



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

LABORATOIRE PRISME, EQUIPE R.E.S.

THÈSE présentée par :

Hélène DEMAILLY

soutenance prévue le : **15 décembre 2011**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Spécialité : **Sciences Industrielles**

**Identification des coefficients aérodynamiques d'un
projectile à partir de mesures prises en vol**

THÈSE dirigée par :

Patrice BAILLY

Professeur des Universités, ENSI de Bourges

PRÉSIDENT DU JURY :

Alain CIMETIERE

Professeur des Universités, ENSMA Poitiers

RAPPORTEURS :

Alain FARCY

Maître de Conférences HDR, ENSMA Poitiers

Luigi GARIBALDI

Professeur des Universités, Politecnico di Torino

JURY :

Patrice BAILLY

Professeur des Universités, ENSI de Bourges

Alain CIMETIERE

Professeur des Universités, ENSMA Poitiers

Franck DELVARE

Maître de Conférences HDR, ENSI de Bourges

Alain FARCY

Maître de Conférences HDR, ENSMA Poitiers

Luigi GARIBALDI

Professeur des Universités, Politecnico di Torino

Christophe GRIGNON

Ingénieur Docteur, DGA Techniques terrestres

Settie HEDDADJ

Ingénieur Docteur, Nexter Munitions

Azeddine KOURTA

Professeur des Universités, Université d'Orléans

Remerciements

La thèse est une expérience très enrichissante tant au niveau scientifique qu’au niveau humain, qui m’a apporté un savoir pointu dans une discipline dans laquelle j’ai pris grand plaisir à travailler.

Je tiens à remercier tout d’abord mon directeur de thèse, Patrice Bailly, Professeur des Universités à l’ENSI de Bourges, pour avoir accepté d’encadrer ma thèse. Nos échanges ont été fructueux et enrichissants tout au long de ces trois ans.

Je remercie Joël Alain, directeur de l’ENSI de Bourges, pour m’avoir accueillie durant ces trois dernières années dans les locaux de l’école. Je remercie également les membres du personnel de l’ENSI de Bourges pour leur accueil chaleureux et leur disponibilité.

J’adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Alain Cimetière, Professeur des Universités à l’ENSMA de Poitiers, d’avoir donné de son temps pour examiner mon travail et présider le jury.

Je tiens également à remercier Messieurs Alain Farcy, H.D.R. à l’ENSMA de Poitiers, et Luigi Garibaldi, Professeur des Universités à l’école Politecnico di Torino, d’avoir bien voulu m’accorder de leur temps et me faire l’honneur de rapporter mon travail de thèse.

Il m’est également agréable de remercier Monsieur Azeddine Kourta, Professeur des Universités à l’Université d’Orléans, d’avoir pris le temps d’examiner mon travail et de participer au jury.

Je remercie chaleureusement Monsieur Franck Delvare, H.D.R. à l’ENSI de Bourges, pour m’avoir encadrée durant ces trois années de thèse, pour ses précieux conseils qui m’ont permis de mener à bien mes travaux, pour sa disponibilité et pour son soutien dans les moments difficiles. J’espère que cette étude contribuera à élever à un niveau encore plus haut ses talents de chasseur !

Je remercie de tout coeur Madame Settie Heddadj, experte et responsable métier Mécanique Du Vol à Nexter Munitions, pour m'avoir encadrée durant ces trois belles années au sein de l'équipe MLA. Ses compétences pointues, sa patience et ses qualités pédagogiques et d'écoute ont contribué à la fois à ma formation technique mais également à mon épanouissement au sein de l'équipe. Je la remercie également pour son soutien lors des moments difficiles. Ses qualités humaines en font une collègue avec laquelle j'ai pris grand plaisir à travailler.

Je remercie du fond du coeur Monsieur Christophe Grignon, Expert en balistique extérieure à la Direction Générale de l'Armement Techniques Terrestres de Bourges, pour avoir contribué à l'encadrement de ma thèse. Son excellence technique et ses qualités pédagogiques m'ont énormément appris durant ces trois années. Ses qualités humaines ont rendu notre collaboration agréable et constructive.

Toute ma gratitude va à mes collègues de travail au sein de Nexter Munitions, qui m'ont chaleureusement accueillie, patiemment supportée, et soutenue tout au long de ma thèse. Chacun d'eux a contribué à ma formation technique et humaine. Je remercie en particulier Monsieur François Chiarelli pour ses précieux conseils et sa disponibilité. Merci de tout coeur à Messieurs Eric Carette, Philippe Martin, Philippe Rouger et Régis Aumasson. Je remercie également Monsieur Roxan Cayzac pour m'avoir encadrée durant quelques mois.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Gaël Aumasson, collègue et adversaire sportif, pour tous les services qu'il m'a rendus, pour m'avoir fait progresser sur des rollers, et m'avoir fait détesté le tennis !

Je remercie également toutes les personnes de la Direction Générale de l'Armement Techniques Terrestres de Bourges avec qui j'ai travaillé, et qui sont trop nombreuses pour être toutes nommées ici. Je leur suis très reconnaissante pour leur disponibilité et pour la qualité des informations qu'elles m'ont communiquées.

Ma reconnaissance va aux doctorants de l'ENSI de Bourges, avec qui j'ai passé de très bons moments : Duy-Hung Duong, Bastien Durand, Julien Pavier, Steve Rudz et Jérôme Vial.

Une pensée émue va à mes proches qui ont toujours cru en moi et m'ont beaucoup soutenue depuis ces dix dernières années. Malgré la distance géographique ils ont toujours été présents et disponibles. Sans eux, je ne présenterais pas ces travaux de thèse. Je remercie de la même manière Mademoiselle Marion Proisy, mon amie de longue date, qui malgré un nombre limité de contacts a toujours été présente à mes

côtés dans chacune des expériences que j'ai vécues.

Enfin, j'adresse cinq cent quatre-vingt-six remerciements et quelques poussière d'étoiles à Monsieur Aurélien Gauvin, pour ses qualités d'écoute, sa patience, sa disponibilité, son réconfort dans les moments difficiles... et toutes les qualités d'une longue liste qui font de lui mon conjoint.

Table des matières

Remerciements	iii
Liste des figures	xi
Abréviations & Notations	xiii
Introduction	1
1 Contexte industriel de l'étude	5
1.1 Moyens industriels actuels pour la détermination des coefficients aé-	
rodynamiques	5
1.2 Objectifs de l'étude	7
1.3 L'instrumentation	8
1.3.1 L'instrumentation disponible à la DGA Tt	8
1.3.1.1 Le radar Doppler	8
1.3.1.2 Les panneaux	12
1.3.2 Autres instrumentations	12
1.3.2.1 Les magnétomètres	12
1.3.2.2 La centrale inertielle	14
1.3.3 Résumé des moyens de mesures	15
1.4 Conclusion	15
2 Introduction aux problèmes d'identification et à leurs méthodes de	
résolution	17
2.1 Introduction	17
2.2 Quelques exemples de problèmes inverses	17
2.3 Définition mathématique d'un problème inverse	20

2.3.1	Définition	20
2.3.2	Problèmes bien posés ou mal posés au sens d'Hadamard . . .	22
2.4	Méthodes de résolution de problèmes inverses	23
2.4.1	Méthodes de résolution pour les problèmes inverses linéaires .	24
2.4.1.1	La régularisation de type Tikhonov	24
2.4.1.2	Les méthodes itératives	26
2.4.1.3	Le maximum d'entropie	27
2.4.1.4	La méthode de la décomposition en valeurs singulières	28
2.4.1.5	Le contrôle optimal	29
2.4.1.6	La méthode de quasi-réversibilité	30
2.4.1.7	La méthode de régularisation évanescence	31
2.4.2	Méthodes pour la résolution de systèmes non linéaires	32
2.4.2.1	La méthode de Newton-Raphson	32
2.4.2.2	La méthode de Gauss-Newton	33
2.4.2.3	La méthode de Levenberg-Marquardt	34
2.5	Méthodes de résolution spécifiques à l'identification de coefficients aérodynamiques	36
2.5.1	Le maximum de vraisemblance	36
2.5.2	Les méthodes d'identification au sens des moindres carrés . . .	38
2.5.3	Les méthodes basées sur l'utilisation du filtre de Kalman . . .	39
2.5.4	Identification à partir de mesures issues de magnétomètres . .	41
2.5.5	Identification à partir d'essais en tunnel de choc	42
2.5.6	Identification à partir d'une technique de contrôle optimal . .	42
2.6	Conclusion	43
3	Mise en équations du vol d'un projectile	45
3.1	Les repères balistiques	45
3.1.1	Du repère Terre au repère canon	46
3.1.2	Du repère canon au repère trajectoire	47
3.1.3	Du repère trajectoire au repère projectile	48
3.1.4	Changements de repères en utilisant un quaternion d'Hamilton	50
3.2	Inventaire des efforts s'appliquant sur un projectile	52
3.2.1	Les forces	52
3.2.1.1	Les forces aérodynamiques	52

3.2.1.2	La force de pesanteur	54
3.2.1.3	La force de Coriolis	55
3.2.2	Les moments aérodynamiques	57
3.3	Mise en équations du vol d'un projectile	60
3.3.1	Principe fondamental de la dynamique	60
3.3.2	Théorème du moment cinétique	62
3.3.3	Relations cinématiques	64
3.3.4	Equations différentielles donnant les positions	64
3.3.5	Bilan de la mise en équations	65
3.4	Intégration numérique des équations du vol	66
3.4.1	Simplifications de la modélisation	66
3.4.2	Développement d'un outil d'intégration numérique des équations de la mécanique du vol	67
3.5	Conclusion	75
4	Identification des coefficients aérodynamiques à partir de données issues d'un vol	77
4.1	Formulation de la méthode d'identification	78
4.2	Identification des coefficients à partir de données simulées	80
4.2.1	Cas de 3 coefficients C_x , C_{lp} et C_{l0}	81
4.2.1.1	Utilisation de données non bruitées	82
4.2.1.1.1	<i>Influence du pas de temps</i>	82
4.2.1.1.2	<i>Influence du nombre de mesures</i>	83
4.2.1.1.3	<i>Influence de l'initialisation des coefficients aérodynamiques</i>	83
4.2.1.2	Influence du bruit affectant les données	83
4.2.1.2.1	<i>Influence du niveau de bruit</i>	83
4.2.1.2.2	<i>Influence du nombre de mesures</i>	85
4.2.2	Cas de 4 coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} , C_{l0} et C_{mq} . . .	86
4.2.2.1	<i>Influence du pas de temps</i>	87
4.2.2.2	<i>Influence du bruit</i>	88
4.2.3	Cas de 6 coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} , C_{l0} , $C_{m\delta}$, $C_{np\delta}$ et C_{mq}	89

4.2.4	Cas de 7 coefficients aérodynamiques C_x , $C_{z\delta}$, C_{lp} , C_{l0} , $C_{m\delta}$, $C_{np\delta}$ et C_{mq}	91
4.2.4.1	<i>Influence du pas de temps</i>	91
4.2.4.2	<i>Influence du choix du schéma d'intégration</i>	92
4.2.4.3	<i>Influence du nombre de mesures</i>	93
4.2.4.4	<i>Influence du bruit</i>	94
4.3	Identification à partir de mesures réelles : cas de trois coefficients C_x , C_{lp} et C_{l0}	95
4.3.1	Introduction	95
4.3.2	Identification à partir de mesures prises en vol	97
4.3.3	Analyse des résultats	98
4.4	Conclusion	102
Conclusions & perspectives		105
ANNEXES		109
A Présentation d'un projectile flèche		111
B Dérivées des composantes de la matrice de passage		115
C Expression des éléments du quaternion		117
D Expression de la pesanteur locale		121
E Formulation détaillée du modèle balistique		127
F Dérivées des équations de la mécanique du vol		129
G Formulation détaillée de la mise en oeuvre numérique de la technique d'identification		133
H Les différents schémas pour l'intégration du système différentiel		143
I Expressions du terme de pénalisation pour les différents schémas d'intégration		147
J Génération de données d'entrée bruitées		151

Table des figures

1.1	Maquette d'un projectile dans une veine d'écoulement	7
1.2	Instrumentation Radar Doppler	9
1.3	Vitesse radiale mesurée par le radar	11
1.4	Réflecteur	11
1.5	Présentation des panneaux de tir	12
1.6	Empreinte sur un panneau	13
1.7	Magnétomètres	13
3.1	Position du canon sur le globe terrestre	46
3.2	Définition de l'angle de latitude	47
3.3	Définition de l'angle d'azimut	47
3.4	Passage du repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère $(\vec{t}, \vec{s}, \vec{h})$	48
3.5	Représentation spatiale des angles η (< 0) et θ	48
3.6	Passage du repère $(\vec{t}, \vec{s}, \vec{h})$ au repère $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$	49
3.7	Forces aérodynamiques s'appliquant au projectile	53
3.8	Moments aérodynamiques s'appliquant au projectile	57
3.9	Repère absolu et repère relatif	61
3.10	Composantes de la vitesse $v_{abs_i}^*$ et $v_{abs_j}^*$	69
3.11	Composantes de la vitesse $v_{abs_k}^*$ et de la vitesse angulaire ω_c^*	70
3.12	Norme $\sqrt{\omega_a^{*2} + \omega_b^{*2}}$ et angle d'obliquité δ^*	70
3.13	Position x^* et altitude y^*	71
3.14	Déviations z^*	71
3.15	Insensibilité de la vitesse $v_{abs_i}^*$ et de la vitesse angulaire ω_c^* par rapport à certains coefficients aérodynamiques	73
3.16	Sensibilité de la vitesse $v_{abs_i}^*$ et de la vitesse angulaire ω_c^* par rapport à C_x	74

3.17	Sensibilité de la vitesse angulaire ω_c^* par rapport à C_{lp} et C_{l0}	74
4.1	Influence du bruit sur l'erreur relative d'identification du C_x	85
4.2	Influence du bruit sur les erreurs relatives d'identification du C_{lp} et du C_{l0}	85
4.3	Reconstructions de la vitesse et de la vitesse de roulis du projectile	86
4.4	Influence du nombre de couples de mesures sur les erreurs relatives	87
4.5	Reconstructions des paramètres d'état $v_{abs_i}^*, \omega_c^*, \omega_a^*, \omega_b^*$	90
4.6	Reconstructions des vitesses v_{abs_i} et v_{abs_j}	95
4.7	Reconstructions de la vitesse v_{abs_k} et de la vitesse de roulis ω_c	96
4.8	Tir n°1 : Projectile de référence	99
4.9	Tir n°2 : Projectile à vitesse de roulis augmentée	100
4.10	Tir n°3 : Projectile à vitesse de roulis augmentée	100
4.11	Tir n°4 : Projectile à vitesse de roulis augmentée	101
4.12	Tir n°5 : Projectile à vitesse de roulis augmentée	101
4.13	Tir n°6 : Projectile à vitesse de roulis augmentée	102
4.14	Tir n°7 : Projectile à vitesse de roulis augmentée	102
A.1	Schéma simplifié d'un projectile flèche	111
A.2	Représentation d'une flèche et des sabots	112
A.3	Cartouche d'un projectile flèche	112
D.1	Représentation du vecteur rotation $\vec{\Omega}_T$ de la Terre	122
D.2	Représentation des repères $(\vec{N}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	122
D.3	Tracé des équipotentielles si la Terre était parfaitement sphérique	123
D.4	Illustration du géoïde	123
D.5	Illustration de l'ellipsoïde	124
D.6	Hauteurs de géoïdes en mètres (modèle EGM 2008) par rapport à un ellipsoïde de référence	124
D.7	Représentation du centre virtuel T' de la sphère	125
J.1	Vitesse v_{abs_i} bruitée	152

Abréviations & Notations

Abréviations

BDF	Backward Differentiation Formula
BSPMs	Body Surface Potential Maps
BVP	Boundary Value Problem
CFD	Computational Fluids Dynamics
CW	Continuous Wave
DGA	Direction Générale de l'Armement
FFT	Fast Fourier Transform
IRM	Imagerie par Résonance Magnétique
ISL	Institut Saint-Louis
RADAR	RAdio Detection and Ranging
OCT	Optical Coherence Tomography
SER	Surface Equivalente Radar (noté σ)
SVD	Singular Value Decomposition
TEP	Tomographie par Emission de Position

Notations relatives à l'instrumentation

D_{radar}	Portée du radar
f_d	Fréquence Doppler
G_e	Gain de l'antenne d'émission radar
G_r	Gain de l'antenne de réception radar
L	Coefficient de perte du radar
λ	Longueur d'onde
P_e	Puissance émise par le radar
P_r	Puissance reçue par le radar
$\underline{V_{\text{rad}}}$	Vecteur vitesse radiale

Notations relatives au projectile

Données générales

D	Calibre du projectile
F	Centre de poussée aérodynamique
G	centre de gravité du projectile
g_0	Pesanteur locale
I_1	Inertie longitudinale du projectile
I_2, I_3	Inerties transversales du projectile
K	Point d'application de la force de Magnus
λ_i	Eléments du quaternion
m	Masse du projectile
$\omega_c^* = \frac{\omega_c}{\omega_{c_{max}}}$	Vitesse de roulis adimensionnée du projectile
q	Pression d'arrêt
Q	Quaternion
ρ	masse volumique de l'air
S	Maître couple du projectile
$v_{abs_i}^* = \frac{v_{abs_i}}{v_{abs_{imax}}}$	Composante de la vitesse adimensionnée du projectile
v_r	Norme du vecteur $\underline{v_r}$
x, y, z	Position du projectile

Vecteurs

$\underline{Cor}$	Force de Coriolis
$\underline{D}$	Force de traînée
$\underline{g}$	Force de pesanteur
$\underline{g}'$	Attraction terrestre subie par le projectile
$\underline{g}''$	Accélération centrifuge subie par le projectile
$\underline{H}$	Moment cinétique du projectile
$\underline{K}$	Force de Magnus
$\underline{L}$	Force de portance
$\underline{M_A}$	Moment de tangage
$\underline{M_D}$	Moment d'amortissement en tangage
$\underline{M_E}$	Moment d'amortissement en roulis
$\underline{M_M}$	Moment de Magnus
$\underline{M_R}$	Moment d'entraînement en roulis
$\underline{\omega}$	Vecteur vitesse de rotation du projectile
$\underline{\omega_T}$	Vecteur rotation de la Terre
$\underline{v_{abs}}$	Vecteur vitesse absolue du projectile
$\underline{v_r}$	Vecteur vitesse relative du projectile

Coefficients aérodynamiques

C_x	Coefficient de traînée
C_{l0}	Coefficient d'entraînement en roulis
C_{lp}	Coefficient d'amortissement en roulis
C_m	Coefficient de tangage
$C_{m\delta}$	Dérivée du coefficient de tangage
C_{mq}	Coefficient d'amortissement en tangage
C_{np}	Coefficient du moment de Magnus
$C_{np\delta}$	Dérivée du coefficient du moment de Magnus
C_{yp}	Coefficient de la force de Magnus
$C_{yp\delta}$	Dérivée du coefficient de la force de Magnus
C_z	Coefficient de portance
$C_{z\delta}$	Dérivée du coefficient de portance

Repères balistiques

$(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$	Repère orthonormé mobile lié au projectile
$(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$	Repère orthonormé Galiléen lié à la Terre
$(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$	Repère orthonormé fixe lié au canon
$(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$	Repère orthonormé mobile lié à la trajectoire

Angles

AZ	Azimuth
δ	Obliquité
η	Gisement
Lat	Latitude
ϕ	Roulis
ψ	Précession
θ	Hausse

Notations liées à la technique d'identification

$\underline{C}$	Vecteur des coefficients aérodynamiques
$\underline{f}$	Vecteur des fonctions de la mécanique du vol
$\underline{U}$	Vecteur des paramètres d'état
$\underline{R}$	Terme de pénalisation

Introduction

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été réalisés dans le cadre d'une thèse CIFRE (Convention Industrielle de Formation par la REcherche), financée par Nexter Munitions (Bourges) en collaboration avec l'ENSI de Bourges et l'équipe Risques, Explosions et Structures du Laboratoire PRISME.

La maîtrise du comportement en vol d'un projectile est conditionnée en partie par la connaissance des coefficients aérodynamiques associés à chaque force et moment s'y appliquant. Des outils existent afin de faire une première estimation de la valeur de ces coefficients en phase d'avant-projet : il s'agit des codes numériques aérodynamiques et des essais en soufflerie. Il est ensuite nécessaire de vérifier le comportement du projectile en vol au moyen d'essais effectués sur les champs de tirs de la Direction Générale de l'Armement Techniques terrestres (DGA Tt) de Bourges. Ils permettent de se placer dans les conditions de vol réelles, contrairement aux outils précédemment cités. Il y a donc complémentarité entre les études menées au moyen des codes numériques aérodynamiques, les essais en soufflerie et les tirs.

Aujourd'hui, les mesures prises en vol au cours d'essais sur champ de tir sont exploitées de manière empirique : l'expert ajuste successivement les coefficients aérodynamiques du projectile et les conditions initiales en entrée d'un logiciel de simulation numérique de vol, de sorte à s'approcher au mieux des mesures prises en vol. Cette méthode est laborieuse, coûteuse en termes de temps et de connaissances nécessaires pour exploiter le tir, et surtout arbitraire dans la mesure où l'ajustement entre la simulation du vol et les mesures dépend de l'appréciation de l'expert. C'est pourquoi il a été décidé de développer un outil automatisé permettant l'identification des coefficients aérodynamiques de projectiles à partir de mesures prises en vol, ce qui constitue une inversion de modèle physique. Il est attendu que la technique développée soit formulée de manière générale, de sorte à pouvoir être adaptée à tout type

de projectiles.

Ce mémoire s'articule en quatre chapitres.

Le premier chapitre situe le contexte industriel de l'étude. Nous mettons en évidence les points forts et les points faibles des méthodes industrielles existantes pour identifier les coefficients aérodynamiques des projectiles. Nous montrons que les tirs sont incontournables pour valider le comportement d'un projectile en vol. Nous présenterons également l'instrumentation et les mesures mises à notre disposition par la DGA Tt pour identifier les coefficients aérodynamiques d'un projectile flèche, ainsi que d'autres techniques pouvant être utilisées lors de futurs tirs.

Le second chapitre aborde la notion de problème inverse, qui couvre un très large spectre de problèmes se posant dans de nombreux domaines de la physique. Il peut par exemple s'agir de problèmes d'identification de sources acoustiques, d'identification de la température à l'intérieur d'un tuyau, d'identification de paramètres vibratoires, de reconstruction du potentiel cardiaque à la surface du coeur, de complétion de données, etc... C'est pourquoi il est nécessaire de classer les problèmes inverses en problèmes bien posés ou mal posés, au sens d'Hadamard. La définition proposée par Hadamard permet de dire qu'un problème inverse est un problème mal posé. Nous étudions ensuite quelques méthodes de résolution de problèmes inverses utilisant des formulations linéaires et non linéaires en dimension finie. Enfin nous terminons ce chapitre par un état de l'art sur l'identification de coefficients aérodynamiques à partir de données de vol.

Le troisième chapitre est consacré au développement d'un modèle de comportement du projectile en vol. Les différents repères utilisés sont présentés. Les équations de la mécanique du vol sont introduites, nous permettant d'élaborer un modèle de comportement du projectile à six degrés de liberté. Le bilan des efforts appliqués au projectile, la prise en compte des relations cinématiques liées à l'utilisation du quaternion et la prise en compte des équations différentielles donnant la position du projectile au cours du vol aboutit à un modèle de comportement du projectile constitué de 13 équations. Nous exploitons ce modèle grâce au développement d'un outil d'intégration numérique des équations de la mécanique du vol, laissant le choix du schéma d'intégration. Cet outil nous permet par la suite d'établir un modèle réduit, c'est-à-dire ne prenant en compte qu'une partie des équations de la mécanique du vol et des coefficients aérodynamiques.

Le quatrième chapitre expose la formulation de la technique d'identification que nous

proposons. Pour identifier les coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol, nous introduisons un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie. La prise en compte des mesures des paramètres d'état est faite au sens des moindres carrés, de sorte à nous en approcher au mieux et à les relaxer. La fonctionnelle du problème contient un second terme, appelé terme de pénalisation, qui prend en compte l'intégration numérique des équations de la mécanique du vol. Pour valider notre technique d'identification, nous l'appliquons tout d'abord à des données simulées par notre outil d'intégration numérique des équations de la mécanique du vol. Il génère une solution dont la restriction est ensuite utilisée en entrée de la technique d'identification. Nous appliquons ensuite notre technique d'identification à des jeux de mesures réelles, prises lors d'une campagne destinée à étudier le comportement de projectiles dont on a augmenté la vitesse de roulis grâce à l'ajout d'un biseau sur ses ailettes. Ces différents cas d'applications de la technique d'identification développée permettent de juger de son efficacité et de sa robustesse.

Chapitre 1

Contexte industriel de l'étude

Le comportement d'un projectile en vol est fortement influencé par différents paramètres dépendants de l'environnement extérieur (pression, température, densité et humidité de l'air, présence de vent, altitude du tir), ainsi que par des forces et moments aérodynamiques. A chacun de ces efforts est associé un coefficient aérodynamique.

1.1 Moyens industriels actuels pour la détermination des coefficients aérodynamiques

La maîtrise du comportement en vol d'un projectile en termes de précision et de stabilité est donc conditionnée en partie par la connaissance précise de différents coefficients aérodynamiques. Pour cela, des outils existent :

- *Les codes numériques aérodynamiques* peuvent être regroupés en trois catégories.

La première catégorie rassemble les codes qui permettent un calcul rapide mais basé sur des modèles approchés. Ils sont adaptés dans le cas d'études paramétriques menées dans le cadre d'avant-projet afin de définir un concept. Les écarts entre les résultats fournis et la réalité sont parfois sensibles, c'est pourquoi il est nécessaire de tenir compte du domaine de validité des méthodes de calcul employées.

Pour la seconde catégorie, les codes sont basés sur des méthodes de calcul semi-

empiriques. Elles sont combinées à des modèles théoriques ou à des corrélations issues de bases de données. Nous pouvons citer le code MISSILE développé par l'ONERA [10] à titre d'exemple. De nombreux essais en soufflerie ont permis d'établir une base de données pour différentes configurations testées, pour lesquelles des modélisations ont été réalisées. Notons que ce type d'approche n'est pas adaptée pour des projectiles dont l'allongement est supérieur à 40.

La troisième catégorie regroupe les codes CFD (Computational Fluids Dynamics). Ils sont extrêmement puissants et permettent de résoudre des problèmes tridimensionnels. Cependant, un calcul CFD n'est valable que pour une configuration particulière (par exemple pour un nombre de Mach fixé, une incidence fixée, etc...), ce qui signifie que pour représenter l'intégralité d'un vol il est nécessaire d'effectuer un grand nombre de calculs. Nous pouvons aussi préciser que les codes CFD sont des outils qui permettent la visualisation des champs aérodynamiques. Ils mettent en évidence la répartition des écoulements autour du corps du projectile et contribuent par exemple à la compréhension des phénomènes aérodynamiques.

- *Les essais en soufflerie* permettent de déterminer les coefficients aérodynamiques en plaçant une maquette du projectile dans une veine où l'écoulement sera généré [62]. Associés à des outils de calcul semi-empiriques [10], il est possible d'obtenir de larges éventails de mesures des coefficients aérodynamiques en faisant varier l'angle d'incidence, le nombre de Mach, etc... . Cependant, les écoulements ne sont généralement réalisés qu'en similitude partielle par rapport au vol réel. De plus, il peut y avoir une perturbation de l'écoulement au niveau du culot du projectile à cause de la présence d'un dard qui sert à maintenir la maquette dans la veine d'écoulement (figure 1.1), ce qui empêche la détermination du coefficient de traînée C_x . Les essais en soufflerie constituent un outil très précieux en phase d'avant-projet. Ils permettent de tester de nouveaux concepts, par exemple pour le test du comportement d'un projectile doté d'ailettes ayant une forme nouvelle, avant de les mettre en oeuvre et de réaliser des essais sur champ de tir. Des outils de visualisation peuvent également être utilisés afin d'observer les phénomènes aérodynamiques lors d'essais en soufflerie.



FIGURE 1.1 – Maquette d'un projectile dans une veine d'écoulement

- *Les essais sur champ de tir* permettent l'étude du comportement du projectile en vol en conditions réelles. A l'heure actuelle, les mesures prises au cours d'un essai de tir sont exploitées de manière empirique et arbitraire. La technique employée, destinée à identifier les coefficients aérodynamiques du projectile tiré, consiste à comparer les mesures prises en vol et les résultats d'une simulation numérique du vol. L'expert en charge de l'exploitation des données ajuste tour à tour par tâtonnement les coefficients aérodynamiques et les conditions initiales en entrée de l'algorithme de simulation afin de s'approcher au mieux des mesures. Cette méthode est très coûteuse en termes de temps (temps de calcul et temps ingénieur) et nécessite un niveau d'expertise important pour exploiter les données. Il est important de noter que le résultat final de l'identification des coefficients est très dépendante de l'appréciation et du savoir-faire de l'expert.

1.2 Objectifs de l'étude

Les codes numériques aérodynamiques et les essais en soufflerie permettent de mener des études préliminaires en phase d'avant-projet et fournissent une première estimation des coefficients aérodynamiques des projectiles. Il est ensuite nécessaire de vérifier le comportement du projectile en vol, c'est pourquoi les essais effectués sur champ de tir sont incontournables. Ils permettent de mener des études à partir de données plus proches du comportement réel du projectile que les outils précé-

demment cités, et mettent en évidence les défauts du projectile afin de les corriger. Ainsi, les codes numériques, les essais en soufflerie et les tirs sont des outils complémentaires contribuant à l'amélioration constante de la qualité du vol des projectiles. Il est important de préciser que lors de comparaisons entre les différentes approches, le tir sert toujours de référence.

Compte tenu des limites exposées, il est donc décidé de développer un outil automatisé permettant l'identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol. Il s'agit donc d'une démarche inverse qui consiste à remonter, à partir de mesures prises en vol, aux coefficients aérodynamiques. Cet outil doit permettre d'exploiter les mesures prises au cours du vol de façon objective et donc doit être utilisable pour différents types de projectiles. Pour cela, nous recherchons donc une méthode d'identification des coefficients aérodynamiques avec un formalisme le plus général possible.

1.3 L'instrumentation

Pour atteindre ces objectifs industriels, nous faisons l'inventaire de l'instrumentation mise à notre disposition par la Direction Générale de l'Armement Techniques terrestres (DGA Tt) de Bourges, qui réalise les essais de tir, pour la société Nexter Munitions.

1.3.1 L'instrumentation disponible à la DGA Tt

1.3.1.1 Le radar Doppler

Le terme "radar" [20] est le nom de code adopté au cours de la seconde guerre mondiale par l'US Navy signifiant "RAdio Detection And Ranging" (détection et télémétrie au moyen d'ondes électromagnétiques). Une installation de radar Doppler continue CW (Continuous Wave) comprend un système de traitement (moniteur) relié à une ou deux antenne(s) radar, un générateur Hyper Fréquence et une interface de visualisation (figure 1.2).



