \sqrt{\frac{q}{2M}}L \right) &= \sqrt{\frac{q}{2M}}L - \sqrt{\frac{q}{2M}} \frac{q}{2M} \frac{L^3}{3} + \sqrt{\frac{q}{2M}} \left( \frac{q}{2M} \right)^2 \frac{L^5}{5} \\ &\quad - \sqrt{\frac{q}{2M}} \left( \frac{q}{2M} \right)^3 \frac{L^7}{7} + o \left( \frac{1}{M^3\sqrt{M}} \right). \end{aligned}$$

Donc  $f(x, M) =$

$$\begin{aligned} &\left( -\frac{M}{2}(x-L)^2 + \frac{M^2}{q} \right) \left( \frac{q(x-L)^2}{2M} - \frac{q^2(x-L)^4}{8M^2} + \frac{q^3(x-L)^6}{24M^3} - \frac{q^4(x-L)^8}{32M^4} + o \left( \frac{1}{M^4} \right) \right) \\ &+ \left( \frac{ML^2}{2} - \frac{M^2}{q} - MLx \right) \left( \frac{qL^2}{2M} - \frac{q^2L^4}{8M^2} + \frac{q^3L^6}{24M^3} - \frac{q^4L^8}{32M^4} + o \left( \frac{1}{M^4} \right) \right) \\ &- 2M(x-L) \left( (x-L) - \frac{q}{2M} \frac{(x-L)^3}{3} + \left( \frac{q}{2M} \right)^2 \frac{(x-L)^5}{5} - \left( \frac{q}{2M} \right)^3 \frac{(x-L)^7}{7} + o \left( \frac{1}{M^3} \right) \right) \\ &- 2M(x-L) \left( L - \frac{q}{2M} \frac{L^3}{3} + \left( \frac{q}{2M} \right)^2 \frac{L^5}{5} - \left( \frac{q}{2M} \right)^3 \frac{L^7}{7} + o \left( \frac{1}{M^3} \right) \right) \\ &+ \frac{3M}{2}x^2 - MLx + o \left( \frac{1}{M^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{q(x-L)^4}{4} + \frac{M(x-L)^2}{2} + \frac{q^2(x-L)^6}{16M} - \frac{q(x-L)^4}{8} \\
 &\quad - \frac{q^3(x-L)^8}{48M^2} + \frac{q^2(x-L)^6}{24M} - \frac{q^3(x-L)^8}{32M^2} \\
 &\quad + \left( \frac{qL^4}{4} - \frac{L^2M}{2} - \frac{qL^3x}{2} - \frac{q^2L^6}{16M} + \frac{qL^4}{8} + \frac{q^2L^5x}{8M} + \frac{q^3L^8}{48M^2} - \frac{q^2L^6}{24M} - \frac{q^3L^7x}{24M^2} + \frac{q^3L^8}{32M^2} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{q(x-L)^4}{3} - \frac{q^2(x-L)^6}{10M} + \frac{q^3(x-L)^8}{28M^2} - 2M(x-L)^2 \right) \\
 &\quad + \left( \frac{qL^3(x-L)}{3} - \frac{q^2L^5(x-L)}{10M} + \frac{q^3L^7(x-L)}{28M^2} - 2ML(x-L) \right) \\
 &\quad + \frac{3Mx^2}{2} - MLx + o\left(\frac{1}{M^2}\right) \\
 &= -\frac{q(x-L)^4}{24} + \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^3x}{6} + \frac{1}{M} \left( -\frac{q^2(x-L)^6}{240} - \frac{q^2L^6}{240} + \frac{q^2L^5x}{40} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{M^2} \left( -\frac{11q^3(x-L)^8}{672} + \frac{11q^3L^8}{672} + \frac{q^3L^7x}{28} \right) + o\left(\frac{1}{M^2}\right)
 \end{aligned}$$

La fonction  $f(x, M)$  s'écrit alors avec les notations de la proposition 3.1.1 et

$$\begin{aligned}
 u_2(x) &:= -\frac{11q^3(x-L)^8}{672} + \frac{11q^3L^8}{672} + \frac{q^3L^7x}{28}, \\
 f(x, M) &= u_o(x) + \frac{1}{M}u_1(x) + \frac{1}{M^2}u_2(x) + o\left(\frac{1}{M^2}\right). \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, nous posons

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$$

et

$$F(M) = (f(x_1, M), f(x_2, M), \dots, f(x_N, M)) \tag{3.14}$$

de sorte que

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{B} f(x_i, M) - z_i \right)^2 = \left\| \frac{1}{B} F(M) - Z \right\|^2,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^N$ .

Le problème naturel est donc le problème  $(\mathcal{P}_d^q)$  suivant :

$$\begin{cases} \min_{(B, M)} J(B, M) = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{B} F(M) - Z \right\|^2 \\ B > 0, \quad M \geq \alpha \end{cases} \tag{\mathcal{P}_d^q}$$

### 3.1. ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

où on a posé  $\alpha := \frac{qL^2}{2}$  en raison de la contrainte (3.4).

On ne sait pas montrer l'existence de ce problème a priori car la fonctionnelle n'est pas coercive et l'ensemble des contraintes n'est pas borné (ni fermé). On va donc, dans un premier temps borner l'ensemble des contraintes de manière arbitraire. On va montrer qu'il faut seulement borner  $M$  par  $M \leq \beta$ . Comme  $M$  est le moment de flexion maximal de la plaque, on peut toujours avoir des valeurs *a priori* de ce paramètre à partir des essais expérimentaux et choisir  $\beta$  en conséquence. Le problème que nous considérons est donc le suivant

$$\begin{cases} \min_{(B,M)} J(B, M) = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{B} F(M) - Z \right\|^2 \\ B > 0, \alpha \leq M \leq \beta \end{cases} \quad (\mathcal{P}_d)$$

Si on pose  $b = \frac{1}{B}$ , une forme équivalente de ce problème est

$$\begin{cases} \min_{(b,M)} J_b(b, M) := \frac{1}{2} \|bF(M) - Z\|^2 \\ b \geq 0, \alpha \leq M \leq \beta. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_d)$$

#### 3.1.2 Existence et unicité

**Théorème 3.1.1.** *Le problème  $(\mathcal{P}_d)$  admet une solution  $(B^*, M^*)$  où  $M^*$  est une solution de*

$$\begin{cases} \max_M \tilde{J}(M) := \left\langle \frac{F(M)}{\|F(M)\|}, Z \right\rangle^2 \\ \alpha \leq M \leq \beta \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{P}}_d)$$

et

$$B^* = \frac{\|F(M^*)\|^2}{\langle F(M^*), Z \rangle}.$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^N$ .

*Démonstration.* Supposons que  $(B^*, M^*)$  est une solution de  $(\mathcal{P}_d)$ .

Le couple  $(b^* := \frac{1}{B^*}, M^*)$  est alors un point stationnaire et vérifie

$$\forall b \geq 0, \forall M \in [\alpha, \beta] \quad \nabla J_b(b^*, M^*)(b - b^*, M - M^*) \geq 0,$$

car  $J$  est dérivable. En particulier

$$\forall b \geq 0 \quad \frac{\partial J_b}{\partial b}(b^*, M^*)(b - b^*) \geq 0. \quad (3.15)$$

Supposons que  $b^* > 0$  alors (3.3.1) devient

$$\frac{\partial J_b}{\partial b}(b^*, M^*) = 0.$$

Comme

$$J_b(b, M) = \frac{1}{2} \|bF(M) - Z\|^2 = \frac{1}{2} \|F(M)\|^2 b^2 - \langle F(M), Z \rangle b + \frac{1}{2} \|Z\|^2$$

### 3.1. ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

on obtient alors

$$b^* = \frac{\langle F(M^*), Z \rangle}{\|F(M^*)\|^2} \text{ car } M^* \neq 0.$$

Plus généralement, pour chaque  $M > \alpha$  fixé, le problème

$$\min_{b \geq 0} J_b(b, M)$$

admet une solution unique

$$b(M) = \frac{\langle F(M), Z \rangle}{\|F(M)\|^2} \quad (3.16)$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} \min_{b \geq 0} J_b(b, M) &= J_b(b(M), M) \\ &= \frac{1}{2} \|F(M)\|^2 \frac{\langle F(M), Z \rangle^2}{\|F(M)\|^4} - \langle F(M), Z \rangle \frac{\langle F(M), Z \rangle}{\|F(M)\|^2} + \frac{1}{2} \|Z\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|Z\|^2 - \frac{1}{2} \frac{\langle F(M), Z \rangle^2}{\|F(M)\|^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Comme

$$\forall b \geq 0, \forall M \in [\alpha, \beta] \quad J_b(b^*, M^*) \leq J_b(b, M),$$

et  $b^* = b(M^*)$  on a en particulier

$$\forall M \in [\alpha, \beta], \quad J_b(b^*, M^*) \leq J_b(b(M), M),$$

et  $M^*$  est solution du problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_d)$

$$\max_{M \in [\alpha, \beta]} \tilde{J}(M) := \left\langle \frac{F(M)}{\|F(M)\|}, Z \right\rangle^2.$$

**Réciproquement** : Soit  $M^*$  une solution du problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_d)$ . On sait qu'elle existe car la fonction  $\tilde{J}$  est continue et bornée sur  $[\alpha, \beta]$ . Compte tenu de (3.17),  $M^*$  minimise la fonction  $J_b(b(M), M)$  sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Par suite, on obtient :

$$\forall b \geq 0, \forall M \in [0, \beta] \quad J_b(b(M^*), M^*) \leq J_b(b(M), M) \leq J_b(b, M).$$

Par conséquent le couple  $(b^* = b(M^*), M^*)$  est une solution du problème  $(\mathcal{P}_d)$ . □

**Remarque 3.1.1.** *Comme indiqué auparavant, nous ne savons pas montrer l'existence dans le cas où l'ensemble des contraintes est non borné. Toutefois, dans certains cas, le problème admet une solution sans qu'on ait besoin de borner l'ensemble des contraintes.*

### 3.1. ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

---

Pour étudier le comportement de  $\tilde{J}(M)$  pour  $M \rightarrow +\infty$ , on utilise le développement asymptotique de  $f(x, M)$  au voisinage de  $+\infty$  établi dans la proposition 3.1.1. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f(x_i, M)^2 &= \sum_{i=1}^N \left[ u_o(x_i) + \frac{1}{M} u_1(x_i) + o\left(\frac{1}{M}\right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N u_o(x_i)^2 + \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N u_o(x_i) u_1(x_i) + o\left(\frac{1}{M}\right) \\ \left( \sum_{i=1}^N f(x_i, M) z_i \right)^2 &= \left( \sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \right)^2 + \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \sum_{j=1}^N u_1(x_j) z_j + o\left(\frac{1}{M}\right) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \tilde{J}(M) &= \frac{\langle F(M), Z \rangle^2}{\|F(M)\|^2} \\ &= \frac{\left( \sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \right)^2 + \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \sum_{j=1}^N u_1(x_j) z_j}{\sum_{i=1}^N u_o(x_i)^2 + \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N u_o(x_i) u_1(x_i)} + o\left(\frac{1}{M}\right) \\ &= \frac{\left( \sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \right)^2}{\sum_{i=1}^N u_o(x_i)^2} \cdot \frac{1 + \frac{2}{M} \frac{\sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \sum_{j=1}^N u_1(x_j) z_j}{\left( \sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \right)^2}}{1 + \frac{2}{M} \frac{\sum_{i=1}^N u_o(x_i) u_1(x_i)}{\sum_{i=1}^N u_o(x_i)^2}} + o\left(\frac{1}{M}\right) \\ &= \frac{\left( \sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i \right)^2}{\sum_{i=1}^N u_o(x_i)^2} \left[ 1 + \frac{2}{M} \left( \frac{\sum_{i=1}^N u_1(x_i) z_i}{\sum_{i=1}^N u_o(x_i) z_i} - \frac{\sum_{i=1}^N u_o(x_i) u_1(x_i)}{\sum_{i=1}^N u_o(x_i)^2} \right) \right] + o\left(\frac{1}{M}\right). \end{aligned}$$

Notons

$$U_o := (u_o(x_1), u_o(x_2), \dots, u_o(x_N))$$

et

$$U_1 := (u_1(x_1), u_1(x_2), \dots, u_1(x_N)),$$

on obtient

$$\tilde{J}(M) = \frac{\langle U_o, Z \rangle^2}{\|U_o\|^2} \left[ 1 + \frac{2}{M} \left( \frac{\langle U_1, Z \rangle}{\langle U_o, Z \rangle} - \frac{\langle U_o, U_1 \rangle}{\|U_o\|^2} \right) \right] + o\left(\frac{1}{M}\right). \quad (3.18)$$

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

Le comportement de  $\tilde{J}(M)$  au voisinage de  $+\infty$  est donc caractérisé par le signe de

$$\gamma(U_o, U_1, Z) := \frac{\langle U_1, Z \rangle}{\langle U_o, Z \rangle} - \frac{\langle U_o, U_1 \rangle}{\|U_o\|^2}.$$

– Si  $\gamma(U_o, U_1, Z) \leq 0$  :

$$\frac{\langle U_1, Z \rangle}{\langle U_o, Z \rangle} - \frac{\langle U_o, U_1 \rangle}{\|U_o\|^2} \leq 0 \Leftrightarrow \langle U_1 - \frac{\langle U_o, U_1 \rangle}{\|U_o\|^2} U_o, Z \rangle \leq 0.$$

Dans ce cas  $\tilde{J}$  est majorée au voisinage de  $+\infty$  et le problème  $\max_{M \geq \alpha} \tilde{J}(M)$  admet donc une solution.

– Si  $\gamma(U_o, U_1, Z) > 0$  : la fonction  $\tilde{J}(M)$  n'est pas majorée au voisinage de  $+\infty$ . Une condition suffisante pour l'existence de solution dans ce cas est

$$\tilde{J}(+\infty) < \tilde{J}(\alpha)$$

$$\text{où } \tilde{J}(+\infty) = \frac{\langle U_o, Z \rangle^2}{\|U_o\|^2} \text{ d'après (3.18).}$$

L'existence de solution du problème dépend des données expérimentales qui varient beaucoup lorsque la longueur de flexion change.

### 3.2 Première étude numérique du modèle

Le but de cette section est d'avoir une idée *a priori* des solutions optimales cherchées et des méthodes numériques que l'on va utiliser. Pour cela, on commencera par tracer quelques unes des surfaces  $J(B, M)$  et les courbes  $\tilde{J}(M)$  sur un domaine borné lorsque  $L$  varie entre 80 mm à 200 mm :

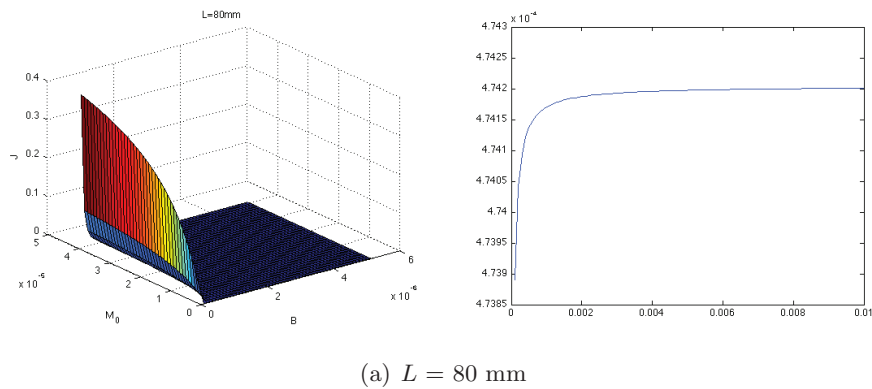
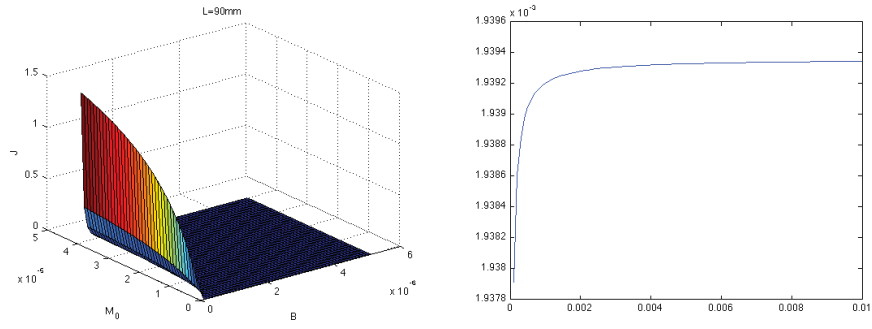


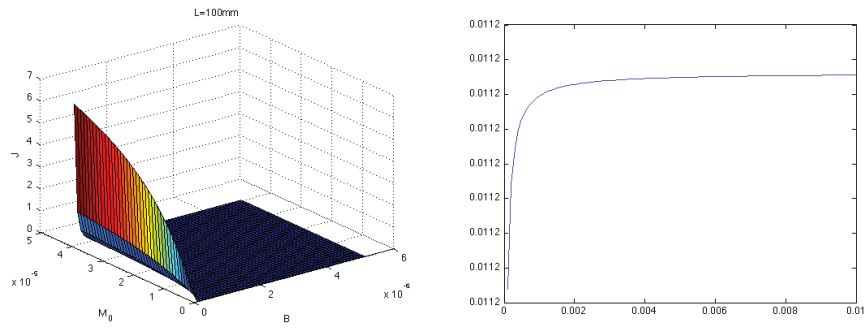
FIGURE 3.2 – Surfaces  $J(B, M)$  et courbes  $\tilde{J}(M)$  pour  $L = 80$  mm