(a) Antenne Terma



(b) Moniteur Terma DR5000



(c) Utilisation du radar pendant un tir

FIGURE 1.2 – Instrumentation Radar Doppler

Le rôle de l'antenne est de concentrer l'énergie émise par le radar dans un angle solide déterminé. Les antennes comprennent généralement deux parties distinctes : une pour l'émission et une pour la réception. Le générateur hyperfréquence comprend un émetteur permettant de générer une fréquence stable (en gigahertz) et une puissance de quelques kilowatts exprimée aussi en décibels. Le générateur hyperfréquence comprend également un récepteur qui amplifie, filtre et détecte les signaux perçus par l'antenne. La portée du radar est la distance maximale à laquelle le radar pourra distinguer sa cible du bruit ambiant. Elle est donnée par :

$$P_r = \frac{P_e \cdot G_e \cdot G_r \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}{(4\Pi^3 \cdot D_{radar}^4 \cdot L)} \quad (1.1)$$

où :

- P_r est la puissance reçue,
- P_e est la puissance émise,
- G_r est le gain de l'antenne de réception,
- G_e est le gain de l'antenne d'émission,
- λ est la longueur d'onde,

- σ est la Surface Equivalente Radar (SER),
- D_{radar} est la portée du radar,
- L est un coefficient de pertes (due à la propagation du milieu, perte lors du traitement,...).

Le principe de fonctionnement du radar Doppler est le suivant : la fréquence de toute onde électromagnétique réfléchiée par une cible en mouvement varie proportionnellement à la vitesse de la cible (effet Doppler ou effet Doppler-Fizeau). Cette fréquence, appelée "fréquence Doppler", est extraite du signal par les systèmes radar qui l'amplifient. La relation entre cette fréquence et la vitesse de la cible est donnée par :

$$f_d = \frac{2 V_{rad}}{\lambda} \quad (1.2)$$

où :

- f_d est la fréquence Doppler,
- V_{rad} est la vitesse radiale de l'objet,
- λ est la longueur d'onde de l'émetteur :

$$\lambda = \frac{\text{Célérité de la lumière}}{\text{Fréquence de l'émetteur}} \quad (1.3)$$

Précisons que la vitesse mesurée par radar Doppler est une vitesse *radiale*, ou encore vitesse *d'éloignement* (figure 1.3), c'est-à-dire la projection du vecteur vitesse de la cible sur l'axe Radar-Projectile, selon la relation suivante :

$$V_{rad} = \frac{dRG}{dt} = \underline{v_r} \cdot \frac{\underline{RG}}{\|\underline{RG}\|} \quad (1.4)$$

où v_r est la vitesse relative du projectile (c'est-à-dire sa vitesse par rapport au vent). Différentes incertitudes peuvent altérer les mesures : il peut s'agir d'une erreur de parallaxe lié au fait que le radar peut être déporté par rapport au canon.

Une erreur de datation peut aussi survenir : elle est due à une erreur de la fréquence d'échantillonnage (déterminée à partir de la vitesse maximale attendue du projectile). Elle peut engendrer une incertitude sur la cadence et sur la datation de la fenêtre d'analyse de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform,

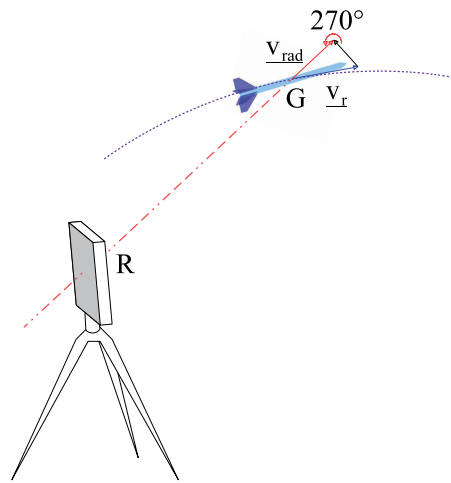


FIGURE 1.3 – Vitesse radiale mesurée par le radar

FFT) (intégrée au sein de l'unité de traitement du radar).

Une troisième erreur est possible sur la vitesse radiale, provenant soit d'une erreur sur la célérité des ondes dans le milieu, soit d'une erreur sur la fréquence d'émission, ou soit d'une erreur fréquentielle pondérée par le rapport signal sur bruit.

En complément du radar, un bouchon rainuré (appelé réflecteur) peut être vissé sur le culot du projectile (cf. figure 1.4). La dimension des rainures du bouchon est adaptée à la longueur d'onde du signal radar de sorte à moduler son amplitude et sa fréquence. On déduit alors de ce signal modifié la vitesse de roulis du projectile.



FIGURE 1.4 – Réflecteur

1.3.1.2 Les panneaux

Cette technique de mesure [64] consiste à placer des panneaux le long de la trajectoire du projectile (figure 1.5) : ils sont constitués de montants en bois entre lesquels sont tendues des feuilles de paraffine, de papier ou cartonnées, optimisées de telle sorte à obtenir une empreinte (figure 1.5) satisfaisante en termes d'exploitabilité, tout en perturbant le vol le moins possible. Le relevé de mesures est effectué directement sur les panneaux à l'aide d'un rapporteur (figure 1.6) (la flèche indique la mesure de l'angle d'obliquité du projectile), en corrélant la géométrie du projectile et l'empreinte dans le panneau. On peut ainsi obtenir des informations sur la vitesse de roulis, la position du projectile et certains angles (obliquité et précession, qui seront définis par la suite).



(a) Panneaux installés sur le champ de tir



(b) Empreintes laissées par différents projectiles dans le panneau

FIGURE 1.5 – Présentation des panneaux de tir

1.3.2 Autres instrumentations

1.3.2.1 Les magnétomètres

La magnétométrie est une technique de mesures en vol développée par l'Institut Saint-Louis (ISL) [4] [28]. Elle consiste à disposer trois capteurs magnétiques selon une orientation très précise dans un système électronique hautement intégré (c'est-à-dire que l'ensemble du dispositif est totalement intégré à l'intérieur du projectile, comme illustré sur la figure 1.7). Les capteurs mesurent le champ terrestre localement, à partir duquel des informations sur le comportement du projectile en vol peuvent être déduites.

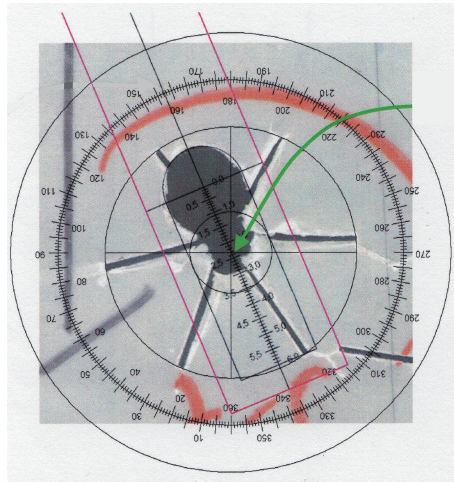


FIGURE 1.6 – Empreinte sur un panneau

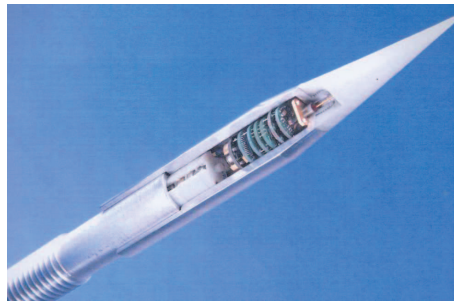


FIGURE 1.7 – Magnétomètres

Les capteurs magnétiques ne donnent accès qu'au mouvement angulaire et donc uniquement aux coefficients aérodynamiques relatifs aux moments. Une combinaison des magnétomètres à des accéléromètres (disposés selon la direction axiale) permet d'améliorer la détermination du mouvement de tangage et de lacet du projectile et donne de plus accès aux coefficients aérodynamiques liés aux forces. La mesure du champ magnétique terrestre requiert des capteurs magnétiques 3D ayant une bonne directivité spatiale et une haute sensibilité. L'utilisation de cette technique impose de connaître le champ magnétique terrestre le long de la trajectoire du projectile pour pouvoir faire des estimations de trajectoire. Lors de tirs de projectiles flèche, on peut supposer que le champ magnétique terrestre est constant sur toute l'éten-

due du champ. La sensibilité du capteur peut varier à cause des effets de l'arme. La décomposition du vecteur 3D du champ magnétique est par conséquent sujette à des erreurs. Même une configuration avec plusieurs capteurs ne peut pas surmonter ce problème. Une solution possible consiste à inclure les paramètres du système de mesure comme variables additionnelles dans le modèle de simulation balistique du projectile.

Les signaux d'entrée sont les mesures du champ magnétique terrestre enregistrées par les capteurs. Le signal axial magnétique donne la projection de l'angle d'obliquité dans le plan défini par la direction du vol et l'orientation du champ magnétique terrestre. Le signal radial magnétique donne le roulis. Il est possible, en utilisant un modèle à six degrés de liberté, et si la résolution du signal est assez haute, de déterminer l'orientation de l'angle d'obliquité. Une autre méthode possible pour mesurer cet angle est d'utiliser un accéléromètre orienté dans la direction radiale. La précision de cette technique dépend de la résolution des signaux magnétiques et de la précision de la connaissance du champ magnétique terrestre.

Cette technique a l'avantage, en plus de son faible coût, de pouvoir être utilisée par tous les temps puisqu'elle s'appuie sur la mesure du champ magnétique terrestre, au contraire de la sonde d'obliquité par exemple (capteurs nécessitant la présence de soleil et apposés sur le nez du projectile afin de déterminer l'angle d'obliquité).

Ce moyen de mesures n'est pas à notre disposition aujourd'hui, mais il constitue une voie d'amélioration possible concernant la prise de mesures en vol sur des projectiles flèches. En effet, de par ses dimensions un projectile flèche ne peut recevoir d'instrumentation embarquée trop volumineuse. Les dimensions des magnétomètres permettraient de passer en partie outre ces contraintes. Il est important de préciser qu'il serait quand même nécessaire de modifier la géométrie de l'avant du projectile de sorte à pouvoir y insérer les capteurs.

1.3.2.2 La centrale inertielle

Lorsque les dimensions du projectile le permettent, il est également possible d'y embarquer une centrale inertielle. Composée d'accéléromètres et de gyromètres, elle donne accès à certains paramètres d'état du vol (vitesses, vitesses de rotation), et fournit, associée à un radar, un jeu de mesures complet à exploiter pour déterminer les coefficients aérodynamiques d'un projectile.

1.3.3 Résumé des moyens de mesures

Afin de mieux cerner les interactions entre les moyens de mesures et les mesures à proprement parler, le tableau 1.1 synthétise les informations données précédemment.

Moyen de mesure	Mesures directes	Mesures déduites
Radar	Vitesse radiale	Position
Réflecteurs + Radar	Vitesse de roulis	
Panneaux	Variation de l'angle de roulis entre 2 panneaux, position, angles d'obliquité et de précession	Vitesse de roulis
Magnétomètres	Champ magnétique terrestre	Angles d'obliquité et de précession
Centrale inertielle	Accélérations, vitesses de rotation	Vitesses, angles

TABLE 1.1 – Récapitulatif des instrumentations et mesures associées

1.4 Conclusion

Le but de notre étude est d'identifier les coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures afin de mieux maîtriser son comportement en vol. Nous avons vu qu'actuellement différents moyens sont disponibles pour fournir une première estimation de ces coefficients en phase d'avant-projet (codes numériques aérodynamiques et essais en soufflerie), mais il est nécessaire de valider le comportement des projectiles en vol grâce à des essais sur champ de tir. Les mesures prises lors d'un vol sont actuellement dépouillées grâce à une méthode empirique, laborieuse, arbitraire et coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi il est décidé de développer un outil automatisé d'identification des coefficients aérodynamiques à partir des mesures prises en vol. Les mesures dont nous disposons pour atteindre ce but sont prises au moyen d'instrumentations mises en place par la DGA Tt, telles que le radar Doppler associé à un bouchon rainuré nous fournissant des mesures de vitesse et de vitesse de roulis, ainsi que les panneaux de tir nous fournissant des valeurs des angles de rotation des projectiles. Ainsi, si nous reformulons le problème posé,

nous pouvons dire que nous cherchons à retrouver certains paramètres d'entrée du modèle de comportement du projectile à partir de mesures des paramètres de sortie, ce qui constitue un problème d'inversion de modèle physique.

Chapitre 2

Introduction aux problèmes d'identification et à leurs méthodes de résolution

2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol constitue un problème d'inversion d'un modèle physique. Dans ce chapitre, nous commençons par donner quelques exemples de problèmes inverses afin de montrer l'étendue de leurs domaines d'application. Nous abordons dans un second temps la définition mathématique d'un problème inverse et proposons ensuite un inventaire des principales méthodes utilisées pour résoudre des problèmes inverses. Enfin, nous présentons les techniques spécifiques à l'identification de coefficients aérodynamiques.

2.2 Quelques exemples de problèmes inverses

Les problèmes inverses interviennent dans de nombreux domaines de la physique.

Comme par exemple pour la *tomographie* [40], qui est un procédé d'imagerie permettant la reconstruction d'objets. Les mesures sont réalisées à l'extérieur de l'objet, à sa surface ou bien à une certaine distance. Cette technique permet d'obtenir une

image de l'objet en coupe. Il existe différentes techniques tomographiques, selon le type d'objet que l'on souhaite observer :

- la tomographie par résonance magnétique nucléaire (IRM),
- la tomographie d'atténuation des rayons X (exemple : scanner),
- la tomographie en cohérence optique (OCT),
- la tomographie d'émission de positons (TEP),
- la tomographie d'émission des photons,
- la tomographie atomique (microscope à effet de champ),
- la tomographie électronique et la cryotomographie électronique,
- la tomographie sismique,
- l'imagerie Zeeman-Doppler (utilisée en astrophysique).

Les domaines d'application de la tomographie sont donc vastes : médecine, géologie, astrophysique, étude des matériaux ou encore procédés de contrôle industriel (nucléaire, aéronautique, automobile, etc...). Par exemple, la tomographie d'émission peut être utilisée de deux manières : soit dans le but de détecter et de localiser des structures internes, en tenant compte des limites technologiques telles que le bruit de mesure ou un petit nombre d'informations disponibles, soit dans un but de quantification, privilégiant la précision et la redondance des données. Elle est alors utilisée en tant qu'instrument de mesure dans le but de dresser une cartographie du paramètre représentatif du système étudié (exemple : densité d'activité d'un traceur radioactif).

Les problèmes inverses interviennent aussi en *météorologie* [41]. En effet, la prévision de l'évolution de la météo à plus ou moins long terme repose sur l'identification de conditions initiales grâce à l'ensemble des données disponibles. Elles sont de deux types : les données d'observation (observées directement (température, vent,...) ou déduites (radiances)), et les données issues de précédentes prévisions météorologiques. Dans ce cas, l'enjeu est donc, grâce à l'ensemble des informations (de natures différentes) disponibles, de remonter aux conditions initiales qui vont permettre ensuite, par une intégration classique d'un modèle physique, de prédire l'évolution de différents paramètres météorologiques (température, vent, humidité, etc...).

Les problèmes inverses interviennent aussi en *acoustique*. Par exemple, ils peuvent

revêtir l'aspect d'un problème d'identification d'un terme source [50], ou celui d'un problème d'identification de paramètres représentatifs de la diffusion du son [13]. Dans le premier cas, le but est d'obtenir une estimation (unique et stable) du terme source à partir d'un seul jeu de mesures prises à la frontière du domaine considéré. Dans le second cas [13], les auteurs considèrent un milieu acoustique décrit par les paramètres vitesse de la propagation du son $c(x, y, z)$, densité $\rho(x, y, z)$ et atténuation $\gamma(x, y, z)$. Ils formulent un problème inverse de diffusion (équation de Helmholtz dans le domaine temporel) où chacun des trois paramètres précédents ne dépend que de la variable z et sont reconstruits à partir de mesures de vitesse de l'onde.

En *thermique*, le problème d'estimation de la température sur la paroi d'un réservoir de gaz sous pression [47] peut-être considéré comme un problème inverse. Plus précisément, ce problème consiste à estimer des conditions aux limites inconnues à partir de mesures du champ de température réalisées sur des parties accessibles et au sein du milieu. Il s'agit d'un problème de complétion de données. La résolution d'un tel problème permet d'obtenir les conditions aux limites réelles du problème, de renforcer la sécurité des réservoirs et de mieux maîtriser la performance des composants responsables du transfert de chaleur. Une des caractéristiques intéressantes de cette étude est que la solution apportée permet de déterminer simultanément plusieurs conditions aux limites, ainsi que la distribution spatiale de la température mais aussi sa dépendance temporelle.

Un autre problème d'estimation de température est illustré par les travaux de Lu et al. [51]. Le problème inverse consiste à estimer les températures du fluide près de la frontière intérieure d'un pipeline. Pour cela, la distribution de température est calculée sur la frontière extérieure grâce à la résolution du problème direct, puis utilisée comme jeu de mesures pseudo-expérimentales en entrée du problème inverse.

Dans le domaine *mécanique*, un premier exemple de problème inverse concerne l'identification de défauts au sein d'un matériau composite (Galybin [31]). Un second exemple [16] concerne un problème de vibration d'une barre encastrée à une extrémité et soumise à une force de traction d'intensité inconnue à l'autre extrémité. Le but est de déterminer la force exercée à chaque instant à l'extrémité de la barre à partir de mesures de déplacement réalisées en un point intérieur. Nous pouvons également citer les travaux de Gandino et al. [32], qui s'intéressent à la reconstruction

des paramètres vibratoires d'une poutre. Cette étude a pour but d'analyser et de renforcer la surveillance du comportement de voies ferrées, construites sur un pont, soumises aux sollicitations générées par le passage des trains. Les auteurs proposent une méthode d'identification non linéaire permettant de reconstruire correctement le modèle non linéaire de comportement de la poutre testée.

Les problèmes inverses se rencontrent également dans le domaine de la *médecine*. Par exemple, Nielsen et al. [56] proposent une méthode pour reconstruire le potentiel transmembranaire du myocarde (c'est-à-dire l'activité électrique du coeur) pendant une phase de repos afin d'étudier la faisabilité du développement d'un outil d'imagerie cardiaque, dont le but à long terme est de détecter et prévenir des dysfonctionnements cardiaques. L'information disponible a priori est une distribution du courant dans le coeur à partir de cartes de potentiel de surface du corps (Body Surface Potential Maps, BSPMs) mesurée à la surface du corps, et les équations dites "bidomaines" (équations développées par Tung dans les années 70 [67] permettant de modéliser l'activité électrique du coeur).

Ainsi, comme nous pouvons le constater à travers les quelques exemples précédents, des problèmes d'identification interviennent dans de nombreux domaines. Ils sont souvent qualifiés de "problèmes inverses". Nous allons donc maintenant définir mathématiquement ce que signifie "problème inverse".

2.3 Définition mathématique d'un problème inverse

2.3.1 Définition

Avant de parler de problème inverse, il faut tout d'abord définir ce qu'est un problème direct [25].

Pour comprendre et maîtriser un phénomène physique, l'usage veut que nous relient les paramètres $\underline{P}$ qui caractérisent le phénomène aux informations mesurables $\underline{d}$ qui en résultent à partir d'un modèle, que l'on note M . Cette relation entre les grandeurs d'entrée et sortie d'un modèle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M(\underline{P}) = \underline{d} \tag{2.1}$$

où M peut s'exprimer sous de nombreuses formes, comme par exemple un système linéaire ou non linéaire d'équations différentielles ordinaires (ODE).

Un problème direct à partir d'une telle formulation consiste à trouver $\underline{d}$ pour $\underline{P}$ donné. Prenons un exemple pour illustrer nos propos [3] :

Considérons un corps, physiquement caractérisé par un coefficient de conductivité thermique $k(x)$, qui occupe le domaine géométrique Ω . Un flux q^D est imposé sur sa frontière $\partial\Omega$. Les variables u (température), q^D et k , fonctions du point, vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \text{ (équation locale d'équilibre)} \\ k \frac{\partial u}{\partial n} = q^D & \text{sur } \partial\Omega \text{ (flux imposé)} \end{cases} \quad (2.2)$$

Le potentiel u , donné en un point et mesurable à la frontière, est ainsi implicitement relié à la conductivité k .

En reprenant notre formulation générale précédente, le problème exposé s'écrit :

$$M(\underline{P}) - \underline{d} = 0 \quad (2.3)$$

Dans la plupart des cas, nous cherchons à calculer la réponse (en général mesurable) d'un système physique à des sollicitations connues, à partir de la donnée *a priori* des paramètres qui le caractérisent. Nous savons donc résoudre le problème (2.3) par rapport à k pour u donné, ou de manière plus générale, nous pouvons *trouver* $\underline{d}$ pour $\underline{P}$ donné. Cette opération est appelée "*problème direct*". Concrètement en reprenant l'exemple précédent :

Le problème direct consiste à se donner une conductivité k , un potentiel u en un point, un domaine Ω et un flux q^D et à résoudre le problème 2.2, c'est-à-dire à trouver un potentiel inconnu u résultant du système physique ainsi créé.

Dans le cadre de notre étude, un problème direct consiste à se donner un jeu de coefficients aérodynamiques et à intégrer les équations de la mécanique du vol de sorte à obtenir les valeurs de la vitesse, la vitesse de rotation, la position et des angles prises par le projectile au cours du vol.

En revanche, l'évaluation des paramètres du système à partir de la mesure de sa réponse aux sollicitations implique de résoudre les équations de la physique en sens inverse de celui habituellement pratiqué. Cela constitue un *problème inverse*.

Ainsi, une résolution inverse du problème posé dans notre exemple se formule de la manière suivante :

Un problème inverse peut consister à reconstruire la conductivité k à partir de mesures du potentiel u sur son domaine, le flux q^D étant donné.

L'identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de la mesure de sa vitesse, vitesse de rotation, position et de ses angles constitue de la même manière une étude d'inversion de modèle physique.

Il existe également un autre type de problèmes inverses, non abordé dans ce manuscrit : l'identification du modèle M pour plusieurs jeux de données de $\underline{P}$ et de $\underline{d}$ [68]. Après une première définition d'un problème inverse, nous allons maintenant nous intéresser à une définition mathématique plus précise proposée par Hadamard et permettant de mieux cerner les difficultés inhérentes à la résolution de ce type de problèmes.

2.3.2 Problèmes bien posés ou mal posés au sens d'Hadamard [36]

Les problèmes mathématiques peuvent être répartis en deux classes distinctes : les problèmes dits *bien posés* et les problèmes dits *mal posés*. Nous notons D l'espace des données $\underline{d}$ et S l'espace des solutions possibles tel que $\underline{P} \in S$.

- pour les problèmes *bien posés* au sens d'Hadamard, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Existence d'une solution,

$$\forall \underline{d} \in D, \text{ il existe une solution } \underline{P} \in S \text{ telle que } \underline{M}(\underline{P}) = \underline{d}$$

- (ii) Unicité de la solution,

$$\forall \underline{P}_1, \underline{P}_2 \in S, \text{ si } \underline{M}(\underline{P}_1) = \underline{M}(\underline{P}_2) = \underline{d} \text{ alors } \underline{P}_1 = \underline{P}_2$$

- (iii) Stabilité de la solution par rapport aux données $\underline{d}$:

Une petite erreur $\delta \underline{d}$ sur les données entraîne une petite erreur $\delta \underline{P}$ sur la solution. Dans le cas discret la matrice M est inversible et bien conditionnée.

- par opposition, les problèmes *mal posés* au sens d’Hadamard ne remplissent pas au moins l’une des trois conditions précédentes.

Par la suite nous qualifierons de problème inverse, un problème mal posé au sens d’Hadamard.

2.4 Méthodes de résolution de problèmes inverses

Les incertitudes inhérentes aux problèmes inverses ont diverses origines [25] :

- les données (mesures) sont souvent expérimentales, et peuvent donc contenir des erreurs de mesure,
- le nombre de données mesurées est fini, même si le modèle mathématique les décrivant est constitué de fonctions,
- l’algorithme d’inversion peut créer une altération des données (exemple : interpolation pour discrétiser un modèle continu),
- le modèle employé peut être une version simplifiée (hypothèses simplificatrices) du modèle complet décrivant le phénomène physique considéré. D’autre part, certains paramètres du modèle ne sont connus qu’expérimentalement (exemple : constantes physiques d’un milieu), et donc de façon approximative.

Ainsi, toutes ces incertitudes altèrent les données et impliquent que la solution recherchée d’un problème inverse ne peut être une solution *exacte*. En effet, nous obtiendrons à l’issue de la résolution une solution $\underline{P}$ s’approchant au mieux, c’est-à-dire *à ϵ près*, de la solution idéale permettant de modéliser les données *$\underline{d}$ réelles* (et non *mesurées*). Par extension, cela met également en évidence le fait que toute solution $\underline{P}$ s’approchant *à ϵ près* de la solution idéale est une solution possible au problème inverse posé. Finalement, quelle que soit la méthode de résolution que l’on choisit, un problème inverse peut n’avoir aucune solution au sens strict, mais beaucoup de solutions *à ϵ près*. Cela signifie qu’il faudra parfois tenir compte de critères permettant de discriminer les solutions entre elles afin de ne garder que celle

répondant au mieux à l'objectif de précision que l'on s'est fixé.

Nous allons maintenant présenter quelques méthodes de résolution de problèmes inverses linéaires en dimension finie. Ici encore, nous n'avons pas la prétention de dresser une liste exhaustive, mais cherchons simplement à présenter les méthodes les plus utilisées.

2.4.1 Méthodes de résolution pour les problèmes inverses linéaires

2.4.1.1 La régularisation de type Tikhonov [66]

Cette technique consiste à considérer toutes les solutions possibles du problème, afin de choisir celle qui minimise au mieux la norme du paramètre $\underline{P}$. Elle fait intervenir un terme de pénalisation afin que les contraintes du problème soient vérifiées au mieux.

Nous posons le problème suivant :

$$M\underline{P} = \underline{d} \quad (2.4)$$

Avec $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (notons que M peut ne pas être carrée), $\underline{P}, \underline{d} \in \mathbb{R}^n$. Les données mesurées $\underline{d}$ peuvent être entachées d'un bruit, de sorte que l'on peut écrire :

$$\underline{d} = \underline{\hat{d}} + \underline{e} \quad (2.5)$$

$\underline{\hat{d}}$ est la donnée sans bruit, et $\underline{e}$ est l'erreur appliquée sur $\underline{\hat{d}}$ pour modéliser le bruit. Nous cherchons donc une solution du problème suivant :

$$M\underline{P} = \underline{\hat{d}} \quad (2.6)$$

Notons $\underline{\hat{P}}$ la solution de l'équation (2.6). Le but est de trouver une solution approchée de $\underline{\hat{P}}$ à partir de la résolution du problème (2.4). La résolution directe de l'équation (2.4) ne mène pas à une solution satisfaisante si la matrice M est mal conditionnée ou si les données mesurées $\underline{d}$ sont entachées de bruit. Les méthodes de régularisation de type Tikhonov consistent à remplacer le problème (2.4) par un problème d'optimisation au sens des moindres carrés, comportant un terme de régularisation où

interviennent un paramètre de régularisation et un opérateur régularisant :

$$\min \{ \|M\underline{P} - \underline{d}\|^2 + \alpha \|R_\alpha \underline{d}\|^2 \} \quad (2.7)$$

où $\|\cdot\|$ définit la norme Euclidienne, $R_\alpha \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est l'opérateur de régularisation, et α est un paramètre de régularisation. Si R_α est la matrice identité, nous obtenons la forme standard de la régularisation de Tikhonov. Si l'on note M^* la matrice adjointe de M , le problème (2.7) est équivalent au système d'équations suivant :

$$(M^*M + \alpha R_\alpha^* R_\alpha) \underline{P} = M^* \underline{d} \quad (2.8)$$

Dont la solution, unique et stable par rapport aux données d'entrée (bruitées) est :

$$\widehat{\underline{P}_\alpha} = (M^*M + \alpha R_\alpha^* R_\alpha)^{-1} M^* \underline{d} \quad (2.9)$$

La solution obtenue est stable par rapport aux petites perturbations sur les données d'entrée, et dépend du terme de régularisation. Le choix du paramètre de régularisation α déterminera la proximité de la solution $\underline{P}_\alpha$ obtenue à la solution $\widehat{\underline{P}}$, ainsi que sa sensibilité au bruit $\underline{e}$. Ce choix peut-être fait au moyen de différentes méthodes, comme par exemple le *critère de Morozov* [55]. Il consiste à imposer que la solution approchée $\underline{P}_\alpha$ satisfasse la condition suivante :

$$\|M\underline{P}_\alpha - \underline{d}\| = \delta \quad (2.10)$$

où δ est fixé empiriquement selon la confiance que l'on accorde aux données $\underline{d}$. Un autre critère est celui d'*Arcangeli* [33] et consiste à chercher un réel α solution de :

$$\|M\underline{P}_\alpha - \underline{d}\|^2 = \frac{\delta^2}{\alpha} \quad (2.11)$$

Enfin, nous pouvons également citer le *critère de la courbe en L* [9] : cela consiste à tracer pour plusieurs valeurs de α la courbe log-log $(\|M\underline{P}_\alpha - \underline{d}\|, \|\underline{P}_\alpha\|)$ qui a la forme d'un L du fait que $\|\underline{P}_\alpha\|$ est une fonction strictement décroissante de α , et que $\|M\underline{P}_\alpha - \underline{d}\|$ est une fonction strictement croissante de α . Le coefficient α optimal est celui correspondant au coin du L.

2.4.1.2 Les méthodes itératives

Les méthodes itératives consistent à générer une succession de problèmes dont les solutions convergent vers la solution du problème. Elles sont principalement utilisées lorsque la matrice représentative du problème est de grande dimension. Cette catégorie de méthodes se divise elle-même en deux sous-catégories : d'une part nous avons les *techniques de reconstruction algébrique* (Algebraic Reconstruction Technique, ART) et de *reconstruction itérative simultanée* (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique, SIRT) basées sur *l'algorithme de Kaczmarz's* [26], développées à l'origine pour des applications tomographiques. Rappelons la formulation du problème inverse que l'on cherche à résoudre :

$$M\underline{P} = \underline{d} \quad (2.12)$$

Dans cette formulation, chacune des m lignes du système $M_{i,.}\underline{P} = d_i$ définit un hyperplan de dimension n dans $\mathbb{R}^m$. L'algorithme de Kaczmarz's débute avec une solution initiale $\underline{P}^0$, qui est ensuite projetée sur l'hyperplan défini par la première ligne de la matrice M du système étudié de sorte à aboutir à la solution suivante $\underline{P}^1$. $\underline{P}^1$ est ensuite elle-même projetée sur l'hyperplan défini par la seconde ligne de la matrice M , et ainsi de suite. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que la solution ait été projetée sur les m hyperplans définis par le système d'équations du problème, puis un nouveau cycle de projections débute ; les cycles sont répétés jusqu'à ce que la solution converge. La formule de mise à jour de la solution $\underline{P}$ est :

$$\underline{P}^{(i+1)} = \underline{P}^{(i)} - \frac{M_{i+1,.}\underline{P}^{(i)} - d_{i+1}}{M_{i+1,.}M_{i+1,.}^T} M_{i+1,.}^T \quad (2.13)$$

Un exemple de méthode itérative est celle du *gradient conjugué* (Conjugate Gradient, CG) [73]. Elle s'applique à des systèmes d'équations dont la matrice est symétrique et définie positive. Elle consiste à transformer le problème inverse en un problème de minimisation en construisant une base de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la formulation du problème est simple. Pour illustrer la méthode, prenons un exemple de problème d'optimisation quadratique :

$$\min J(\underline{P}) = \frac{1}{2} \underline{P}^T M \underline{P} - \underline{d}^T \underline{P} \quad (2.14)$$

où M est une matrice symétrique définie positive, de sorte que la fonctionnelle J soit convexe et présente un minimum unique. Les vecteurs de la base $\underline{v}_0, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$ sont choisis de telle sorte que :

$$\underline{v}_i^T M \underline{v}_j = 0 \quad i \neq j \quad (2.15)$$

Ces vecteurs sont dits "mutuellement conjugués" par rapport à la matrice M . Nous exprimons ensuite $\underline{P}$ en fonction de ces vecteurs de base, et nous obtenons :

$$\underline{P} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underline{v}_i$$

Avec $\alpha_i = \frac{\underline{d}^T \underline{v}_i}{\underline{v}_i^T M \underline{v}_i}$ (2.16)

Une extension de cette méthode, appelée *méthode du gradient conjugué au sens des moindres carrés* permet d'appliquer ce principe à des problèmes de minimisation au sens des moindres carrés. Elle consiste à ajouter une étape supplémentaire dans l'algorithme de calcul des vecteurs de base afin d'alléger fortement le calcul et éviter la programmation de $M^T M$.

2.4.1.3 Le maximum d'entropie

Cette méthode [27] s'apparente à une technique de type Bayésienne dans le sens où elle prend en compte une fonction de distribution de probabilités permettant de tenir compte des incertitudes sur les résultats expérimentaux. En d'autres termes, on cherche à représenter par une loi de probabilités un phénomène physique dont on a une connaissance imparfaite. Le but est de tenir compte des contraintes (incertitudes) du problème tout en choisissant la distribution dont l'entropie (au sens de l'entropie de Shannon) est maximale, c'est à dire que l'on utilise la distribution contenant le moins d'information et qui est ainsi la moins arbitraire. En revanche, cette technique se distingue de l'approche Bayésienne car le modèle n'est pas lui-même une distribution de probabilités. Elle ne peut être appliquée qu'à des problèmes où les paramètres sont positifs, de sorte à pouvoir utiliser une fonction logarithme. La technique de régularisation du maximum d'entropie utilise une fonction de réguli-

sation de la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^n P_i \ln(w_i P_i) \quad (2.17)$$

où les poids w_i peuvent être ajustés pour favoriser certains types de solutions. Plus précisément, l'entropie de $\underline{P}$ est maximisée sous les contraintes du problème et s'écrit :

$$\begin{aligned} & \max \left(- \sum_{i=1}^n P_i \ln(w_i P_i) \right) \\ & \text{Sous les contraintes } \|M\underline{P} - \underline{d}\|_2 \leq \delta \\ & \underline{P} \geq \underline{0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Soit, en utilisant un terme de pénalisation :

$$\begin{aligned} & \min \|M\underline{P} - \underline{d}\|_2^2 + \alpha^2 \sum_{i=1}^n P_i \ln(w_i P_i) \\ & \underline{P} \geq \underline{0} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tant que α reste positif ou nul, la fonction objectif est strictement convexe et le problème admet alors une solution unique.

2.4.1.4 La méthode de la décomposition en valeurs singulières

Cette méthode (Singular Value Decomposition SVD) [5] peut s'appliquer dans le cas de problèmes inverses mal conditionnés. Soit une matrice M de dimension $m \times n$, M peut être factorisée et s'écrire sous la forme suivante :

$$M = USV^T \quad (2.20)$$

où :

- U est une matrice carrée orthogonale de dimension $m \times m$ contenant des vecteurs orthonormés formant une base de l'espace des données $\mathbb{R}^m$,
- S est une matrice diagonale de dimension $m \times n$ contenant des éléments dia-

gonaux strictement positifs appelés "valeurs singulières". S est de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

avec $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0$,

- V est une matrice carrée orthogonale de dimension $n \times n$ contenant des vecteurs orthonormés formant une base de l'espace du modèle $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, en remplaçant la matrice M par son expression décomposée en valeurs singulières, nous avons :

$$\begin{aligned} M\underline{P} &= \underline{d} \\ \Leftrightarrow USV^T\underline{P} &= \underline{d} \end{aligned} \quad (2.22)$$

La matrice S n'étant pas inversible, le problème inverse n'a donc pas de solution. C'est pourquoi nous nous limitons alors à la recherche de quasi-solutions au sens des moindres carrés du problème $M\underline{P} = \underline{d}$, qui s'écrivent :

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T \cdot \underline{d}}{s_i} v_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i \quad (2.23)$$

où les coefficients α_i sont des réels arbitraires.

2.4.1.5 Le contrôle optimal

Il consiste selon [25] à minimiser une fonctionnelle dépendant de la solution d'une équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles et à caractériser le minimum de cette fonctionnelle par un système d'équations ou d'inéquations, appelé système d'optimalité. L'idée directrice du contrôle optimal réside dans l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange sur les équations d'état, qui sont alors appelés "états adjoints". Ils permettent de simplifier de façon très significative le calcul du gradient de la fonctionnelle. Le contrôle optimal appliqué au cas de systèmes d'équations aux dérivées partielles a été développé par Lions [48]. Si l'on prend l'exemple de l'équation de la chaleur avec un contrôle distribué v , terme source de l'équation, le problème

se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma \times]0, T[\\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où y est la variable d'état représentant la température à l'intérieur du matériau Ω , pour lequel il n'y a pas de flux rentrant par le bord Σ de Ω . La fonctionnelle associée à ce problème est définie par :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [y(v) - y_d]^2 dx dt + \frac{N}{2} \int_0^T \int_{\Omega} v^2 dx dt \quad (2.24)$$

où y_d représente l'état désiré et N est un facteur de pondération du coût du contrôle. Soit $p(t)$ l'état adjoint solution du système différentiel rétrograde suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = y(v) - y_d & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma \times]0, T[\\ p(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Selon le principe du maximum de Pontryagin [2], il existe un contrôle optimal unique v solution du problème et réalisant l'optimum de J . Dans l'exemple traité, v est égal à $-N^{-1}p$.

2.4.1.6 La méthode de quasi-réversibilité

Développée par Lattés et Lions [46], elle consiste à remplacer le problème original mal posé par un problème approché bien posé, et ensuite d'utiliser les solutions de ce nouveau problème pour construire des solutions approchées du problème de départ. A titre d'exemple, pour illustrer cette démarche, citons les travaux de Dardé [19] traitant du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace résolu au moyen d'une version modifiée de la méthode de quasi-réversibilité ; ou encore les travaux de Qin et al. [59] s'intéressant à la résolution du problème de Cauchy pour l'équation modifiée de Helmholtz.

2.4.1.7 La méthode de régularisation évanescence

Cette partie s'inspire des travaux de Cimetière et Al. [18] [21] qui traitent du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Le problème se formule de la façon suivante :

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, avec une frontière régulière Γ , on définit une partition de Γ en $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$.

Les auteurs s'intéressent au problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace, c'est-à-dire à la reconstruction d'une fonction harmonique dans Ω vérifiant deux conditions aux limites sur Γ_d :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega\} \text{ tel que :} \\ u = \Phi_d \text{ sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \Psi_d \text{ sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, les méthodes de type Tikhonov proposent d'utiliser un terme régularisant au sein de la fonctionnelle à minimiser, transformant le problème inverse en une suite de problèmes d'optimisation. Ainsi, lorsque le problème en admet une, il est possible de trouver une solution stable par rapport aux petites perturbations, mais dépendant du terme régularisant. D'autre part, cette démarche utilise les données disponibles de manière exacte, ce qui signifie que la solution recherchée doit vérifier exactement les données pouvant être entachées de bruit. Ainsi, l'instabilité des problèmes de type Cauchy face aux petites perturbations est difficile à surmonter.

C'est pourquoi Cimetière et Al. [21] ont proposé une méthode de régularisation à effet évanescent pour résoudre le problème posé grâce à un procédé itératif. La démarche consiste à rechercher dans l'espace des fonctions solutions de l'équation d'équilibre celle qui s'approche au mieux des données et qui s'écarte le moins de la solution obtenue à l'itération précédente, sur toute la frontière du domaine Ω . Ainsi, la proximité de la solution à celle obtenue à l'itération précédente constitue un terme régularisant. Il s'atténue au fur et à mesure que l'algorithme converge vers la solution du problème, pour finalement s'annuler à la limite du processus. Les résultats numériques ont montré la robustesse de la méthode qui permet de plus de débruiter les mesures bruitées en les relaxant.

2.4.2 Méthodes pour la résolution de systèmes non linéaires

Parfois la résolution de problèmes inverses amène à la résolution de systèmes non linéaires. Nous présentons donc quelques méthodes pour la résolution de problèmes non linéaires comme la méthode de Newton-Raphson, la méthode de Gauss-Newton ou la méthode de Levenberg-Marquardt.

2.4.2.1 La méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson [6] est une généralisation de la méthode de Newton en dimension n .

Considérons un système de n équations différentielles non linéaires à n inconnues tel que :

$$M(\underline{P}) = \underline{0} \quad (2.25)$$

Une séquence de vecteurs $\underline{P}^0, \underline{P}^1, \dots$ convergeant vers une solution $\underline{P}^*$ est construite. Si M est continûment dérivable, nous pouvons construire l'approximation de Taylor suivante :

$$M(\underline{P}^0 + \Delta \underline{P}) \approx M(\underline{P}^0) + \nabla M(\underline{P}^0) \Delta \underline{P} \quad (2.26)$$

Où le Jacobien a pour expression :

$$\nabla M(\underline{P}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1(\underline{P}^0)}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial M_1(\underline{P}^0)}{\partial P_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M_n(\underline{P}^0)}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial M_n(\underline{P}^0)}{\partial P_n} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

D'après (2.26), nous avons l'approximation suivante de la différence entre $\underline{P}^0$ et la solution $\underline{P}^*$ de l'équation (2.25) :

$$M(\underline{P}^*) = 0 \approx M(\underline{P}^0) + \nabla M(\underline{P}^0) \Delta \underline{P} \quad (2.28)$$

La résolution de l'équation précédente donne $\Delta \underline{P}$:

$$\Delta \underline{P} \approx (\nabla M(\underline{P}^0))^{-1} (-M(\underline{P}^0)) \quad (2.29)$$

que l'on ajoute ensuite à $\underline{P}^0$ pour obtenir $\underline{P}^1 = \underline{P}^0 + \Delta \underline{P}$. Ainsi, cette méthode consiste, à partir d'une solution initiale $\underline{P}^0$ à calculer une suite de vecteurs $\underline{P}^1, \underline{P}^2, \dots$ jusqu'à ce que le calcul converge vers une solution $\underline{P}^*$ de l'équation (2.25). Le point fort de cette méthode est que sa convergence est quadratique, c'est-à-dire que lorsque nous nous approchons de la solution, le nombre de chiffres significatifs corrects des grandeurs calculées double à chaque itération. Cependant, cette méthode est très sensible à l'initialisation : si celle-ci est trop éloignée du minimum local, la méthode peut ne pas converger. D'autre part, elle n'est pas directement applicable à tous les problèmes inverses, car il peut arriver que nous n'ayons pas autant de données que de paramètres à identifier, il n'y a alors pas de solution exacte au problème $M\underline{P} = \underline{d}$, où M n'est pas carré. Cette méthode est généralement utilisée pour obtenir une solution à des problèmes d'optimisation non linéaires.

2.4.2.2 La méthode de Gauss-Newton

La méthode de Gauss-Newton [6] est spécifique à la résolution de problèmes d'optimisation non linéaire au sens des moindres carrés. Cette technique consiste à minimiser la somme des carrés suivante :

$$S(\underline{P}) = \sum_{i=1}^n (M(\underline{P})_i - \underline{d}_i)^2 \quad (2.30)$$

Par rapport à la méthode de Newton-Raphson, elle permet de s'affranchir du calcul des dérivées secondes. Nous notons :

$$f_i(\underline{P}) = M(\underline{P})_i - \underline{d}_i \quad (2.31)$$

et :

$$F(\underline{P}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{P}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{P}) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

La méthode est itérative, nous avons donc :

$$P^{i+1} = P^i + \Delta P \quad (2.33)$$

où ΔP vérifie :

$$(J_M^T(\underline{P}) \cdot J_M(\underline{P})) \Delta P = -J_M^T(\underline{P}) F(\underline{P}) \quad (2.34)$$

Où J_M est la matrice Jacobienne et vaut :

$$J_M(\underline{P}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{P})}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\underline{P})}{\partial P_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\underline{P})}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\underline{P})}{\partial P_n} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta P = -(J_M^T(\underline{P}) \cdot J_M(\underline{P}))^{-1} J_M^T(\underline{P}) F(\underline{P}) \quad (2.36)$$

Cette technique possède le même inconvénient que la méthode de Newton-Raphson (sensible à l'initialisation) et peut échouer si la matrice $J_M^T(\underline{P}) \cdot J_M(\underline{P})$ est singulière. L'absence du calcul des dérivées secondes permet d'alléger fortement la programmation de l'algorithme et les temps de calcul, mais cela peut entraîner l'obtention d'une solution plus éloignée de la solution exacte qu'avec la méthode de Newton-Raphson. Sa vitesse de convergence est linéaire.

2.4.2.3 La méthode de Levenberg-Marquardt

Cette technique [54] peut s'appliquer dans le cas de problème des moindres carrés linéaires et non linéaires. Dans la méthode de Levenberg-Marquardt, les équations

(2.34) de la méthode de Gauss-Newton sont modifiées de la manière suivante :

$$(J_M^T(\underline{P}) \cdot J_M(\underline{P}) + \lambda I) \Delta P = -J_M^T(\underline{P}) F(\underline{P}) \quad (2.37)$$

La paramètre λ est choisi positif de sorte que le terme λI assure que la matrice du membre de gauche de l'équation (2.37) soit inversible. Si elle est effectivement inversible et symétrique définie positive, il est possible d'utiliser la factorisation de Cholesky pour résoudre le système. La valeur optimale de λ est ajustée à chaque itération de sorte à ce que la valeur de la somme $S(\underline{P})$ diminue. Si l'itération courante n'a pas fourni de diminution de $S(\underline{P})$, il faut alors augmenter la valeur de λ . Il faut au contraire diminuer cette valeur si $S(\underline{P})$ a diminué fortement au terme de l'itération. Lorsque λ est petit, cette méthode revient à la méthode de Gauss-Newton. En revanche, pour des valeurs élevées de λ elle s'apparente à une technique de régularisation de Tikhonov. Cette méthode est plus stable que la méthode de Gauss-Newton. Elle peut toutefois converger moins vite lorsque les fonctions du problème traité présentent des singularités. D'une manière générale, elle est particulièrement adaptée à des systèmes de petite taille.

Il existe d'autres types de méthodes de résolution de problèmes inverses qui ne seront pas détaillées dans ce manuscrit :

- les techniques de Fourier (FFT) : elles sont particulièrement adaptées aux problèmes de convolution et permettent la résolution de problèmes dans les domaines temporel ou fréquentiel lorsque l'application le permet. Pour le lecteur intéressé par le sujet, il existe de nombreux ouvrages traitant des techniques de Fourier tel que [7], qui traite de la théorie de Fourier et de quelques applications.
- les approches probabilistes : elles sont également appelées "approches Bayésiennes". La théorie des processus stochastiques fournit une autre méthode de régularisation, consistant en la mise en évidence des informations importantes ressortant des problèmes posés. Il faut ici disposer d'une idée préconçue de la solution recherchée. L'idée est de considérer toutes les grandeurs comme des variables aléatoires afin de représenter toutes les incertitudes. La solution du problème inverse est alors la fonction densité de probabilités associée à l'inconnue $\underline{P}$ et à la donnée $\underline{d}$. Le lecteur intéressé par ces techniques peut se reporter

à l'ouvrage [38].

Nous venons de voir quelques méthodes de résolution de problèmes inverses. Le choix d'une méthode de résolution est dicté par les contraintes imposées par le problème inverse à résoudre (contraintes sur les paramètres, linéarité ou non du problème, complexité du modèle, idée préconçue ou non de la solution, information disponible a priori, quantité d'informations disponibles, etc...).

Nous allons maintenant aborder quelques techniques utilisées afin d'identifier les coefficients aérodynamiques de projectiles à partir de données de vol.

2.5 Méthodes de résolution spécifiques à l'identification de coefficients aérodynamiques

Cette section passe en revue les différentes techniques déjà employées afin d'identifier les coefficients aérodynamiques de projectiles à partir de mesures prises en vol. La liste n'est pas exhaustive mais se veut plutôt représentative de la diversité des méthodes utilisées. Klein [44] propose de les distinguer en trois catégories :

- la méthode du critère du maximum de vraisemblance,
- la méthode d'identification au sens des moindres carrés,
- les méthodes basées sur l'utilisation du filtre de Kalman.

D'autres techniques n'appartenant pas à ces trois catégories sont aussi utilisées et seront présentées.

2.5.1 Le maximum de vraisemblance

Weiss et Al. [69] proposent une résolution analytique des équations de la mécanique du vol (modèle à 6 degrés de liberté) afin d'éviter une intégration numérique et tous les problèmes associés (erreurs d'intégration, problèmes de convergence). Les auteurs supposent qu'il n'y a pas d'effet aérodynamique non linéaire (effet Magnus ignoré). Notons que cette hypothèse n'est pas préjudiciable pour des projectiles stabilisés par empennage sur des courtes distances, c'est-à-dire quand le projectile ne développe pas de grands angles d'obliquité ou des vitesses de roulis très élevées. L'implémentation de la résolution analytique est récursive et repose sur l'utilisation

d'une méthode d'optimisation (non basée sur le gradient) appliquée à une fonction coût du maximum de vraisemblance. A l'issue du calcul, les auteurs obtiennent des valeurs de certains paramètres d'état du projectile (vitesse, vitesse de roulis, angles d'obliquité, de tangage et de lacet) desquelles sont extraits les coefficients aérodynamiques (coefficient de traînée, d'entraînement en roulis, d'amortissement en roulis et du moment de tangage). Les résultats ont montré l'efficacité de la méthode dans l'estimation du coefficient du moment de tangage.

Dans le cadre de notre étude, il est attendu de développer une technique généralisable à tout type de projectile, c'est pourquoi nous ne pouvons ignorer les effets Magnus agissant sur le projectile au cours du vol dans l'écriture de notre modèle de comportement. Cela nous interdit alors la résolution des équations de manière analytique.

Illif [39] identifie certains coefficients aérodynamiques (coefficients du roulis et du moment de tangage) d'un avion grâce au critère du maximum de vraisemblance associé à une technique de Gauss-Newton. L'auteur utilise ce critère dans la mesure où il tient compte de la présence de bruit (bruit de mesure, bruit présent dans le système dû à une excitation aléatoire à cause de turbulences atmosphériques par exemple, erreur de modélisation) dans le modèle de comportement du projectile. C'est pourquoi une telle écriture du modèle induit de traiter le problème de manière statistique. En présence de bruit, l'auteur recommande l'utilisation d'une technique de Newton-Raphson si le calcul des dérivées secondes des fonctions du modèle sont accessibles. L'étude a permis d'obtenir, à partir de mesures réelles, des coefficients aérodynamiques proches de ceux obtenus en soufflerie.

Nous n'envisageons pas d'employer le critère du maximum de vraisemblance dans notre étude dans un premier temps car nous ne disposons pas de données probabilistes permettant d'estimer la distribution des estimations des paramètres recherchés. D'autre part, notre étude n'en étant qu'au commencement, nous formulons notre technique d'identification de manière simple et l'améliorerons progressivement. Le critère du maximum de vraisemblance constitue donc une éventuelle voie d'amélioration de notre méthode.

2.5.2 Les méthodes d'identification au sens des moindres carrés

Chapman et Al. [12] ont été les pionniers dans l'identification de coefficients aérodynamiques à partir de mesures prises en vol. Ils cherchent à minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre l'angle d'obliquité mesuré α_{exp} et l'angle d'obliquité théorique α_{cal} :

$$S = \sum_{i=1}^n (\alpha_{exp}(x_i) - \alpha_{cal}(x_i))^2 \quad (2.38)$$

Pour cela, ils considèrent une équation différentielle non linéaire du second ordre :

$$\ddot{\alpha} + (C_1 + C_2\alpha^2)\dot{\alpha} + (C_3 + C_4\alpha^2)\alpha = 0 \quad (2.39)$$

$$\text{Sous les conditions initiales : } \alpha(0) = C_5 \text{ et } \dot{\alpha}(0) = C_6 \quad (2.40)$$

où les dérivées sont exprimées par rapport à la distance x . Les constantes C_1 et C_2 définissent le moment d'amortissement non linéaire et les constantes C_3 et C_4 définissent le moment statique non linéaire. Le but est d'identifier les paramètres aérodynamiques C_1 , C_2 , C_3 et C_4 ainsi que les deux conditions initiales de sorte que le carré des résidus (équation 2.38) soit minimisé, en utilisant la méthode des corrections différentielles proposée par ces mêmes auteurs. Il s'agit d'un procédé itératif reposant sur une dérivation paramétrique de l'équation (2.40) par rapport à chacune des constantes C_j ($j \in \llbracket 1, \dots, 6 \rrbracket$), aboutissant alors à un système de six équations différentielles linéaires qui peut être écrit sous la forme d'un système matriciel :

$$[A][\Delta C] = [B] \quad (2.41)$$

où

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \alpha}{\partial C_j} \right)_i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial C_k} \right)_i$$

et $B = \sum_{i=1}^n (\alpha_{exp} - \alpha_{cal})_i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial C_j} \right)_i \quad (2.42)$

La résolution de ce système donne les corrections (ΔC) qui sont ajoutées aux valeurs courantes des coefficients C_j jusqu'à convergence de l'algorithme.

Williamson et Al. [71] identifient les coefficients aérodynamiques d'un projectile grâce à une formulation du problème au sens des moindres carrés en intégrant dans la procédure d'identification une modélisation de l'instrumentation permettant de prendre en compte le décalage entre le modèle mathématique représentant le comportement du projectile et les données mesurées. En effet, il peut arriver que le mouvement du projectile soit proche de la fréquence de résonance de l'instrumentation, ce qui entraîne un décalage entre la sortie de l'instrumentation et le mouvement réel du projectile. Les auteurs montrent que la prise en compte de la modélisation de l'instrumentation fournit de bien meilleurs résultats que ceux obtenus à partir d'un schéma standard d'identification.

Mahmutyazicioglu et Al. [52] se sont inspirés des travaux de *Weiss et al.* [69]. Ils proposent une résolution analytique des équations de la mécanique du vol basées sur la théorie balistique linéaire en intégrant des variables complexes dans la formulation du modèle. Les coefficients aérodynamiques sont extraits des grandeurs d'état (angles complexes) du projectile et estimés grâce à une procédure basée sur les moindres carrés. Les équations matricielles sont résolues au moyen de la méthode de décomposition en valeurs singulières.

De manière générale, les méthodes basées sur l'utilisation des moindres carrés permettent de s'approcher au mieux des mesures prises pendant le vol sans modifier la modélisation du système, au contraire du critère du maximum de vraisemblance. L'application de cette technique dans le cadre de notre étude semble donc être un choix judicieux dans la mesure où elle permet une formulation simple du problème et une adaptation plus facile à d'autres types de projectiles que le critère du maximum de vraisemblance, qui nécessite la connaissance des distributions de probabilités des grandeurs à estimer.

2.5.3 Les méthodes basées sur l'utilisation du filtre de Kalman

Kuo et Al. [45] emploient un filtre de Kalman étendu afin de débruiter les paramètres d'état du modèle. Une technique de Newton-Raphson modifiée (les termes du second ordre sont négligés) et basée sur le critère du maximum de vraisemblance

est ensuite utilisée pour identifier les coefficients aérodynamiques d'un projectile gyroscopiquement stabilisé. L'étude menée en présence de bruit montre que les coefficients de traînée et d'amortissement en roulis sont correctement identifiés, tandis que les estimations des autres coefficients (coefficient de portance, du moment de tangage, du moment de Magnus et du moment d'amortissement du tangage) sont moins bonnes en raison de singularités dans le gradient de la fonction coût, dues au bruit.

La technique du filtre de Kalman est également employée par *Quanwei et Al.* [60] qui traitent du problème d'identification de paramètres aérodynamiques en temps réel. Ils reprennent le modèle construit par Kelsey et Al. [43] et le modifient de sorte à le rendre indépendant de l'altitude du projectile. Pour cela, ils utilisent un filtre de Kalman leur permettant d'estimer directement les coefficients aérodynamiques du projectile. Leur étude a concerné plus particulièrement les coefficients d'entraînement en roulis et du moment de tangage. Des tests ont montré que ces coefficients peuvent être estimés précisément en temps réel, et ce en s'affranchissant des hypothèses de Kelsey sur l'altitude du projectile.

Yamada et Al. [72] utilisent un filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter, EKF) dans leur article dédié à l'étude des coefficients aérodynamiques d'un pont. Des essais ont montré que le filtre de Kalman étendu appliqué à l'algorithme où sont intégrées les équations du mouvement donne des résultats très précis même si le bruit est élevé.

Chowdhary et Al. [17] proposent une étude testant l'efficacité d'une version modifiée du filtre de Kalman, appelée "filtre de Kalman non parfumé" (Unscented Kalman Filter UKF) afin d'identifier les coefficients aérodynamiques d'un avion. Lorsque le modèle est hautement non linéaire, le filtre de Kalman étendu peut donner des résultats décevants à cause de l'approximation introduite par la linéarisation. Le filtre de Kalman non parfumé est basé sur le principe de la transformée non parfumée introduite par *Julier et Al.* [42]. L'UKF repose sur l'idée qu'il est plus facile d'approximer une distribution de probabilités gaussienne qu'une transformation non linéaire arbitraire. Il consiste à propager un set de points (appelés "points sigma") soigneusement choisis en utilisant les fonctions d'évolution de l'état. Les points sigma sont choisis de façon déterministe de façon à prélever la distribution statistique du vecteur d'état. Cela permet de propager directement la moyenne et la covariance sur le système d'équations non linéaires, contrairement au filtre de Kalman étendu qui les propage en linéarisant les équations. De plus, l'UKF dispense de calculer les

matrices Jacobiennes et Hessiennes. Des tests numériques ont montré que l'UKF converge plus vite que l'EKF. Néanmoins l'UKF est plus coûteux à programmer et fournit des résultats très proches de ceux obtenus avec l'EKF.

De même que pour le critère du maximum de vraisemblance, l'utilisation d'un filtre de Kalman n'est pas envisagée dans la mesure où, l'étude étant à son commencement, nous ne prenons pas en compte la présence de bruit dans notre modèle de comportement. Cette possibilité constituerait une voie d'amélioration de notre démarche inverse.

2.5.4 Identification à partir de mesures issues de magnétomètres

Fleck et Al. [29] détermine les coefficients aérodynamiques d'un projectile gyrostabilisé à partir de signaux issus de magnétomètres, associés à un accéléromètre et un radar. Les principaux coefficients aérodynamiques ont pu être calculés à partir des données extraites des signaux (coefficient de traînée, du moment de tangage, de portance, d'amortissement du tangage et d'amortissement en roulis).

Changey et Al. [11] utilisent également la technique des magnétomètres afin de déterminer l'attitude du projectile (orientation du vecteur vitesse, position du projectile, angle de roulis, d'attaque et de dérapage). Pour cela ils construisent un modèle de vol réduit dans lequel les coefficients aérodynamiques du projectile sont supposés connus. Les données (mesures du champ magnétique terrestre) sont traitées au moyen d'un filtre de Kalman étendu. Des tests numériques avec des données simulées (comportement d'un projectile gyrostabilisé de 155 mm) ont montré la robustesse de la technique développée qui fournit des résultats suffisamment précis pour permettre le contrôle du projectile. Par ailleurs, cette étude a montré qu'il était possible d'accéder aux informations voulues à l'aide d'un seul magnétomètre.

Les magnétomètres constituent une technique de mesures prometteuse dans la mesure où ils permettent d'obtenir, après traitement des données, de très bonnes approximations des coefficients aérodynamiques. Néanmoins, cette technique n'est pas à notre disposition, c'est pourquoi nous ne nous inspirerons pas de ces deux études lors du développement de notre démarche inverse.

2.5.5 Identification à partir d'essais en tunnel de choc

Wey et Al. [70] ont proposé une technique pour identifier les coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures expérimentales, en utilisant un tunnel de choc, c'est-à-dire un tunnel permettant de souffler un écoulement le long du projectile. Cette technique est appelée "technique de mesure de force en vol" (FFM, Free-Flight force Measuring Technique). Ce travail est basé sur l'exploitation de petites trajectoires (10 à 20 cm), parcourues par un projectile explosif de référence de calibre 12.8 mm. Des mesures de la vitesse d'écoulement sont obtenues au moyen de la technique de vélocimétrie Doppler. Les mesures de déplacement (dans le plan horizontal et vertical) sont obtenues au moyen de la technique d'ombroscopie et grâce à des caméras ultra-rapides Photron combinées à une technique de traitement d'images permettant de suivre le mouvement de trois points de référence sur le projectile, puis de reconstituer la trajectoire du centre de gravité ainsi que le mouvement angulaire du projectile. Les coefficients aérodynamiques sont obtenus par comparaison entre le mouvement théorique du projectile et les données mesurées, pour un nombre de Mach égal à 3. Il résulte de l'étude que le coefficient de traînée extrait est en accord avec la valeur de référence. Les résultats sont un peu moins satisfaisants concernant la détermination des coefficients de moment de tangage et d'amortissement du tangage.

Cette étude est aujourd'hui appliquée à des projectiles de petits calibres et nécessite encore d'être développée avant de pouvoir l'appliquer à des projectiles de calibre plus important. Notons par ailleurs que les auteurs emploient aussi la méthode des moindres carrés afin de s'approcher au mieux des mesures prises lors des tests.

2.5.6 Identification à partir d'une technique de contrôle optimal

Chen et Al. [15] utilisent la technique du contrôle optimal afin de déterminer le coefficient de traînée (variant au cours du temps) d'un projectile gyrostabilisé à partir de mesures radar prises en vol. Le principe de la méthode consiste à transformer le problème de minimisation de la fonctionnelle en un problème de minimisation paramétrique multivariable, où le profil de contrôle est correctement paramétré (splines

cubiques). Le problème est résolu au moyen d'une technique de Newton-Raphson modifiée, ainsi qu'une fonction approchée d'Hamilton, le but étant de réduire le coût de programmation (les moyens informatiques de l'époque n'étant pas aussi performants qu'aujourd'hui). Ce procédé permet de corriger les imprécisions sur les conditions initiales et de reconstruire correctement la courbe du coefficient de traînée du projectile. Par ailleurs, *Chen et Al.* [14] ont également développé un algorithme d'apprentissage itératif afin d'identifier la fonction non linéaire représentative de la traînée d'un projectile gyroscopiquement stabilisé. Des tests ont été menés à partir de données réelles de vol (mesures radar de vitesse) et ont montré l'efficacité de la méthode. Cette dernière technique s'applique particulièrement à la recherche de coefficients aérodynamiques variant en fonction du nombre de Mach. Elle n'est donc pas adaptée à notre étude où nous supposons, comme nous le verrons par la suite, ces coefficients constants.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, afin de mieux appréhender la notion de problème mal posé, nous avons tout d'abord présenté quelques exemples d'applications dans différents domaines tels que la mécanique, la thermique, l'acoustique, la médecine... Cela nous a sensibilisés à la diversité des problèmes inverses pouvant exister, comme par exemple l'identification de fissures, de conditions aux limites inaccessibles à la mesure, de sources acoustiques, ou encore la reconstruction du potentiel électrique à la surface du coeur dans le but de prévenir des maladies cardiaques. Nous pouvons aisément comprendre que les formulations des problèmes inverses sont aussi variées que leurs domaines d'applications. C'est pourquoi nous avons ensuite présenté les notions de problèmes bien posés et mal posés, qui nous ont permis d'établir qu'un problème peut être considéré comme problème inverse lorsqu'il ne satisfait pas au moins l'une des trois conditions d'Hadamard (existence et unicité de la solution, et stabilité de la solution par rapport aux données). Notre problème d'identification de coefficients aérodynamiques à partir de mesures prises en vol est donc un problème mal posé. Nous avons aussi présenté différentes techniques de résolution des problèmes inverses et un état de l'art des techniques utilisées pour l'identification de coefficients aérodynamiques.