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

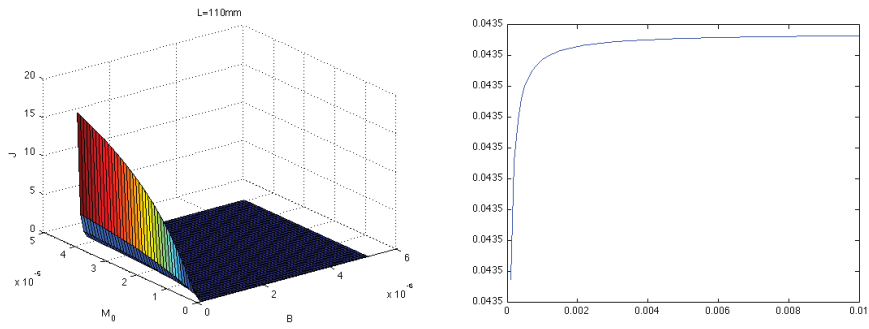
---



(a)  $L = 90$  mm



(b)  $L = 100$  mm

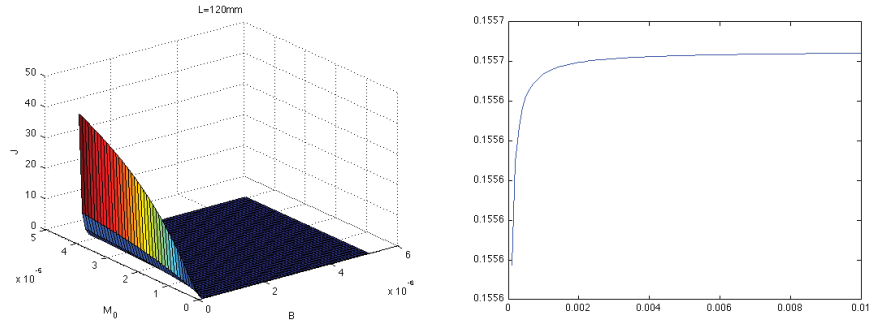


(c)  $L = 110$  mm

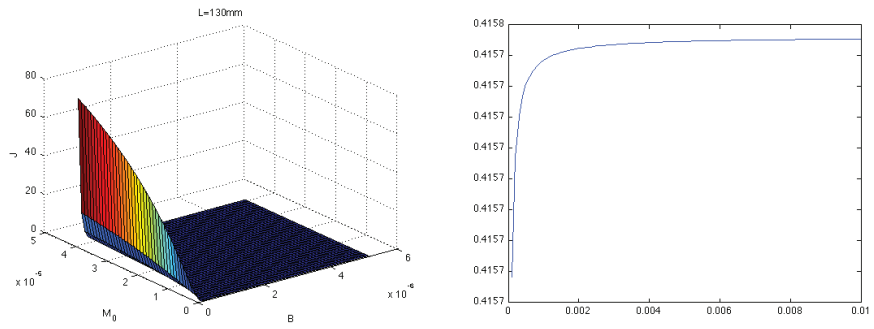
FIGURE 3.3 – Surfaces  $J(B, M)$  et courbes  $\tilde{J}(M)$  pour  $L = 90 - 110$  mm

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

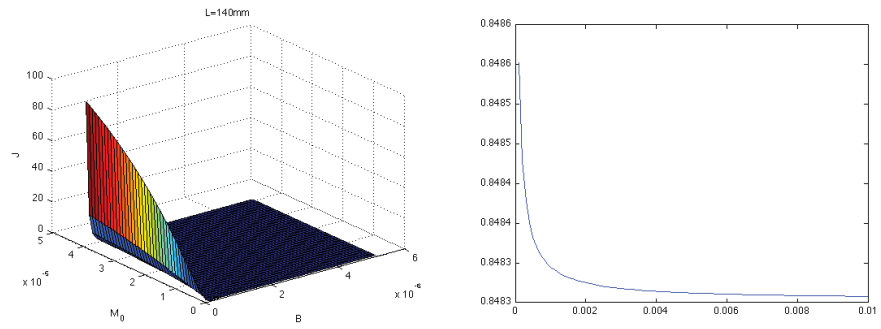
---



(a)  $L = 120$  mm



(b)  $L = 130$  mm

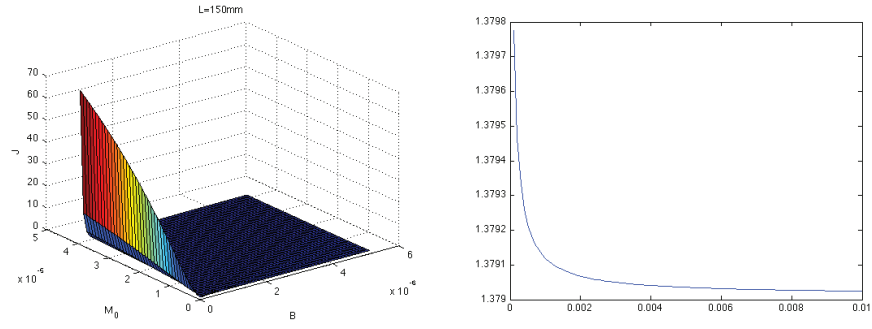


(c)  $L = 140$  mm

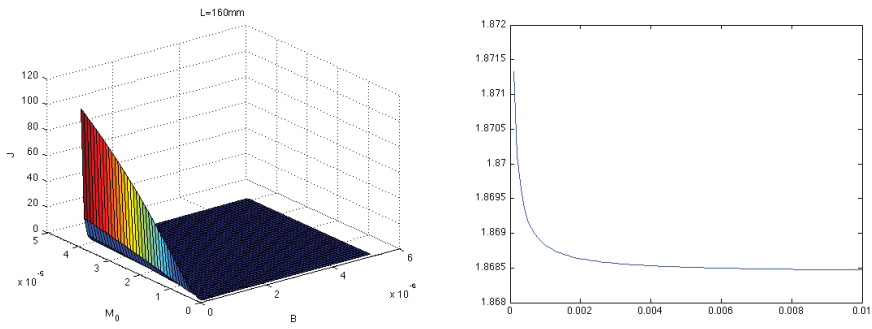
FIGURE 3.4 – Surfaces  $J(B, M)$  et courbes  $\tilde{J}(M)$  pour  $L = 120 - 140$  mm : on constate un net changement de comportement

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

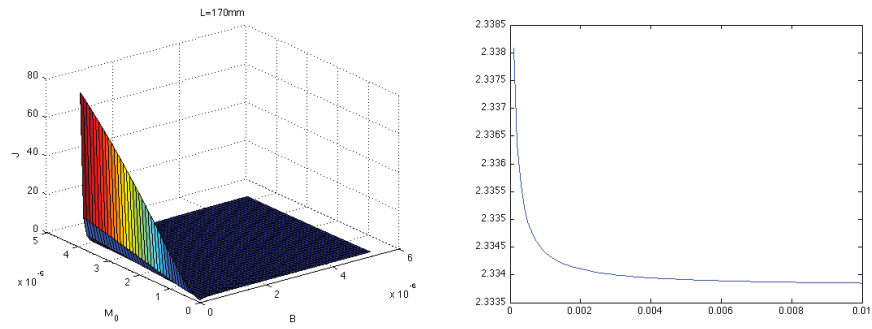
---



(a)  $L = 150 \text{ mm}$



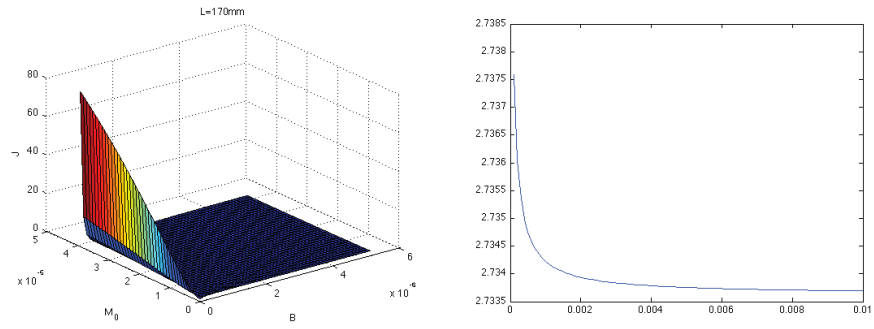
(b)  $L = 160 \text{ mm}$



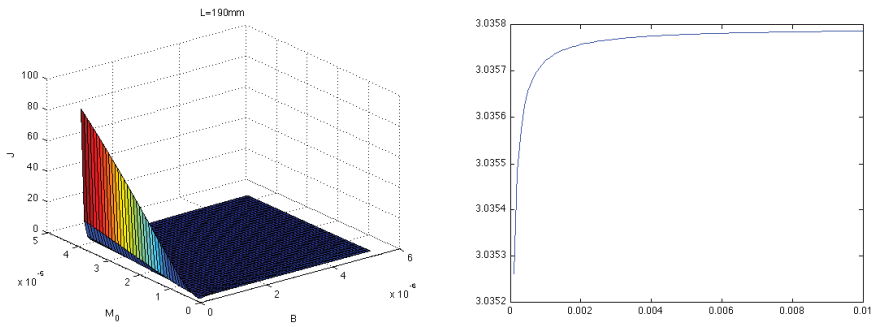
(c)  $L = 170 \text{ mm}$

FIGURE 3.5 – Surfaces  $J(B, M)$  et courbes  $\tilde{J}(M)$  pour  $L = 150 - 170 \text{ mm}$

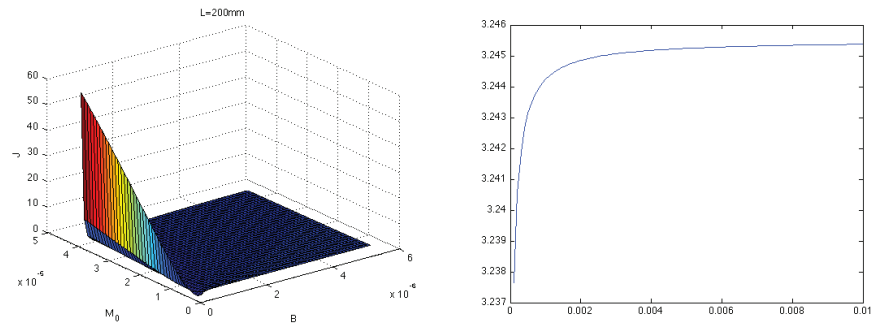
### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE



(a)  $L = 180$  mm



(b)  $L = 190$  mm



(c)  $L = 200$  mm

FIGURE 3.6 – Surfaces  $J(B, M)$  et courbes  $\tilde{J}(M)$  pour  $L = 180 - 200$  mm - L'allure de la courbe change à nouveau

La figure suivante montre un zoom au voisinage de  $\alpha$  de la courbe dans le cas  $140 \leq L \leq 180$  mm.

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

---

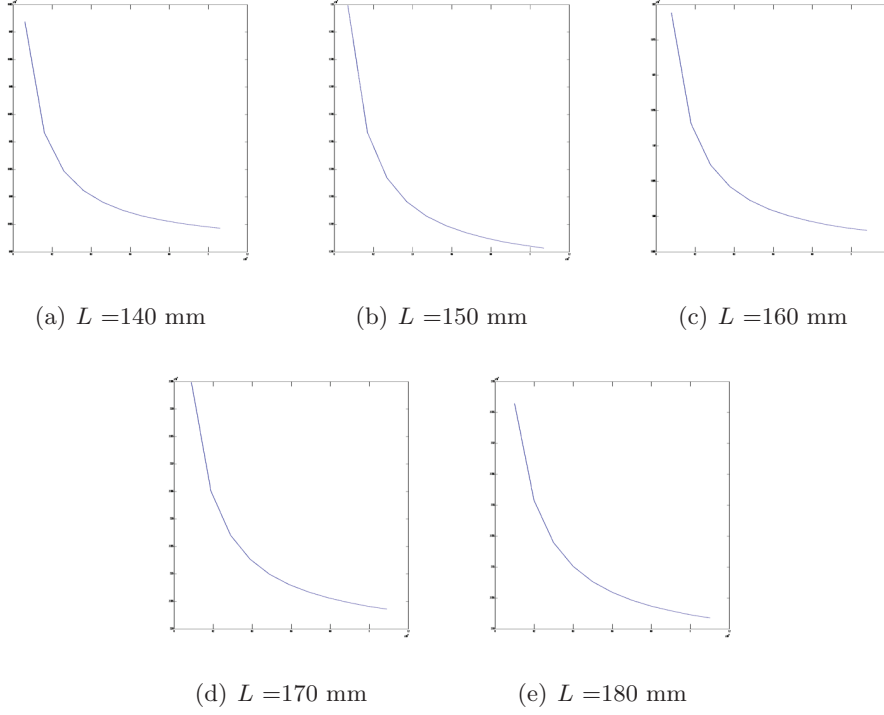


FIGURE 3.7 – Zoom de la courbe  $\tilde{J}(M)$  au voisinage de  $\alpha$  pour  $140 \leq L \leq 180$

#### 3.2.1 Méthode empirique

On considère la fonction

$$\tilde{J}(M) = \left\langle \frac{F(M)}{\|F(M)\|}, Z \right\rangle^2$$

sur un intervalle  $[\alpha : \beta]$  où  $\beta = 10^{-4}$ . On prend le pas égal à  $\rho$ . On cherche un point  $M^*$  sur l'intervalle tel que  $\tilde{J}(M^*)$  soit maximale par comparaison des différentes valeurs :  $M^*$  est une solution du problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_d)$  avec l'erreur

$$\varepsilon = \rho.$$

$B^*$  est ensuite calculé avec

$$B^* = \frac{\|F(M^*)\|^2}{\langle F(M^*), Z \rangle}.$$

$(B^*, M^*)$  est alors une solution du problème  $(\mathcal{P})$  avec l'erreur  $\varepsilon$ .

#### 3.2.2 Résultats numériques

Nous avons pris un pas (et donc une erreur  $\varepsilon$ ) égal à  $\rho = 10^{-7}$ . La valeur

$$\bar{r} = \frac{1}{N} J(B^*, M^*) = \frac{1}{N} \left\| \frac{1}{B^*} F(M^*) - Z \right\| \times 10^3 (\text{mm})$$

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

est l'écart quadratique moyen.

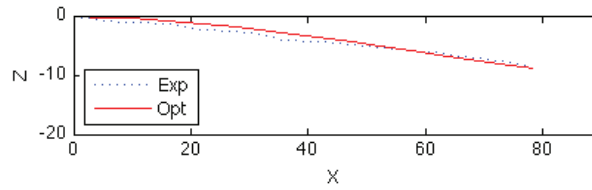
Nous présentons ci-dessous les résultats numériques sur le renfort NCF.

TABLE 3.1 – Résultats d'essais sur le renfort NCF -  $\beta = 2 \times 10^{-2}$

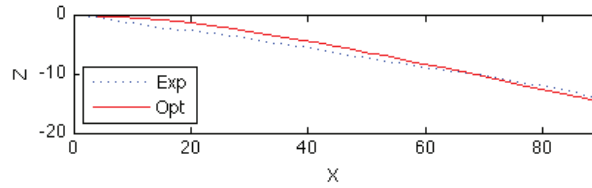
|                                    |        |        |         |         |         |         |        |
|------------------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| L (mm)                             | 80     | 90     | 100     | 110     | 120     | 130     | 140    |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.4596 | 3.3982 | 3.0775  | 2.6721  | 2.3116  | 2.0224  | 1.2704 |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 1.9920 | 1.9925 | 1.9931  | 1.9937  | 1.9944  | 1.9952  | 0.0060 |
| $\bar{r} \text{ (mm)}$             | 0.5284 | 0.7632 | 0.4112  | 0.7629  | 1.0669  | 0.7529  | 0.9795 |
| L (mm)                             | 150    | 160    | 170     | 180     | 190     | 200     | -      |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.9320 | 1.0356 | 0.8625  | 0.8706  | 1.2191  | 1.0454  | -      |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 0.0069 | 0.0078 | 0.0089  | 0.0099  | 1.9911  | 1.9923  | -      |
| $\bar{r} \text{ (mm)}$             | 2.3133 | 8.0530 | 15.3350 | 23.1129 | 32.8228 | 42.4816 | -      |

On constate que un net changement à partir de  $L = 150$  mm.

Les figures ci-dessous présentent les profils de flexion sur le renfort NCF pour les différentes longueurs pour le modèle de Dahl.