Chapitre 3

Mise en équations du vol d'un projectile

Introduction

Nous nous consacrons dans ce chapitre à la mise en équations du vol d'un projectile. Les conventions prises (repères, angles,...) sont exposées et les expressions des forces et moments s'appliquant sur le projectile sont détaillées et illustrées. A chaque effort est associé un coefficient aérodynamique, constituant ainsi un jeu de coefficients que nous cherchons à identifier. La mise en équations du vol aboutit à un modèle à six degrés de liberté. Nous faisons ensuite quelques hypothèses simplificatrices, valables pour un projectile flèche. Enfin nous présentons l'outil de simulation directe que nous avons spécifiquement développé et le validons en le comparant à un code développé par l'Institut Saint-Louis (ISL) mis à notre disposition par Nexter Munitions. Notre outil de simulation directe servira dans la suite de l'étude à générer des jeux de données fictives, que nous bruyterons éventuellement, destinées à valider notre technique d'identification avant de l'appliquer à des données réelles. Enfin, dans une dernière partie nous menons, pour un projectile flèche particulier, une étude de sensibilité des paramètres d'état aux variations des coefficients aérodynamiques.

3.1 Les repères balistiques

Différents repères sont utilisés en balistique. Nous en définissons quatre :

- $(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$ le repère Galiléen fixe pointant vers les étoiles et permettant de situer la position et la direction du canon (latitude et azimuth) sur la surface du globe (figure 3.1) ;
- $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ le repère canon fixe lié au canon ($\underline{j}$ est le vecteur vertical dirigé vers le haut reliant le centre de la Terre et le canon, et le plan $(\underline{i}, \underline{k})$ est tangent à la surface de la Terre) (figure 3.1) ;
- $(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ le repère trajectoire mobile lié à la trajectoire ($\underline{t}$ est le vecteur vitesse du projectile) ;
- $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ le repère projectile mobile lié au projectile ($\underline{c}$ est le vecteur directeur de l'axe longitudinal du projectile).

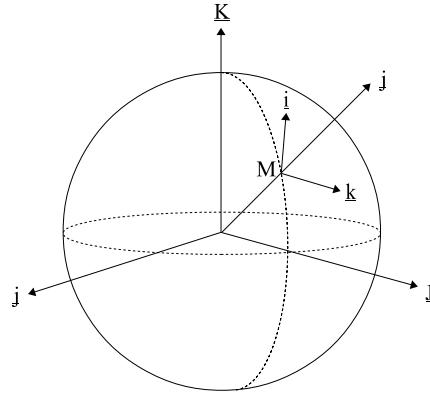


FIGURE 3.1 – Position du canon sur le globe terrestre

3.1.1 Du repère Terre au repère canon

Le canon est positionné au point M (figure 3.1) dans le repère Galiléen fixe $(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$. L'axe de rotation de la Terre autour d'elle-même est dirigé selon $\underline{K}$. La position du canon peut être définie par deux angles :

- l'angle de la latitude Lat permet de localiser le repère lié au canon sur la Terre (figure 3.2),
- l'angle d'azimut AZ permet de définir la direction du vecteur $\underline{i}$ par rapport au Nord dans le plan $(\underline{i}, \underline{k})$ tangent à la surface de la Terre (positif vers l'est, figure 3.3).

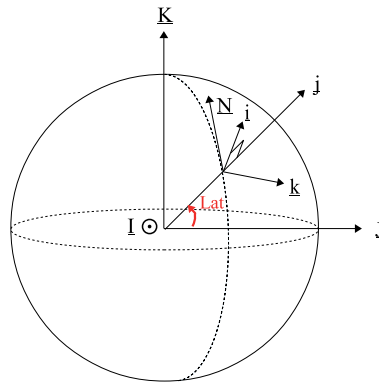


FIGURE 3.2 – Définition de l'angle de latitude
(NB : Le vecteur $\vec{N}$ est tangent au méridien et pointe vers le Nord)

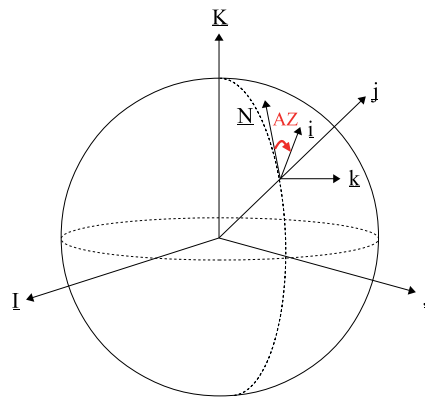


FIGURE 3.3 – Définition de l'angle d'azimut
(NB : Le vecteur $\vec{j}$ est dirigé du centre de la terre vers l'atmosphère)

3.1.2 Du repère canon au repère trajectoire

Une fois le repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ défini, nous procédons à un changement de repère vers le repère trajectoire $(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ grâce aux angles de hausse θ et de gisement η (figure 3.4). Concrètement, on représente les angles η et θ dans l'espace tel qu'illustré par la figure 3.5. Le vecteur $\underline{v}_r$ est la vitesse relative (c'est-à-dire par rapport à l'air) du projectile.

Suite à ce changement de repère, nous pouvons écrire la matrice de passage sui-

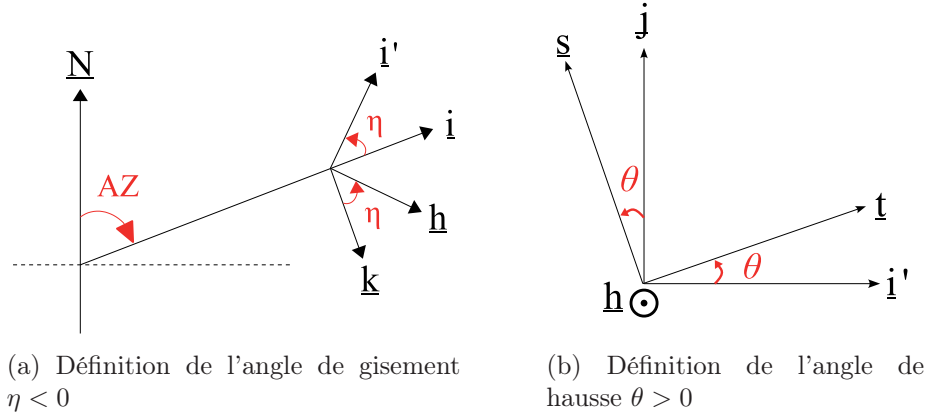


FIGURE 3.4 – Passage du repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère $(\vec{t}, \vec{s}, \vec{h})$

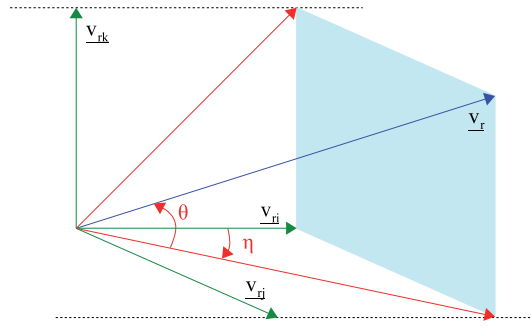


FIGURE 3.5 – Représentation spatiale des angles $\eta (< 0)$ et θ

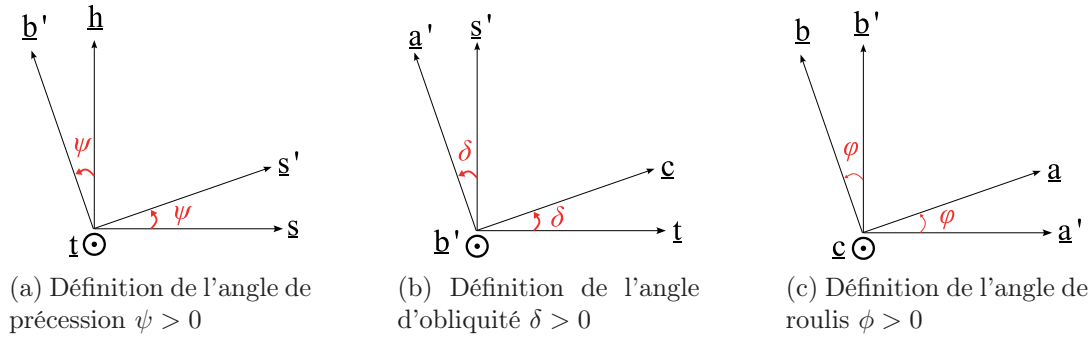
vante :

$$M_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \rightarrow (\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \eta & \sin \theta & -\cos \theta \sin \eta \\ -\sin \theta \cos \eta & \cos \theta & \sin \theta \sin \eta \\ \sin \eta & 0 & \cos \eta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

3.1.3 Du repère trajectoire au repère projectile

Le passage du repère trajectoire $(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ au repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ se fait grâce aux angles ψ , δ et ϕ (figure 3.6).

L'expression de la matrice de passage associée à ce changement de repère est la

FIGURE 3.6 – Passage du repère $(\vec{t}, \vec{s}, \vec{h})$ au repère $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

suivante :

$$M_{(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h}) \rightarrow (\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \cos \psi & \sin \delta \sin \psi \\ -\sin \delta \cos \phi & \cos \delta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & \cos \delta \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \\ \sin \delta \sin \psi & -\cos \delta \sin \phi \cos \psi & -\cos \delta \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Les deux matrices de passage sont orthogonales et leur produit permet d'obtenir une troisième matrice de passage du repère $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ vers le repère $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$:

	$\underline{i}$	$\underline{j}$	$\underline{k}$
$\underline{c}$	$+\cos \delta \cos \eta \cos \theta$ $-\cos \psi \sin \delta \cos \eta \sin \theta$ $+\sin \psi \sin \delta \sin \eta$	$+\cos \delta \sin \theta$ $+\cos \psi \sin \delta \cos \theta$	$-\cos \delta \sin \eta \cos \theta$ $+\cos \psi \sin \delta \sin \eta \sin \theta$ $+\sin \psi \sin \delta \cos \eta$
$\underline{a}$	$-\cos \phi \sin \delta \cos \eta \cos \theta$ $-\cos \phi \cos \psi \cos \delta \cos \eta \sin \theta$ $+\sin \phi \sin \psi \cos \eta \sin \theta$ $+\cos \phi \sin \psi \cos \delta \sin \eta$ $+\sin \phi \cos \psi \sin \eta$	$-\cos \phi \sin \delta \sin \theta$ $+\cos \phi \cos \psi \cos \delta \cos \theta$ $-\sin \phi \sin \psi \cos \theta$	$+\cos \phi \sin \delta \sin \eta \cos \theta$ $+\cos \phi \cos \psi \cos \delta \sin \eta \sin \theta$ $-\sin \phi \sin \psi \sin \eta \sin \theta$ $+\cos \phi \sin \psi \cos \delta \cos \eta$ $+\sin \phi \cos \psi \cos \eta$
$\underline{b}$	$+\sin \phi \sin \delta \cos \eta \cos \theta$ $+\sin \phi \cos \psi \cos \delta \cos \eta \sin \theta$ $+\cos \phi \sin \psi \cos \eta \sin \theta$ $-\sin \phi \sin \psi \cos \delta \sin \eta$ $+\cos \phi \cos \psi \sin \eta$	$+\sin \phi \sin \delta \sin \theta$ $-\sin \phi \cos \psi \cos \delta \cos \theta$ $-\cos \phi \sin \psi \cos \theta$	$-\sin \phi \sin \delta \sin \eta \cos \theta$ $-\sin \phi \cos \psi \cos \delta \sin \eta \sin \theta$ $-\cos \phi \sin \psi \sin \eta \sin \theta$ $-\sin \phi \sin \psi \cos \delta \cos \eta$ $+\cos \phi \cos \psi \cos \eta$

Comme nous pouvons le constater d'après les expressions des différentes matrices de passage, l'écriture des changements de repère en fonction des angles balistiques est très lourde.

3.1.4 Changements de repères en utilisant un quaternion d'Hamilton

La méthode trigonométrique est sujette à des indéterminations des angles utilisés (dans le cas de trajectoires verticales). C'est pourquoi le choix est fait d'employer le quaternion à la place des angles, afin d'alléger l'écriture du modèle mathématique. Cette méthode permet également de lever les indéterminations sur les angles, et s'avère plus robuste et plus rapide en terme de temps de calcul lors de la programmation du modèle.

En 1843, W. R. Hamilton [53] a pourvu l'espace vectoriel à quatre dimensions sur $\mathbb{R}$ d'une structure multiplicative, de sorte que tous les axiomes relatifs aux corps soient respectés, excepté la loi commutative de la multiplication. Il a nommé "quaternions" les éléments d'un tel espace, noté " H ". Les grandeurs $1, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sont choisies comme éléments de base, l'élément 1 étant l'élément neutre de H . Comme il appartient à un espace vectoriel, chaque élément de H peut s'écrire $Q = \lambda_0 + \lambda_1 \underline{i} + \lambda_2 \underline{j} + \lambda_3 \underline{k}$. Q est donc un quaternion. Ses éléments λ_i ($i = 0, \dots, 3$) appartiennent à l'ensemble des réels. Un quaternion Q est composé d'une partie scalaire λ_0 et d'une partie vectorielle $\lambda_1 \underline{i} + \lambda_2 \underline{j} + \lambda_3 \underline{k}$. Il peut également s'écrire sous forme trigonométrique :

$$Q = |Q| (\cos \alpha + \underline{x} \sin \alpha) \text{ avec } |Q| = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \quad (3.3)$$

Le quaternion d'Hamilton permet de remplacer trois rotations par une seule autour d'un axe adéquat. D'après [53] nous avons la relation suivante :

$$\forall r_1 = \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \in (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}), \forall r_2 = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \in (\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}), \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, 3$$

$$\begin{aligned} r_2 &= Q r_1 \bar{Q} = c\underline{c} + a\underline{a} + b\underline{b} \\ &= (\lambda_0 + \lambda_1 \underline{i} + \lambda_2 \underline{j} + \lambda_3 \underline{k}) (\underline{i}\underline{i} + \underline{j}\underline{j} + \underline{k}\underline{k}) (\lambda_0 - \lambda_1 \underline{i} - \lambda_2 \underline{j} - \lambda_3 \underline{k}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

La multiplication de deux quaternions suit les règles indiquées dans le tableau 3.1. La multiplication d'un vecteur par lui-même est analogue à la multiplication d'un nombre complexe (imaginaire pur) par lui-même. La multiplication d'un vecteur par

un autre vecteur suit les lois du produit vectoriel.

$\times$	1	$\underline{i}$	$\underline{j}$	$\underline{k}$
1	1	$\underline{i}$	$\underline{j}$	$\underline{k}$
$\underline{i}$	$\underline{i}$	-1	$\underline{k}$	$-\underline{j}$
$\underline{j}$	$\underline{j}$	$-\underline{k}$	-1	$\underline{i}$
$\underline{k}$	$\underline{k}$	$\underline{j}$	$-\underline{i}$	-1

TABLE 3.1 – Lois régissant la multiplication de deux quaternions

Après calcul, nous obtenons la matrice de passage précédente reformulée avec le quaternion :

$$M_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \rightarrow (\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_0) & 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) \\ 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1) \\ 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

que nous noterons pour plus de légèreté :

$$M_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \rightarrow (\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{31} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

L'avantage du quaternion représentatif des rotations globales est que sa valeur est indépendante du système d'angles adopté (angles balistiques présentés précédemment ou angles d'Euler). Si sa valeur est inchangée, son expression dépend en revanche des angles de rotation caractéristiques de la rotation d'un repère intermédiaire à un autre. Autrement dit, la valeur du quaternion Q est la même quelles que soient les rotations effectuées, mais l'expression de ses éléments $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en fonction des angles balistiques change selon le repère de projection utilisé. Le quaternion constitue donc une alternative judicieuse aux angles balistiques car il permet d'alléger fortement l'écriture du modèle balistique, de passer facilement d'un repère à un autre et de lever les indéterminations qui pèsent sur les angles. Les expressions des éléments $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et λ_3 des quaternions en fonction de ces 5 angles et des changements de repère souhaités sont données en annexe C.

3.2 Inventaire des efforts s'appliquant sur un projectile

Les forces s'appliquant sur un projectile sont exprimées dans le repère de tir $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ tandis que les moments le sont dans le repère lié au projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ [28] [35]. Nous donnons une formulation générale des forces et moments, ce qui signifie qu'il est possible de les exprimer dans un autre repère que celui dans lequel nous travaillons. De plus, en utilisant les matrices de passage précédentes, les forces et moments peuvent au choix être exprimés avec les angles balistiques ou le quaternion. Pour alléger l'écriture, nous utiliserons le quaternion. Nous posons :

- $q = \frac{1}{2} \rho v_r^2$ la pression dynamique où ρ est la masse volumique de l'air et v_r la norme du vecteur vitesse relative (c'est-à-dire par rapport au vent) du projectile,
- $S = \frac{\pi D^2}{4}$ le maître couple du projectile où D est le diamètre du projectile,
- $\underline{t} = \frac{\underline{v}_r}{v_r}$ le vecteur vitesse normé du projectile.

Nous supposons dans la suite que l'atmosphère est au repos (absence de vent), c'est-à-dire que la vitesse relative du projectile est égale à sa vitesse absolue $\underline{v}_r = v_{abs}$.

3.2.1 Les forces

Les forces exercées sur le projectile au cours du vol ont des origines diverses. Nous pouvons distinguer les forces *aérodynamiques*, des forces de *pesanteur* et de *Coriolis*.

3.2.1.1 Les forces aérodynamiques

A chaque force aérodynamique s'exerçant sur le projectile est associé un coefficient aérodynamique. Pour une meilleure compréhension, nous illustrons l'influence des forces aérodynamiques sur le projectile à l'aide de la figure 3.7.

- *La force de traînée*

La force de traînée (ou de résistance aérodynamique) agit sur le projectile suivant le sens opposé à son vecteur vitesse et se situe dans le *plan de résistance* formé par les vecteurs $\underline{t}$ et $\underline{c}$. Elle s'applique au centre de poussée aérodyna-

mique (point F). Son expression est la suivante :

$$\underline{D} = -qSC_x \underline{t} = -qSC_x \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{pmatrix} = -\frac{\rho S}{2} v_r C_x \begin{pmatrix} v_{ri} \\ v_{rj} \\ v_{rk} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$

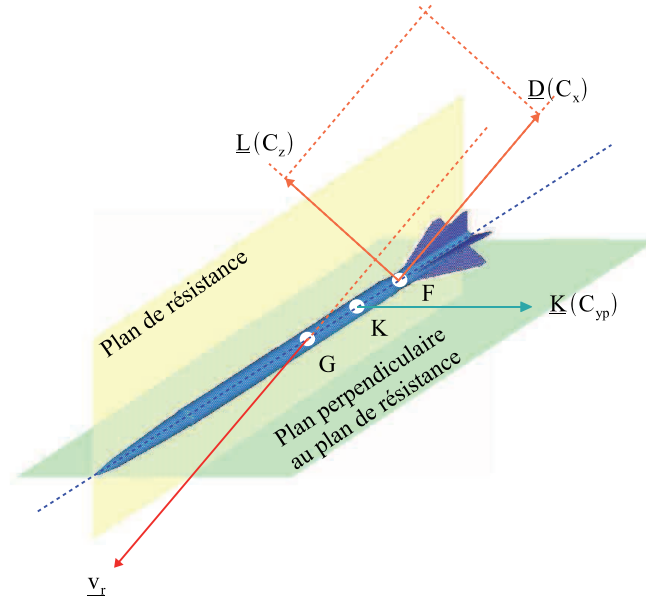


FIGURE 3.7 – Forces aérodynamiques s'appliquant au projectile

– *La force de portance*

Si le projectile vole avec un angle d'obliquité non nul (angle formé par les vecteurs vitesse relative $\underline{v}_r$ et $\underline{c}$), la répartition de la pression autour du projectile induit une force perpendiculaire au vecteur $\underline{t}$ et située dans le plan de résistance. Elle s'applique aussi au centre de poussée aérodynamique (point

F). Son expression est :

$$\begin{aligned}
 \underline{L} &= qSC_z \underline{t} \wedge \frac{\underline{c}}{\sin \delta} \wedge \underline{t} = qS \frac{C_z}{\sin \delta} \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\rho S}{2} \frac{C_z}{\sin \delta} \begin{pmatrix} l_{11}(v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - l_{12}v_{ri}v_{rj} - l_{13}v_{ri}v_{rk} \\ l_{12}(v_{ri}^2 + v_{rk}^2) - l_{11}v_{ri}v_{rj} - l_{13}v_{rj}v_{rk} \\ l_{13}(v_{ri}^2 + v_{rj}^2) - l_{11}v_{ri}v_{rk} - l_{12}v_{rj}v_{rk} \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

– *La force de Magnus*

Lorsque le projectile tourne sur lui-même (vitesse de rotation de *roulis*) et se déplace avec un angle d'obliquité non nul, les forces de frottement créent un écoulement du fluide (air) asymétrique autour du projectile. Cette asymétrie induit une force transversale appelée force de *Magnus* qui s'applique au point K et qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \underline{K} &= qSC_{yp} \frac{\omega_c D}{v_r} \frac{\underline{c}}{\sin \delta} \wedge \underline{t} = qS \frac{C_{yp}}{\sin \delta} \frac{\omega_c D}{v_r} \begin{pmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\rho S}{2} \omega_c D \frac{C_{yp}}{\sin \delta} \begin{pmatrix} l_{12}v_{rk} - l_{13}v_{rj} \\ l_{13}v_{ri} - l_{11}v_{rk} \\ l_{11}v_{rj} - l_{12}v_{ri} \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

3.2.1.2 La force de pesanteur

Nous donnons ici l'expression de la pesanteur locale [30] (la démonstration est présentée en annexe D) qui s'applique au centre de gravité G :

$$\underline{g} = -g_0 \begin{pmatrix} \frac{x}{R_T} \\ 1 - \frac{2y}{R_T} \\ \frac{z}{R_T} \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.10)$$

Dans un souci de rigueur, il faut également prendre en compte la variation de g_0 avec la latitude, suivant la formule :

$$g_0 = 9.80665 (1 - 0.0026 \cos(2 \text{ Lat})) \quad (3.11)$$

où la valeur 9.80665 est définie à la latitude 45° et à altitude nulle.

3.2.1.3 La force de Coriolis

L'accélération de Coriolis dépend de la latitude du lieu et de la direction du tir. La force de Coriolis s'applique au centre de gravité G et s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{Cor} &= 2\underline{v_{abs}} \wedge \underline{\Omega_T} = 2 \begin{pmatrix} v_{abs\ i} \\ v_{abs\ j} \\ v_{abs\ k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega_i \\ \Omega_j \\ \Omega_k \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_{abs\ j}\Omega_k - v_{abs\ k}\Omega_j \\ -v_{abs\ i}\Omega_k + v_{abs\ k}\Omega_i \\ v_{abs\ i}\Omega_j - v_{abs\ j}\Omega_i \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \\ &= 2 \begin{pmatrix} v_{abs\ j}\Omega_T \cos(Lat) \sin(AZ) - v_{abs\ k}\Omega_T \sin(Lat) \\ -v_{abs\ i}\Omega_T \cos(Lat) \sin(AZ) + v_{abs\ k}\Omega_T \cos(Lat) \cos(AZ) \\ v_{abs\ i}\Omega_T \sin(Lat) - v_{abs\ j}\Omega_T \cos(Lat) \cos(AZ) \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Dans le cas du tir de projectile de type flèche (tir tendu, faible portée), la force de Coriolis a un effet négligeable sur la portée. En effet, l'altitude prise par le projectile est très faible et nous pouvons supposer que :

$$\underline{v_{abs}} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.13)$$

L'accélération de Coriolis dans le repère canon vaut :

$$\begin{aligned} \underline{Cor} &= 2\underline{v_{abs}} \wedge \underline{\Omega_T} = 2 \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega_T \cos(Lat) \cos(AZ) \\ \Omega_T \sin(Lat) \\ \Omega_T \cos(Lat) \sin(AZ) \end{pmatrix} \\ &= 2\Omega_T V \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(Lat) \sin(AZ) \\ \sin(Lat) \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.14) \end{aligned}$$

L'effet de l'accélération de Coriolis sur la trajectoire est donné par :

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} = 2\Omega_T V \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(Lat) \sin(AZ) \\ \sin(Lat) \end{pmatrix}_{(i, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.15)$$

Son influence exprimée dans le repère canon vaut :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \Omega_T V t^2 \begin{pmatrix} \cos(Lat) \sin(AZ) \\ \sin(Lat) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Autrement dit, l'accélération de Coriolis n'a pas d'effet sur x , c'est-à-dire la portée, dans le cas d'un tir tendu. A une altitude donnée, l'effet sur la déviation (c'est-à-dire sur z) est indépendant de l'azimut du tir. Enfin, si l'on s'approche de l'équateur (cas où la latitude décroît), l'effet Coriolis sur la déviation diminue, tandis que celui sur l'altitude augmente (à condition que l'azimut ne soit pas nul).

Dans le cas d'un tir d'artillerie (*tir courbe, longue portée*), l'effet Coriolis a un impact non négligeable sur la portée du tir, en plus de celui sur la déviation. A titre d'exemple, le tableau 3.2 montre l'impact de l'accélération de Coriolis sur la portée et la déviation du tir, selon que l'on tire vers le Nord, vers le Sud, vers l'Ouest ou vers l'Est. Les différences DX (portée) et DZ (déviations) indiquées sont faites par rapport à un tir dans les mêmes conditions **SANS** prise en compte de l'accélération de Coriolis. La portée du tir est d'environ 24 km, pour une hausse de 45° .

Conditions de tir			Effet Coriolis (m)	
Lat	η	Direction du tir	DX	DZ
45	0	Sud $\rightarrow$ Nord	-0.30	55.74
45	180	Nord $\rightarrow$ Sud	-5.43	107.73
45	90	Ouest $\rightarrow$ est	38.3	83.1
45	270	Est $\rightarrow$ Ouest	-44.2	80.6

TABLE 3.2 – Effet Coriolis sur la portée et la déviation d'un projectile gyrostabilisé en fonction des conditions de tir (en mètres)

Ces résultats illustrent la nécessité de la prise en compte de l'accélération de Coriolis dans les tables de tir pour ce type de projectiles.

3.2.2 Les moments aérodynamiques

Comme pour les forces, nous commençons par illustrer les moments aérodynamiques s'exerçant sur le projectile (figure 3.8). Nous rappelons que les moments sont projetés dans le repère $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$.

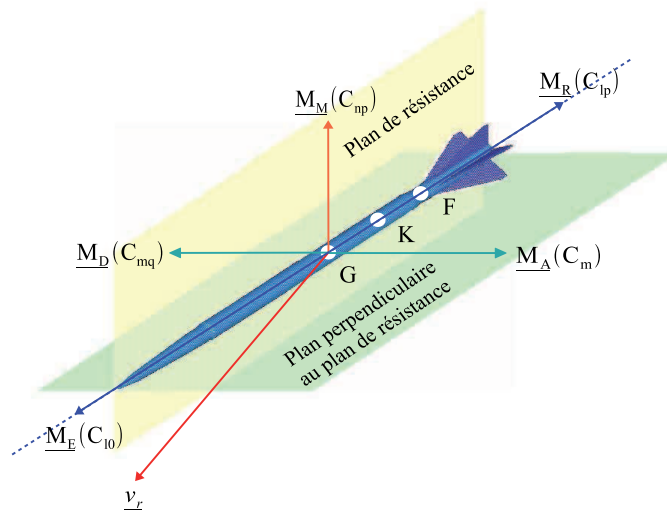


FIGURE 3.8 – Moments aérodynamiques s'appliquant au projectile

– Le moment d'entraînement en roulis

Comme son nom l'indique, le moment d'entraînement en roulis est responsable de la rotation du projectile autour de son axe longitudinal. Ce moment n'est pas induit pour les mêmes raisons sur les projectiles empennés que sur les projectiles gyrostabilisés. Les projectiles empennés sont stables *statiquement*, et n'ont donc pas besoin de tourner pour être stables en vol en théorie. Leur rotation est volontairement entraînée grâce à la mise en place d'ailettes biseautées ou braquées sur le corps du projectile afin de compenser d'éventuelles imperfections géométriques. En revanche, les projectiles gyrostabilisés sont stables *gyroscopiquement*, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de les faire tourner pour ob-

tenir un comportement stable en vol, et ce dès le début du vol. Pour cela, les tubes destinés à tirer des engins gyrostabilisés sont *rayés*. Il est également important de préciser qu'il est possible de tirer des flèches de moyen calibre (25-30 mm) dans des tubes rayés, leur donnant ainsi une rotation initiale à l'intérieur du tube. Cette pratique a lieu dans les cas où des projectiles gyrostabilisés et empenés sont tirés successivement, ce qui permet de garder le même tube pour tirer chacun des projectiles. L'expression du moment d'entraînement en roulis est la suivante :

$$\underline{M_E} = qSDC_{l0}\underline{c} = qSDC_{l0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \quad (3.17)$$

– *Le moment d'amortissement en roulis*

Ce moment s'oppose au moment d'entraînement en roulis par effet de la résistance de l'air sur la face plane de l'ailette en rotation. Après une montée rapide de la vitesse de roulis du projectile, le moment d'amortissement en roulis stabilise la vitesse de roulis quand l'équilibre est atteint. Son expression est la suivante :

$$\underline{M_R} = -qSDC_{lp} \frac{\omega_c D}{v_r} \underline{c} = -qSDC_{lp} \frac{\omega_c D}{v_r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \quad (3.18)$$

– *Le moment de tangage*

Le moment de tangage induit un mouvement de pendulation du projectile et influence directement *sa stabilité statique*, selon qu'il a un effet stabilisateur ou déstabilisateur indépendamment de toute autre forme de compensation (roulis notamment). Le moment est stabilisateur si le centre de poussée aérodynamique F est situé derrière le centre de gravité du projectile, (cas des projectiles empenés) et déstabilisateur si le centre de poussée aérodynamique F se situe devant le centre de gravité (cas des projectiles gyrostabilisés). Ceci explique donc la nécessité de compenser l'instabilité *statique* des projectiles gyrostabilisés par une stabilisation *gyroscopique*. Pour être efficace, cette rotation doit dépasser un seuil défini par le critère de stabilité gyroscopique.

Le moment de tangage s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
 \underline{M}_A &= qSDC_m \left(\underline{t} \wedge \frac{\underline{c}}{\sin \delta} \right) = qSD \frac{C_m}{\sin \delta} \begin{pmatrix} t_c \\ t_a \\ t_b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\rho S}{2} v_r D \frac{C_m}{\sin \delta} \begin{pmatrix} 0 \\ l_{31}v_{ri} + l_{32}v_{rj} + l_{33}v_{rk} \\ l_{21}v_{ri} + l_{22}v_{rj} + l_{23}v_{rk} \end{pmatrix}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

d'après l'expression de la matrice de passage du repère $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ vers $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ (annexe B).