(a)  $L = 80$  mm

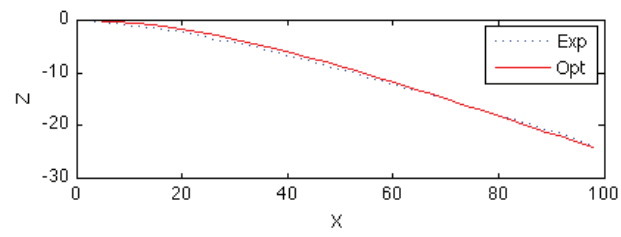


(b)  $L = 90$  mm

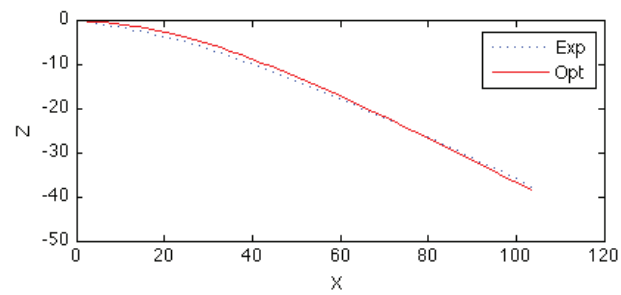
FIGURE 3.8 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 80, 90$  mm

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

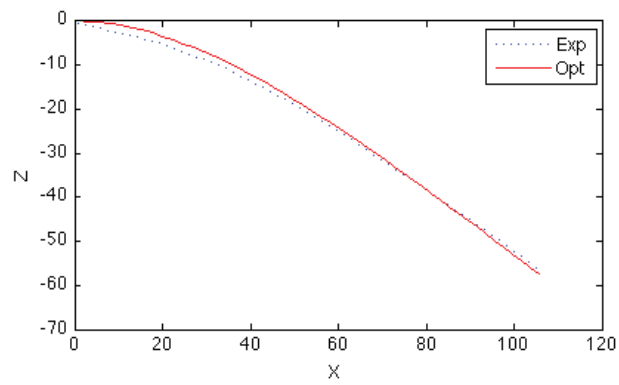
---



(a)  $L = 100$  mm



(b)  $L = 110$  mm

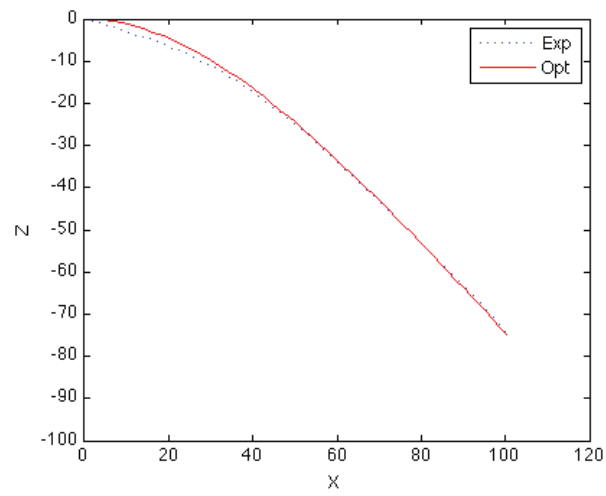


(c)  $L = 120$  mm

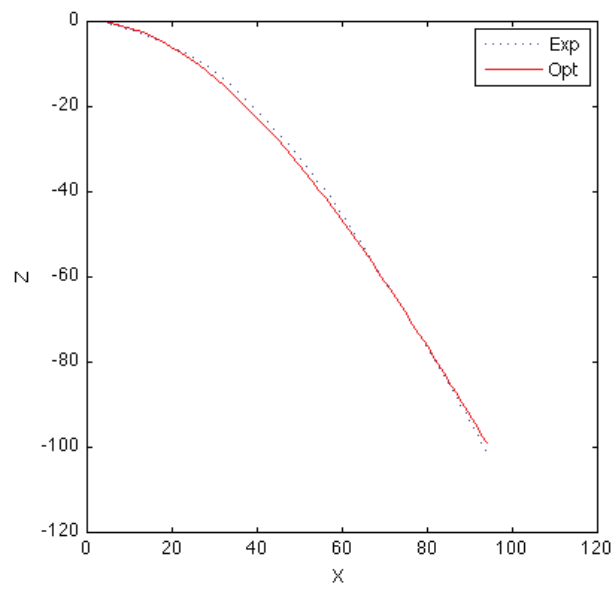
FIGURE 3.9 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 100 - 120$  mm

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

---



(a)  $L = 130$  mm

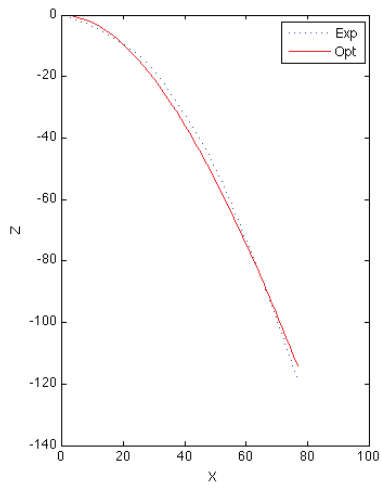


(b)  $L = 140$  mm

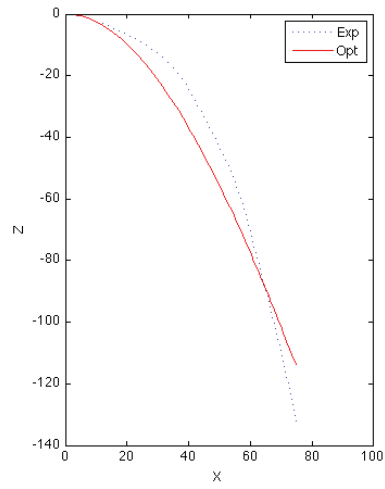
FIGURE 3.10 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 130, 140$  mm

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

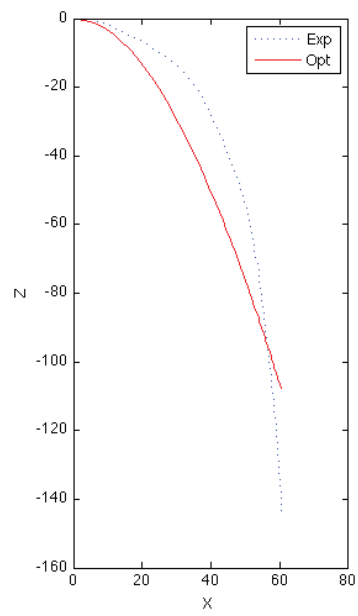
---



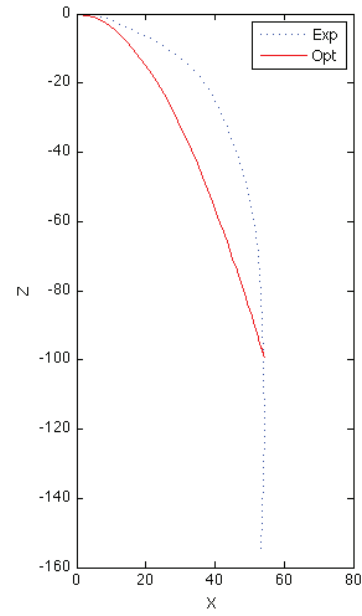
(a)  $L = 150$  mm



(b)  $L = 160$  mm



(c)  $L = 170$  mm



(d)  $L = 180$  mm

FIGURE 3.11 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 150 - 180$  mm

### 3.2. PREMIÈRE ÉTUDE NUMÉRIQUE DU MODÈLE

---

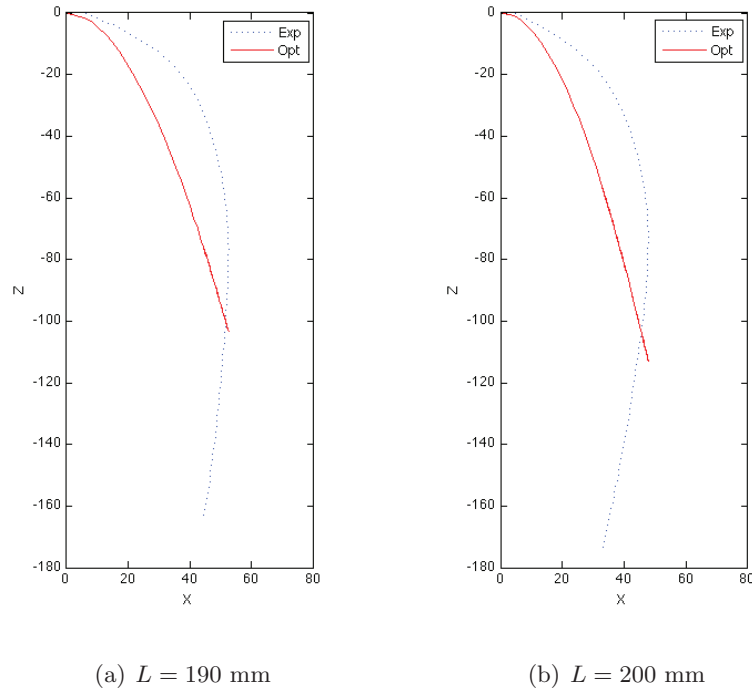
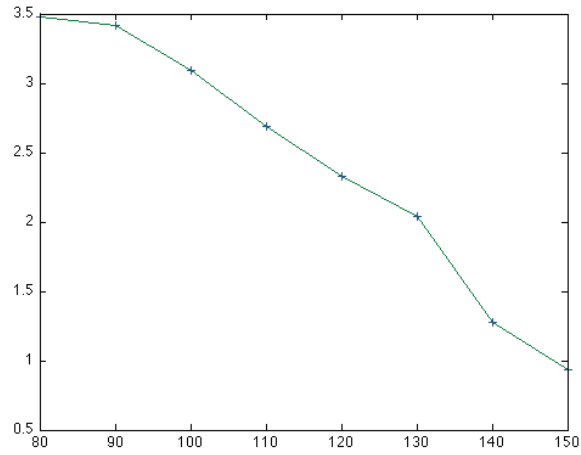


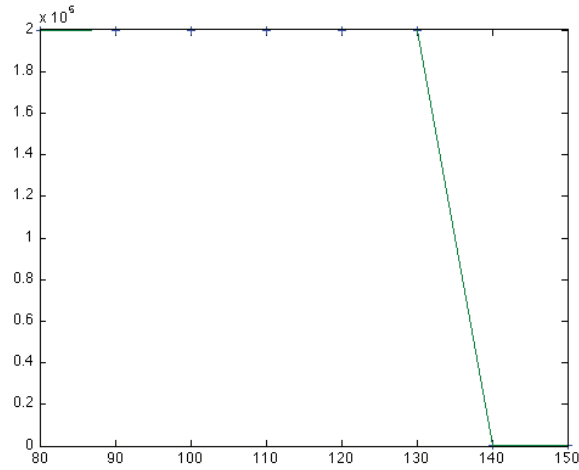
FIGURE 3.12 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 190 - 200$  mm

#### 3.2.3 Première conclusion

Les résultats numériques nous permettent de conclure que l'optimisation est assez bonne sur les profils avec  $L \leq 150$  mm. Mais cette méthode reste **peu fiable**. Les deux figures ci-dessous décrivent l'évolution des valeurs optimales de  $B^*$  et de  $M^*$  en fonction de  $L$ .



(a)  $B^*$  en fonction de  $L$



(b)  $M^*$  en fonction de  $L$

FIGURE 3.13 – Evolution de  $B^*$  et  $M^*$

Les résultats de cette section permettent de se faire une idée de la validité des modèles et des valeurs espérées. Toutefois, les résultats ne sont pas fiables car empiriques et la méthode n'est plus utilisable si nous pouvons disposer d'un plus grand nombre de données. Nous allons mettre en œuvre dans la section suivante une méthode plus rigoureuse, basée non plus sur la forme analytique de la solution  $w$  mais sur une formulation de type « contrôle optimal ».

### 3.3 Formulation « contrôle optimal »

Nous commencerons par introduire le problème de contrôle optimal suivant (voir par exemple [3, 47]) :

$$\min\{\mathcal{J}(y, u), \mathcal{A}(y, u) = 0, u \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}, y \in \mathcal{K} \subset \mathcal{X}\}$$

où  $\mathcal{U}$  est un espace de Hilbert,  $\mathcal{X}$  un espace de Banach,  $\mathcal{U}_{ad}$  et  $\mathcal{K}$  sont des sous ensembles convexes, fermés non-vides de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{X}$  respectivement. La fonction coût  $\mathcal{J}$  est une fonction de  $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , semi-continue inférieurement et convexe en général, et  $\mathcal{A}$  est un opérateur différentiel. On appelle  $y$  la fonction d'état et  $u$  le contrôle. Dans le cas où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{X}$  sont de dimensions finies, ce problème peut être aussi considéré comme un problème d'optimisation sous contraintes.

Dans tout ce qui suit on se placera dans  $\mathcal{X} = \mathcal{C}^2([0, L]) \cap L^2(0, L)$  muni de la norme  $L^2$  par exemple. Le problème d'identification que nous avons considéré dans la section précédente peut être mis sous forme d'un problème de contrôle optimal avec la fonction d'état  $w$  et le contrôle  $u = (B, M) \in \mathcal{U}_{ad} := \mathbb{R}_+ \times [\alpha, \beta]$  où  $\alpha > 0$  (arbitrairement petit). Ils sont couplés par les équations d'état

$$\begin{cases} w_{,xx} = g(x, u) & \text{sur } [0, L] \\ w(0) = 0 \\ w_{,x}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $g$  est définie sur  $[0, L] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$  par

$$g(x, B, M) := -\frac{M}{B} \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right).$$

On définit le problème de contrôle optimal de la façon suivante

$$\min\{J(u) := \mathcal{J}(w[u], u), u \in \mathcal{U}_{ad} = \mathbb{R}_+ \times [\alpha, \beta]\} \quad (\mathcal{P}_c)$$

où  $w[u]$  désigne l'unique solution de (3.19) et  $\mathcal{J}$  la fonction coût :

$$\mathcal{J}(w, u) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( w(x_i, u) - z_i \right)^2.$$

Remarquons qu'a priori il faudrait supposer  $B > 0$  car  $g$  n'est pas définie en  $B = 0$ . Toutefois, la solution  $B = 0$  n'est pas admissible du point de vue physique, et nous verrons dans la section suivante que ce cas ne peut pas se produire de sorte qu'on peut choisir la contrainte  $B \geq 0$ .

Il faudrait aussi ajouter la contrainte  $w \leq 0$  mais on a remarqué dans la section précédente que cette condition est automatiquement satisfaite par toute solution de (3.19) quand  $B \geq 0$ ,  $M > 0$ .

Une alternative au choix de  $\mathcal{U}_{ad} = \mathbb{R}_+ \times [\alpha, \beta]$  est de forcer la coercivité de la fonctionnelle coût en ajoutant une terme de pénalisation de la forme

$$\frac{\varepsilon}{2}(B^2 + M^2),$$

où  $\varepsilon > 0$  et en imposant  $B \geq 0$ ,  $M \geq \alpha$ . Le problème devient

$$\min\{J_\varepsilon(u) := \mathcal{J}_\varepsilon(w[u], u), u \geq (0, \alpha)\} \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

où

$$\mathcal{J}_\varepsilon(x, u) = \mathcal{J}(w, u) + \frac{\varepsilon}{2}(B^2 + M^2).$$

Dans cette section nous allons étudier et résoudre numériquement les problèmes  $(\mathcal{P}_c)$  et  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ . Pour ce genre de problème on peut utiliser deux types de méthodes : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

- Les méthodes directes résolvent le problème directement en discrétisant la fonction d'état et le contrôle, ce qui nous ramène à résoudre un problème d'optimisation non-linéaire en dimension finie.
- Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement le système des conditions d'optimalité obtenu par le principe du maximum.

Dans un premier temps, nous allons opter pour une méthode directe. On utilise donc une méthode d'intégration numérique de l'équation d'état. Pour cela, on commencera par la discrétisation du problème.

#### 3.3.1 Méthode directe : discrétisation

Tout d'abord, nous faisons un changement de fonctions pour transformer l'équation différentielle du second ordre en un système différentiel du premier ordre. Posons

$$V(x, B, M) = \begin{pmatrix} w(x, B, M) \\ w_{,x}(x, B, M) \end{pmatrix},$$

on a alors

$$V'(x, B, M) = \begin{pmatrix} w_{,x}(x, B, M) \\ w_{,xx}(x, B, M) \end{pmatrix}$$

où  $V'$  désigne la dérivée de  $V$  par rapport à  $x$ .

De plus, compte tenu des conditions aux limites

$$w(0, B, M) = 0, \quad w_{,x}(0, B, M) = 0,$$

nous avons

$$V(0, B, M) = 0.$$

En posant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(x, B, M) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x, B, M) \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{cases} V' = A \cdot V + G \\ V(0) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.3.1.1 Discrétisation de l'équation d'état

Pour l'approximation numérique du problème, on définit ici un maillage de pas  $h_i$  sur l'intervalle  $[0, L]$  qui correspond à l'ensemble des points  $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$  dans les données expérimentales (voir [5]). On appelle  $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$  les nœuds du maillage (voir la figure ci-dessous).

$$x_1 = 0, \quad x_{i+1} = x_i + h_i \quad (1 \leq i \leq N-1).$$

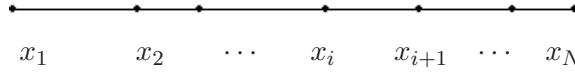


FIGURE 3.14 – Discrétisation

Remarquons que le contrôle  $u = (B, M)$  est constant sur l'intervalle  $[0, L]$ . Il nous reste à discrétiser les équations d'état (3.20). Il y a de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle : la méthode d'Euler, les méthodes de Runge-Kutta, la méthode du point milieu, etc. (voir par exemple [28], [55]). Pour simplifier nous choisissons la méthode d'Euler.

Pour tout  $1 \leq i \leq N$ , notons

$$V_i := V(x_i, B, M), \quad G_i := G(x_i, B, M).$$

Compte tenu de (3.20), on obtient

$$V_1 = 0 \tag{3.21}$$

et, pour tout  $1 \leq i \leq N-1$ , nous avons

$$V_{i+1} = V_i + h_i(A \cdot V_i + G_i)$$

ou encore

$$V_{i+1} - (I_2 + h_i A)V_i = h_i G_i. \tag{3.22}$$

où  $I_2$  est la matrice identité de rang 2.