– *Le moment d'amortissement en tangage*

Le moment d'amortissement en tangage atténue peu à peu l'amplitude de pendulation du projectile (diminution progressive de l'angle d'obliquité au cours du vol) générée par le moment de tangage. Contrairement au moment de tangage, le moment d'amortissement en tangage a un effet sensible sur la stabilité dynamique du projectile. C'est pourquoi, de manière générale, il est préférable d'avoir un coefficient C_{mq} assez grand pour obtenir un amortissement de la pendulation efficace et atteindre la stabilité dynamique rapidement. Il se formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \underline{M}_D &= -qSDC_{mq} \left(\underline{c} \wedge \dot{\underline{c}} \frac{D}{v_r} \right) = -qSDC_{mq} \frac{D}{v_r} \left(\underline{c} \wedge \underbrace{\left(\underline{\omega} \wedge \underline{c} \right)}_{\dot{\underline{c}}} \right) \\
 &= -\frac{\rho S}{2} D^2 C_{mq} v_r \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_a \\ \omega_b \end{pmatrix}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

où $\underline{\omega}$ est le vecteur rotation instantanée du projectile.

– *Le moment de Magnus*

La force transversale de Magnus engendre un moment qui induit un mouvement dans une direction perpendiculaire au plan de résistance du projectile. Son effet est très sensible sur la stabilité dynamique des projectiles lorsque le roulis est élevé. Cela se traduit sur la trajectoire par un amortissement insuffisant de

l'obliquité du projectile, créant alors une obliquité résiduelle (phénomène de *remontée d'obliquité*). Son expression est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \underline{M_M} &= -qSDC_{np} \frac{\omega_c D}{v_r} \underline{c} \wedge \left(\frac{\underline{c}}{\sin \delta} \wedge \underline{t} \right) \\
 &= -qSD^2 \frac{C_{np}}{\sin \delta} \frac{\omega_c}{v_r} \begin{pmatrix} 0 \\ -t_a \\ -t_b \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\rho S}{2} D^2 \omega_c \frac{C_{np}}{\sin \delta} \begin{pmatrix} 0 \\ l_{21}v_{ri} + l_{22}v_{rj} + l_{23}v_{rk} \\ l_{31}v_{ri} + l_{32}v_{rj} + l_{33}v_{rk} \end{pmatrix}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

3.3 Mise en équations du vol d'un projectile

3.3.1 Principe fondamental de la dynamique

Pour commencer, appliquons le principe fondamental de la dynamique (noté PFD).

Pour un projectile de centre de gravité G de masse m constante soumis à un champ de forces $\underline{F}$ dans un repère galiléen (*absolu*), nous avons :

$$m \frac{dv_G}{dt} = \underline{F} \quad (3.22)$$

Afin de projeter le PFD dans le repère (*relatif*) $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ lié au canon, il faut faire un changement de repère (figure 3.9) pour obtenir la vitesse absolue du projectile $\underline{v_{abs_G}}$.

Sachant que la position du centre de gravité du projectile dans le repère canon s'exprime par :

$$\underline{OG} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \quad (3.23)$$

Sa vitesse s'écrit alors :

$$\underline{v_{abs_G}} = \frac{d\underline{OG}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{x\frac{d\underline{i}}{dt} + y\frac{d\underline{j}}{dt} + z\frac{d\underline{k}}{dt}}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \frac{d\underline{TO}}{dt} \quad (3.24)$$

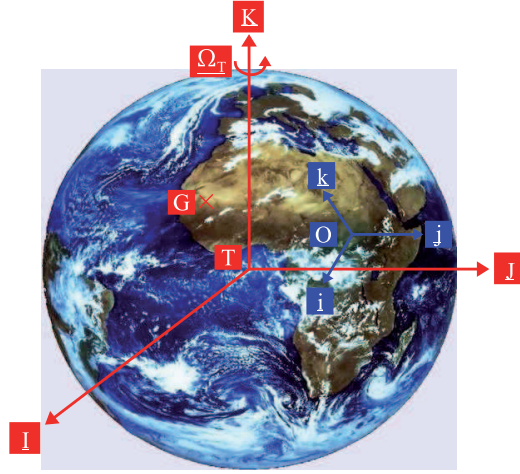


FIGURE 3.9 – Repère absolu et repère relatif
 $(\Omega_T$ le vecteur rotation de la Terre, T le centre de la Terre, O l'origine du repère canon et G la position du centre de gravité du projectile)
 $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est le repère galiléen, et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère lié au canon

On écrit de manière plus générale :

$$\underline{v_{abs G}} = \underline{v_{r G}} + \underline{v_{e G}} = \underline{v_{r G}} + \Omega_T \wedge \underline{TG} \quad (3.25)$$

A partir de l'équation de la vitesse absolue $\underline{v_{abs G}}$ (3.24) du projectile, on calcule l'accélération absolue $\underline{\Gamma_{abs G}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma_{abs G}} &= \frac{d^2 \underline{TG}}{dt^2} = \underbrace{\frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} + \frac{d^2 \underline{TO}}{dt^2}}_{\text{accélération d'entraînement}} \\ &+ 2 \underbrace{\left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)}_{\text{accélération de Coriolis}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ou encore :

$$\underline{\Gamma_{abs G}} = \underline{\Gamma_{r G}} + 2\Omega_T \wedge \underline{v_{abs G}} + \Omega_T \wedge (\Omega_T \wedge \underline{TG}) \quad (3.27)$$

Finalement le PFD appliqué au centre de gravité G du projectile et exprimé dans le repère $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ lié au canon s'écrit :

$$\underline{\Gamma}_{rG} = \frac{\sum \underline{F}}{m} - \underbrace{-2\Omega_T \wedge \underline{v}_{absG}}_{\underline{Cor}} + \underbrace{\underline{g}' - \Omega_T \wedge (\Omega_T \wedge \underline{TG})}_{\underline{g}} \quad (3.28)$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{r_i} \\ \dot{v}_{r_j} \\ \dot{v}_{r_k} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} (\underline{D} + \underline{L} + \underline{K}) + \underline{Cor} + \underline{g} \quad (3.29)$$

3.3.2 Théorème du moment cinétique

Désormais nous faisons le bilan des moments appliqués sur le projectile. Dans le repère Galiléen $(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$ nous avons la relation suivante :

$$\sum \underline{M} = \frac{d\underline{H}_{(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}}{dt} \quad (3.30)$$

où $\underline{H}_{(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}$ est le moment cinétique du projectile exprimé dans le repère Galiléen. La dérivée du moment d'inertie est reliée au vecteur rotation du repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ par rapport au repère Galiléen $(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$:

$$\frac{d\underline{H}_{(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}}{dt} = \frac{d}{dt} (J \cdot \underline{\omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}) \quad (3.31)$$

où J est la matrice d'inertie du projectile.

Or, le vecteur rotation du repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ par rapport au repère Galiléen $(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$ est donnée par :

$$\underline{\omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})} = \underline{\omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})/(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} + \underbrace{\underline{\omega}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}}_{\text{Vecteur rotation de la Terre } \underline{\Omega}_T} \quad (3.32)$$

La vitesse de rotation de la Terre étant de l'ordre de $10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ nous pouvons négliger le terme $\underline{\omega}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}$ de l'équation (3.32) devant la vitesse de rotation

$\underline{\omega}_{(c,a,b)/(i,j,k)}$ du projectile, et l'expression du théorème du moment cinétique devient :

$$\sum \underline{M} = \frac{d\underline{H}_{(I,J,K)}}{dt} \approx \frac{d\underline{H}_{(i,j,k)}}{dt} \quad (3.33)$$

Nous pouvons donc écrire que les expressions des dérivées du moment cinétique dans le référentiel canon (i, j, k) et dans le repère (c, a, b) sont reliées par la formule de changement de repère :

$$\frac{d\underline{H}_{(i,j,k)}}{dt} = \frac{d\underline{H}_{(c,a,b)}}{dt} + \underline{\omega}_{(c,a,b)/(i,j,k)} \wedge \underline{H}_{(c,a,b)} \quad (3.34)$$

Le moment cinétique dans le repère (c, a, b) est donné par :

$$\underline{H}_{(c,a,b)} = J \cdot \underline{\omega}_{(c,a,b)/(i,j,k)} \quad (3.35)$$

Le projectile a une symétrie de révolution et n'est pas balourdé, donc la matrice d'inertie J s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}_{(c,a,b)} \quad (3.36)$$

I_1 désigne l'inertie longitudinale, et I_2 l'inertie transversale.

Nous obtenons donc :

$$\underline{H}_{(c,a,b)} = J \cdot \underline{\omega}_{(c,a,b)/(i,j,k)} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_c \\ I_2 \omega_a \\ I_2 \omega_b \end{pmatrix}_{(c,a,b)} \quad (3.37)$$

et par conséquent :

$$\frac{d\underline{H}_{(c,a,b)}}{dt} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_c \\ I_2 \dot{\omega}_a \\ I_2 \dot{\omega}_b \end{pmatrix}_{(c,a,b)} \quad (3.38)$$

Finalement le théorème du moment cinétique exprimé dans $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ donne :

$$\begin{aligned} \sum \underline{M} &= \frac{d\underline{H}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})}}{dt} + \underline{\omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \wedge \underline{H}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \\ \Leftrightarrow \sum \underline{M} &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_c \\ I_2 \dot{\omega}_a + \omega_c \omega_b (I_1 - I_2) \\ I_2 \dot{\omega}_b + \omega_c \omega_a (I_2 - I_1) \end{pmatrix}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Soit finalement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_c \\ I_2 \dot{\omega}_a + \omega_c \omega_b (I_1 - I_2) \\ I_2 \dot{\omega}_b + \omega_c \omega_a (I_2 - I_1) \end{pmatrix}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})} = \underline{M}_E + \underline{M}_R + \underline{M}_A + \underline{M}_D + \underline{M}_M} \quad (3.40)$$

3.3.3 Relations cinématiques

Comme nous travaillons avec le quaternion, il est nécessaire d'écrire les relations cinématiques liant les éléments du quaternion et les vitesses de rotation. D'après [53], nous avons :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} \omega_c \\ \omega_a \\ \omega_b \end{pmatrix}} \quad (3.41)$$

Où :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

3.3.4 Equations différentielles donnant les positions

Enfin, pour compléter la mise en équation, il faut ajouter les équations différentielles donnant les positions du centre de gravité du projectile (intégration des

vitesse absolue du projectile) :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{abs\,i} \\ v_{abs\,j} \\ v_{abs\,k} \end{pmatrix}} \quad (3.43)$$

3.3.5 Bilan de la mise en équations

Finalement la mise en équations aboutit à un système de treize équations différentielles que l'on appellera par la suite modèle balistique à six degrés de liberté. Les six degrés de liberté sont les trois positions et les trois rotations. Ce système est composé de :

- 3 équations (relation (3.29)) provenant du principe fondamental de la dynamique où $v_{abs\,i}$, $v_{abs\,j}$ et $v_{abs\,k}$ sont les composantes de la vitesse absolue exprimée dans le repère canon,
- 3 équations (relation (3.40)) provenant du théorème du moment cinétique où ω_c , ω_a et ω_b sont les composantes de la vitesse de rotation exprimée dans le repère projectile,
- 4 équations cinématiques (relation (3.41)) liant les éléments du quaternion et les vitesses de rotation où λ_0 , λ_1 , λ_2 et λ_3 sont les éléments du quaternion représentatif de la rotation du projectile,
- 3 équations différentielles (relation (3.43)) donnant l'évolution de la position du centre de gravité du projectile exprimée dans le repère canon.

De manière générale la mise en équation du vol d'un projectile peut se mettre sous une forme simplifiée :

$$\underline{\dot{U}} = f(\underline{U}(t), \underline{C}, t) \quad (3.44)$$

où $\underline{U} = [v_{abs\,i}, v_{abs\,j}, v_{abs\,k}, \omega_c, \omega_a, \omega_b, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x, y, z]^T$ est le vecteur composé des paramètres d'état (dont certaines composantes sont éventuellement mesurables) et $\underline{C} = [C_x, C_z, C_{yp}, C_{l0}, C_{lp}, C_m, C_{np}, C_{mq}]^T$ est le vecteur composé des coefficients aérodynamiques. La formulation détaillée du système (3.44) est donnée en annexe E.

3.4 Intégration numérique des équations du vol

Même si la mise en équations est générale, dans notre étude nous nous intéressons principalement au vol d'un projectile de type flèche.

3.4.1 Simplifications de la modélisation

Dans notre étude portant sur un projectile flèche de calibre 120 millimètres (des précisions sont données en annexe A), nous pouvons procéder à quelques simplifications dans la formulation du modèle balistique.

Tout d'abord, les phénomènes d'aéroélasticité [37] pouvant perturber le vol du projectile sont négligés. Le projectile est donc supposé comme indéformable et est modélisé par un solide rigide.

La première simplification consiste à supposer les coefficients aérodynamiques du projectile comme constants. En effet, le nombre de Mach peut être considéré comme constant étant donné la faible perte de vitesse du projectile pendant le vol.

Nous supposons qu'il n'y a pas de vent, et donc $\underline{v}_r = \underline{v}_{abs}$. De plus la trajectoire de la flèche décrit un tir tendu, ce qui signifie que le projectile prend peu d'altitude pendant le vol. C'est pourquoi nous pouvons d'une part supposer la densité de l'air et la température constantes. Cela permet de considérer d'autre part de petits angles d'obliquité δ , nous permettant alors d'approcher $\sin \delta$ par δ . Par conséquent, nous pouvons linéariser l'expression de certains coefficients aérodynamiques (forces de portance et de Magnus, moments de tangage et de Magnus).

Le coefficient de portance devient alors :

$$C_z = \frac{\partial C_z}{\partial \delta} \delta = C_{z\delta} \delta \quad (3.45)$$

Et par conséquent la force de portance qui s'écrivait :

$$\underline{L} = \frac{\rho S}{2} \frac{C_z}{\sin \delta} \begin{pmatrix} l_{11} (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - l_{12} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{ri} v_{rk} \\ l_{12} (v_{ri}^2 + v_{rk}^2) - l_{11} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{rj} v_{rk} \\ l_{13} (v_{ri}^2 + v_{rj}^2) - l_{11} v_{ri} v_{rk} - l_{12} v_{rj} v_{rk} \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.46)$$

devient :

$$= \frac{\rho S}{2} C_{z\delta} \begin{pmatrix} l_{11} (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - l_{12} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{ri} v_{rk} \\ l_{12} (v_{ri}^2 + v_{rk}^2) - l_{11} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{rj} v_{rk} \\ l_{13} (v_{ri}^2 + v_{rj}^2) - l_{11} v_{ri} v_{rk} - l_{12} v_{rj} v_{rk} \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (3.47)$$

La simplification s'applique aussi à d'autres coefficients aérodynamiques. Ainsi nous avons :

– pour la force de Magnus :

$$C_{yp} = \frac{\partial C_{yp}}{\partial \delta} \delta = C_{yp\delta} \delta \quad (3.48)$$

– pour le moment de tangage :

$$C_m = \frac{\partial C_m}{\partial \delta} \delta = C_{m\delta} \delta \quad (3.49)$$

– pour le moment de Magnus :

$$C_{np} = \frac{\partial C_{np}}{\partial \delta} \delta = C_{np\delta} \delta \quad (3.50)$$

En tenant compte de ces simplifications dans le modèle à six degrés de liberté, nous intégrons numériquement les équations du vol dans le but de générer des jeux de "mesures fictives" qui seront utilisés en entrée de la procédure d'identification.

3.4.2 Développement d'un outil d'intégration numérique des équations de la mécanique du vol

Actuellement, un code de mécanique du vol, basé sur un modèle à six degrés de liberté, développé par l'Institut Franco-Allemand de Saint-Louis (ISL) est mis à notre disposition par la société Nexter Munitions. Ce code a des tests de stabilité empêchant par exemple de générer un vol en n'activant qu'un seul coefficient. Or, comme le développement de notre procédure d'identification se fait pas à pas, en activant progressivement les équations de la mécanique du vol, nous avons eu besoin de développer un outil maléable afin de générer des données simulées optimales, qui soient adaptables au développement progressif de la méthode. C'est pourquoi nous

avons développé notre propre outil d'intégration numérique des équations du vol. Nous utilisons toutefois le code ISL comme élément de comparaison et de validation.

La vitesse de roulis élevée d'un projectile flèche implique une évolution rapide des angles et des éléments du quaternion, nous avons donc testé plusieurs schémas d'intégration des équations de la mécanique du vol afin de déterminer celui qui est le plus adapté. Les schémas numériques utilisés sont :

- le schéma d'Euler explicite (à un pas),
- la méthode d'Adams-Bashforth ([1], [8]), schéma explicite d'ordre 2 (à deux pas),
- le schéma de Runge-Kutta implicite (ordre 4) et explicite (ordre 7) ([58]).

Les figures 3.10 à 3.14 présentent les résultats obtenus grâce aux différents schémas d'intégration testés. Ils sont comparés aux résultats obtenus par le code de l'ISL. Les courbes sont adimensionnalisées et certaines graduations sur les axes n'apparaissent pas pour des raisons de confidentialité.

Le vol test est un cas avec remontée d'obliquité en fin de vol.

Il ressort de cette étude que les résultats obtenus avec la méthode d'Euler (pour un pas de temps de 10^{-6} secondes) sont satisfaisants en termes de vitesses, positions, vitesse de roulis. Toutefois pour l'angle d'obliquité la méthode engendre une erreur de 19% par rapport aux résultats obtenus avec le code de l'ISL. Dans le cas du vol test (instable), la divergence du schéma d'Euler le rend invalide. Le schéma multipas (Adams-Bashforth) multipas d'ordre 2 ($dt = 7.10^{-5}$ secondes) et les schémas de Runge-Kutta à l'ordre 4 ($dt = 5.10^{-4}$ secondes) et 7 ($dt = 10^{-3}$ secondes) donnent des résultats très précis (0% d'écart sur l'angle d'obliquité). Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 7 (explicite) permet l'emploi du plus grand pas de temps. Ce schéma sera donc utilisé par la suite pour simuler les vols et générer des jeux de "mesures fictives" qui serviront de données d'entrée de la procédure d'identification.

Comme nous le verrons par la suite, le développement de la procédure d'identification s'est fait pas à pas en ajoutant progressivement les équations de la mécanique du vol, c'est-à-dire en activant progressivement les coefficients aérodynamiques intervenant dans le modèle balistique. Nous identifierons donc successivement trois, quatre, six puis sept coefficients aérodynamiques. Le tableau 3.3 donne les pas de temps maximaux autorisés pour chaque cas d'identification et pour chaque schéma

d'intégration testé afin d'obtenir une précision satisfaisante. Dans la première ligne du tableau dt désigne le pas de temps, EE désigne la méthode d'Euler Explicite, MP2 désigne le schéma d'intégration multipas d'ordre 2, et RK4 et RK7 désignent respectivement le schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre 4 et d'ordre 7.

Cas d'identification \ Schéma	EE	MP2	RK4	RK7
C_x, C_{lp}, C_{l0}	10^{-3}	10^{-2}	3.10^{-3}	10^{-2}
$C_x, C_{lp}, C_{l0}, C_{mq}$	10^{-6}	10^{-5}	3.10^{-4}	5.10^{-3}
$C_x, C_{lp}, C_{l0}, C_{mq}, C_{m\delta}, C_{np\delta}$	10^{-6}	7.10^{-5}	5.10^{-4}	2.10^{-3}
$C_x, C_{lp}, C_{l0}, C_{mq}, C_{m\delta}, C_{np\delta}, C_{z\delta}$	10^{-6}	7.10^{-5}	5.10^{-4}	2.10^{-3}

TABLE 3.3 – Pas de temps dt maximal autorisé (en secondes)

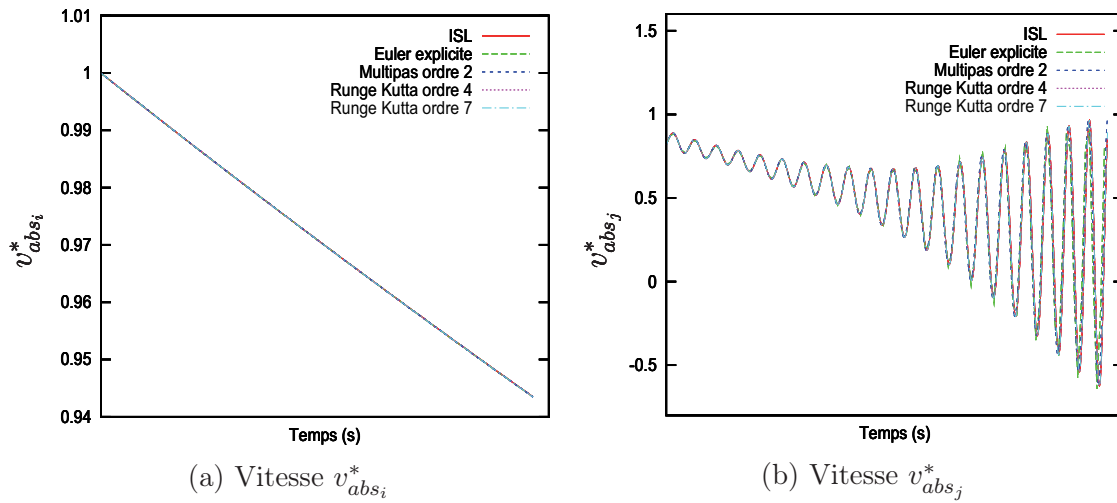
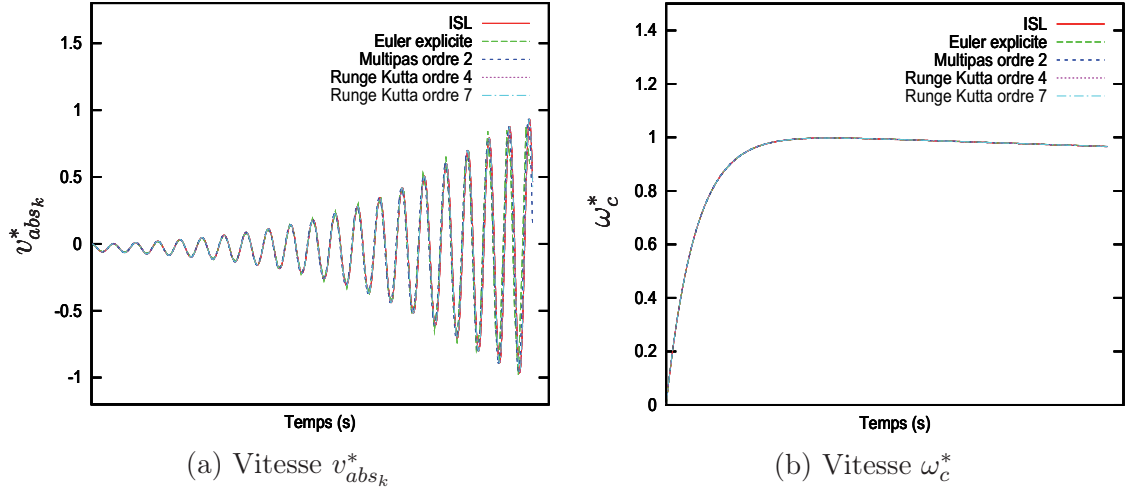
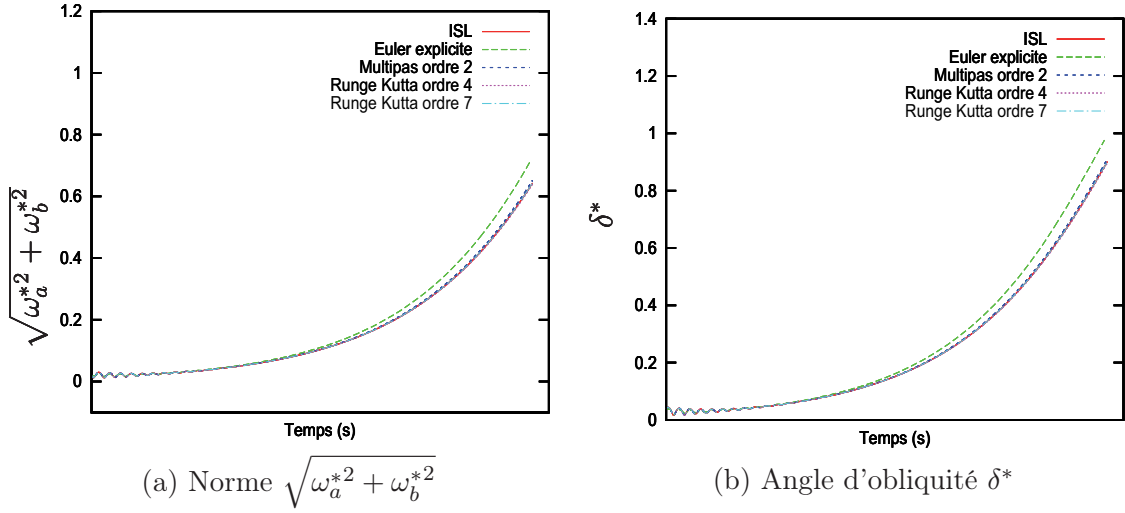
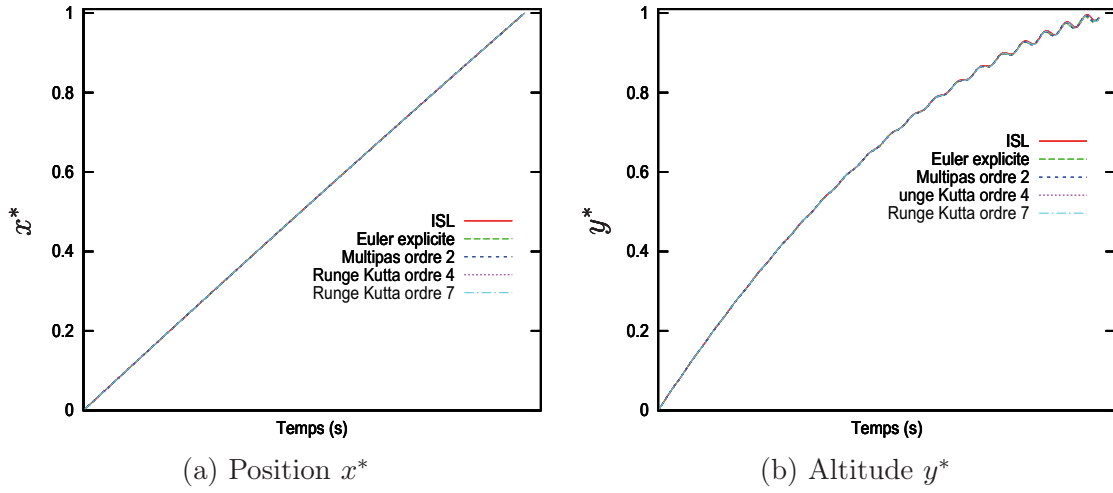
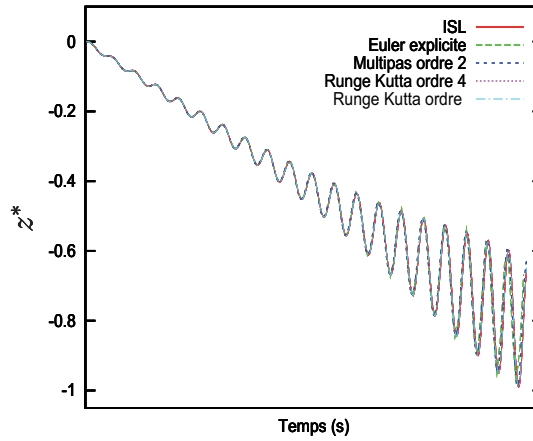


FIGURE 3.10 – Composantes de la vitesse $v_{abs_i}^*$ et $v_{abs_j}^*$

FIGURE 3.11 – Composantes de la vitesse $v_{abs_k}^*$ et de la vitesse angulaire ω_c^* FIGURE 3.12 – Norme $\sqrt{\omega_a^{*2} + \omega_b^{*2}}$ et angle d'obliquité δ^*

FIGURE 3.13 – Position x^* et altitude y^* FIGURE 3.14 – Déviation z^*

En réalité, nous verrons au chapitre 4 que nous ne disposons de mesures que des paramètres d'état vitesse de déplacement v_{abs_i} et vitesse de roulis ω_c . Nous allons donc mener une étude de sensibilité des paramètres d'état par rapport aux coefficients aérodynamiques afin de déterminer s'il est possible de définir un modèle réduit ne prenant en compte que ces deux paramètres d'état, afin de pouvoir appliquer notre technique d'identification à un tir déjà instrumenté.

Cette étude a pour but de mettre en évidence le rôle de chaque coefficient aérodynamique dans le comportement en vol du projectile. Pour cela, les coefficients aérodynamiques sont tour à tour multipliés par dix. Le tableau 3.4 indique, pour

chaque coefficient aérodynamique, quel(s) paramètre(s) d'état est (sont) influencé(s).

Coefficients Paramètres	C_x	C_z	$C_{yp\delta}$	C_{lp}	C_{l0}	$C_{m\delta}$	C_{mq}	$C_{np\delta}$
v_i	X							
x	X							
ω_c	X			X	X			
y	X	X			X		X	
v_j	X	X			X	X	X	X
ω_a		X		X	X	X	X	X
ω_b		X		X	X	X	X	X
v_k	X	X		X	X	X	X	X
z	X	X		X	X	X	X	X

TABLE 3.4 – Influence des coefficients aérodynamiques sur les paramètres du vol (X indique une influence)

Au terme de cette étude de sensibilité pour notre projectile flèche de référence, il est mis en évidence que les paramètres d'état ne sont pas tous influencés par tous les coefficients aérodynamiques (figure 3.15). Nous pouvons en effet remarquer dans le tableau 3.4 qu'aucun paramètre d'état n'est sensible à une variation du coefficient aérodynamique C_{yp} (force de Magnus). Il sera donc impossible d'identifier ce coefficient.

De plus, le paramètre de vitesse v_{abs_i} et le paramètre de vitesse de roulis ω_c ne sont influencés respectivement que par le coefficient C_x (force de traînée) (figure 3.16) et les coefficients C_{lp} et C_{l0} qui interviennent dans les moments d'entraînement et d'amortissement en roulis (figure 3.17). Ces résultats sont confirmés par les tableaux 3.5 à 3.8 indiquant le pourcentage d'erreur (calculé au moyen de la formule 3.51) entre un vol où les coefficients aérodynamiques sont initialisés à leur valeur de référence et un vol où ils sont modifiés.

$$erreur = \sqrt{\frac{\int_t \left(\underline{U}_{iref} - \underline{U}_i \right)^2 dt}{\int_t \underline{U}_{iref}^2 dt}} \quad (3.51)$$

	$C_{z\delta} \times 10$	$C_{yp\delta} \times 10$	$C_{m\delta} \times 10$	$C_{mq} \times 10$	$C_{np\delta} \times 10$
v_i	$1.57.10^{-5}$	$9.49.10^{-8}$	$1.59.10^{-6}$	$1.13.10^{-5}$	$12.21.10^{-4}$
ω_c	$6.50.10^{-6}$	$3.45.10^{-8}$	$6.58.10^{-7}$	$4.46.10^{-6}$	$3.38.10^{-6}$

TABLE 3.5 – Influence de certains coefficients sur les normes d'erreur (relation (3.51))
 v_i et ω_c

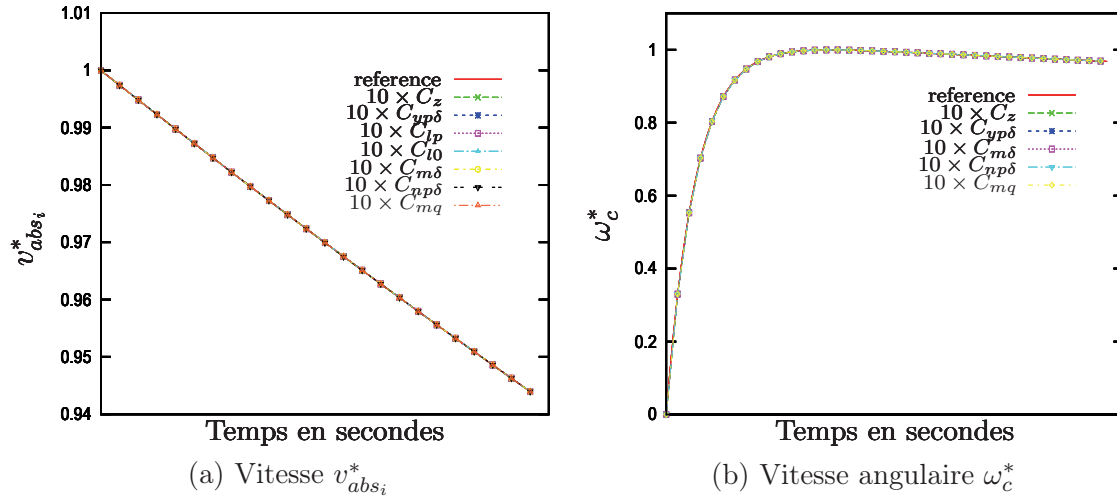
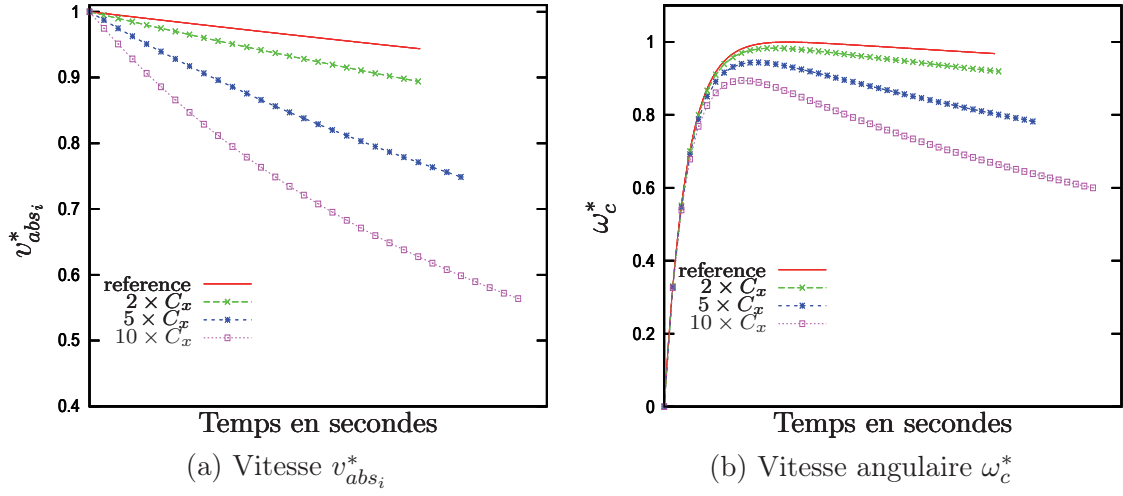


FIGURE 3.15 – Insensibilité de la vitesse $v_{abs_i}^*$ et de la vitesse angulaire ω_c^* par rapport à certains coefficients aérodynamiques

	$C_x \times 2$	$C_x \times 5$	$C_x \times 10$
v_i	3.12	11.16	21.40
ω_c	2.97	10.56	20.15

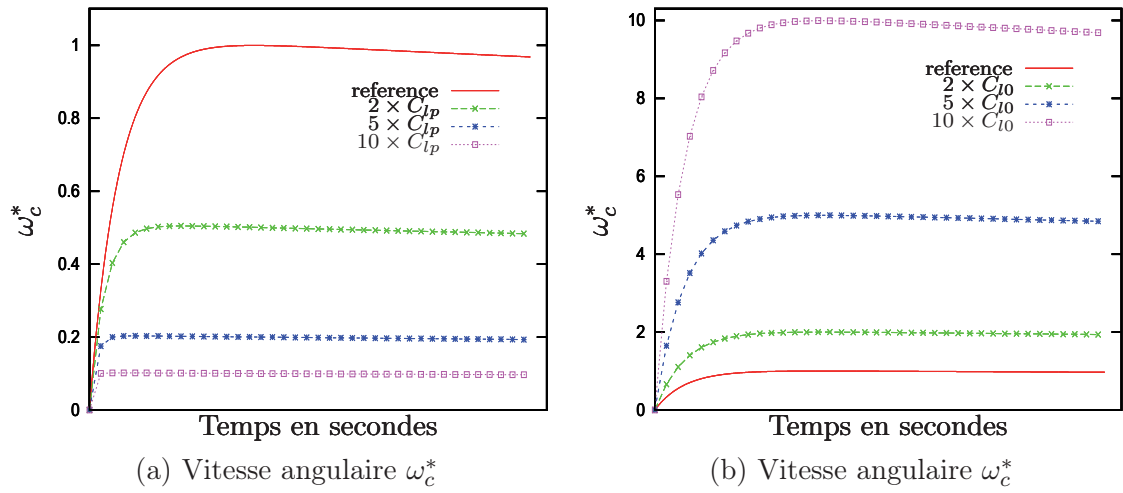
TABLE 3.6 – Influence de C_x sur v_i et ω_c

FIGURE 3.16 – Sensibilité de la vitesse $v_{abs_i}^*$ et de la vitesse angulaire ω_c^* par rapport à C_x

	$C_{lp} \times 2$	$C_{lp} \times 5$	$C_{lp} \times 10$
v_i	$1.79.10^{-8}$	$2.48.10^{-8}$	$2.64.10^{-8}$
ω_c	48.95	79.38	89.67

TABLE 3.7 – Influence de C_{lp} sur v_i et ω_c

	$C_{l0} \times 2$	$C_{l0} \times 5$	$C_{l0} \times 10$
v_i	$1.10.10^{-7}$	$4.3.10^{-5}$	$14.12.10^{-4}$
ω_c	100.00	400.00	899.59

TABLE 3.8 – Influence de C_{l0} sur v_i et ω_c FIGURE 3.17 – Sensibilité de la vitesse angulaire ω_c^* par rapport à C_{lp} et C_{l0}

Les équations v_i et ω_c peuvent donc être découplées du reste des équations de la mécanique du vol. Cela signifie qu'il est possible d'établir un modèle réduit ne

prenant en compte que ces deux équations (et les trois coefficients associés) afin de déterminer uniquement trois coefficients aérodynamiques. Ne tenant ainsi pas compte des autres forces et moments s'appliquant au projectile, le modèle balistique réduit s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{v}_{abs_i} = \frac{\rho S}{2m} (-v_r v_{ri} C_x) \\ \dot{\omega}_c = \frac{-\rho S}{2I_1} [D^2 C_{lp} \omega_c v_r - D C_{l0} v_r^2] \end{cases} \quad (3.52)$$

Ainsi, si nous reprenons la formulation généralisée de notre modèle balistique à six degrés de liberté, nous avons :

$$\underline{\dot{U}} = \underline{f}(\underline{U}(t), \underline{C}, t) \quad (3.53)$$

où $\underline{U} = [v_{abs_i}, \omega_c]^T$ est le vecteur composé des paramètres d'état mesurés du système et $\underline{C} = [C_x, C_{l0}, C_{lp}]^T$ est le vecteur composé des coefficients aérodynamiques recherchés. Par conséquent, afin de traiter le cas réel, nous adapterons notre problème d'optimisation aux mesures disponibles. Le modèle réduit où seuls interviennent la force de traînée, le moment d'entraînement en roulis et le moment d'amortissement en roulis sera donc utilisé lors de l'identification des trois coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} et C_{l0} d'abord menée sur des données simulées, puis sur des données réelles afin de valider notre méthode d'identification de coefficients aérodynamiques.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle balistique à six degré de liberté régissant le comportement d'un projectile en vol a été construit. Pour cela, nous avons d'abord présenté les différents angles et repères utilisés en balistique. Le quaternion a été adopté pour alléger l'écriture du modèle. Les forces et moments s'appliquant au projectile ont ensuite été explicités et illustrés, mettant en évidence les coefficients aérodynamiques qui nous intéressent. Plusieurs outils d'intégration numérique du modèle ont été développés avec différents schémas d'intégration (Euler explicite, méthode d'Adams-Bashforth explicite d'ordre 2, et méthode de Runge-Kutta d'ordres 4 et 7). Au terme de cette analyse, nous avons choisi d'adopter la méthode de Runge-Kutta Feldberg d'ordre 7 car elle apporte une précision satisfaisante et permet d'employer

un plus grand pas de temps (10^{-3} secondes) que les autres schémas d'intégration. Enfin nous avons étudié l'influence des coefficients aérodynamiques sur les paramètres d'état v_{abs_i} et ω_c et nous avons montré qu'il est possible de formuler un modèle réduit du comportement d'un projectile flèche, ne prenant en compte que ces deux paramètres et les trois coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} et C_{l0} , dans le but d'exploiter un jeu de données déjà disponibles uniquement composé de mesures des deux paramètres v_{abs_i} et ω_c .

Chapitre 4

Identification des coefficients aérodynamiques à partir de données issues d'un vol

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de la démarche que nous proposons pour identifier les coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol. Nous commençons par formuler un problème d'identification sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie, que nous résolvons au moyen de la méthode de Newton-Raphson. Nous présentons ensuite les résultats lors de tests à partir de données simulées générées grâce au code d'intégration numérique des équations du vol proposé au chapitre 3. Le développement numérique de notre technique d'identification est progressif : les équations de la mécanique du vol et les coefficients aérodynamiques sont activés successivement afin de valider la programmation pas à pas. C'est pourquoi nous présentons dans ce chapitre, différents cas d'identification des coefficients aérodynamiques.

L'état de l'art dans le domaine balistique mené au chapitre 2 nous permet de dire que la technique des moindres carrés est la mieux adaptée au problème que nous souhaitons traiter. En effet, nous cherchons à nous approcher au mieux des mesures sans intégrer la modélisation des incertitudes (bruit, modèle, erreur d'instrumentation)

dans notre système. Cela va nous permettre de formuler notre problème de manière simple et le rendre facilement adaptable à tout type de projectiles. Par ailleurs la technique de résolution de Newton-Raphson, particulièrement adaptée aux systèmes non linéaires, a montré sa robustesse dans la qualité des résultats obtenus dans les différentes études présentées précédemment ([39], [45]). C'est pourquoi notre choix s'est porté sur l'utilisation de cette technique pour résoudre notre problème d'identification des coefficients aérodynamiques à partir de mesures prises en vol.

4.1 Formulation de la méthode d'identification

Lors d'un vol, des mesures des paramètres d'état du projectile peuvent être enregistrées. L'idée de la technique d'identification est de chercher le jeu de coefficients aérodynamiques qui permet de s'approcher au mieux de ces mesures tout en vérifiant à chaque instant les treize équations de la mécanique du vol (chapitre 3 et annexe E). Pour cela un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie est introduit. Nous cherchons à minimiser la fonctionnelle J suivante :

$$\begin{cases} J(\underline{U}, \underline{C}) = \int_t (\underline{U} - \tilde{\underline{U}})^2 dt \\ \text{sous la contrainte : } \dot{\underline{U}} = \underline{f}(\underline{U}, \underline{C}, t) \quad \forall t \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\tilde{\underline{U}}$ est représenté les mesures des paramètres d'état, et

$\underline{C} = [C_x, C_{z\delta}, C_{yp\delta}, C_{lp}, C_{l0}, C_{m\delta}, C_{np\delta}, C_{mq}]^T$ est un vecteur composé des coefficients aérodynamiques à identifier.

Comme nous disposons de mesures discrètes, nous discrétisons le problème d'optimisation (4.1). A titre d'exemple, nous intégrons numériquement les équations de la mécanique du vol par le schéma d'Euler explicite d'ordre 1. Notre problème d'optimisation discrétisé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \min J(\underline{U}, \underline{C}) = \sum_{m=1}^n (\underline{U}^m - \tilde{\underline{U}}^m)^2 \Delta t \\ \text{sous les contraintes : } \underline{U}^{m+1} = \underline{U}^m + \underline{f}(\underline{U}^m, \underline{C}, t^m) \Delta t \quad \forall m \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket \end{cases} \quad (4.2)$$

Où n représente le nombre de mesures disponibles pour chaque paramètre d'état, et $\underline{U}^m = [v_{abs_i}^m, v_{abs_j}^m, v_{abs_k}^m, \omega_c^m, \omega_a^m, \omega_b^m, \lambda_0^m, \lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, x^m, y^m, z^m]^T$ est un vec-

teur composé des valeurs des paramètres d'état à l'instant t^m . Dans le but de nous affranchir de l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange [49] [63] qui alourdiraient de façon très sensible le système et le nombre de grandeurs à identifier, nous remplaçons les contraintes égalités par un terme de pénalisation dans la fonctionnelle. Le problème d'optimisation discrétisé se formule donc de la manière suivante :

$$\min J(\underline{U}, \underline{C}) = \sum_{m=1}^n \left(\underline{U}^m - \tilde{\underline{U}}^m \right)^2 \Delta t + \sum_{m=1}^n \left(-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + \underline{f}(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1}) \Delta t \right)^2 \Delta t \quad (4.3)$$

Nous pouvons l'écrire sous une forme généralisée, adaptable à chaque schéma d'intégration de la mécanique du vol :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{\Phi} = (\underline{U}^1, \underline{U}^2, \dots, \underline{U}^n, \underline{C}) \text{ tel que :} \\ J(\underline{\Phi}) \leq J(\underline{\Psi}) \quad \forall \underline{\Psi} \in \mathbb{R}^{13n+8} \text{ avec} \\ J(\underline{\Psi}) = \|\underline{\Psi} - \underline{\Phi}^d\|_M^2 + \|\underline{R}(\underline{\Psi})\|_E^2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Où $\underline{\Phi}^d$ est un vecteur composé de l'ensemble des mesures discrètes. L'originalité de la méthode réside dans le fait que le premier terme de la fonctionnelle J caractérise un écart entre les données mesurées et des quantités qui vont être calculées. Cela permet comme dans [18] et [21] de relaxer les mesures, qui peuvent être bruitées, et de recalculer l'état du système. Le second terme intervenant dans la fonctionnelle est un terme de pénalisation [68] qui prend en compte l'intégration numérique des équations de la mécanique du vol (équation 3.44). Il permet ainsi d'imposer aux paramètres d'état de vérifier au mieux les équations de la mécanique du vol écrites sous forme discrétisée. En reprenant notre exemple précédent de l'intégration numérique des équations de la mécanique du vol, lorsque l'on utilise le schéma d'Euler explicite le second terme de la fonctionnelle $\|\underline{R}(\underline{\Psi})\|_E^2$ s'écrit sous forme discrétisée :

$$\|\underline{R}(\underline{\Psi})\|_E^2 = \sum_{m=1}^n \left[-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + \underline{f}(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1}) \Delta t \right]^2 \Delta t \quad (4.5)$$

D'autres schémas d'intégration (annexes H et I) peuvent être utilisés comme par exemple les méthodes multipas d'Adams Bashforth explicites [1] , d'Adams Moulton implicites [61] [8], ou des méthodes de type B.D.F. (Backward Differentiation Formulas) implicites [61].

Le gradient de la fonctionnelle J par rapport à chacune des composantes du vecteur

$\underline{\Psi}$ est calculé de manière analytique. Il fournit un système d'équations non linéaires que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\partial J(\underline{U}^1, \underline{U}^2, \dots, \underline{U}^n, \underline{C})}{\partial \Psi_j} = 0 \quad \forall j \in \llbracket 1, \dots, 13n + 8 \rrbracket \quad (4.6)$$

Nous utilisons ensuite la méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce système de $13n + 8$ équations non linéaires et obtenir un élément optimal $\underline{\Phi}$. La méthode de Newton-Raphson utilise une linéarisation des équations non linéaires (équations 4.6), en les dérivant par rapport aux $13n + 8$ composantes du vecteur $\underline{\Psi}$. Nous obtenons, à chaque étape, un système matriciel linéaire de $13n + 8$ équations avec $13n + 8$ inconnues à résoudre dont la matrice est symétrique et est calculée de manière analytique. Enfin, le système matriciel est inversé numériquement par la méthode du pivot de Gauss ou en utilisant la décomposition de Choleski. Cela nous fournit les valeurs des incréments à ajouter aux variables du problème à chaque itération (composantes des vecteurs $\underline{U}$ et $\underline{C}$).

Le détail des calculs du gradient, des dérivées secondes de la fonctionnelle J et l'expression développée de notre technique d'identification sont donnés en annexe G. A titre d'exemple, les dérivées de la première équation de la mécanique du vol se trouvent en annexe F, et celles des composantes de la matrice de passage du repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ au repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ se trouvent en annexe B.

4.2 Identification des coefficients à partir de données simulées

Pour valider notre technique d'identification, nous réalisons tout d'abord l'identification des coefficients aérodynamiques à partir de données simulées. Cela nous permet de tester la robustesse de notre méthode avant de l'appliquer à des données réelles qui peuvent être incomplètes et/ou entachées de bruit. Les données sont des "mesures fictives" des paramètres d'état $v_{abs_i}, v_{abs_j}, v_{abs_k}, \omega_c, \omega_a$ et ω_b à chaque instant, générées par le code d'intégration numérique des équations de la mécanique du vol utilisant le schéma de Runge-Kutta d'ordre 7. Une restriction de cette solution numérique est ensuite utilisée comme données d'entrée.

Le développement du code inverse a été progressif : en effet, la programmation de

l'algorithme étant très dense (nombreuses équations dérivées premières et secondes des équations de la mécanique du vol et de la fonctionnelle du problème, matrice du système de grandes dimensions), nous avons activé progressivement les équations de la mécanique du vol et les coefficients aérodynamiques. C'est pourquoi nous présentons dans cette section, l'identification de trois, quatre, six puis sept coefficients.

Les différentes courbes sont adimensionnalisées et certains axes ne sont pas gradués pour des raisons de confidentialité. Nous notons $v_{abs_i}^* = \frac{v_{abs_i}}{v_{abs_{imax}}}$ et $\omega_c^* = \frac{\omega_c}{\omega_{cmax}}$. La configuration de la machine utilisée pour réaliser les tests numériques est la suivante : processeur de 3.33 GHz, double coeur avec une RAM de 8 Go et sous le système d'exploitation Windows Seven. Le langage utilisé pour programmer les algorithmes d'identification est le fortran.

Lors de l'identification des coefficients aérodynamiques, nous donnons l'erreur obtenue sur les coefficients identifiés par rapport à leur valeur de référence à l'aide de la formule (4.7).

$$erreur_{C_i} = \frac{C_{i_{ref}} - C_i}{C_{i_{ref}}} \times 100 \quad (4.7)$$

4.2.1 Cas de 3 coefficients C_x , C_{lp} et C_{l0}

Dans cette partie [23], nous utilisons le modèle réduit présenté dans la partie 3.4.2 (chapitre 3) :

$$\begin{cases} \dot{v}_{abs_i} = \frac{\rho S}{2m} (-v_r v_{ri} C_x) \\ \dot{\omega}_c = \frac{-\rho S}{2I_1} [D^2 C_{lp} \omega_c v_r - D C_{l0} v_r^2] \end{cases} \quad (4.8)$$

Le vecteur des paramètres d'état s'écrit alors $\underline{U} = [v_{abs_i}, \omega_c]$ et le vecteur des coefficients aérodynamiques s'écrit $\underline{C} = [C_x, C_{lp}, C_{l0}]$. Le système est de dimension $2N + 3$.

Les équations de la mécanique du vol sont intégrées grâce au schéma d'Euler explicite, c'est-à-dire que le terme de pénalisation de la fonctionnelle s'écrit :

$$\|R(\underline{\Psi})\|_E^2 = \sum_{m=1}^n [-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + \underline{f}(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1}) (t^m - t^{m-1})]^2 \Delta t \quad (4.9)$$

4.2.1.1 Utilisation de données non bruitées

4.2.1.1.1 Influence du pas de temps

Une première étude est faite afin de déterminer l'influence du pas de temps sur la qualité de l'identification. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.1, où k représente le nombre d'itérations nécessaire pour converger et t le temps de calcul en secondes.

Il ressort que le pas de temps limite pour obtenir une intégration stable des équations est de 4.10^{-3} secondes, cas pour lequel l'algorithme doit traiter 291 couples de données (v_{abs_i}, ω_c) qui couvrent tout le vol, et ce avec une erreur supérieure à 1% sur les coefficients identifiés. La taille mémoire limite du traitement est de 1400 couples de données. C'est pourquoi il y a un compromis à trouver entre un pas de temps assez grand pour traiter tout le vol et assez petit pour identifier avec une précision acceptable les coefficients aérodynamiques. Parmi les pas de temps testés, le pas de temps optimal est de 10^{-3} secondes, ce qui est cohérent avec les résultats présentés dans le tableau présenté dans la partie 3.4.2 (chapitre 3). L'erreur relative sur les coefficients aérodynamiques est alors inférieure à 1%. L'identification réalisée à partir de 1159 couples de données simulées. Les pas de temps inférieurs fournissent des erreurs plus faibles mais ne permettent pas de traiter l'intégralité du vol.

Pas de temps en secondes	Erreur relative (en %)			k	t (s)
	C_x	C_{lp}	C_{l0}		
4.10^{-3}	$2.0.10^{-2}$	2.6	2.6	6	5
1.10^{-3}	$2.0.10^{-3}$	$6.5.10^{-1}$	$6.5.10^{-1}$	4	223
8.10^{-4}	$4.0.10^{-3}$	$5.2.10^{-1}$	$5.2.10^{-1}$	4	223
4.10^{-4}	$2.0.10^{-3}$	$2.6.10^{-1}$	$2.6.10^{-1}$	3	168
1.10^{-4}	$5.1.10^{-4}$	$6.6.10^{-2}$	$6.6.10^{-2}$	3	169
8.10^{-5}	$4.1.10^{-4}$	$5.2.10^{-2}$	$5.2.10^{-2}$	3	168
4.10^{-5}	$2.1.10^{-4}$	$2.6.10^{-2}$	$2.6.10^{-2}$	3	168
1.10^{-5}	$5.2.10^{-5}$	$6.6.10^{-3}$	$6.6.10^{-3}$	3	168
8.10^{-6}	$4.1.10^{-5}$	$5.3.10^{-3}$	$5.3.10^{-3}$	3	168
4.10^{-6}	$2.4.10^{-5}$	$2.6.10^{-3}$	$2.6.10^{-3}$	3	168
1.10^{-6}	$5.2.10^{-6}$	$6.6.10^{-4}$	$6.6.10^{-4}$	3	168

TABLE 4.1 – Influence du pas de temps

4.2.1.1.2 Influence du nombre de mesures

La seconde étude porte sur l'influence du nombre de mesures utilisées sur les erreurs relatives obtenues à l'issue de l'identification. Dans ce cas, le pas de temps est fixé à 10^{-3} secondes. Nous examinons différentes situations où le nombre de couple de données est compris entre 4 et 1159 couples de mesures. Aucune incidence sur la précision de l'identification des coefficients aérodynamiques n'est à signaler. Nous obtenons à chaque fois une erreur de 0.002% sur C_x et une erreur de 0.65% pour C_{l0} et C_{lp} . Le nombre minimum de couples de mesures pour obtenir une convergence de l'algorithme est de 3, mais nous avons dans ce cas une erreur de 146% sur C_{lp} .

4.2.1.1.3 Influence de l'initialisation des coefficients aérodynamiques

Sachant que la méthode de Newton-Raphson est sensible à l'initialisation, nous regardons la sensibilité de notre procédure d'identification par rapport aux valeurs initiales prises par les différents coefficients. Il est mis en évidence que l'initialisation des coefficients n'a pas d'incidence sur les pourcentages d'erreurs obtenus, à condition bien sûr que l'algorithme converge. En revanche, le choix de l'initialisation influe légèrement sur le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence de l'algorithme.

Nous avons aussi déterminé pour chaque coefficient l'intervalle dans lequel la valeur initiale doit se situer pour que l'algorithme converge. Nous avons obtenu que les valeurs initiales des différents coefficients doivent vérifier :

$$\begin{aligned} C_{x0} &\in [-2.10^3.C_{x_{ref}}, 5.10^3.C_{x_{ref}}] \\ C_{lp0} &\in [-5.5.C_{lp_{ref}}, 13.C_{lp_{ref}}] \\ C_{l00} &\in [-60.C_{l0_{ref}}, 62.C_{l0_{ref}}] \end{aligned}$$

4.2.1.2 Influence du bruit affectant les données

Dans la réalité, les données sont entachées d'un bruit de mesure. Il est donc nécessaire d'examiner la sensibilité de l'identification lorsque les données sont bruitées. Les données simulées sont bruitées par le procédé décrit dans l'annexe J.

4.2.1.2.1 Influence du niveau de bruit

Le tableau 4.2 présente les résultats obtenus, en pourcentage d'erreur, lors de l'iden-

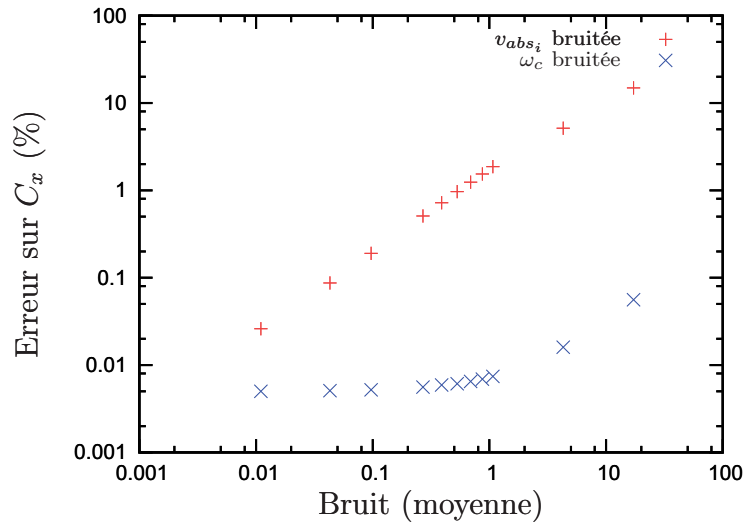
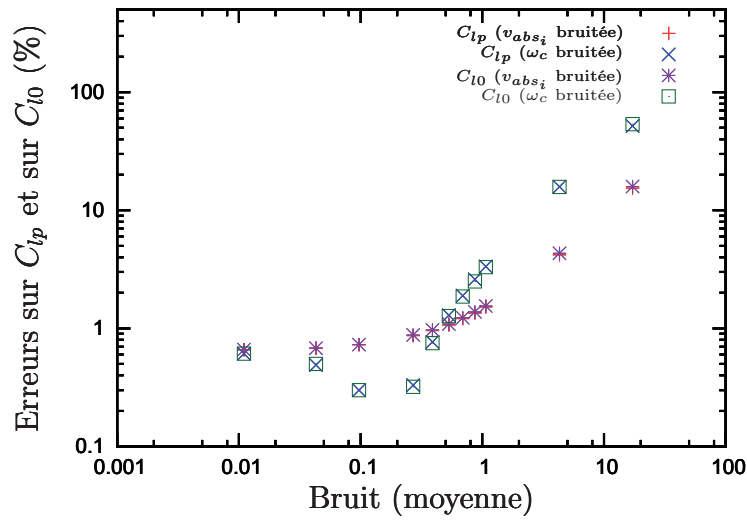
tification des coefficients C_x , C_{lp} et C_{l0} selon les niveaux de bruit appliqués. Nous traitons toutes les données du vol (1159 mesures), avec un pas de temps de 10^{-3} secondes. Des erreurs sont appliqués aux coefficients aérodynamiques lors de l'initialisation : on pose $C_{x_0} = 2.5 C_{x_{ref}}$, $C_{lp_0} = 2.5 C_{lp_{ref}}$ et $C_{l0_0} = 5 C_{l0_{ref}}$. Ces valeurs sont arbitraires et volontairement sévères afin de tester la robustesse du code. Les bruits appliqués sont générés à partir d'écart-types et gains imposés au filtre passe-bas et présentés dans le tableau J.1 (annexe J). Les figures 4.1 et 4.2 reprennent et

v_{abs_i}		ω_c		Erreur relative (en %)			k	t (s)
μ_{bruit} ($m.s^{-1}$)	σ_{bruit} ($m.s^{-1}$)	μ_{bruit} ($rad.s^{-1}$)	σ_{bruit} ($rad.s^{-1}$)	C_x	C_{lp}	C_{l0}		
0	0	0	0	$2.0.10^{-3}$	0.65	0.65	4	331
0.097	0.38	0	0	0.19	0.73	0.73	4	330
0.27	1.10	0	0	0.51	0.87	0.88	4	330
0.87	3.40	0	0	1.54	1.35	1.38	4	302
17.18	67.64	0	0	14.92	15.39	15.90	4	333
0	0	0.097	0.38	$5.2.10^{-3}$	0.30	0.30	4	331
0	0	0.39	1.50	$5.9.10^{-3}$	0.77	0.75	4	333
0	0	0.87	3.40	$6.9.10^{-3}$	2.6	2.5	4	333
0	0	17.18	67.64	0.056	51.67	53.61	4	334
0.27	1.10	0.39	1.50	0.51	0.55	0.53	6	500

TABLE 4.2 – Sensibilité de l'identification des coefficients à des données bruitées

complètent les résultats présentés dans le tableau 4.2.

Nous pouvons remarquer (tableau 4.2) qu'un bruit sur la donnée ω_c influe peu sur l'identification du coefficient C_x , tandis qu'un bruit sur la vitesse v_{abs_i} influe sur l'identification des coefficients C_{lp} et C_{l0} de façon sensible. Dans le cas où les deux paramètres v_{abs_i} et ω_c sont simultanément bruités, nous obtenons des erreurs relatives de 0.51% sur C_x , 0.55% sur C_{lp} et 0.53% sur C_{l0} . L'algorithme est donc robuste pour identifier avec précision les trois coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} et C_{l0} à partir de données simulées bruitées. La figure 4.3 donne les reconstructions de v_{abs_i} et de ω_c à l'issue de la procédure d'identification. Il apparaît que l'algorithme développé est capable de reconstruire correctement la vitesse et la vitesse de roulis au cours du vol, et débruite très légèrement les données.

FIGURE 4.1 – Influence du bruit sur l'erreur relative d'identification du C_x FIGURE 4.2 – Influence du bruit sur les erreurs relatives d'identification du C_{lp} et du C_{l0}

4.2.1.2.2 Influence du nombre de mesures

Dans cette étude, le niveau de bruit est fixé (le niveau de bruit appliqué à v_{abs_i} et ω_c est celui donné dans la dernière ligne du tableau 4.2) et le pas de temps est de 10^{-3} secondes.