Soient  $\mathbf{V} = (V, B, M)^T \in \mathbb{R}^{2N+2}$ , et  $\mathbb{M}_o$  la matrice définie par blocs de la manière

suivante

$$\mathbb{M}_o = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ -(I_2 + h_1 A) & I_2 & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -(I_2 + h_{i-1} A) & I_2 & \mathbf{0}_{2,2} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} & -(I_2 + h_{N-1} A) & I_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_o & \mathbf{0}_{2N,1} & \mathbf{0}_{2N,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(B, M) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2,1} \\ h_1 G_1 \\ h_2 G_2 \\ \vdots \\ h_{N-1} G_{N-1} \end{pmatrix}.$$

où  $\mathbf{0}_{n,p}$  est la matrice nulle à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Les relations (3.21) - (3.22) s'écrivent alors

$$\mathbb{M}\mathbf{V} = \mathbf{G}. \quad (3.23)$$

### 3.3.1.2 Discrétisation des contraintes

Soit la matrice  $\mathbb{C}$  suivante

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1,2N} & 1 & 0 \\ \mathbf{0}_{1,2N} & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{d}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors réécrire les conditions  $(B, M) \in \mathbb{R}_+ \times [\alpha, +\infty[$  apparaissant dans  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  de la manière suivante :

$$\mathbb{C}\mathbf{V} \geq \mathbf{d}_\alpha. \quad (3.24)$$

Dans le cas du problème  $(\mathcal{P}_c)$  il faut ajouter la contrainte  $M \leq \beta$ . Soient alors

$$\tilde{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1,2N} & 1 & 0 \\ \mathbf{0}_{1,2N} & 0 & 1 \\ \mathbf{0}_{1,2N} & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{d}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

Les conditions  $(B, M) \in \mathbb{R}_+ \times [\alpha, \beta]$  apparaissant dans  $(\mathcal{P}_c)$  deviennent

$$\tilde{\mathbb{C}}\mathbf{V} \geq \mathbf{d}_\beta. \quad (3.25)$$

### 3.3.1.3 Discrétisation de la fonctionnelle

Soit enfin la matrice  $\mathbb{J}_o \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$

$$\mathbb{J}_o = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & \tilde{A} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} & \tilde{A} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

où  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Posons

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_o & \mathbf{0}_{2N,1} & \mathbf{0}_{2N,1} \\ \mathbf{0}_{1,2N} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1,2N} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{Z} = (z_1, 0, z_2, 0, \dots, z_N, 0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^{2N+2}. \quad (3.27)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} J(B, M) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( w(x_i, B, M) - z_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbb{J}\mathbf{V} - \mathbf{Z}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbb{J} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbb{J} \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \|\mathbf{Z}\|^2. \end{aligned}$$

La fonctionnelle

$$J_\varepsilon(B, M) = J(B, M) + \frac{\varepsilon}{2}(B^2 + M^2)$$

correspond alors à la matrice

$$\mathbb{J}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_o & \mathbf{0}_{2N,1} & \mathbf{0}_{2N,1} \\ \mathbf{0}_{1,2N} & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ \mathbf{0}_{1,2N} & 0 & \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Les problèmes discrétisés sont alors des problèmes d'optimisation non-linéaire de dimension finie. Le problème  $(\mathcal{P}_c)$  avec contraintes de bornes s'écrit

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{V}} \mathcal{Q}(\mathbf{V}) := \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbb{J} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbb{J} \mathbf{Z} \\ \mathbb{M} \mathbf{V} - \mathbf{G} = 0 \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{V} \geq \mathbf{d}_\beta \end{cases} \quad (\mathcal{P}'_c)$$

et le problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  est

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{V}} \mathcal{Q}_\varepsilon(\mathbf{V}) := \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbb{J}_\varepsilon \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbb{J}_\varepsilon \mathbf{Z} \\ \mathbb{M} \mathbf{V} - \mathbf{G} = 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{V} \geq \mathbf{d}_\alpha \end{cases} \quad (\mathcal{P}'_\varepsilon)$$

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

---

Nous avons résolu ces problèmes en lançant des modèles AMPL<sup>1</sup> (une abréviation de l'anglais *A Mathematical Programming Language*) sur le serveur NEOS avec un solveur approprié. Vu que le problème ( $\mathcal{P}'_c$ ) est quadratique avec des contraintes en inégalités, nous avons choisi le solveur SNOPT (Sparse Nonlinear OPTimizer) basé sur une méthode SQP (*Sequential Quadratic Programming*) [38].

#### 3.3.2 Résultats numériques pour la méthode directe

##### 3.3.2.1 Résultats numériques pour ( $\mathcal{P}'_c$ )

Nous présentons ci-dessous les résultats numériques sur le renfort NCF. Nous avons fait des tests avec plusieurs points initiaux ainsi que différents choix pour la contrainte de borne  $\beta$  sur  $M$ .

TABLE 3.2 – Résultats d'essais sur le renfort NCF -  $\beta = 2 \times 10^{-2}$

| L (mm)                             | 80     | 90     | 100     | 110     | 120     | 130     | 140    |
|------------------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3,5401 | 3,4450 | 3,1317  | 2,6810  | 2,3227  | 2,0321  | 1,2751 |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 2.0000 | 2.0000 | 2.0000  | 2.0000  | 1.9944  | 1.9952  | 0.0060 |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 0.5283 | 0.7631 | 0.4123  | 0.7549  | 1.0320  | 0.7529  | 0.9780 |
| L (mm)                             | 150    | 160    | 170     | 180     | 190     | 200     | -      |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0,9355 | 1,0394 | 0,8656  | 0,8737  | 1,2249  | 1,0504  | -      |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 0.0069 | 0.0078 | 0.0089  | 0.0099  | 1.9911  | 1.9923  | -      |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 2.3118 | 8.0515 | 15.3340 | 23.1123 | 32.8230 | 42.4813 | -      |

TABLE 3.3 – Résultats d'essais sur le renfort NCF -  $\beta = 4 \times 10^{-2}$

| L (mm)                             | 80     | 90     | 100     | 110     | 120     | 130     | 140    |
|------------------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.5404 | 3.4517 | 3.1327  | 2.6820  | 2.3236  | 2.0331  | 1.2751 |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 4.0000 | 4.0000 | 4.0000  | 4.0000  | 3.9944  | 3.9952  | 0.0060 |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 0.5284 | 0.7631 | 0.4110  | 0.7627  | 1.0665  | 0.7522  | 0.9780 |
| L (mm)                             | 150    | 160    | 170     | 180     | 190     | 200     | -      |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.9355 | 1.0394 | 0.8656  | 0.8737  | 1.2264  | 1.0518  | -      |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 0.0069 | 0.0078 | 0.0089  | 0.0099  | 3.9911  | 3.9923  | -      |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 2.3118 | 8.0515 | 15.3340 | 23.1123 | 32.8228 | 42.4816 | -      |

---

1. <http://www.ampl.com/>

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

TABLE 3.4 – Résultats d'essais sur le renfort NCF -  $\beta = 6 \times 10^{-2}$

|                                    |        |        |         |         |         |         |        |
|------------------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| L (mm)                             | 80     | 90     | 100     | 110     | 120     | 130     | 140    |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.5406 | 3.4519 | 3.1329  | 2.6822  | 2.3239  | 2.0334  | 1.2751 |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 5.9806 | 6.0000 | 6.0000  | 6.0000  | 5.9944  | 5.9952  | 0.0060 |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 0.5284 | 0.7631 | 0.4110  | 0.7626  | 1.0663  | 0.7520  | 0.9780 |
| L (mm)                             | 150    | 160    | 170     | 180     | 190     | 200     | -      |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.9355 | 1.0394 | 0.8656  | 0.8737  | 1.2269  | 1.0523  | -      |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 0.0069 | 0.0078 | 0.0089  | 0.0099  | 5.9911  | 5.9923  | -      |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 2.3118 | 8.0515 | 15.3340 | 23.1123 | 32.8231 | 42.4813 | -      |

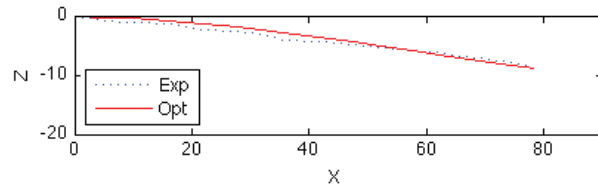
TABLE 3.5 – Résultats d'essais sur le renfort NCF -  $\beta = 8 \times 10^{-2}$

|                                    |        |        |         |         |         |         |        |
|------------------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| L (mm)                             | 80     | 90     | 100     | 110     | 120     | 130     | 140    |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.5407 | 3.4520 | 3.1330  | 2.6825  | 2.3240  | 2.0336  | 1.2751 |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 7.9924 | 8.0000 | 8.0000  | 7.8995  | 7.9944  | 7.9952  | 0.0060 |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 0.5284 | 0.7631 | 0.4110  | 0.7625  | 1.0663  | 0.7519  | 0.9780 |
| L (mm)                             | 150    | 160    | 170     | 180     | 190     | 200     | -      |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.9355 | 1.0394 | 0.8656  | 0.8737  | 1.2271  | 1.0525  | -      |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 0.0069 | 0.0078 | 0.0089  | 0.0099  | 7.9811  | 7.9923  | -      |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 2.3118 | 8.0515 | 15.3340 | 23.1123 | 32.8231 | 42.4812 | -      |

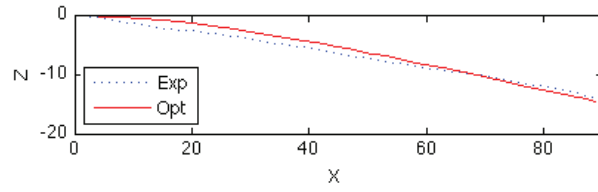
TABLE 3.6 – Résultats d'essais sur le renfort NCF -  $\beta = 10 \times 10^{-2}$

|                                    |         |         |         |         |         |         |        |
|------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| L (mm)                             | 80      | 90      | 100     | 110     | 120     | 130     | 140    |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.5409  | 3.4522  | 3.1330  | 2.6825  | 2.3241  | 2.0337  | 1.2751 |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 10.0000 | 10.0000 | 10.0000 | 10.0000 | 9.9944  | 9.9952  | 0.0060 |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 0.5284  | 0.7631  | 0.4109  | 0.7625  | 1.0662  | 0.7518  | 0.9780 |
| L (mm)                             | 150     | 160     | 170     | 180     | 190     | 200     | -      |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.9355  | 1.0394  | 0.8656  | 0.8737  | 1.2272  | 1.0527  | -      |
| $M^* (\times 10^{-2} \text{ N})$   | 0.0069  | 0.0078  | 0.0089  | 0.0099  | 9.9811  | 9.9923  | -      |
| $\bar{r}$ (mm)                     | 2.3118  | 8.0515  | 15.3340 | 23.1123 | 32.8231 | 42.4812 | -      |

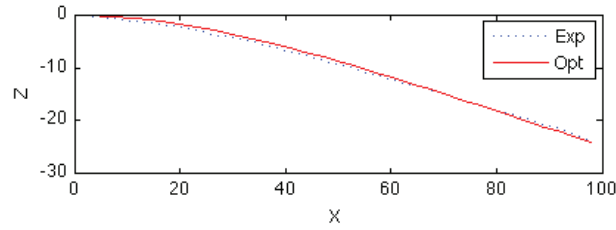
Les figures ci-dessous présentent les profils de flexion sur le renfort NCF pour les différentes longueurs pour le modèle de Dahl.



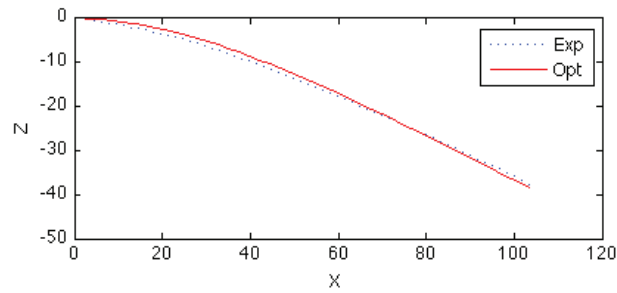
(a)  $L = 80$  mm



(b)  $L = 90$  mm



(c)  $L = 100$  mm

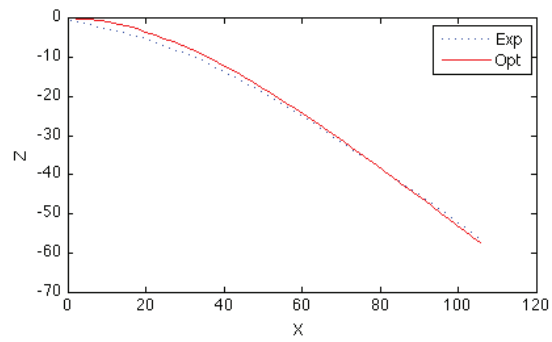


(d)  $L = 110$  mm

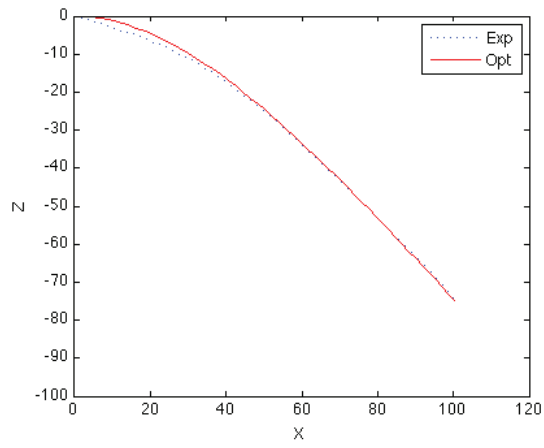
FIGURE 3.15 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 80 - 110$  mm

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

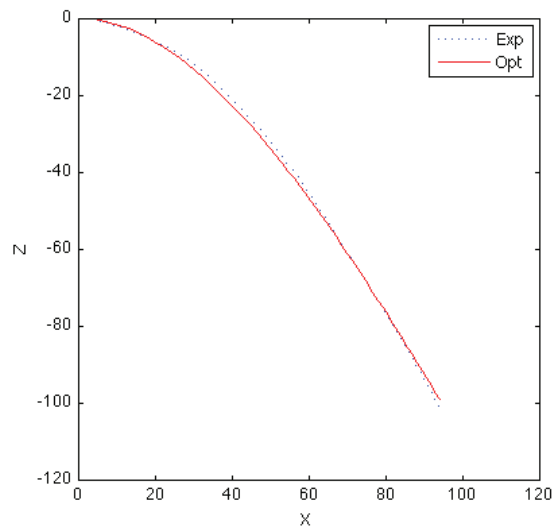
---



(a)  $L = 120$  mm



(b)  $L = 130$  mm

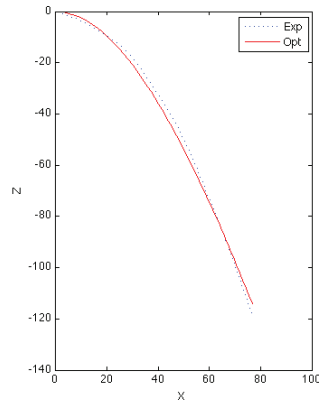


(c)  $L = 140$  mm

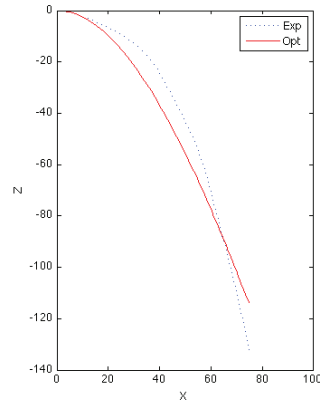
FIGURE 3.16 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 120 - 140$  mm

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

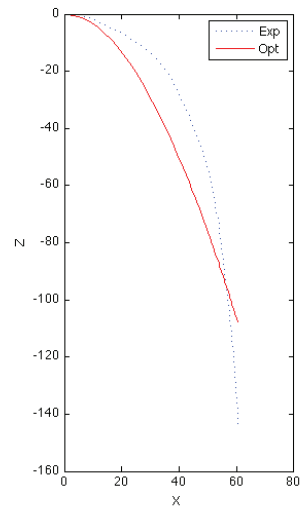
---



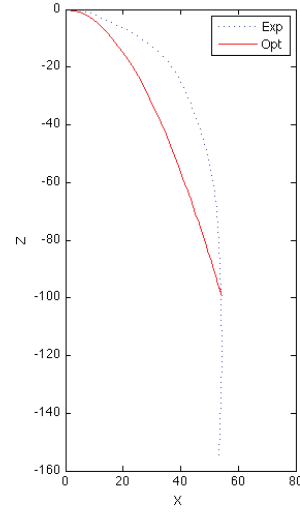
(a)  $L = 150$  mm



(b)  $L = 160$  mm



(c)  $L = 170$  mm



(d)  $L = 180$  mm

FIGURE 3.17 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 150 - 180$  mm

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

---

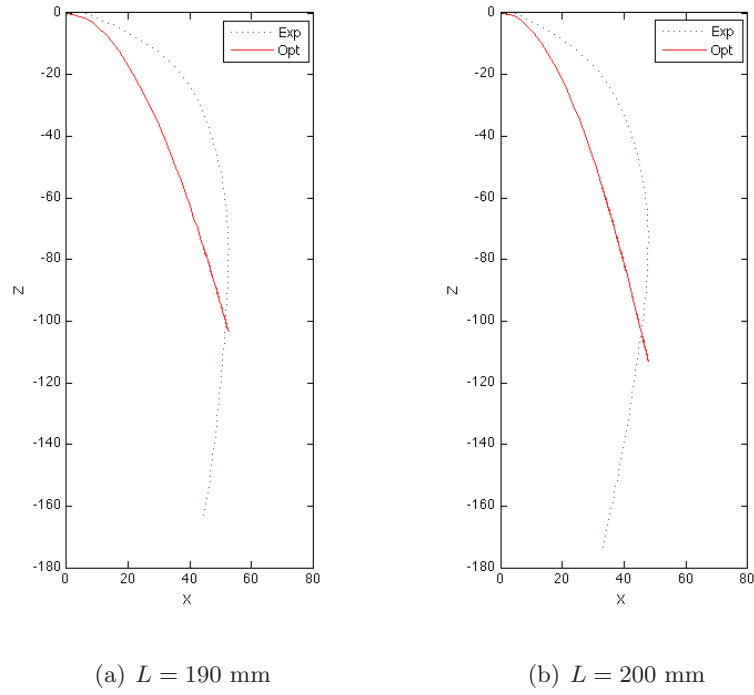


FIGURE 3.18 – Profils expérimentaux et optimisés.  $L = 190 - 200$  mm

#### 3.3.2.2 Résultats numériques pour $(\mathcal{P}_\varepsilon)$

TABLE 3.7 – Résultat du problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 1$

| L (mm)                             | 80       | 90        | 100      | 110     | 120      | 130     | 140     |
|------------------------------------|----------|-----------|----------|---------|----------|---------|---------|
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.4236   | 3.3688    | 3.0658   | 2.6400  | 2.2494   | 2.1985  | 1.2758  |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 0.2070   | 0.3527    | 0.4972   | 0.8103  | 1.2098   | 0.6640  | 0.1392  |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 5.1952   | 15.5792   | 16.3687  | 50.3401 | 124.7010 | 12.3887 | 15.8442 |
| L (mm)                             | 150      | 160       | 170      | 180     | 190      | 200     | -       |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.8968   | 1.0156    | 0.8357   | 0.8397  | 1.1931   | 1.0452  | -       |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 0.0686   | 0.0781    | 0.0881   | 0.0988  | 3.1560   | 7.2990  | -       |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 126.4890 | 2524.2340 | 57319.70 | 147453  | 328819   | 588941  | -       |

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

---

TABLE 3.8 – Résultat du problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$

| L (mm)                             | 80       | 90        | 100     | 110     | 120      | 130      | 140     |
|------------------------------------|----------|-----------|---------|---------|----------|----------|---------|
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.5288   | 3.4441    | 3.1267  | 2.6785  | 2.2759   | 2.2565   | 1.2777  |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 2.1064   | 3.5689    | 5.0539  | 8.0935  | 12.3047  | 6.3354   | 0.1410  |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 5.0805   | 15.2536   | 15.6956 | 48.5545 | 120.7900 | 11.2237  | 15.8246 |
| L (mm)                             | 150      | 160       | 170     | 180     | 190      | 200      | -       |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.8969   | 1.0156    | 0.8358  | 0.8397  | 1.2092   | 1.0523   | -       |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 0.0686   | 0.0781    | 0.0881  | 0.0988  | 33.4348  | 107.9020 | -       |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 126.4850 | 2542.3300 | 57319.7 | 147453  | 328793   | 588798   | -       |

TABLE 3.9 – Résultat du problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$

| L (mm)                             | 80       | 90        | 100      | 110     | 120      | 130     | 140     |
|------------------------------------|----------|-----------|----------|---------|----------|---------|---------|
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.5384   | 3.4507    | 3.1321   | 2.6820  | 2.2781   | 2.2622  | 1.2777  |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 8.6824   | 15.4799   | 24.6665  | 38.0066 | 58.2378  | 30.6691 | 0.1410  |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 5.0703   | 15.2250   | 15.6363  | 48.3976 | 120.4460 | 11.1246 | 15.8246 |
| L (mm)                             | 150      | 160       | 170      | 180     | 190      | 200     | -       |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.8937   | 1.0156    | 0.8357   | 0.8397  | 1.2105   | 1.0241  | -       |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 0.0686   | 0.0781    | 0.0881   | 0.0988  | 171.3690 | 1090.58 | -       |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 126.4850 | 2542.3300 | 57319.70 | 147453  | 328791   | 588784  | -       |

TABLE 3.10 – Résultat du problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$

| L (mm)                             | 80       | 90        | 100     | 110     | 120      | 130       | 140     |
|------------------------------------|----------|-----------|---------|---------|----------|-----------|---------|
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 3.5402   | 3.4511    | 3.1333  | 2.6826  | 2.2786   | 2.2633    | 1.2777  |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 43.7225  | 77.2087   | 116.322 | 180.200 | 232.944  | 125.294   | 0.1410  |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 5.0681   | 15.2190   | 15.6240 | 48.3652 | 120.3780 | 11.1037   | 15.8246 |
| L (mm)                             | 150      | 160       | 170     | 180     | 190      | 200       | -       |
| $B^* (\times 10^{-6} \text{ N.m})$ | 0.8937   | 1.0156    | 0.8357  | 0.8397  | 1.2107   | 1.0186    | -       |
| $M^* (\times 10^{-3} \text{ N})$   | 0.0686   | 0.0781    | 0.0881  | 0.0988  | 677.5440 | 1801.4900 | -       |
| $J (\times 10^{-6} \text{ m}^2)$   | 126.4850 | 2542.3300 | 57319.7 | 147453  | 328790   | 588777    | -       |

### 3.3.3 Conclusions

- La solution  $M^*$  est égale à  $\beta$ , borne supérieure de l'intervalle pour la formulation  $(\mathcal{P}'_c)$  et devient de plus en plus grande pour la formulation  $(\mathcal{P}'_\varepsilon)$  lorsque que  $L$  n'est pas dans l'intervalle  $[140, 180]$  (mm). Cela signifie que le problème original (avec la seule contrainte naturelle  $M \geq \alpha$ ) n'a pas de solution en  $M$ . Il y a bien un infimum mais il n'est pas atteint.

On constate également que si  $L$  n'est pas dans l'intervalle  $[140, 180]$  (mm),  $B$  est indépendant de  $M$  et le modèle de Dahl se réduit au modèle de Grosberg. Plus précisément on peut formellement dire que la « solution »  $M_0 = +\infty$  et l'équation (3.1) devient alors

$$\frac{dM}{d\kappa} = B,$$

c'est-à-dire  $M = B\kappa + \text{cte}$ . C'est exactement le modèle de Grosberg.

**Les modèles de Dahl et de Grosberg coïncident pour des « petites » longueurs :**  
 $0 \leq L \leq 140$  (mm).

- Lorsque  $L$  appartient à l'intervalle  $[140, 180]$  (mm), on constate que la contrainte  $M \geq \alpha$  est saturée de sorte que dans cette plage on a

$$M^*(L) = \frac{qL^2}{2}. \quad (3.29)$$

La valeur de  $B^*$  est alors d'après l'analyse faite à la section 3.1.2 :

$$B^* = \frac{\|F(\frac{qL^2}{2})\|^2}{\langle F(\frac{qL^2}{2}), Z \rangle}.$$

D'après (3.14), il suffit de calculer  $f(x_i, \frac{qL^2}{2})$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Avec (3.11) on a pour tout  $x \in [0, L]$  :

$$\begin{aligned} f(x, \frac{qL^2}{2}) &= \left( -\frac{qL^2}{4}(x-L)^2 + \frac{qL^4}{4} \right) \ln \left( 1 + \left( \frac{x-L}{L} \right)^2 \right) - \frac{qL^3}{2}x \ln 2 \\ &\quad - qL^3(x-L) \left( \arctan \left( \frac{x-L}{L} \right) + \arctan \left( \frac{1}{L} \right) \right) \\ &\quad + \frac{3qL^2}{4}x^2 - \frac{qL^3}{2}x \\ &= \frac{qL^2}{4}x(2L-x) \ln \left( 1 + \left( \frac{x-L}{L} \right)^2 \right) - \frac{qL^3}{2}x \ln 2 \\ &\quad - qL^3(x-L) \left( \arctan \left( \frac{x-L}{L} \right) + \arctan \left( \frac{1}{L} \right) \right) \\ &\quad + \frac{3qL^2}{4}x^2 - \frac{qL^3}{2}x. \end{aligned}$$

On obtient donc une expression exacte pour  $B$  qui apparaît dans les tableaux précédents.

#### 3.3.4 Méthode indirecte

Les conclusions précédentes sont essentiellement numériques, dans la mesure où nous n'avons pas montré que la contrainte  $M \geq \alpha$  était saturée pour certaines valeurs de  $L$ . Nous allons maintenant nous intéresser à la formulation indirecte du problème pour tenter d'extraire le maximum d'informations sur la solution avant tout recours à l'expérimentation numérique.

Pour des raisons de simplicité de calcul nous allons nous intéresser au problème formulé avec une contrainte de pénalisation. Nous allons d'abord décrire le problème dans sa version « continue ». On considère le système défini par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = A \cdot V(x) + G(x, B, M) & \text{sur } ]0, L[, \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Les matrices  $A$  et  $G$  ont été définies p. 70. En posant

$$V = \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix},$$

l'équation ci-dessus est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dx} = V^2 & \text{sur } ]0, L[, V^1(0) = 0 \\ \frac{dV^2}{dx} = g(\cdot, B, M) & \text{sur } ]0, L[, V^2(0) = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

où on rappelle que

$$g(x, B, M) := -\frac{M}{B} \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right).$$

Comme nous l'avons fait précédemment on va faire le changement de variable  $b = \frac{1}{B}$  de sorte que

$$\tilde{g}(x, b, M) := g(x, B, M) = -bM \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right). \quad (3.32)$$

Le contrôle  $u = (b, M)$  ne dépend pas de  $x$  et appartient à un sous-ensemble  $U_\alpha$  convexe et fermé de l'espace des contrôles :

$$U_\alpha = \{(b, M) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0, M \geq \alpha\}$$

où  $\alpha > 0$  a été défini dans la section précédente . Pour  $\varepsilon > 0$  quelconque, on se donne la fonction coût de la forme suivante

$$\mathcal{J}_\varepsilon(V, b, M) = \frac{1}{2} \int_0^L \langle V(x) - Z(x), Q(V(x) - Z(x)) \rangle_2 dx + \frac{\varepsilon}{2} (b^2 + M^2) \quad (3.33)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  désigne le produit scalaire de  $\mathbb{R}^2$  et

–  $V$  est défini au début de la section 3.3.1

–

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z(x) = \begin{pmatrix} z(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

–  $z \in L^2(0, L)$  tel que  $z(x_i) = z_i$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

Posons ensuite

$$J_\varepsilon(b, M) := \mathcal{J}_\varepsilon(V[b, M], b, M). \quad (3.34)$$

Nous allons considérer le problème suivant

$$\begin{cases} \min \mathcal{J}_\varepsilon(V, b, M) \\ \frac{dV}{dx} = AV(x) + \tilde{G}(x, b, M) \quad \text{sur } ]0, L[, \quad V(0) = 0 \\ (b, M) \in U_\alpha \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

où  $\tilde{G} = [0, \tilde{g}]^t$ , qui peut être formulé de manière équivalente

$$\begin{cases} \min J_\varepsilon(b, M) = \mathcal{J}_\varepsilon(V[b, M], b, M) \\ (b, M) \in U_\alpha. \end{cases}$$

#### 3.3.4.1 Existence

Le paramètre  $\varepsilon$  est un paramètre de régularisation/pénalisation qui permet de rendre la fonctionnelle coût coercive et donc d'assurer ainsi l'existence d'une solution au problème. C'est une alternative à l'introduction d'une borne supérieure  $\beta$  sur  $M$ .

**Théorème 3.3.1.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , le problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  admet une solution  $(b_\varepsilon, M_\varepsilon)$ .*

*Démonstration.* La fonctionnelle coût est coercive grâce à l'introduction du paramètre  $\varepsilon$ . D'autre part, l'application  $(b, M) \mapsto V[b, M]$  est continue sur  $[0, +\infty[ \times [\alpha, +\infty[$  en raison des propriétés de continuité de  $\tilde{G}$ . La fonctionnelle  $J_\varepsilon$  est donc continue et donc semi-continue inférieurement par rapport à  $(b, M)$  qui est dans un espace de dimension finie. L'existence en découle.

En revanche l'unicité ne peut pas être garantie, la fonctionnelle  $J$  n'étant pas convexe (à cause de l'équation d'état).  $\square$

#### 3.3.4.2 Conditions d'optimalité

Nous allons établir des conditions d'optimalité nécessaires du premier ordre. On commence par calculer la dérivée Gâteaux de la fonction  $J_\varepsilon$ . Soit  $(b_o, m_o) \in U_\alpha$  :

$$\nabla_{(b, M)} J_\varepsilon(b, M)(b_o, m_o) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J_\varepsilon(b + tb_o, M + tm_o) - J_\varepsilon(b, M)}{t}.$$

On peut aussi calculer cette dérivée en utilisant la formule suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_{(b, M)} J_\varepsilon(b, M)(b_o, m_o) = \\ \langle \nabla_{(V, b, M)} \mathcal{J}_\varepsilon(V[b, M], b, M), (\nabla_{(b, M)} V[b, M](b_o, m_o), b_o, m_o) \rangle_{\mathcal{X}, \mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

---

Notons

$$W[b, M](b_o, m_o) = \nabla_{(b, M)} V[b, M](b_o, m_o)$$

c'est-à-dire

$$W[b, M](b_o, m_o) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V[b + tb_o, M + tm_o] - V[b, M]}{t}. \quad (3.35)$$

Rappelons que  $V_x$  désigne la dérivée de  $V$  par rapport à  $x$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} V_x[b + tb_o, M + tm_o] &= AV[b + tb_o, M + tm_o] + \tilde{G}(x, b + tb_o, M + tm_o) \\ V_x[b, M] &= AV[b, M] + \tilde{G}(x, b, M) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} & \frac{V_x[b + tb_o, M + tm_o] - V_x[b, M]}{t} \\ &= \frac{AV[b + tb_o, M + tm_o] + \tilde{G}(x, b + tb_o, M + tm_o) - AV[b, M] - \tilde{G}(x, b, M)}{t} \\ &= A \frac{V[b + tb_o, M + tm_o] - V[b, M]}{t} + \frac{\tilde{G}(x, b + tb_o, M + tm_o) - \tilde{G}(x, b, M)}{t}. \end{aligned}$$

La passage à la limite quand  $t$  tend vers  $0^+$  et (3.35) nous donne

$$W_x[b, M](b_o, m_o) = AW[b, M](b_o, m_o) + \nabla_{(b, M)} \tilde{G}(x, b, M)(b_o, m_o). \quad (3.36)$$

Comme

$$\tilde{G}(x, b, M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}(x, b, M) \end{pmatrix},$$

avec

$$\tilde{g}(x, b, M) = -bM \ln \left( 1 + \frac{q(x - L)^2}{2M} \right),$$

nous avons en posant

$$h(x, M) := -M \ln \left( 1 + \frac{q(x - L)^2}{2M} \right), \quad (3.37)$$

$$\nabla_{(b, M)} \tilde{G}(x, b, M)(b_o, m_o) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h(x, M) & b \nabla_M h(x, M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_o \\ m_o \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$W_x[b, M](b_o, m_o) = AW[b, M](b_o, m_o) + \mathbb{H}_{(b, M)} \begin{pmatrix} b_o \\ m_o \end{pmatrix}$$

où on a posé

$$\mathbb{H}_{(b, M)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h(\cdot, M) & b \frac{\partial h}{\partial M}(\cdot, M) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

De plus  $W(0) = 0$ .

Dans cette partie, pour simplifier des notations, nous noterons  $V[b, M]$  par  $V$  et  $W[b, M](b_o, m_o)$  par  $W$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(V + tW, b + tb_o, M + tm_o) - \mathcal{J}_\varepsilon(V, b, M)}{t} \\
 &= \frac{1}{2t} \int_0^L \langle (V + tW)(x) - Z(x), Q((V + tW)(x) - Z(x)) \rangle_2 dx \\
 & \quad + \frac{\varepsilon}{2t} [(b + tb_o)^2 + (M + tm_o)^2] \\
 & \quad - \frac{1}{2t} \int_0^L \langle V(x) - Z(x), Q(V(x) - Z(x)) \rangle_2 dx - \frac{\varepsilon}{2t} (b^2 + M^2) \\
 &= \frac{1}{2t} \int_0^L \langle V(x) + tW(x) - Z(x), Q(V(x) + tW(x) - Z(x)) \rangle_2 dx \\
 & \quad - \frac{1}{2t} \int_0^L \langle V(x) - Z(x), Q(V(x) - Z(x)) \rangle_2 dx \\
 & \quad + \frac{\varepsilon}{2t} [(b + tb_o)^2 + (M + tm_o)^2] - \frac{\varepsilon}{2t} (b^2 + M^2) \\
 &= \frac{1}{2t} \int_0^L \left( \langle V(x) - Z(x), Q(V(x) - Z(x)) \rangle_2 \right. \\
 & \quad \left. + 2t \langle Q(V(x) - Z(x)), W(x) \rangle_2 + t^2 \langle W(x), W(x) \rangle_2 \right) dx \\
 & \quad - \frac{1}{2t} \int_0^L \langle V(x) - Z(x), Q(V(x) - Z(x)) \rangle_2 dx \\
 & \quad + \frac{\varepsilon}{2t} [2t(bb_o + Mm_o) + t^2(b_o^2 + m_o^2)] \\
 &= \int_0^L \langle Q(V(x) - Z(x)), W(x) \rangle_2 dx + \frac{t}{2} \int_0^L \langle W(x), W(x) \rangle_2 dx \\
 & \quad + \varepsilon(bb_o + Mm_o) + \frac{\varepsilon t}{2} (b_o^2 + m_o^2).
 \end{aligned}$$

Le passage à la limite quand  $t$  tend vers 0 donne

$$\nabla_{(b,M)} \mathcal{J}_\varepsilon(b, M)(b_o, m_o) = \int_0^L \langle Q(V(x) - Z(x)), W(x) \rangle_2 dx + \varepsilon \langle (b, M), (b_o, m_o) \rangle_2 \quad (3.39)$$

où  $W$  est la solution de

$$\begin{cases} W' = AW + \mathbb{H}_{(b,M)}(x) \begin{pmatrix} b_o \\ m_o \end{pmatrix} & \text{sur } ]0, L[ \\ W(0) = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

et  $W'$  désigne la dérivée de  $W$  par rapport à  $x$ . On peut donc écrire les conditions d'optimalité du premier ordre :

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $\varepsilon > 0$  et  $(b_\varepsilon, M_\varepsilon)$  une solution de  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ . Alors pour tout  $(b, M) \in U_\alpha$  on a*

$$\int_0^L \langle Q(V_\varepsilon(x) - Z(x)), W_\varepsilon(x) \rangle_2 dx + \varepsilon \langle (b_\varepsilon, M_\varepsilon), (b - b_\varepsilon, M - M_\varepsilon) \rangle_2 \geq 0$$

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

---

où  $V_\varepsilon = V[b_\varepsilon, M_\varepsilon]$  et  $W_\varepsilon$  est la solution de

$$\begin{cases} W'_\varepsilon = AW_\varepsilon + \mathbb{H}_{(b_\varepsilon, M_\varepsilon)}(x) \begin{pmatrix} b - b_\varepsilon \\ M - M_\varepsilon \end{pmatrix} & \text{sur } ]0, L[ \\ W_\varepsilon(0) = 0 \end{cases}$$