Lorsque les données sont bruitées, le nombre de mesures utilisées influe fortement

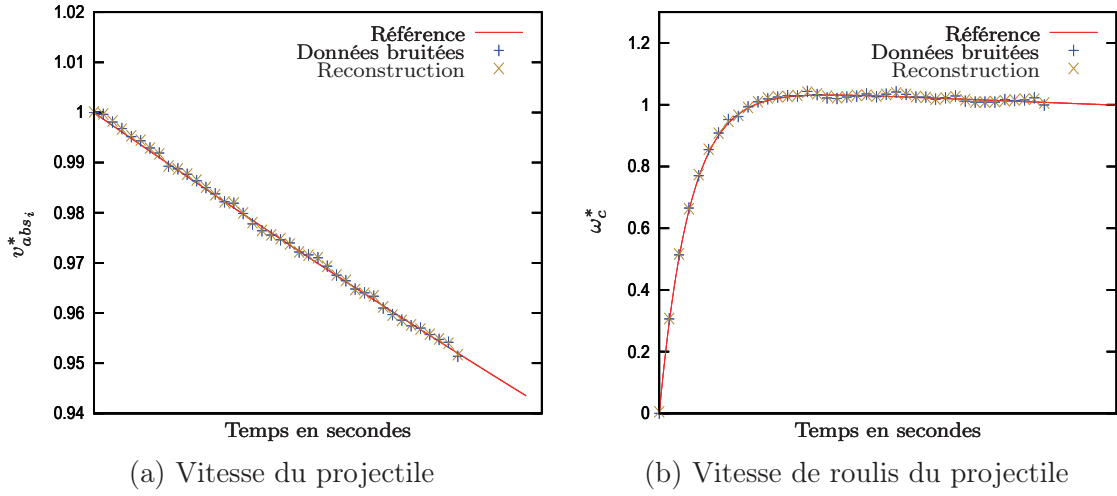


FIGURE 4.3 – Reconstructions de la vitesse et de la vitesse de roulis du projectile

sur la qualité de l'identification. Le tableau 4.3 présente les pourcentages d'erreurs obtenus pour chaque coefficient lorsque le nombre de mesures diminue.

Nombre mesures	Erreur relative (en %)			k	t (s)
	C_x	C_{lp}	C_{l0}		
1159	0.51	0.55	0.53	6	500
800	1.09	0.59	0.55	4	91
400	1.40	0.62	0.56	4	9
100	13.17	3.20	1.48	4	0.22
50	61.73	5.61	2.37	4	0.062
10	242.17	122.71	1.73	5	0.0156

TABLE 4.3 – Influence du nombre de données traitées sur les niveaux d'erreur

Il ressort du tableau 4.3 et de la figure 4.4 qu'il est nécessaire de prendre en compte un plus grand nombre de mesures pour obtenir une identification plus précise.

4.2.2 Cas de 4 coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} , C_{l0} et C_{mq}

Dans cette section, nous identifions les coefficients C_x (force de traînée), C_{lp} (moment d'amortissement en roulis), C_{l0} (entraînement en roulis) et C_{mq} (moment d'amortissement en tangage) [22]. Nous ajoutons au modèle réduit de la section 4.2.1 les équations de la mécanique du vol relatives à $\underline{\dot{\omega}}_a$ et $\underline{\dot{\omega}}_b$, et ignorons les

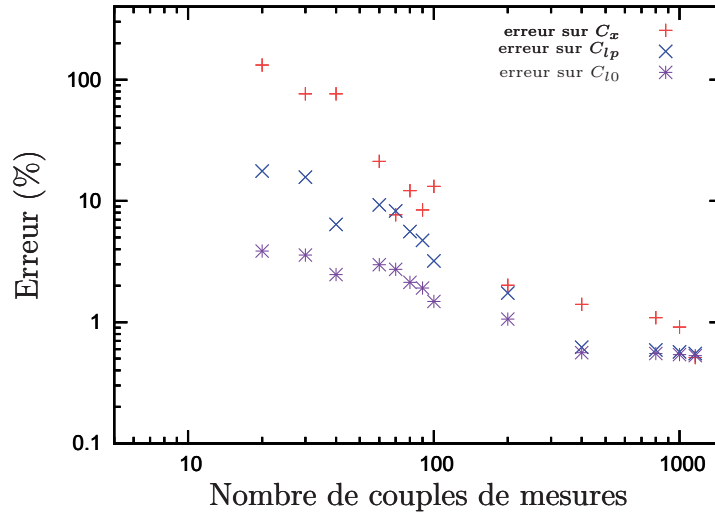


FIGURE 4.4 – Influence du nombre de couples de mesures sur les erreurs relatives

termes dépendants des éléments du quaternion au sein de ces équations (moment de tangage et moment de Magnus nuls). Le vecteur $\underline{U}$ des paramètres d'état s'écrit alors $\underline{U} = [v_{absi}, \omega_c, \omega_a, \omega_b]^T$, et notre système matriciel est de dimension $4N + 4$, où N désigne le nombre de données simulées disponibles pour chaque paramètre d'état. Pendant cette phase de l'étude, les coefficients aérodynamiques sont initialisés à deux fois leur valeur de référence.

Nous avons intégré les équations de la mécanique du vol avec le schéma d'Euler explicite et avec différents schémas d'intégration implicite de type BDF car le schéma d'Euler explicite est mis en défaut dans le cas de données bruitées.

4.2.2.1 Influence du pas de temps

Pour commencer, nous avons recherché le pas de temps idéal pour chaque schéma d'intégration, c'est-à-dire le pas de temps le plus grand permettant d'obtenir une erreur inférieure à 1% sur les coefficients identifiés. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.4. Le tableau 4.5 présente les pourcentage d'erreur obtenus sur les coefficients lorsque les données ne sont pas bruitées. Ainsi, le schéma d'intégration implicite BDF d'ordre 6 permet d'employer le plus grand pas de temps, ce qui signifie que nous pouvons alors exploiter une plus grande partie du vol.

Schéma	Pas de temps idéal
Euler explicite	10^{-5}
BDF 1	10^{-5}
BDF 2	2.10^{-4}
BDF 3	2.10^{-4}
BDF 4	5.10^{-4}
BDF 5	5.10^{-4}
BDF 6	7.10^{-4}

TABLE 4.4 – Pas de temps idéal (en secondes) pour chaque schéma d'intégrations

Schéma	Erreur en %				k
	C_x	C_{lp}	C_{l0}	C_{mq}	
Euler explicite	$5.2.10^{-5}$	$6.6.10^{-3}$	$6.6.10^{-3}$	$4.6.10^{-2}$	4
BDF 1	$5.2.10^{-3}$	$6.6.10^{-3}$	$6.6.10^{-3}$	$4.6.10^{-2}$	3
BDF 2	$2.2.10^{-8}$	$2.3.10^{-4}$	$2.3.10^{-4}$	0.6	3
BDF 3	$1.0.10^{-9}$	$4.6.10^{-7}$	$4.6.10^{-7}$	0.2	3
BDF 4	$2.0.10^{-10}$	$3.8.10^{-8}$	$4.1.10^{-8}$	0.9	3
BDF 5	$6.6.10^{-11}$	$3.5.10^{-10}$	$3.8.10^{-11}$	0.4	3
BDF 6	$3.2.10^{-3}$	$3.2.10^{-3}$	$6.3.10^{-3}$	0.7	3

TABLE 4.5 – Erreurs sur les coefficients selon le schéma d'intégration employé

4.2.2.2 Influence du bruit

Nous bruitons ensuite les données à l'aide d'une simple fonction random, c'est-à-dire avec une variable aléatoire. Le but est ici de tester la robustesse de la méthode en présence d'un bruit très sévère. Le bruit sur les données est fixé à 1% pour v_{abs_i} et 5% pour chacune des vitesses de rotation ω_c , ω_a et ω_b . Le tableau 4.6 présente les pourcentages d'erreur relative alors obtenus sur les coefficients aérodynamiques identifiés par rapport à leurs valeurs exactes. Les pas de temps employés pour chaque schéma d'intégration sont ceux présentés précédemment dans le tableau 4.4. Nous tenons à préciser que le schéma d'Euler explicite ne permettait pas d'obtenir une convergence du code en présence de bruit, il n'apparaît donc pas dans le tableau 4.6.

Le schéma d'intégration B.D.F. d'ordre 6 permet d'obtenir le meilleur compromis sur les erreurs relatives obtenues pour l'ensemble des coefficients aérodynamiques identifiés. Toutefois, un ordre inférieur à 6 est suffisant si l'on souhaite identifier

Schéma	Erreur en %				k
	C_x	C_{lp}	C_{l0}	C_{mq}	
Euler explicite	Pas de convergence				
BDF 1	0.1	3.2	2.6	867.6	6
BDF 2	2.2	2.1	1.5	49.6	5
BDF 3	0.7	0.7	1.2	38.6	5
BDF 4	0.28	3.2	2.4	10.0	6
BDF 5	1.0	11.2	4.8	2.1	7
BDF 6	3.8	0.9	0.5	0.3	7

TABLE 4.6 – Influence de l'ordre du schéma BDF sur l'identification des coefficients dans le cas de données bruitées

certain coefficients, comme C_x , C_{lp} ou C_{l0} .

La figure 4.5 présente la reconstruction des données de vol en utilisant le schéma d'intégration BDF d'ordre 6. Les paramètres d'état recalculés sont correctement reconstruits et permettent d'accéder à la trajectoire du projectile au cours du vol. De plus, la technique d'identification proposée permet de débruiter les données.

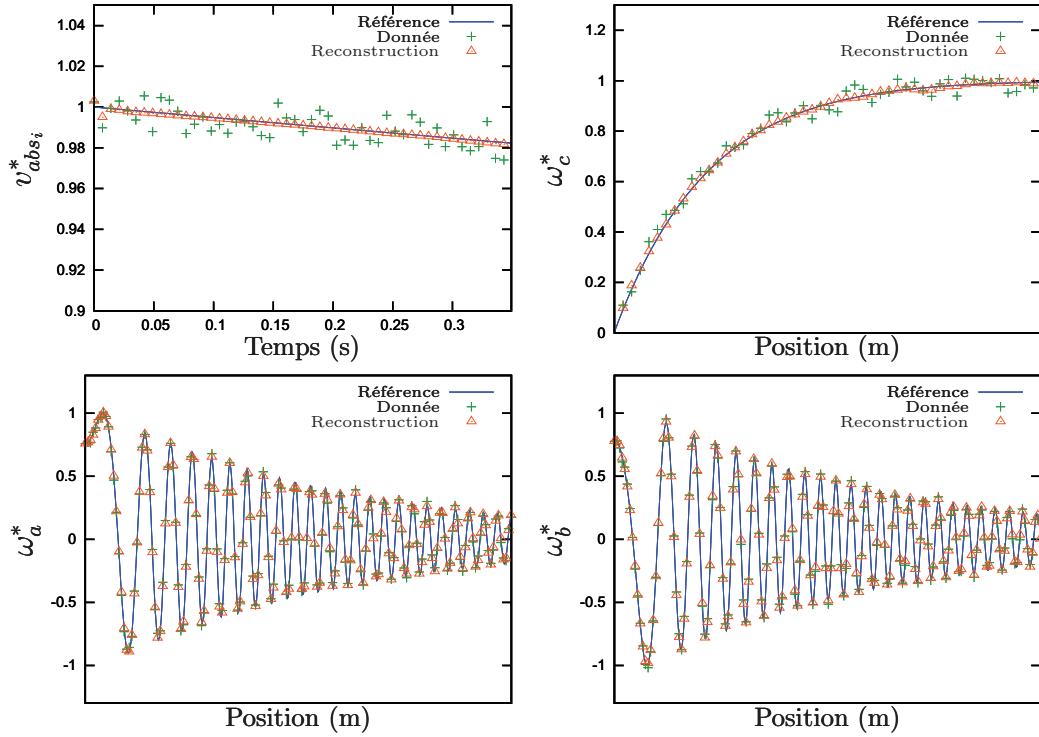
4.2.3 Cas de 6 coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} , C_{l0} , $C_{m\delta}$, $C_{np\delta}$ et C_{mq}

Cette section est consacrée à l'identification des six coefficients aérodynamiques C_x (force de traînée), C_{lp} (moment d'amortissement en roulis), C_{l0} (moment d'entraînement en roulis), $C_{m\delta}$ (moment de tangage), $C_{np\delta}$ (moment de Magnus) et C_{mq} (moment d'amortissement en tangage) [22]. Dans cette phase de l'étude, nous activons les équations de cinématique (cf. équation (3.41)) mettant en jeu les éléments du quaternion. Le vecteur des paramètres d'état s'écrit donc maintenant $\underline{U} = [v_{abs_i}, \omega_c, \omega_a, \omega_b, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$. Le système non linéaire à résoudre est alors de dimension $8N+6$. Les données d'entrée générées sont des valeurs à chaque instant des paramètres d'état v_{abs_i} , v_{abs_j} , v_{abs_k} , ω_c , ω_a et ω_b .

Nous employons cette fois le schéma explicite d'Euler avec un pas de temps de 10^{-5} secondes.

Influence du bruit

Nous appliquons successivement un bruit (fonction random) sur les paramètres

FIGURE 4.5 – Reconstructions des paramètres d tat $v_{abs_i}^*$, ω_c^* , ω_a^* , ω_b^*

d tat v_{abs_i} , ω_c , ω_a , ω_b . Le tableau 4.7 présente les pourcentages d'erreur obtenus sur chacun des coefficients identifiés. Il ressort de cette simulation que les coefficients

Bruit (%)				Erreur en %						k
v_{abs_i}	ω_c	ω_a	ω_b	C_x	C_{lp}	C_{l0}	$C_{m\delta}$	$C_{np\delta}$	C_{mq}	
0	0	0	0	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$	25.8	0.44	13
0.1	0	0	0	2.5	0.3	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-2}$	21.8	0.5	13
0	0.1	0	0	$5.1 \cdot 10^{-4}$	0.13	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	25.3	0.53	13
0	0	0.1	0	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	0.24	152.9	8.2	15
0	0	0	0.1	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	0.57	32.1	0.3	15
0.1	0.1	0.1	0.1	2.5	0.3	$5.7 \cdot 10^{-3}$	2.9	204.4	11.3	14

TABLE 4.7 – Influence du bruit sur l'identification des coefficients

C_x , C_{lp} , C_{l0} , $C_{m\delta}$ et C_{mq} sont identifiés avec une précision satisfaisante en présence de bruit. En revanche, le coefficient $C_{np\delta}$ est plus délicat à identifier. Ce coefficient est couplé à la fois à la vitesse de roulis ω_c et aux éléments du quaternion λ_0 , λ_1 , λ_2

et λ_3 (cf. équation 3.21). Ces grandeurs évoluent très rapidement au cours du vol et nous n'avons pas de mesure des éléments du quaternion. D'autre part, en fixant le pas de temps à 10^{-5} secondes, le nombre de données du vol est tellement important qu'elles ne peuvent pas toutes être prises en compte. Seul le début du vol a donc été traité. Or, sur cette fenêtre de vol, la vitesse de roulis ω_c n'a pas encore atteint sa valeur maximale (constante en fin de vol, cf. figure 4.3 (b) par exemple). Une prise en compte de données situées en fin de vol permettrait éventuellement une amélioration des résultats pour le coefficient $C_{np\delta}$. Par ailleurs, il serait judicieux d'effectuer l'intégration numérique des équations du vol au moyen d'un schéma d'intégration plus robuste que le schéma d'Euler explicite.

4.2.4 Cas de 7 coefficients aérodynamiques C_x , $C_{z\delta}$, C_{lp} , C_{l0} , $C_{m\delta}$, $C_{np\delta}$ et C_{mq}

Dans cette étude [24], nous ajoutons les deux dernières équations de la mécanique du vol associées aux paramètres d'état v_{abs_j} et v_{abs_k} , ce qui nous permet d'identifier le dernier coefficient aérodynamique $C_{z\delta}$ (force de portance). Le vecteur des paramètres d'état s'écrit : $\underline{U} = [v_{abs_i}, v_{abs_j}, v_{abs_k}, \omega_c, \omega_a, \omega_b, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$, conférant ainsi au système non linéaire une dimension de $8N + 7$.

Les coefficients aérodynamiques sont initialisés avec une erreur de 50% par rapport à leur valeur de référence. Le coefficient du moment de tangage $C_{m\alpha}$ est plus sensible à l'initialisation que les autres coefficients. C'est pourquoi il est initialisé à une valeur plus proche de sa valeur de référence (10% d'erreur).

4.2.4.1 Influence du pas de temps

Le premier cas de test présente l'influence du pas de temps employé sur l'erreur relative des coefficients identifiés. Le schéma d'intégration employé est un schéma multipas explicite d'Adams-Bashforth [1] d'ordre 4. Le tableau 4.8 présente les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'un jeu de 200 données simulées pour chaque paramètre d'état. Comme nous pouvions nous y attendre, l'erreur relative sur les coefficients aérodynamiques identifiés est d'autant plus grande que le pas de temps employé est grand. Nous avons pu déterminer que le pas de temps idéal pour cette méthode d'intégration est de 2.10^{-4} secondes. Il permet en effet d'obtenir une erreur

dt (s)	Erreur relative (%)							k
	C_x	$C_{z\delta}$	C_{lp}	C_{l0}	$C_{m\delta}$	$C_{np\delta}$	C_{mq}	
10^{-6}	$6.6 \cdot 10^{-9}$	$6.2 \cdot 10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$4.9 \cdot 10^{-7}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	63
10^{-5}	$2.2 \cdot 10^{-11}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$7.7 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$	29
10^{-4}	$8.9 \cdot 10^{-10}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$9.3 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	15
$2 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	17
$4 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$	3.1	$3.4 \cdot 10^{-1}$	12
$6 \cdot 10^{-4}$	$9.7 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-1}$	83.0	1.5	13
$8 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	1.9	208.8	19.7	32

TABLE 4.8 – Influence du pas de temps dt (en secondes) sur l'identification des coefficients avec un schéma multipas explicite d'ordre 4

relative inférieure à 1% sur chaque coefficient aérodynamique et permet également de parcourir une grande partie de la trajectoire. Il est également possible de considérer un pas de temps de $4 \cdot 10^{-4}$ secondes dans la mesure où l'erreur sur le coefficient de moment de Magnus $C_{np\delta}$ reste assez faible.

4.2.4.2 Influence du choix du schéma d'intégration

La même étude est menée avec les schémas multipas explicites d'Adams-Bashforth d'ordres 1, 2 et 3. Cela nous a permis de déterminer pour chaque ordre le pas de temps idéal, lors de l'utilisation d'un jeu de 200 données simulées par paramètre d'état. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.9. Chaque schéma multipas expli-

Ordre	Pas de temps idéal	k
1	10^{-6}	6
2	$2 \cdot 10^{-4}$	26
3	$2 \cdot 10^{-4}$	12
4	$2 \cdot 10^{-4}$	17

TABLE 4.9 – Pas de temps idéal pour chaque ordre du schéma multipas explicite d'Adams-Bashforth

cite d'Adams-Bashforth a un pas de temps optimal de $2 \cdot 10^{-4}$ secondes, sauf l'ordre 1 qui correspond en fait au schéma d'Euler explicite et qui ne permet l'emploi que d'un pas de temps beaucoup plus petit (10^{-6} secondes).

Le tableau 4.10 présente les erreurs relatives obtenues sur les coefficients aérodynamiques pour chaque ordre du schéma multipas en prenant les pas de temps optimaux respectifs (déterminés précédemment, cf. tableau 4.9), avec un jeu de 200 données simulées par paramètre d'état.

Ordre	Erreur relative (%)							k
	C_x	$C_{z\delta}$	C_{lp}	C_{l0}	$C_{m\delta}$	$C_{np\delta}$	C_{mq}	
1	$2.4.10^{-6}$	$2.7.10^{-3}$	$6.6.10^{-4}$	$6.6.10^{-4}$	$1.9.10^{-3}$	7.7	$9.8.10^{-2}$	6
2	$8.1.10^{-7}$	$1.3.10^{-2}$	$2.9.10^{-4}$	$2.9.10^{-4}$	$1.5.10^{-1}$	1.7	$2.0.10^{-1}$	26
3	$2.9.10^{-7}$	$3.1.10^{-3}$	$6.9.10^{-7}$	$6.9.10^{-7}$	$7.3.10^{-3}$	1.5	$8.5.10^{-2}$	12
4	$1.5.10^{-9}$	$2.1.10^{-5}$	$1.7.10^{-9}$	$1.7.10^{-9}$	$4.6.10^{-4}$	$4.1.10^{-2}$	$2.9.10^{-3}$	17

TABLE 4.10 – Influence de l'ordre du schéma multipas explicite employé

Il ressort du tableau 4.10 que le schéma multipas explicite d'ordre 4 fournit les meilleurs résultats. Il est donc choisi dans la suite de l'étude afin de mener d'autres tests numériques.

Désormais le pas de temps est fixé à 2.10^{-4} secondes.

4.2.4.3 Influence du nombre de mesures

Nous étudions maintenant l'influence du nombre de données sur l'erreur relative des coefficients aérodynamiques identifiés. les tests montrent qu'il faut un minimum de 60 données (par paramètre d'état) pour que l'algorithme converge. Le tableau 4.11 donne l'influence du nombre de données N sur la qualité de l'identification.

N	Erreur relative (%)							k
	C_x	$C_{z\delta}$	C_{lp}	C_{l0}	$C_{m\delta}$	$C_{np\delta}$	C_{mq}	
50	Pas de convergence							
60	$5.3.10^{-9}$	$5.4.10^{-5}$	$1.7.10^{-9}$	$1.7.10^{-9}$	$6.4.10^{-5}$	$1.3.10^{-2}$	$3.1.10^{-3}$	15
100	$1.6.10^{-8}$	$1.4.10^{-4}$	$2.6.10^{-8}$	$2.7.10^{-8}$	$6.4.10^{-3}$	$8.1.10^{-1}$	$3.7.10^{-2}$	20
200	$1.5.10^{-9}$	$2.1.10^{-5}$	$1.7.10^{-9}$	$1.7.10^{-9}$	$4.6.10^{-4}$	$4.1.10^{-2}$	$2.9.10^{-3}$	17
500	$1.3.10^{-9}$	$1.0.10^{-3}$	$1.6.10^{-9}$	$1.7.10^{-9}$	$5.0.10^{-3}$	$3.3.10^{-1}$	$1.4.10^{-2}$	17

TABLE 4.11 – Influence du nombre de données d'entrée sur l'erreur relative

Il ressort que l'erreur relative sur le coefficient C_x diminue lorsque N augmente. Toutefois N a peu d'influence sur les coefficients relatifs aux moments d'entraînement

en roulis (C_{l0}) et d'amortissement en roulis (C_{lp}). L'erreur relative sur le coefficient de la force de portance ($C_{z\delta}$), du moment de tangage ($C_{m\delta}$) et du moment d'amortissement en tangage (C_{mq}) augmente légèrement avec le nombre de données N . En revanche, le coefficient du moment de Magnus $C_{np\delta}$ est fortement influencé lorsque N augmente.

4.2.4.4 Influence du bruit

Le dernier test numérique consiste à ajouter du bruit sur les données d'entrée. Seuls les paramètres d'état v_{abs_i} , v_{abs_j} , v_{abs_k} et ω_c ont été bruités (0.1% appliqué pour chaque paramètre par une fonction random), car la présence de bruit sur les paramètres ω_a et ω_b ne permet pas à l'algorithme de converger. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.12. Nous pouvons constater que les coefficients

Paramètres bruités	Erreur relative (%)							k
	C_x	$C_{z\delta}$	C_{lp}	C_{l0}	$C_{m\delta}$	$C_{np\delta}$	C_{mq}	
Aucun	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	17
$v_{abs_i}, v_{abs_j}, v_{abs_k}$	2.3	1.1	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	1.1	5.9	$3.3 \cdot 10^{-1}$	17
ω_c	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	2.6	$8.0 \cdot 10^{-2}$	21
Tous	2.4	1.1	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	1.1	8.5	$4.1 \cdot 10^{-1}$	17

TABLE 4.12 – Influence du bruit sur l'erreur relative

de moment d'entraînement en roulis C_{l0} , d'amortissement en roulis C_{lp} et d'amortissement du tangage C_{mq} sont identifiés avec une erreur satisfaisante (inférieure à 1%). Les erreurs obtenues sur les coefficients de la force de traînée C_x , la force de portance $C_{z\delta}$ et du moment de tangage $C_{m\delta}$ sont tolérables ($< 3\%$). En revanche, comme pour l'étude précédente (identification de six coefficients aérodynamiques), le coefficient du moment de Magnus $C_{np\delta}$ reste le plus délicat à identifier. Néanmoins, nous avons réussi à réduire l'erreur sur ce coefficient de 204.4% (cf. tableau 4.7) à 8.5%, ce qui est un gain notable. Il serait judicieux de poursuivre l'étude en essayant d'autres schémas d'intégration, comme par exemple les schémas multipas implicites d'Adams-Moulton [61] [8], ou bien B.D.F [61]. Le couplage entre les différents paramètres d'état au sein des équations de la mécanique du vol induit que la présence de bruit sur un seul paramètre d'état affecte l'ensemble des coefficients aérodynamiques, c'est pourquoi il est difficile de trouver un compromis satisfaisant entre le choix de la méthode d'intégration, le pas de temps idéal et le nombre de

données à prendre en compte.

Un exemple de reconstruction de la trajectoire en présence de bruit sur les données est présenté sur les figures 4.6 et 4.7. Le bruit appliqué aux paramètres d'état v_{abs_j} , v_{abs_k} et ω_c est petit, c'est pourquoi les données bruitées semblent être superposées aux données non bruitées. Comme nous n'avons utilisé que 200 données simulées par paramètre d'état, nous n'avons donc pu traiter que le début de la trajectoire, c'est pourquoi nous observons peu d'oscillations sur ces courbes. Nous pouvons remarquer sur la figure 4.6 que notre technique d'identification permet la reconstruction de la vitesse v_{abs_i} malgré le bruit important entachant cette donnée, ce qui atteste de la robustesse de notre méthode.

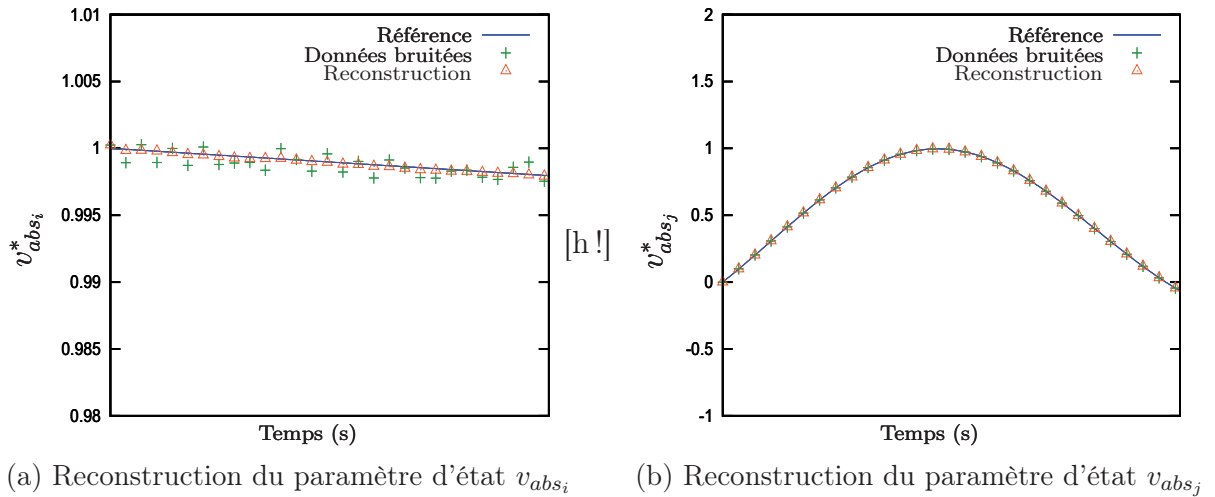
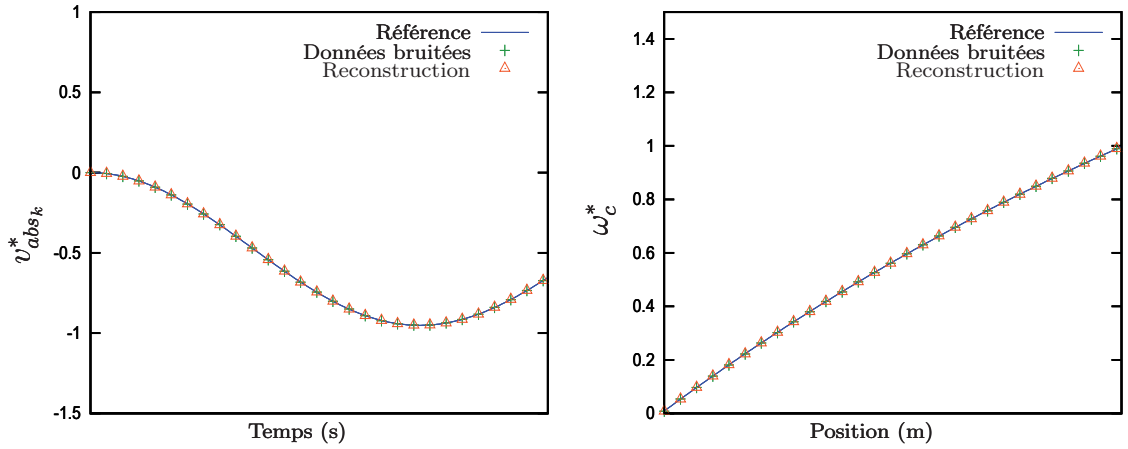


FIGURE 4.6 – Reconstructions des vitesses v_{abs_i} et v_{abs_j}

4.3 Identification à partir de mesures réelles : cas de trois coefficients C_x , C_{lp} et C_{l0}

4.3.1 Introduction

Nous avons exposé dans les parties précédentes, la formulation de notre technique d'identification et l'avons validée avec des données simulées. Les tests numériques effectués ont permis d'identifier sept coefficients aérodynamiques. Cette partie est



(a) Reconstruction du paramètre d'état v_{abs_k} (b) Reconstruction du paramètre d'état ω_c

FIGURE 4.7 – Reconstructions de la vitesse v_{abs_k} et de la vitesse de roulis ω_c

consacrée à l'identification de coefficients aérodynamiques à partir de mesures réelles issues de vols. Nous utilisons ici le modèle de vol réduit proposé dans le chapitre 3, c'est-à-dire ne prenant en compte que les équations f_1 et f_4 (annexe E) de la mécanique du vol, ainsi que les trois coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} et C_{l0} :

$$\begin{cases} \dot{v}_{abs_i} = \frac{\rho S}{2m} (-v_r v_{ri} C_x) \\ \dot{\omega}_c = \frac{-\rho S}{2I_1} [D^2 C_{lp} \omega_c v_r - D C_{l0} v_r^2] \end{cases} \quad (4.10)$$

Un des objectifs de la campagne de tirs consistait à mettre en évidence l'effet de la vitesse de roulis sur le comportement en vol d'une flèche. La configuration de référence possède un biseau sur le bord d'attaque des ailettes (épaisseur de l'aile en amont de l'écoulement). L'augmentation ou la diminution de la vitesse de roulis a été obtenue par l'ajout d'un biseau sur le bord de fuite (épaisseur en aval de l'écoulement i.e. à l'arrière du projectile) des ailettes : ce biseau est situé d'un côté ou de l'autre de l'ailette de manière à générer un couple qui s'ajoute ou s'oppose à celui généré par le biseau de bord d'attaque. Ce faisant, on ne modifie que le profil des ailes sans toucher à la forme en plan ; on suppose alors que le seul coefficient aérodynamique impacté est le C_{l0} (moment d'entraînement en roulis).