On va transformer cette expression par intégration par parties en introduisant de manière classique l'état adjoint  $P_\varepsilon$  solution de l'équation adjointe

$$\begin{cases} P'_\varepsilon = -A^t P_\varepsilon - Q(V_\varepsilon - Z) & \text{sur } ]0, L[ \\ P_\varepsilon(L) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

où  $A^t$  désigne la matrice transposée de  $A$ . On pose

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} P_\varepsilon^1 \\ P_\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

de sorte que la relation (3.41) s'écrit (en utilisant les expressions de  $A$ ,  $Q$  et  $Z$  définies pp. 70 et 82)

$$\begin{cases} \frac{dP_\varepsilon^1}{dx} = -(V_\varepsilon^1 - z) & \text{sur } ]0, L[, \quad P_\varepsilon^1(L) = 0 \\ \frac{dP_\varepsilon^2}{dx} = -P_\varepsilon^1 & \text{sur } ]0, L[, \quad P_\varepsilon^2(L) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Il vient

$$\begin{aligned} & \nabla_{(b, M)} J_\varepsilon(b_\varepsilon, M_\varepsilon)(b - b_\varepsilon, M - M_\varepsilon) \\ &= \int_0^L \left\langle -A^t P_\varepsilon(x) - P'_\varepsilon(x), W_\varepsilon(x) \right\rangle_2 dx + \varepsilon [b_\varepsilon(b - b_\varepsilon) + M_\varepsilon(M - M_\varepsilon)] \\ &= \int_0^L \left\langle -A^t P_\varepsilon(x), W_\varepsilon(x) \right\rangle_2 dx - \int_0^L \left\langle P'_\varepsilon(x), W_\varepsilon(x) \right\rangle_2 dx + \\ & \quad \varepsilon [b_\varepsilon(b - b_\varepsilon) + M_\varepsilon(M - M_\varepsilon)]. \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\langle P'_\varepsilon(x), W_\varepsilon(x) \right\rangle_2 dx \\ &= \left[ \left\langle P_\varepsilon(L), W_\varepsilon(L) \right\rangle_2 - \left\langle P_\varepsilon(0), W_\varepsilon(0) \right\rangle_2 \right] - \int_0^L \left\langle P_\varepsilon(x), W'_\varepsilon(x) \right\rangle_2 dx \\ &= - \int_0^L \left\langle P_\varepsilon(x), W'_\varepsilon(x) \right\rangle_2 dx. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 & \nabla_{(b,M)} J_\varepsilon(b_\varepsilon, M_\varepsilon)(b - b_\varepsilon, M - M_\varepsilon) \\
 &= \int_0^L \left\langle P_\varepsilon(x), W'_\varepsilon(x) - AW_\varepsilon(x) \right\rangle_2 dx + \varepsilon \left[ b_\varepsilon(b - b_\varepsilon) + M_\varepsilon(M - M_\varepsilon) \right] \\
 &= \int_0^L \left\langle P_\varepsilon(x), \mathbb{H}_{(b_\varepsilon, M_\varepsilon)}(x) \begin{pmatrix} b - b_\varepsilon \\ M - M_\varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle_2 dx + \varepsilon \left[ b_\varepsilon(b - b_\varepsilon) + M_\varepsilon(M - M_\varepsilon) \right] \\
 &= \int_0^L \left\langle \mathbb{H}_{(b_\varepsilon, M_\varepsilon)}^t(x) P_\varepsilon(x), \begin{pmatrix} b - b_\varepsilon \\ M - M_\varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle_2 dx + \varepsilon \left[ b_\varepsilon(b - b_\varepsilon) + M_\varepsilon(M - M_\varepsilon) \right].
 \end{aligned}$$

Avec la relation (3.38) on obtient

$$\begin{aligned}
 & \nabla_{(b,M)} J_\varepsilon(b_\varepsilon, M_\varepsilon)(b - b_\varepsilon, M - M_\varepsilon) = \\
 & \int_0^L \left[ h(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x)(b - b_\varepsilon) + b_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x)(M - M_\varepsilon) \right] dx \\
 & + \varepsilon b_\varepsilon(b - b_\varepsilon) + \varepsilon M_\varepsilon(M - M_\varepsilon)
 \end{aligned}$$

où on rappelle que

$$h(x, M_\varepsilon) = -M_\varepsilon \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M_\varepsilon} \right),$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_\varepsilon) &= -\ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M_\varepsilon} \right) + \frac{q(x-L)^2}{2M_\varepsilon + q(x-L)^2} \\
 &= \frac{1}{M_\varepsilon} h(x, M_\varepsilon) + \frac{q(x-L)^2}{2M_\varepsilon + q(x-L)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

La condition d'optimalité du premier ordre donne

$$\forall (b, M) \in U_\alpha \quad \nabla_{(b,M)} J_\varepsilon(b_\varepsilon, M_\varepsilon)(b - b_\varepsilon, M - M_\varepsilon) \geq 0.$$

On découple la relation ci-dessus en posant successivement  $b = b_\varepsilon$  et  $M = M_\varepsilon$  pour obtenir

$$\forall b \geq 0 \quad \left( \int_0^L h(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx + \varepsilon b_\varepsilon \right) (b - b_\varepsilon) \geq 0, \tag{3.44a}$$

$$\forall M \geq \alpha \quad \left( b_\varepsilon \int_0^L \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx + \varepsilon M_\varepsilon \right) (M - M_\varepsilon) \geq 0. \tag{3.44b}$$

Les deux relations précédentes sont respectivement équivalentes à

$$b_\varepsilon = \mathbf{P}_{[0, +\infty[} \left[ b_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon + \int_0^L h(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx \right], \tag{3.45a}$$

$$M_\varepsilon = \mathbf{P}_{[\alpha, +\infty[} \left[ M_\varepsilon + \varepsilon M_\varepsilon + b_\varepsilon \int_0^L \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx \right]. \tag{3.45b}$$

### 3.3. FORMULATION « CONTRÔLE OPTIMAL »

---

où  $\mathbf{P}_I$  désigne la projection sur l'intervalle  $I$ .

Supposons que  $b_\varepsilon = 0$ . Alors

$$M_\varepsilon + \varepsilon M_\varepsilon + b_\varepsilon \int_0^L \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx = M_\varepsilon + \varepsilon M_\varepsilon \geq M_\varepsilon \geq \alpha .$$

La relation (3.45b) implique alors

$$M_\varepsilon = M_\varepsilon + \varepsilon M_\varepsilon$$

c'est-à-dire  $M_\varepsilon = 0 \notin [\alpha, +\infty[$ . C'est donc impossible. Par conséquent  $b_\varepsilon > 0$  et la relation (3.44a) est alors équivalente à

$$\varepsilon b_\varepsilon + \int_0^L h(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$b_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^L h(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx .$$

D'autre part la relation (3.45b) est équivalente à

$$M_\varepsilon = \max \left( (1 + \varepsilon) M_\varepsilon + b_\varepsilon \int_0^L \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx, \alpha \right) .$$

On obtient finalement le théorème suivant :

**Théorème 3.3.2.** *Toute solution  $(b_\varepsilon, M_\varepsilon)$  du problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  satisfait les conditions d'optimalité du premier ordre suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_\varepsilon^1}{dx} = V_\varepsilon^2 \quad \text{sur } ]0, L[, V_\varepsilon^1(0) = 0 \\ \frac{dV_\varepsilon^2}{dx} = b_\varepsilon h(\cdot, M_\varepsilon) \quad \text{sur } ]0, L[, V_\varepsilon^2(0) = 0 . \end{array} \right. \quad \text{Equation d'état} \quad (3.46a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_\varepsilon^1}{dx} = -(V_\varepsilon^1 - z) \quad \text{sur } ]0, L[, P_\varepsilon^1(L) = 0 \\ \frac{dP_\varepsilon^2}{dx} = -P_\varepsilon^1 \quad \text{sur } ]0, L[, P_\varepsilon^2(L) = 0 \end{array} \right. \quad \text{Equation adjointe} \quad (3.46b)$$

$$b_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^L h(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx , \quad (3.46c)$$

$$M_\varepsilon = \max \left( (1 + \varepsilon) M_\varepsilon + b_\varepsilon \int_0^L \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_\varepsilon) P_\varepsilon^2(x) dx, \alpha \right) , \quad (3.46d)$$

où  $h(x, M) := -M \ln \left( 1 + \frac{q(x-L)^2}{2M} \right)$ .

On obtient donc un système de 4 équations non linéaires que l'on peut résoudre par toute méthode numérique adaptée classique (méthode de Newton, point fixe, Newton non différentiable etc.). Nous terminons ce chapitre en donnant par exemple ce que serait un algorithme de point fixe classique pour résoudre le système d'optimalité :

#### Algorithme

1. **Initialisation** : choix de  $b_0 > 0$  et  $M_0$  (égal à  $\alpha$  par exemple ) et  $n = 0$ .

2. **Itération n** :

– Calcul de  $V_n$  solution de

$$\begin{cases} \frac{dV_n^1}{dx} = V_n^2 & \text{sur } ]0, L[, \quad V_n^1(0) = 0 \\ \frac{dV_n^2}{dx} = b_{n-1}h(\cdot, M_{n-1}) & \text{sur } ]0, L[, \quad V_n^2(0) = 0 . \end{cases}$$

– Calcul de  $P_n$  solution de

$$\begin{cases} \frac{dP_n^1}{dx} = -V_n^1 + Z & \text{sur } ]0, L[, \quad P_n^1(L) = 0 \\ \frac{dP_n^2}{dx} = -P_n^1 & \text{sur } ]0, L[, \quad P_n^2(L) = 0 \end{cases}$$

– Calcul de

$$b_n = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^L h(x, M_{n-1}) P_n^2(x) dx$$

– Calcul de

$$M_n = \max \left( (1 + \varepsilon) M_{n-1} + b_n \int_0^L \frac{\partial h}{\partial M}(x, M_{n-1}) P_n^2(x) dx, \alpha \right)$$

3. **Test d'arrêt** : Si le test d'arrêt choisi pour l'algorithme n'est pas satisfait on pose  $n = n + 1$  et on retourne à 2. Sinon STOP.



# Conclusions et perspectives

Nous avons considéré le problème d'identification successivement avec le modèle de Grosberg puis le modèle de Dahl. Après avoir établi des résultats d'existence pour chacun des problèmes modulo quelques hypothèses (contraintes) supplémentaires nous avons mené une étude numérique qui nous a permis de conclure à la fois sur le plan théorique (validité des modèles) et sur le plan numérique (obtention de la valeur des paramètres). Les méthodes employées sont générales et ne dépendent pas du renfort considéré. Enfin nous avons développé une approche indirecte de type contrôle optimal qui conduit à un système d'optimalité dont la résolution numérique ne pose pas de difficultés particulières. Là encore cette approche est adaptable au choix d'autres modèles, par exemple le modèle *Elastique Non Linéaire Plastique* (ENLP) proposé par E. de Bilbao [5].

Nous avons donc confirmé mathématiquement que le modèle de Grosberg était tout-à-fait adapté à des longueurs  $L$  relativement petites ( $L \leq 140$ ) et que dans ce cas le modèle de Dahl se réduit au modèle de Grosberg. Lorsque  $L$  appartient à l'intervalle  $[140, 180]$ , on constate que la valeur du paramètre  $M_0$  est toujours la même à savoir  $M_0(L) = \frac{qL^2}{2}$ . La valeur de  $B$  est alors donnée par une formule explicite tirée de l'analyse faite à la section 3.1.2.

Enfin, nous avons proposé une formulation plus générale qui permet de traiter ce type de problème d'identification dans un cadre très général. Les perspectives ouvertes par ce travail sont les suivantes :

1. Une suite naturelle est l'application de la méthode générique de contrôle optimal avec fonctionnelle coût pénalisée au problème gouverné par le modèle (ENLP)

$$\frac{dM}{d\kappa} = B^{EL}(\kappa) = B_m + (B_M - B_m)e^{-\eta|\kappa|},$$

où les paramètres à identifier sont  $B_M$ ,  $B_m$  et  $\eta$ .

2. Pour valider les hypothèses de Love-Kirchhoff, il faut que le comportement ainsi que le champ de déplacement du matériau soient petits. Les profils mesurés sur le renfort NCF ont montré que sur certains longueurs de flexion, le déplacement ne l'est pas assez.

Rappelons tout d'abord les formules exactes du moment de flexion et de la courbure. Pour tout  $s \in [0, L]$ ,

$$M(s) = q \int_s^L \left| \int_s^t \cos \varphi(u) du \right| dt \quad (3.1)$$

$$\kappa(s) = -\varphi'(s) \quad (3.2)$$

Notons qu'avec une telle définition de la courbure,  $\kappa(s) \geq 0$  pour tout  $s \in [0, L]$  car l'angle tangent  $\varphi(s)$  est décroissant sur l'intervalle  $[0, L]$ . Le modèle de Grosberg devient alors

$$M(s) = B \cdot \kappa(s) + M_0. \quad (3.3)$$

Ce qui donne, avec (3.2),

$$\varphi'(s) = \frac{-M(s) + M_0}{B}.$$

On considère alors une équation fonctionnelle du type

$$\varphi' = \Psi(\varphi, B, M_0, L) \quad (3.4)$$

où  $\varphi$ , la fonction inconnue, est à valeurs dans  $\mathcal{C}[0, L]$  (l'espace des fonctions continues de  $[0, L]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ),  $B$ ,  $M_0$  et  $L$  sont des paramètres, et  $\Psi$  définie par

$$\Psi(\varphi, B, M_0, L)(s) = -\frac{q}{B} \int_s^L \left| \int_s^t \cos \varphi(u) du \right| dt + \frac{M_0}{B}. \quad (3.5)$$

Finalement, avec  $\varphi(0) = 0$ , on a

$$\forall l \in [0, L], \quad \varphi(l) = \int_0^l \Psi(\varphi, B, M_0, L)(s) ds. \quad (3.6)$$

**Lemme 3.3.1.** *La fonction  $\Psi(\varphi, B, M_0, L)$  définie par (3.5) est lipschitzienne par rapport à  $\varphi$ .*

*Démonstration* - Pour tout  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}[0, L]$  et pour tout  $s \in [0, L]$ , on a

$$\begin{aligned} & |\Psi(\varphi_1, B, M_0, L)(s) - \Psi(\varphi_2, B, M_0, L)(s)| \\ &= \left| -\frac{q}{B} \int_s^L \left| \int_s^t \cos \varphi_1(u) du \right| dt + \frac{M_0}{B} + \frac{q}{B} \int_s^L \left| \int_s^t \cos \varphi_2(u) du \right| dt - \frac{M_0}{B} \right| \\ &= \left| \frac{q}{B} \int_s^L \left( \left| \int_s^t \cos \varphi_1(u) du \right| - \left| \int_s^t \cos \varphi_2(u) du \right| \right) dt \right| \\ &\leq \frac{q}{B} \int_s^L \left| \int_s^t (\cos \varphi_1(u) - \cos \varphi_2(u)) du \right| dt \\ &\leq \frac{q}{B} \int_s^L \int_s^t |\cos \varphi_1(u) - \cos \varphi_2(u)| du dt. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $u \in [0, L]$  nous avons

$$|\cos \varphi_1(u) - \cos \varphi_2(u)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Nous obtenons donc, pour tout  $s \in [0, L]$ ,

$$\begin{aligned}
 |\Psi(\varphi_1, B, M_0, L)(s) - \Psi(\varphi_2, B, M_0, L)(s)| &\leq \frac{q}{B} \int_s^L \int_s^t \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty du dt \\
 &= \frac{q}{B} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \int_s^L \int_s^t du dt \\
 &= \frac{q(l-L)^2}{2B} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \\
 &\leq \frac{qL^2}{2B} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\Psi(\varphi_1, B, M_0, L) - \Psi(\varphi_2, B, M_0, L)\| \leq \frac{qL^2}{2B} \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

Si  $\varphi \in \mathcal{C}[0, L]$ , alors

$$T(\varphi, B, M_0, L)(l) := \int_0^l \Psi(\varphi, B, M_0, L)(s) ds \quad (3.7)$$

définit une fonction  $\varphi \mapsto T(\varphi, B, M_0, L)$  qui est aussi dans  $\mathcal{C}[0, L]$ . L'équation (3.6) s'écrit donc

$$\varphi = T(\varphi, B, M_0, L)$$

où  $T$  définie par (3.7).

Remarquons ici que la méthode itérative de Picard ne s'applique pas, bien que l'équation (3.4) est très proche d'une équation différentielle. Les tests numériques ont montré que cette méthode ne convergeait que dans le cas des petits longueurs.

Nous proposons donc de tester la validation des hypothèses de Love-Kirchhoff sur le renfort NCF. Nous reconstruisons la courbe avec les valeurs optimales  $B^*$  et  $M_0^*$  (sous les hypothèses de Love-Kirchhoff), mais cette fois-ci avec des formules exactes du moment de flexion (3.1) et de la courbure (3.2). Cela nous donnera une courbe caractérisée par une fonction  $\varphi^*$  solution de

$$\varphi(s) = T(\varphi, B^*, M_0^*, L)(s).$$

Il nous reste à calculer les coordonnées de la courbe

$$x(s) = \int_0^s \cos \varphi^*(u) du, \quad z(s) = \int_0^s \sin \varphi^*(u) du$$

pour comparer avec le profil mesuré.

Nous donnons ici un algorithme de point fixe pour trouver la solution  $\varphi^*$ .

#### Algorithme

- (a) **Initialisation** : choix de  $\varphi_0$  et  $\varepsilon > 0$ .
- (b) **Itération n** : calcul de  $\varphi_n$  solution de

$$\varphi_n = T(\varphi_{n-1}, B^*, M_0^*, L)$$

où  $T$  définie par

$$T(\varphi, B^*, M_0^*, L)(l) := -\frac{q}{B^*} \int_0^l \int_s^L \left| \int_s^t \cos \varphi(u) du \right| dt ds + \frac{M_0^* l}{B^*}$$

pout tout  $l \in [0, L]$  et  $B^*, M_0^*$  des valeurs simulées.

- (c) **Test d'arrêt** : Si  $\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| > \varepsilon$ , on pose  $n = n + 1$  et on retourne à (b). Sinon STOP.

Cette méthode de point fixe peut servir à la vérification de la validation des hypothèses de Love-Kirchhoff, ainsi que simuler des données du modèle (de Grosberg dans ce cas), pour une certaine longueur de flexion  $L$ , avec condition que la valeur simulée  $B^*$  soit assez grande.

Vu que  $B^*$  diminue quand  $L$  est grande avec le modèle de *Grosberg* aussi que celui de *Dahl*, l'algorithme ci-dessus ne converge plus pour les cas de grande longueur. Etant donné que dans le modèle *ENLP* la rigidité est caractérisée par deux paramètres dépendants de  $L$ , la méthode risque de mieux se comporter avec ce modèle.

## Annexe A

# Concepts mécaniques

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations en usage dans la communauté des mécaniciens et en particulier la convention de sommation via les indices répétés. Dans tout ce qui suit si  $u$  est une variable de trois variables  $(x, y, z)$ ,  $u_{,x}$  (respectivement  $u_{,y}, u_{,z}$ ) désigne la dérivée (partielle) par rapport à la variable  $x$  (respectivement  $y, z$ ) :

$$u_{,x} := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{,y} := \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{,z} := \frac{\partial u}{\partial z}.$$

De la même façon,  $u_{,xx}$  (respectivement  $u_{,xy}, u_{,xz}$  etc.) désigne la dérivée seconde par rapport à  $x$  (respectivement  $xy, xz$  etc.) :

$$u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{,xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{,xz} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \dots$$

### A.1 Etude des déformations

#### A.1.1 Notation de déformation

Soit un milieu continu en mouvement qui occupe à l'instant  $t = 0$  un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^3$ , rapporté à une base orthonormée directe  $(X_x, X_y, X_z)$ , et à l'instant  $t > 0$  un ouvert  $\Omega(t)$ , rapporté à un système de coordonnées  $(x, y, z)$ . Chaque *point matériel* à l'instant  $t = 0$  est représenté par ses coordonnées

$$X = (X_\alpha) \quad (\alpha = x, y, z)$$

qui sont les **coordonnées de Lagrange**, et ses coordonnées

$$x = (x_i) \quad (i = x, y, z)$$

à l'instant  $t$  s'appellent les **coordonnées d'Euler**.

Soit  $M_0$  un point appartient à  $\Omega_0$  qui à l'instant  $t > 0$  devient un point  $M \in \Omega(t)$  ; posons

$$\begin{aligned} X &= (X_\alpha) \quad (\alpha = x, y, z), \\ x &= (x_i) \quad (i = x, y, z). \end{aligned}$$

Les équations de mouvement suivantes liant  $x$  et  $X$  :

$$\begin{cases} x_i = f_i(X, t) & (i = x, y, z) \\ X_\alpha = g_\alpha(x, t) & (\alpha = x, y, z) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Soit un vecteur matériel infinitésimal  $\overrightarrow{dM_0} = (dX_\alpha)$  d'origine  $M_0 \in \Omega_0$ . Il devient à l'instant  $t$  le vecteur  $\overrightarrow{dM} = (dx_i)$  d'origine  $M \in \Omega(t)$ . Pour chaque  $t$  fixé, différencions la première égalité dans (A.1) :

$$dx_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_\alpha}(X, t) dX_\alpha.$$

Notons  $\mathbb{F}$  la matrice de composantes

$$\mathbb{F}_{i\alpha} = \frac{\partial f_i}{\partial X_\alpha}(X, t),$$

on a alors

$$\overrightarrow{dM} = \mathbb{F} \overrightarrow{dM_0}. \quad (\text{A.2})$$

On appelle  $\mathbb{F}$  le **gradient de la déformation** au point  $M_0$  à l'instant  $t$ .

Soit  $\overrightarrow{\delta M_0} = (\delta X_\alpha)$  un autre vecteur infinitésimal au point  $M_0$ . D'après (A.2), il lui correspondra un vecteur  $\overrightarrow{\delta M} = (\delta x_i)$  au point  $M$  tel que

$$\overrightarrow{\delta M} = \mathbb{F} \overrightarrow{\delta M_0}. \quad (\text{A.3})$$

Nous pouvons maintenant introduire la **notion de déformation** au voisinage de la particule  $M_0$  à l'instant  $t$  par la variation des produits scalaires.

**Définition A.1.1** (Déformation). *On appelle déformation au voisinage de la particule  $M_0$  à l'instant  $t$  la quantité*

$$d\vec{M} \cdot \delta\vec{M} - d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0 \quad (\text{A.4})$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$ .

### A.1.2 Tenseur des déformations

Considérons maintenant les vecteurs

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM_0} &= (dX_x, dX_y, dX_z), & \overrightarrow{\delta M_0} &= (\delta X_x, \delta X_y, \delta X_z), \\ \overrightarrow{dM} &= (dx_x, dx_y, dx_z), & \overrightarrow{\delta M} &= (\delta x_x, \delta x_y, \delta x_z). \end{aligned}$$

Compte tenu de (A.3), nous avons

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} = dx_i \cdot \delta x_i = \mathbb{F}_{i\alpha} dX_\alpha \mathbb{F}_{i\beta} dX_\beta = \mathbb{F}_{i\alpha} \mathbb{F}_{i\beta} dX_\alpha dX_\beta.$$

Les longueurs et les angles des *éléments matériels*  $\overrightarrow{dM}$ ,  $\overrightarrow{\delta M}$  seront connus à partir des éléments  $\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \mathbb{F}_{i\alpha} \mathbb{F}_{i\beta}$  qui sont les composantes d'un tenseur du deuxième ordre symétrique, noté  $\mathbb{C}$ , appelé **tenseur des dilatations**. C'est-à-dire

$$\mathbb{C} = \mathbb{F}^\top \mathbb{F} \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathbb{F}^\top$  est le tenseur transposé du tenseur  $\mathbb{F}$ . On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0} &= \mathbb{C}_{\alpha\beta} dX_\alpha dX_\beta - dX_\alpha dX_\beta \\ &= (\mathbb{C}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) dX_\alpha dX_\beta\end{aligned}$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  désignent les composantes de la matrice identité  $\mathbb{I}$  :

$$\begin{cases} \delta_{\alpha\beta} = 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ \delta_{\alpha\beta} = 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

**Définition A.1.2** (Tenseur des déformations). *Le tenseur  $\mathbb{X}$  défini par*

$$\mathbb{X} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{I})$$

*est appelé le tenseur des déformations. On a*

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0} = 2\mathbb{X}_{\alpha\beta} dX_\alpha dX_\beta. \quad (\text{A.6})$$

Nous introduisons ici le champ de déplacement  $\vec{u}(M) = \overrightarrow{M_0M}$ . Pour exprimer  $\vec{u}(M)$  par ses composantes, nous supposons désormais que les points  $M_0$  et  $M$  sont dans un même repère (d'où l'inutilité désormais des indices grecs).

Nous avons donc

$$u_i = x_i - X_i = f_i(X, t) - X_i,$$

ou encore

$$f_i(X, t) = X_i + u_i(X, t).$$

Les composantes  $\mathbb{F}_{ij}$  du tenseur gradient de la déformation  $\mathbb{F}$  sont données par

$$\mathbb{F}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

d'où l'on obtient le **tenseur des dilatations**, noté  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{pq} &= \mathbb{F}_{ip}\mathbb{F}_{iq} = \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p}\right) \left(\delta_{iq} + \frac{\partial u_i}{\partial X_q}\right) \\ &= \delta_{ip}\delta_{iq} + \delta_{ip}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} + \delta_{iq}\frac{\partial u_i}{\partial X_p} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} \\ &= \delta_{pq} + \frac{\partial u_p}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_p} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p}\frac{\partial u_i}{\partial X_q},\end{aligned}$$

et le **tenseur des déformations**, noté  $\mathbb{X}$ ,

$$\mathbb{X}_{pq} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_p} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} \right) \quad (p, q = x, y, z). \quad (\text{A.7})$$

**Définition A.1.3** (Tenseur des déformations linéarisé). *On appelle  $\varepsilon$  le tenseur des déformations linéarisées donné par*

$$\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_p} \right) \quad (p, q = x, y, z). \quad (\text{A.8})$$

### A.1.3 Tenseur des contraintes

C'est un tenseur d'ordre 2 qui, dans un repère  $(e_x, e_y, e_z)$ , s'écrit sous la forme

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

où  $\sigma_{ii}$  est la contrainte normale dans la direction  $e_i$ , et  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) la contrainte de cisaillement dans le plan  $(e_i, e_j)$  ( $i, j = x, y, z$ ).

C'est un tenseur symétrique, c'est-à-dire  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  pour les composantes de la matrice associée.

### A.1.4 Loi de Hooke

C'est une loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de *faible amplitude*, reliant le tenseur de comportement  $\varepsilon$  et le tenseur des contraintes  $\sigma$ . Elle s'écrit sous la forme

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon) \quad (\text{A.10})$$

où  $\text{tr}(\cdot)$  désigne la trace,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé dont  $\mu$  le module de cisaillement.

## A.2 Petites déformations dans les coques

### A.2.1 Définition d'une coque

Une coque est un milieu continu solide déformable dont la forme peut être assimilée à une surface avec une épaisseur.

Soit  $S$  une surface paramétrée par  $(x, y)$ . Une coque d'épaisseur  $e$  est l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\{M \mid \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + z\vec{n}, -\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}, \frac{e}{2} < \text{Inf}(\|R_1\|, \|R_2\|)\},$$

$R_1$  et  $R_2$  étant les rayons de courbure principaux de la surface  $S$  en  $G$ .

La coque est dite *mince* si  $e \ll \text{Inf}(\|R_1\|, \|R_2\|)$ , pour simplifier on écrira  $e \ll R$ .

### A.2.2 Hypothèses de Love-Kirchhoff

Nous allons présenter dans ce qui suit les hypothèses de Love-Kirchhoff. Ces hypothèses introduisent des restrictions sur le champs de déplacements dans une coque. Elle sont parfois contestées, et il est possible de remettre en question tout ou partie de ces hypothèses pour construire des théories de coques plus complexes.

On commence par introduire les définitions du champ de déplacement et de la fibre normale.

**Définition A.2.1** (Champ de déplacement). *Soit  $M(x, y, z)$  un point de la coque et  $G(x, y, 0)$  le point associé dans le plan moyen à l'instant  $t = 0$ . Ils deviennent à l'instant  $t > 0$  les points  $M'$  et  $G'$ . On appelle*

$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{MM'} := \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}(G) = \overrightarrow{GG'} := \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \\ v_z(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

les champ de déplacement de  $M$  et  $G$  respectivement.

**Définition A.2.2** (Fibre normale). *La fibre normale est l'ensemble des points situé sur une normale à la surface moyenne.*

Les hypothèses de Love-Kirchhoff sont les suivantes :

### Hypothèse 1 : petites déformations

On suppose que les déformations sont petites (au sens des coques) et que les conditions d'existence d'un tenseur de variation de courbure linéaire en  $\vec{u}(G)$  sont satisfaites, c'est-à-dire

$$\|\partial \vec{u}(G)\| \sim \eta, \quad \frac{\|\partial \vec{u}(G)\|}{R} \sim \eta, \quad R \|\partial_{\alpha\beta} \vec{u}(G)\| \sim \eta, \quad \eta \ll \left\| \frac{\partial R}{R} \right\| \text{ et } \|\partial_\alpha R\| \sim 1.$$

où  $\eta$  est un infiniment petit adimensionnel d'ordre 1.

### Hypothèse 2 : linéarisation en $z$

On suppose que le champ de déplacement  $\vec{u}(M)$  est peu différent de  $\vec{u}(G)$ , c'est-à-dire que si l'on développe  $\vec{u}(M)$  autours de  $z = 0$ ,

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}(x, y, 0) + z [\partial_z \vec{u}(x, y, z)]_{z=0} + \frac{z^2}{2} [\partial_{zz} \vec{u}(x, y, z)]_{z=0} + \dots,$$

on ne retient que la partie linéaire en  $z$  :

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}(x, y, 0) + z [\partial_z \vec{u}(x, y, z)]_{z=0}. \quad (\text{A.12})$$

Le terme négligé n'est du second ordre que si

$$\frac{h}{R} \sim \eta.$$

Cette hypothèse est dite **hypothèse de coque mince**.

### Hypothèse 3 : distorsion nulle sur la surface moyenne

On suppose que sur la surface moyenne, la distorsion dans tout plan contenant  $\vec{n}$  est négligeable. C'est-à-dire que tout point  $G + dz \vec{n}$  voisin de  $G$  sur la normale  $\vec{n}$ , reste sur la normale  $\vec{n}'$  à  $G'$  après déformation. Autrement dit, l'angle du vecteur  $dz \vec{n}$  avec tout vecteur  $\overrightarrow{dM}$  reste un angle droit après déformation.

Cela signifie que

$$[\varepsilon(t, \vec{n})]_{z=0} = 0 \quad \forall t \in S. \quad (\text{A.13})$$

### A.2.3 Déformation d'une coque mince

Nous nous plaçons dans les hypothèses de Love-Kirchhoff. Les déplacements transversaux sont donc les mêmes pour les points d'une même fibre normale :

$$u_z(x, y, z) = v_z(x, y).$$

D'après ces hypothèses, le champs de déplacement  $\vec{u}(M)$  est peu différent de  $\vec{u}(G)$  et peut être linéarisé en  $z$ . En particulier, c'est la somme du déplacement du point  $G$  et du déplacement résultant de la rotation de la fibre normale en  $G$  :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(G) + \vec{u}_r$$

où  $\vec{u}_r$  est le déplacement résultant de la rotation.

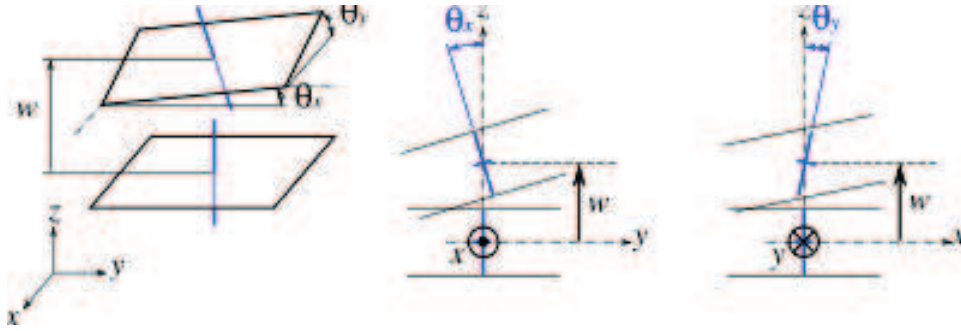


FIGURE A.1 – Déplacement du plan moyen et d'une fibre normale

La fibre normale en  $G$  tourne d'un angle  $\theta_x(x, y)$  autour de l'axe  $Ox$  et d'un angle  $\theta_y(x, y)$  autour de l'axe  $Oy$  (voir figure A.1). Nous avons alors

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} z \sin \theta_y(x, y) \\ -z \sin \theta_x(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le signe «  $-$  » vient du fait que si l'axe  $Ox$  pointe vers le lecteur, le sens positif de  $\theta_x$  sera le sens contraire des aiguilles d'une montre ce qui correspond à un déplacement  $u_y$  négatif lorsque  $z$  est positif.

Comme on se place dans le cas de petits déplacements, on a

$$\theta_\alpha(x, y) \ll 1$$

et alors

$$\sin \theta_\alpha(x, y) \simeq \theta_\alpha(x, y) \quad (\alpha = x, y).$$

Par conséquent,

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} z \theta_y(x, y) \\ -z \theta_x(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

d'où

$$\vec{u}(M) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) + z \theta_y(x, y) \\ v_y(x, y) - z \theta_x(x, y) \\ v_z(x, y) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Nous introduisons ici une autre forme du tenseur des déformations.

**Définition A.2.3.** *On définit différents types de déformation :*

– déformations **membranaires** de la surface moyenne

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx0} := v_{x,x} \\ \varepsilon_{yy0} := v_{y,y} \\ \varepsilon_{xy0} := \frac{1}{2}(v_{x,y} + v_{y,x}) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

– déformations de **cisaillement transverse**

$$\begin{cases} \varepsilon_{xz0} := \frac{1}{2}(v_{z,x} + \theta_y) \\ \varepsilon_{yz0} := \frac{1}{2}(v_{z,y} - \theta_x) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

– les **courbures** du plan moyen (ou **flexion**)

$$\begin{cases} \kappa_{xx} := \theta_{y,x} \\ \kappa_{yy} := -\theta_{x,y} \\ \kappa_{xy} := \frac{1}{2}(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Le tenseur des déformations peut alors être réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx0} + z \kappa_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy0} + z \kappa_{yy} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy0} + z \kappa_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz0} \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz0} \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Sous les hypothèses de Love-Kirchhoff, les déplacements selon  $x$  et  $y$  des points dans le plan moyen sont supposés nuls, ce qui donne

$$v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0. \quad (\text{A.20})$$

On obtient alors, en notant  $w(x, y) := v_z(x, y)$ ,

$$\vec{u}(M) = \begin{pmatrix} z \theta_y(x, y) \\ -z \theta_x(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Avec l'hypothèse de distorsion nulle sur la surface moyenne, nous avons

$$\begin{cases} \tan \theta_x = w_{,y} \\ \tan \theta_y = -w_{,x} \end{cases}$$

De plus, comme  $\theta_\alpha$  est petit par rapport à l'unité, nous pouvons supposer que  $\tan \theta_\alpha \simeq \theta_\alpha$  ( $\alpha = x, y$ ). On peut donc considérer ces angles comme les pentes de la surface moyenne après déformation, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \theta_x = w_{,y} \\ \theta_y = -w_{,x} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

On obtient finalement, compte tenu de (A.20) et (A.22) :

- les déformations *membranaires* de la surface moyenne :

$$\varepsilon_{xx0} = \varepsilon_{yy0} = \varepsilon_{xy0} = 0, \quad (\text{A.23})$$

- les déformations de *cisaillement transverse* :

$$\varepsilon_{xz0} = \frac{1}{2}(w_{,x} + \theta_y) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yz0} = \frac{1}{2}(w_{,y} - \theta_x) = 0, \quad (\text{A.24})$$

- les courbures de la surface moyenne (ou *flexion*) :

$$\begin{cases} \kappa_{xx} = \theta_{y,x} = -w_{,xx} \\ \kappa_{yy} = -\theta_{x,y} = -w_{,yy} \\ \kappa_{xy} = \frac{1}{2}(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) = -w_{,xy} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

et le tenseur des déformations linéarisé s'écrit donc

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = -zw_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = -zw_{,yy} \\ \varepsilon_{xy} = -zw_{,xy} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Les cisaillements transverses sont négligeables et la déformation de la plaque varie de manière linéaire selon  $z$ .

## A.3 Loi de comportement

### A.3.1 Modèle de comportement

Les composantes de déformations (A.16-A.18) peuvent être regroupées sous la forme suivante :

$$\varepsilon^\top = \underbrace{(\varepsilon_{xx0}, \varepsilon_{yy0}, \varepsilon_{xy0})}_{\text{membranaire}}, \underbrace{(\varepsilon_{yz0}, \varepsilon_{xz0})}_{\text{cisaillement transverse}}, \underbrace{(\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy})}_{\text{flexion}}. \quad (\text{A.27})$$

On associe les efforts généralisés aux composantes

$$f^\top = (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{yz}, N_{xz}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) \quad (\text{A.28})$$

dont :

– les efforts normaux :

$$N_{xx} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} dz, \quad N_{yy} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xy} dz, \quad (\text{A.29})$$

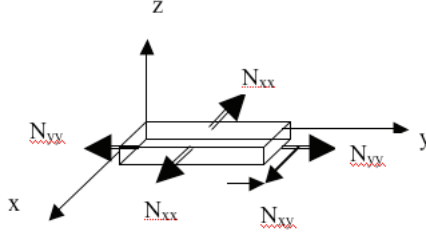


FIGURE A.2 – Efforts normaux

– les efforts de cisaillement transverse :

$$N_{xz} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xz} dz, \quad N_{yz} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{yz} dz, \quad (\text{A.30})$$

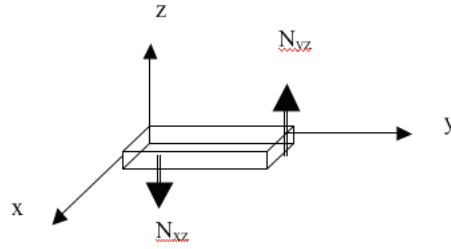


FIGURE A.3 – Efforts de cisaillement transverse

– les moments de flexion :

$$M_{xx} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} z dz, \quad M_{yy} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xy} z dz. \quad (\text{A.31})$$

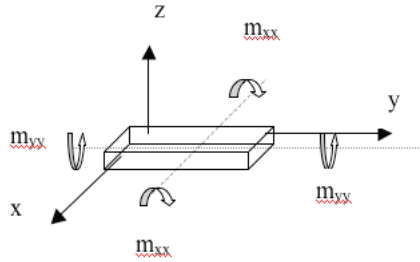


FIGURE A.4 – Moments de flexion

Comme on est dans une hypothèse de coques, plutôt que de rechercher les contraintes, on s'intéresse aux efforts généralisés. On recherche une loi de comportement reliant les efforts (A.28) aux déformations (A.27). On peut écrire cette relation de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ N_{yz} \\ N_{xz} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{xx}} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx0} \\ \varepsilon_{yy0} \\ \varepsilon_{xy0} \\ \varepsilon_{yz0} \\ \varepsilon_{xz0} \\ \kappa_{\mathbf{xx}} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Dans notre étude, on ne s'intéresse qu'aux termes en gras qui correspondent à la flexion pure en négligeant les termes d'allongement (le poids du tissu est négligeable par rapport à la rigidité).

### A.3.2 Evolution du moment de flexion

Pour certain longueurs de flexion, les études expérimentales indiquent que les pentes de la surface moyenne déformée sont petites devant l'unité. Nous pouvons donc nous placer dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff, ce qui donne, d'après (A.25) et (A.26),

$$\begin{cases} \kappa_{xx} = -w_{,xx} \\ \kappa_{yy} = -w_{,yy} \\ \kappa_{xy} = -w_{,xy} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = -zw_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = -zw_{,yy} \\ \varepsilon_{xy} = -zw_{,xy} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases}$$

En appliquant ces résultats à la loi de comportement de Hooke (A.10), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} \\ &= \lambda(-zw_{,xx} + (-zw_{,yy}) + \varepsilon_{zz}) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu(-zw_{,\alpha\beta}) \\ &= -z\lambda(w_{,xx} + w_{,yy}) \delta_{\alpha\beta} - 2\mu zw_{,\alpha\beta} \\ &= -z(\lambda \Delta w \delta_{\alpha\beta} + 2\mu w_{,\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

À partir de maintenant les indices grecs prennent seulement les valeurs  $x$  et  $y$ . Nous avons

$$\sigma_{\alpha z} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{\alpha z} + 2\mu \varepsilon_{\alpha z} = -z(\lambda \Delta w) \delta_{\alpha z} = 0. \quad (\text{A.34})$$

Compte tenu de (A.29)-(A.31), on obtient :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= - \int_{-e/2}^{e/2} z^2 (\lambda \Delta w \delta_{\alpha\beta} + 2\mu w_{,\alpha\beta}) dz \\ &= - \frac{z^3}{3} (\lambda \Delta w \delta_{\alpha\beta} + 2\mu w_{,\alpha\beta}) \Big|_{-e/2}^{e/2} \\ &= - \frac{e^3}{12} (\lambda \Delta w \delta_{\alpha\beta} + 2\mu w_{,\alpha\beta}) , \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$N_{\alpha\beta} = - \int_{-e/2}^{e/2} 2\mu z (\lambda \Delta w \delta_{\alpha\beta} + w_{,\alpha\beta}) dz = 0 , \quad (\text{A.36})$$

$$N_{\alpha z} = - \int_{-e/2}^{e/2} 0 \cdot dz = 0 . \quad (\text{A.37})$$

L'équation d'équilibre s'écrit

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - q = 0 \quad (\text{A.38})$$

où  $q = \rho g e$  avec

- $\rho$  (kg/m<sup>2</sup>) le poids surfacique du matériau considéré,
- $e$  (m) l'épaisseur de la plaque,
- $g = 9.81$  (m/s<sup>2</sup>) l'accélération de la gravité.

Grâce aux caractéristiques de la géométrie (faible épaisseur de la plaque, sa largeur est bien plus petit que sa longueur), la surface moyenne après déformation est sous la forme d'une surface cylindrique. On constate que le champs de déplacement ne dépend que de  $x$  :  $w = w(x)$ , ce qui revient à dire  $w_{,\alpha\beta} = 0$ , sauf dans le cas  $\alpha = \beta = x$ .

Les courbures de la surface moyenne s'écrivent

$$\begin{cases} \kappa_{xx} = -w_{,xx} \\ \kappa_{yy} = 0 \\ \kappa_{xy} = 0 \end{cases}$$

De plus, compte tenu de (A.35)-(A.37),  $M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0$  sauf dans le cas  $\alpha = \beta = x$ , l'équation d'équilibre (A.38) se réduit alors à

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = q . \quad (\text{A.39})$$

Les conditions aux limites au bord libre de droite, ici en  $x = L$ , sont

$$M_{xx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} = 0 . \quad (\text{A.40})$$

On a alors

$$M_{xx} = \frac{1}{2} q x^2 - q L x + \frac{1}{2} q L^2 = \frac{q}{2} (x - L)^2 \geq 0 . \quad (\text{A.41})$$

Pour chaque point fixé, le moment de flexion et la courbure sont donnés par

$$\begin{cases} M(x) = \frac{q}{2} (x - L)^2 \\ \kappa(x) = -w_{,xx} \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Le comportement de la plaque n'est donc représenté que par la relation entre le moment de flexion  $M$  et de la courbure  $\kappa$  donnée par

$$M = \mathbf{f}(\kappa)$$

qui s'appelle une **loi de comportement**.

# Bibliographie

- [1] R.J. Basset, R. Postle, N. Pang, *Experimental methods for measuring fabric mechanical properties : A review and analyse*, Textile research journal, 69 (11) : 866–875, 1999.
- [2] F. Berbain, A. Chevalier et C. Choudin. *Mise en œuvre des composites. méthodes et matériels*, chapitre A3720, traité Plastiques et Composites. Techniques de l'Ingénieur, 1997.
- [3] M. Bergounioux, *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*, Dunod, 2001.
- [4] J. Berthelot, *Matériaux composites - comportement mécanique et analyse des structures*, Tec et Doc, Hermès - Lavoisier, 2005.
- [5] E. de Bilbao, *Analyse et identification du comportement en flexion des renforts fibreux de composites*, Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 2008.
- [6] E. de Bilbao, D. Soulat, G. Hiver, A. Gasser, *Study of bending behaviour of composite reinforcements*, International Journal of Material Forming, Vol. 2 (2009), Suppl 1, pp.205–208
- [7] E. de Bilbao, D. Soulat, G. Hiver, A. Gasser, *Experimental Study of Bending Behaviour of Reinforcements*, Experimental Mechanics, Vol. 50 (2010), Issue 3, pp. 333–351.
- [8] E. de Bilbao, D. Soulat, G. Hivet, J. Launay et A. Gasser, *Bending test of composite reinforcement*, Int J Master Form, Suppl 1 : 835–838, Springer, 2008.
- [9] J.L. Billoët, *Introduction aux matériaux composites à hautes performances*, Edition Broché, 1993.
- [10] C. Binétruy, *Physique du moulage des composites avancés : aspects théoriques*, Techniques de l'Ingénieur, AM 3 718, 2004.
- [11] F. Boinot, A. Gurliat, *Moulage par injection de résine à basse pression ou procédé RTM*, Traité Plastiques et Composites, Techniques de l'Ingénieur, AM 3 728, 1991.
- [12] P. Boisse, *Finite element analysis of composite forming*, Composite forming technologies, Woodhead Publishing : 46–79, 2007.
- [13] P. Boisse, B. Zouari and J.L. Daniel, *Importance of in-plane shear rigidity in finite element analyses of woven fabric composite preforming. Composites Part A*, Applied Science and Manufacturing, vol. 37 (2006), pp. 2201–2212.
- [14] P. Boisse, M. Borr, *Étude expérimentale du comportement mécanique biaxial des tissus*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie, 323, 1996.

- [15] P. Boisse, M. Borr, K. Buet, A. Cherouat, *Finite element simulations of textile composite forming including the biaxial fabric behaviour*, Composite Part B : Engineering, pages 453–464, 1997.
- [16] P. Boisse, K. Buet, A. Gasser and J. Launay, *Meso/macro-mechanical behaviour of textile reinforcements for thin composites*, Composites Science and Technology, vol. 61 (2001), no. 3, pages 395–401.
- [17] M. Borr, *Détermination du comportement biaxial des tissus de fibres de verre mesure optique de la déformation*, Proceedings of Photomecanique 95 Cachan France, page 187 194, 1995.
- [18] J.F. Bonnans, J.-C. Gilbert , C. Lemaréchal et C. Sagastizábal, *Optimisation Numérique (Aspects théoriques et pratiques)*, Springer, 1997.
- [19] J.F. Bonnans, *Optimisation continue*, Dunod, 2006
- [20] K. Buet-Gautier, *Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés*, Thèse de Doctorat de l'Université d'Orléans, 1998.
- [21] K. Buet-Gautier, P. Boisse, *Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements*, Experimental Mechanics, vol. 41 (2001), no. 3, pp. 260–269.
- [22] M.J. Buntain, S. Bickerton, *Modeling forces generated within rigid liquid composite molding tools. part a : Experimental study*, Composites Part A, Applied science and manufacturing, 38 :1729–1741, 2007.
- [23] D. Carronnier, D. Gay, *Approche intégrée du RTM*, Revue des composites et des matériaux avancés, 6, no Hors série (1996).
- [24] Q. Chen, *Simulation de la mise en forme des matériaux composites à fibres continues et à matrice thermoplastique*, Thèse de Doctorat de l'Université du Havre 2010.
- [25] G. Chrétien, *Matériaux composites*, Edition Technique et Documentation, Lavoisier, 1986.
- [26] P.G. Ciarlet, *Mathematical elasticity*, Volume II : Theory of plates, North-Holland, 1997.
- [27] P.G. Ciarlet, *Mathematical elasticity*, Volume III : Theory of shells, North-Holland, 2000.
- [28] M. Crouzeix, A. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1984.
- [29] P. Dahl, *Solid friction damping of mechanical vibrations*, AIAA Journal **14** (1976), no. 12, pp. 1675-1682.
- [30] R. Dautray , J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques* , (vol. 1, Modèles physiques) , Masson, 1987.
- [31] R. Dautray , J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, (vol. 4, Méthodes variationnelles), Masson, 1988.

- [32] E. De Luycker, F. Morestin, P. Boisse, D. Marsal, *Numerical analysis of 3D interlock composite preforming*, International Journal of Material Forming (2008), pp. 1-4.
- [33] F. Dumont, *Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement mécanique de renforts de composites tissés*, Thèse de Doctorat de université Paris 6, 2003.
- [34] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
- [35] G. Ferron, *Dispositif de traction biaxiale DAX2*, Document Techmetal, Mézière-les-Mez, 1992.
- [36] A. Gasser, P. Boisse et S. Hanklar, *Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests*, Computational Materials Science, vol. 17 (2000) no. 1, pp. 7–20.
- [37] D. Gay, *Matériaux composites*. 4<sup>e</sup> édition. Hermès, 1997.
- [38] P.E. Gill, W. Murray et M.A. Saunders, *SNOPT : An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization*, SIAM Review, Vol. 47, No. 1, pp. 99-131.
- [39] P. Grosberg, *The mechanical properties of woven fabrics part ii : the bending of woven fabrics*, Textile Research Journal **36** (1996), pp. 205-214.
- [40] J. Launay , K. Buet, G. Hivet, P. Boisse, *Analyse expérimentale et modèles pour le comportement mécanique biaxiale des renforts tissés de composites*, Revues des composites et des matériaux avancés, 9 :27–56, 1999.
- [41] J. Launay, F. Lahmar, P. Boisse, P. Vacher, *Strain measurement in tests on fiber fabric by image correlation method*, Advanced Composites Letters, 2002.
- [42] J. Launay, G. Hivet, A.V. Duong and P. Boisse, *Experimental analysis of the influence of tensions on in plane shear behaviour of woven composite reinforcements*, Composites Science and Technology, vol. 68 (2008), no. 2, pp. 506–515.
- [43] S. V. Lomov, E.B. Belov, T. Bischoff, S. B. Ghosh, T. Truong Chi, and I. Verpoest, *Carbon composites based on multiaxial multiply stitched preforms. Part 1. Geometry of the preform*, Composites Part A : Applied Science and Manufacturing **33** (2002), no. 9, pp. 1171-1183.
- [44] A.C. Long, C.E. Wilks et C.D. Rudd. *Experimental characterisation of the consolidation of a commingled glass/ polypropylene composite*. Composites Science and Technology, vol. 61 (2001), no. 11, pp. 1591–1603.
- [45] A.C. Long, C.D. Rudd, *A simulation of reinforcement deformation during the production of preform for liquid moulding processes*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part B. Journal of engineering manufacture, 208 : 269–78, 1994.
- [46] J. Luyckx, *Fibres de carbone - données économiques*, Techniques de l'ingénieur - Traité Plastiques et Composites, Techniques de l'ingénieur, 2001.
- [47] J. Macki et A. Strauss, *Introduction to optimal control theory*, Springer-Verlag, 1982.

- [48] P. M. Naghdi, A. J. M. Spencer et A. H. England, *Nonlinear Elasticity and Theoretical Mechanics*, Oxford University Press, 1994.
- [49] H. Nahiène, *Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis*, Thèse de Doctorat de l'Insa de Lyon 2007.
- [50] J. Nocedal et S.J. Wright, *Numerical optimization*, Springer, 2006.
- [51] C. Ngo Ngoc, P. Bruniaux et J. M. Castelain, *Modeling friction for yarn/fabric simulation Application to bending hysteresis*, Proceedings 14th European Simulation Symposium, A. Verbraeck, W. Krug, eds. (c) SCS Europe BVBA, 2002.
- [52] P. Ouagne, D. Soulat, S. Allaoui, G. Hivet, *Mechanical properties and forming possibilities of a new generation of flax woven fabrics*, Proceeding of the 10th international conference on textile Composite (Texcomp), 26-28 Octobre 2010, Lille.
- [53] K.D. Potter, *The early history of the resin transfer moulding process for aerospace applications*, Composites Part A, Applied science and manufacturing, 30 (5) : 619–621, 1999.
- [54] L. Sainsaulieu, *Calcul scientifique*, 2ème édition, Dunod, 2000.
- [55] J. Stoer et R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, 1980.
- [56] S. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger, *Théorie des plaques et coques*, Dunod, 1961.
- [57] F. Van Der Ween, *Algorithms for draping fabrics on doubly-curved surfaces*, International journal for numerical methods in engineering, 31 : 1414–26, 1991.



**Identification de paramètres dans la fabrication de matériaux composites**

Résumé :

Ce travail est une contribution à l'étude du comportement de certains matériaux composites. Nous formalisons les observations expérimentales du point de vue mathématique, et menons une étude « critique » des différents modèles utilisés pour proposer des techniques génériques d'identification de paramètres dans ce contexte. Le manuscrit se divise en trois chapitres. Le chapitre 1 rappelle les principes élémentaires et le contexte mécanique de cette étude. On y présentera les hypothèses simplificatrices faites par la suite et les modèles de lois de comportement utilisés et testés. Le chapitre 2 est consacré à la modélisation du problème inverse avec utilisation du modèle de *Grosberg* et à son étude théorique et numérique. Le chapitre 3 reprend la démarche du chapitre précédent avec le modèle de *Dahl*. Outre la méthode numérique utilisée précédemment, nous utilisons une approche contrôle optimal et présentons des résultats plus rigoureux obtenus avec AMPL.

Mots clés : identification de paramètres, optimisation, matériaux composites, Grosberg, Dahl.

**Identification of parameters in the manufacture of composite materials**

Abstract :

This work is a contribution to the study of the behavior of some composite materials. We formalize the experimental observations from the mathematical point of view, and are conducting a "critical" study of the various models used to propose generic techniques for parameter identification in this context. The manuscript is divided into three chapters. Chapter 1 recalls the basic principles and mechanics context of this study. It will present the simplifying assumptions made by the following models and behaviour laws that we used and tested. Chapter 2 is devoted to modeling the inverse problem using the model of *Grosberg* and its theoretical and numerical study. Chapter 3 takes the approach of the previous chapter with the model of *Dahl*. Besides the numerical method used previously, we use an optimal control approach and present results obtained with more rigorous method and AMPL.

Keywords : parameter identification, optimization, composite materials, Grosberg, Dahl.



**MAPMO - UMR 6628, Fédération Denis Poisson,  
Université d'Orléans, BP 6759 F - 45067 Orléans Cedex 2**