Nous exploitons les données réelles dont nous disposons et qui ne sont constituées que de mesures de v_{abs_i} et ω_c , nous permettant ainsi d'identifier les trois coefficients aérodynamiques. Les données sont issues de sept tirs. Le tir n°1 correspond à un

projectile dit de référence, alors que les tirs n°2 à 7 concernent des nouveaux projectiles ayant une vitesse de roulis augmentée. Pour les tirs n°2 à 6, l'instrumentation fournit des mesures de v_{abs_i} et de ω_c à différents instants. Ces mesures sont issues de relevés effectués sur des panneaux en début de trajectoire et de relevés radars (associés à des réflecteurs) sur la suite de la trajectoire. Seules des mesures radar (associé aux réflecteurs) sont disponibles pour les tirs n°1 et 7. Toutefois, pour ces deux tirs, la prise de mesure par les réflecteurs a débuté plus tôt que lors des autres vols, ce qui permet de compenser en partie le manque d'informations en début de trajectoire.

4.3.2 Identification à partir de mesures prises en vol

Les mesures dont nous disposons concernent des projectiles flèches semblables au projectile flèche de référence. Toutefois, une légère modification de la configuration (biseaux supplémentaire sur les ailettes) fait que la vitesse de roulis de ces nouveaux projectiles est augmentée de façon sensible par rapport au projectile flèche de référence. Les coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} et C_{l0} ne sont donc connus qu'approximativement.

Pour les identifier, nous avons donc procédé de la manière suivante :

1. nous identifions les coefficients aérodynamiques, à partir des mesures, par la technique présentée dans la section 4.1 (schéma d'intégration d'Euler explicite, avec un pas de temps de 10^{-3} secondes),
2. les coefficients identifiés sont utilisés comme entrée du code numérique, qui intègre les équations de la mécanique du vol, présenté dans le chapitre 3,
3. les mesures et la trajectoire obtenue par le code numérique sont tracées sur un même graphique et comparées.

Ces courbes nous informent sur la précision des coefficients obtenus par notre technique d'identification. Nous considérons les mesures prises en vol comme référence, si les coefficients identifiés sont erronés, la courbe obtenue par le code d'intégration numérique en utilisant les coefficients identifiés ne se superpose pas aux mesures prises en vol. Les résultats de l'identification sont présentés sur les figures 4.8 à 4.14. Pour chaque tir, les figures (a) présentent le tracé de la vitesse du projectile considéré, alors que les figures (b) présentent le tracé de la vitesse de roulis.

4.3.3 Analyse des résultats

Concernant la vitesse, les figures 4.8 (a) à 4.14 (a) donnent la courbe de simulation directe utilisant les mesures radar de v_{abs_i} pour 7 vols différents : cela montre qu'à chaque fois le coefficient C_x est correctement identifié, car la perte de vitesse lors du vol simulé (à partir des coefficients identifiés) est la même que celle donnée par les mesures.

Concernant la vitesse de roulis, les figures 4.8 (b) à 4.14 (b) présentent l'évolution de la vitesse de roulis au cours du temps pour chaque vol.

La première remarque que nous pouvons faire est que pour les tirs n°2 à 6, la courbe de simulation directe est légèrement décalée des mesures panneaux en début du vol. Cela est dû aux effets de la balistique intermédiaire (écoulement des gaz suite à la combustion de la poudre, détachement des sabots, etc...) qui retardent cette mise en rotation.

Nous pouvons remarquer sur les figures 4.9 (b), 4.10 (b), 4.11 (b) et 4.13 (b) que la simulation numérique avec les coefficients identifiés est cohérente avec les mesures, ce qui signifie que les coefficients C_{lp} et C_{l0} réels sont identifiés avec précision.

En revanche, l'accord entre la simulation et les mesures est moins bon pour les tirs n°1, 5 et 7 (figures 4.8 (b), 4.12 (b) et 4.14 (b)). L'inadéquation entre la simulation directe et les mesures de la vitesse de roulis en fin de trajectoire n'est pas cohérente : en effet, la perte de vitesse de roulis en fin de vol est directement conditionnée par la perte de vitesse du projectile, et donc par le coefficient de traînée qui est correctement identifié (figures 4.8 (b), 4.12 (b) et 4.14 (b)). Nous n'avons pas d'explication physique pouvant justifier de telles pertes de vitesse de roulis en fin de vol, c'est pourquoi nous attribuons ce phénomène à un bruit de mesure (peut être de type facteur d'échelle). Pour ces trois tirs l'identification est donc de moins bonne qualité et les coefficients identifiés doivent être considérés avec réserve.

Concernant les valeurs des coefficients identifiés, nous confrontons les coefficients des projectiles tirés à ceux d'un projectile de référence. Le tableau 4.13 présente les écarts obtenus, donnés en pourcentage pour des raisons de confidentialité.

Le tableau 4.13 montre d'une part que le coefficient de traînée est correctement identifié, ce qui est cohérent avec les résultats observés sur les courbes de vitesses

présentées précédemment. Le coefficient C_x n'est donc pas influencé par la modification de la forme des ailettes du projectile. D'autre part, les projectiles à vitesse de roulis augmentée voient leur coefficient d'entraînement en roulis C_{l0} modifié dans une plus grande proportion que leur coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} . Ce résultat est cohérent dans la mesure où la valeur du coefficient C_{l0} est dépendante de la présence de biseaux sur le bord d'attaque des ailettes (ou de leur éventuel braquage), tandis que le coefficient C_{lp} dépend essentiellement de la forme en plan (face plane), qui est très peu modifiée lors de l'ajout de biseaux.

N° tir	Ecart en %		
	C_x	C_{lp}	C_{l0}
1	1.0	14.1	3.4
2	0.3	10.1	65.3
3	1.3	8.5	67.8
4	1.8	2.2	72.9
5	2.3	23.0	45.8
6	2.1	10.2	67.8
7	0.3	24.1	50.0

TABLE 4.13 – Ecarts entre les coefficients identifiés et les coefficients d'un projectile de référence

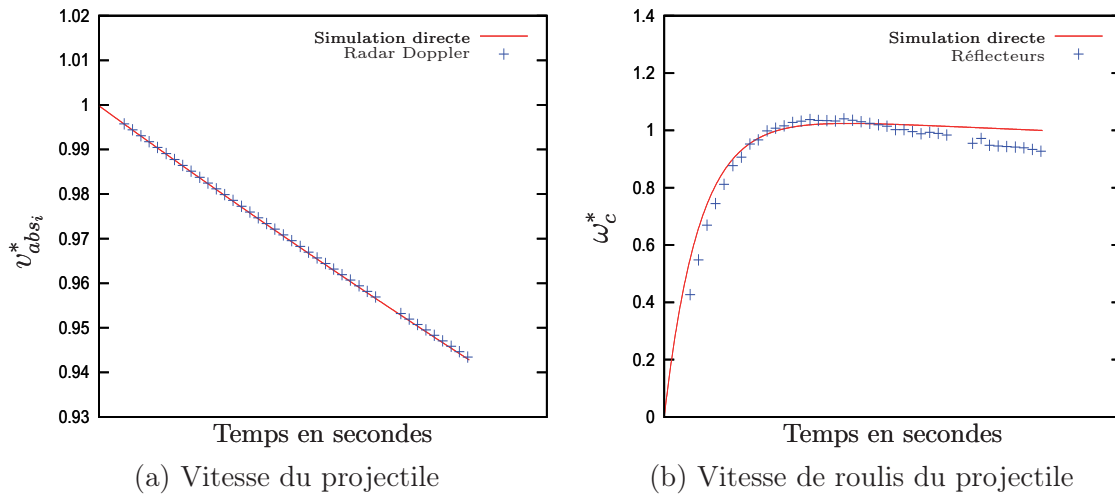


FIGURE 4.8 – Tir n°1 : Projectile de référence

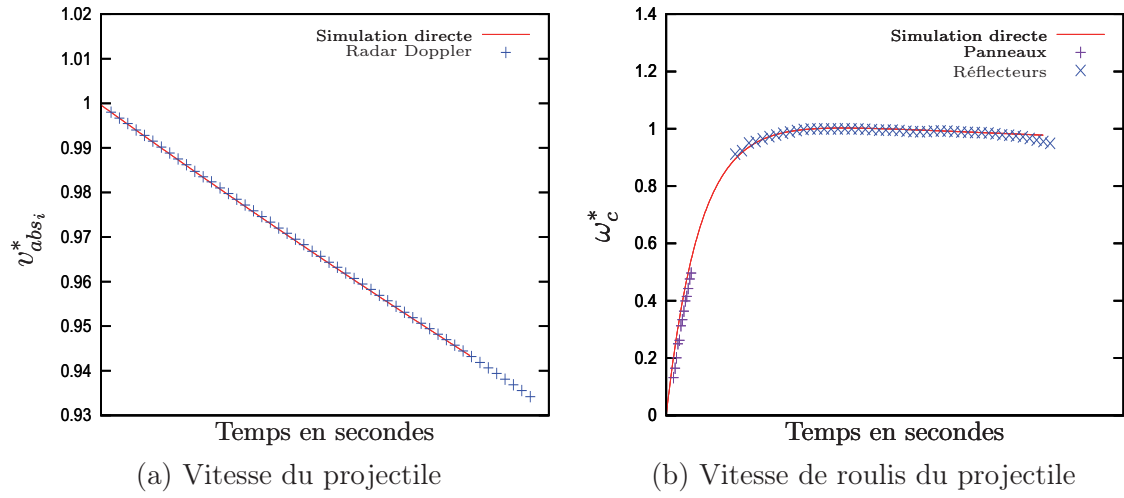


FIGURE 4.9 – Tir n°2 : Projectile à vitesse de roulis augmentée

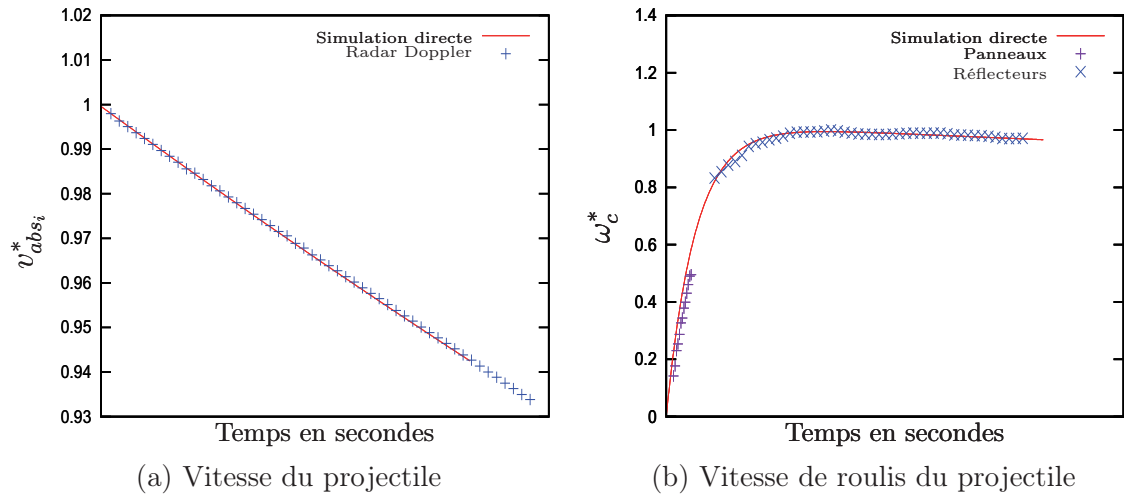


FIGURE 4.10 – Tir n°3 : Projectile à vitesse de roulis augmentée

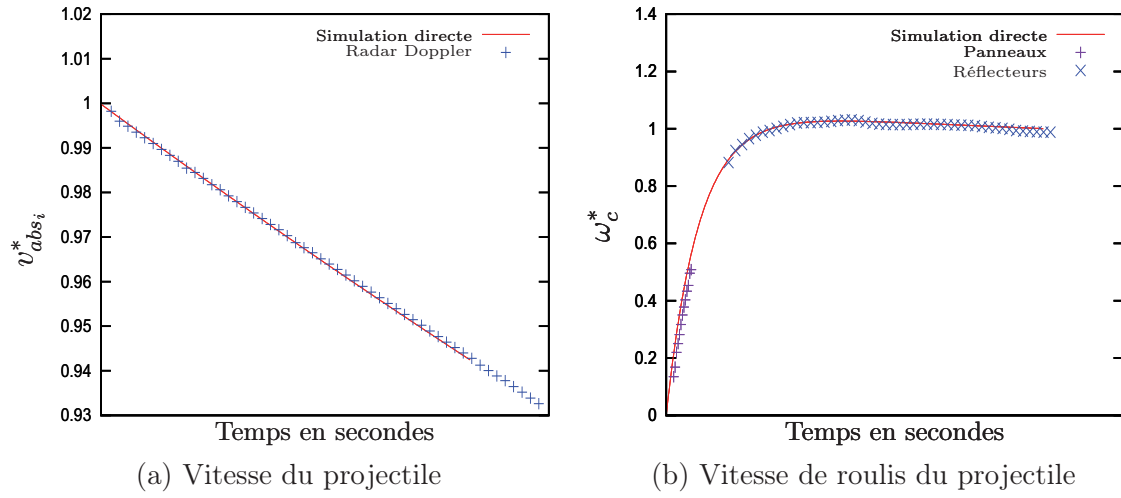


FIGURE 4.11 – Tir n°4 : Projectile à vitesse de roulis augmentée

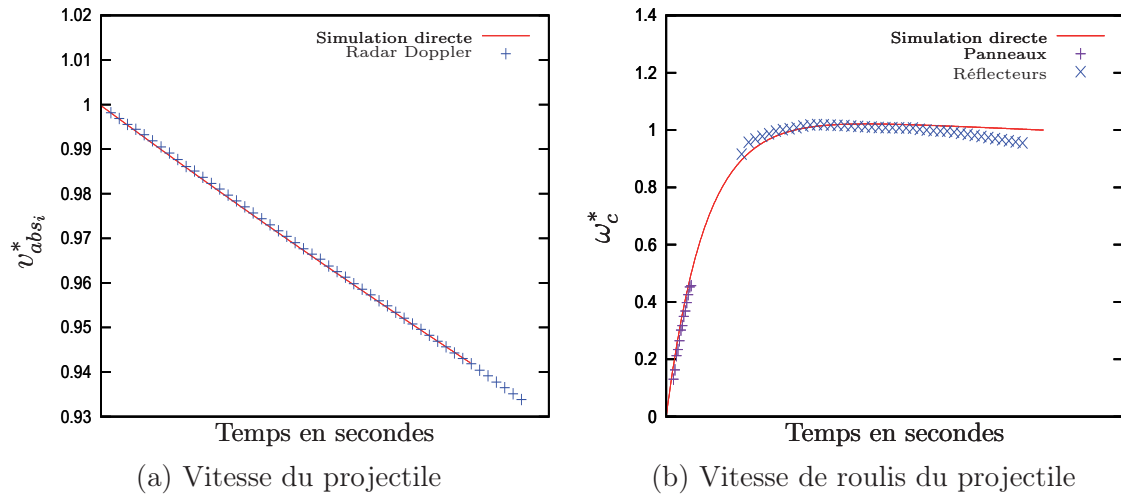


FIGURE 4.12 – Tir n°5 : Projectile à vitesse de roulis augmentée

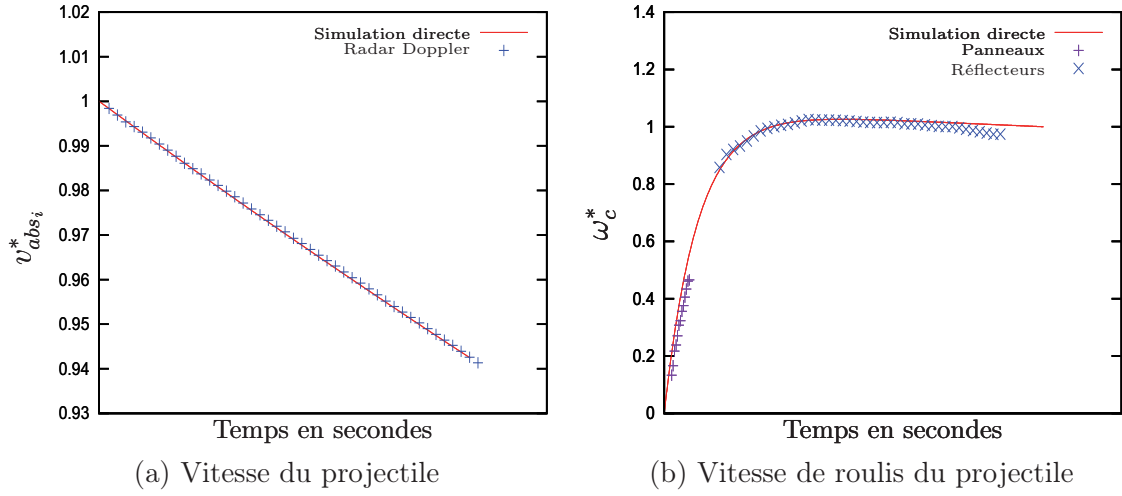


FIGURE 4.13 – Tir n°6 : Projectile à vitesse de roulis augmentée

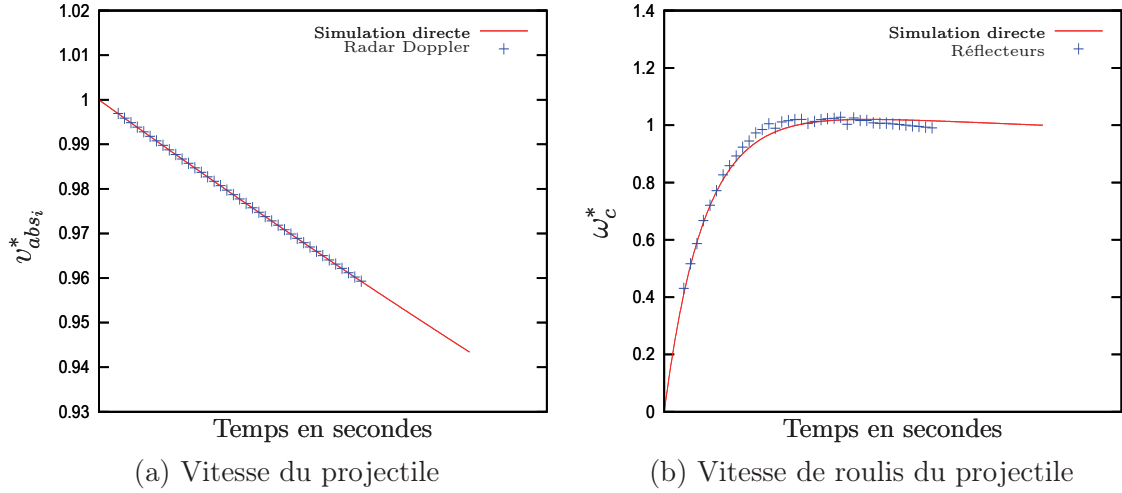


FIGURE 4.14 – Tir n°7 : Projectile à vitesse de roulis augmentée

4.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la technique d'identification que nous avons développée. Nous avons reformulé le problème d'identification en un problème d'optimisation au sens des moindres carrés, de sorte à s'accorder au mieux aux mesures dont nous disposons. Notre fonctionnelle comprend également un terme de pénalisation qui prend en compte l'intégration numérique des équations de la mé-

canique du vol, et qui nous évite d'utiliser les multiplicateurs de Lagrange. Notre méthode laisse le choix du schéma d'intégration des équations du vol. Le calcul du gradient de notre fonctionnelle se fait de manière analytique, et aboutit à un système d'équations non linéaires que nous résolvons au moyen de la méthode de Newton-Raphson.

Dans le but de valider la technique d'identification avant de l'appliquer à des données réelles, nous avons présenté différents résultats numériques d'identification de coefficients aérodynamiques à partir de données générées par notre outil de simulation directe. Nous avons ensuite bruité les données afin d'observer le comportement de la méthode proposée. Il ressort des tests numériques qu'elle permet d'identifier correctement les coefficients aérodynamiques, même en présence de bruit sur les données. Notons toutefois que le coefficient du moment de Magnus est le plus délicat à identifier dans la mesure où il dépend de grandeurs évoluant très rapidement (éléments du quaternion, vitesse de roulis). Notre méthode permet également de reconstruire la trajectoire du projectile tout en débruitant les données ; c'est dans cette capacité que réside son originalité.

L'application de notre technique d'identification à des mesures réelles de la vitesse et de la vitesse de roulis du projectile nous a permis d'identifier trois coefficients aérodynamiques. Elle s'avère donc robuste face au bruit et applicable à des mesures réelles.

Conclusion & perspectives

Au cours de ces travaux de thèse, une technique d'identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol a été proposée. Pour cela, nous avons introduit un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie, que nous avons résolu en utilisant une technique de Newton-Raphson. Nous avons appliqué la technique d'identification proposée à un projectile de type flèche de gros calibre. L'identification des coefficients aérodynamiques a tout d'abord été faite à partir de données générées par un outil d'intégration numérique des équations de la mécanique du vol que nous avons développé. Nous avons employé différents schémas d'intégration, afin de trouver un compromis entre une formulation numérique simple et des résultats d'identification satisfaisants. L'identification à partir de données simulées nous a permis d'identifier successivement trois, quatre, six puis sept coefficients aérodynamiques. Les différents tests numériques ont montré la robustesse de la technique d'identification face au bruit et aux approximations. Elle permet en outre de reconstruire la trajectoire du projectile. Nous l'avons ensuite appliquée à sept jeux partiels de mesures réelles, après avoir établi un modèle de vol réduit justifié au cours d'une étude de sensibilité des paramètres d'état aux variations des coefficients aérodynamiques. Cela nous a permis d'identifier trois coefficients aérodynamiques. Six des sept tirs exploités concernaient des projectiles à vitesse de roulis augmentée grâce à l'ajout d'un biseau supplémentaire sur les ailettes. Pour trois des tirs, la mauvaise qualité de la mesure a engendré des résultats d'identification moins bons. Nous avons en revanche correctement identifié les coefficients aérodynamiques du projectile pour quatre tirs.

La technique d'identification proposée a un formalisme généralisable à d'autres types de projectiles, par exemple à des projectiles décrivant une trajectoire courbe.

L'apport industriel de ces travaux réside également dans l'outil d'intégration numé-

rique des équations du vol développé, qui permet une utilisation très libre afin de générer des trajectoires très particulières (exemple : activation d'un seul coefficient aérodynamique), et ce en laissant le choix du schéma d'intégration à employer.

Diverses voies d'amélioration de notre technique peuvent être envisagées. Nous pourrions en effet :

- effectuer des tests numériques avec des schémas d'intégration implicite BDF et multipas (implicites et explicites) à différents ordres afin de déterminer le schéma d'intégration offrant les meilleurs résultats lors de l'identification de l'ensemble des coefficients aérodynamiques,
- effectuer des tests numériques mettant en jeu des multiplicateurs de Lagrange pour peut être d'obtenir de meilleurs résultats d'identification, car l'application d'un multiplicateur pour chaque contrainte égalité permettrait de la prendre en compte de manière exacte,
- essayer d'adimensionnaliser les différents paramètres d'état du problème de sorte à obtenir un meilleur conditionnement de la matrice du système et améliorerait la qualité de l'identification.

En perspective, il devient important d'utiliser notre technique d'identification pour l'analyse de comportement en vol d'autres projectiles où l'instrumentation nous permettrait d'obtenir un jeu plus complet de mesures des paramètres d'état. Nous pourrions alors identifier plus de coefficients aérodynamiques et tester la robustesse de notre technique d'identification aussi à partir de mesures réelles.

Nous pourrions également adapter la technique d'identification de sorte à identifier successivement les coefficients aérodynamiques : c'est-à-dire que nous pourrions identifier les coefficients aérodynamiques tour à tour, et considérer comme connus les coefficients déjà identifiés pour l'identification des suivants. L'étude de sensibilité menée pour notre projectile testé dans le chapitre 3 a montré qu'il était possible d'identifier indépendamment les coefficients C_x , C_{l_p} et C_{l_0} . Nous pourrions donc, à partir d'un vol réel, identifier les coefficients progressivement et les supposer connus pour l'identification des suivants.

Cette étude nous montre la nécessité d'une amélioration des instrumentations existantes de sorte à obtenir un jeu de mesures complet des paramètres d'état intervenant dans le modèle de comportement du projectile.

Enfin, le formalisme général de notre technique la rend adaptable à d'autres types de problèmes. En effet, au sein de l'algorithme, le calcul du gradient et des dérivées

secondes de la fonctionnelle du problème est automatisé, de sorte qu'il suffirait de remplacer les équations de la mécanique du vol par la mise en équations de nouveaux problèmes. Il serait alors nécessaire de calculer les dérivées premières et secondes des équations spécifiques au problème que l'on souhaite résoudre.

ANNEXES

Annexe A

Présentation d'un projectile flèche

Un projectile flèche est un projectile empenné, c'est-à-dire pourvu d'ailettes, il est destiné à percer le blindage des chars. Il est composé d'un nez, d'un corps cylindrique (encore appelé fuselage ou barreau) et d'un culot sur lequel sont fixées les ailettes formant l'empennage (figure A.1).

L'obus flèche est surmonté de sabots (figure A.2 (a)) servant à le maintenir à l'inté-

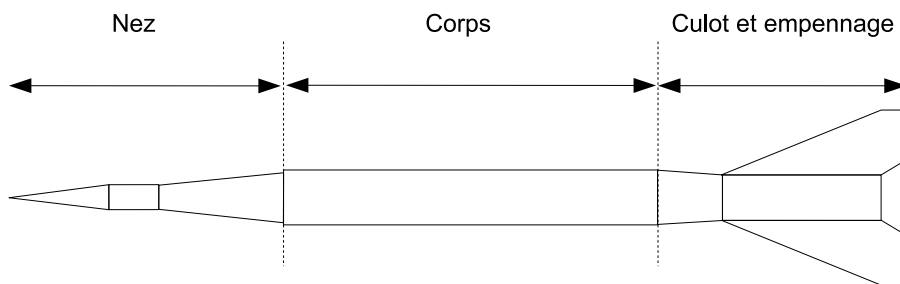


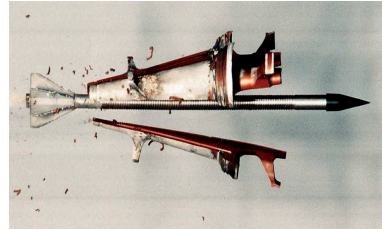
FIGURE A.1 – Schéma simplifié d'un projectile flèche

rieur du tube. Ceux-ci se séparent de la flèche dès la sortie du tube (figure A.2 (b)).

L'ensemble flèche-sabots est placé à l'intérieur d'une cartouche (figures A.3) contenant le système propulsif (douille, poudre et système d'allumage) que l'on met à l'intérieur du canon afin de tirer la munition.

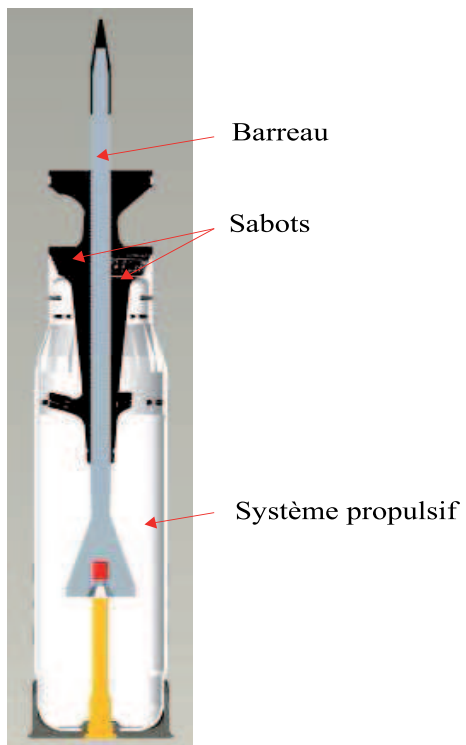


(a) Flèche maintenue par des sabots



(b) Séparation des sabots

FIGURE A.2 – Représentation d'une flèche et des sabots



(a) Schéma d'une cartouche



(b) Cartouche d'un obus flèche

FIGURE A.3 – Cartouche d'un projectile flèche

L'obus flèche est un projectile supersonique (Mach 5.2) avec une vitesse initiale de 1780 m.s^{-1} et développant une énergie cinétique de 7130 kJ. L'accélération initiale subie par le projectile est de 55000 g pour une masse d'un peu moins de 5 kg. La perte de vitesse d'un flèche de gros calibre est d'environ 100 m.s^{-1} pour 2000 mètres de vol. Le diamètre du barreau du projectile que nous étudions est d'environ 25 mm, et le calibre (diamètre du tube) de 120 mm est qualifié de gros calibre. Dans la catégorie des gros calibres, le diamètre du tube peut varier de 90 à 155 mm. Une munition est considérée de moyen calibre lorsque le diamètre du tube est compris entre 20 et 40 mm. Les petits calibres désignent des munitions telles que les balles de fusil de chasse par exemple (diamètre du tube d'une dizaine de millimètres).

Une flèche entre spontanément en rotation autour de son axe longitudinal dès la sortie du tube grâce à l'effet aérodynamique de l'air sur l'empennage. Ce type de projectile étant stable statiquement, cette rotation vise à éviter que des éventuelles imperfections de fabrication (dissymétrie, balourd) ne perturbent le comportement du projectile en vol. La rotation du projectile étant spontanée, les tubes tirant des projectiles flèches de gros calibres ne sont pas rayés. Il peut cependant arriver, dans le cas de munitions de moyen calibre, que le tube soit rayé de sorte à éviter de changer de tube si l'on tire successivement des projectiles flèches et des projectiles gyrostabilisés.

L'allongement d'une flèche peut atteindre 40, ce qui peut parfois entraîner, allié à la dynamique liée au lancement et à l'interaction entre les sabots et le tube, un phénomène de flexion en vol. Ce phénomène a été étudié dans [37]. Les corps de grand allongement en régime hypervélocité permettent une perforation optimale de blindages. De plus, pour atteindre cet objectif au mieux, la flèche doit également arriver avec une courbure et une obliquité (angle entre l'axe longitudinal du projectile et son vecteur vitesse) minimales. La précision d'une flèche est estimée à partir de deux critères. Le premier est la dispersion, c'est-à-dire le nuage d'impacts possibles pour des tirs de projectiles identiques. Le second est la justesse et caractérise la distance entre le point visé et le point moyen du nuage d'impacts.

Les projectiles flèches ont une portée de quelques kilomètres et suivent une trajectoire en tir tendu (altitude atteinte en vol de moins d'un kilomètre). Le temps de vol caractéristique d'un tel projectile est de l'ordre de la seconde.

Annexe B

Dérivées des composantes de la matrice de passage

La matrice de passage du repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ au repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ en utilisant les éléments du quaternion s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \underline{c} & \underbrace{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}_{l_{11}} & \underbrace{2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)}_{l_{12}} & \underbrace{2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)}_{l_{13}} \\ \underline{a} & \underbrace{2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)}_{l_{21}} & \underbrace{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}_{l_{22}} & \underbrace{2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)}_{l_{23}} \\ \underline{b} & \underbrace{2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)}_{l_{31}} & \underbrace{2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)}_{l_{32}} & \underbrace{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}_{l_{33}} \end{pmatrix}$$

Les dérivées premières de chacune des composante de cette matrice s'écrivent :

$$\frac{\partial l_{11}}{\partial \lambda_0} = +2\lambda_0 \quad \frac{\partial l_{11}}{\partial \lambda_1} = +2\lambda_1 \quad \frac{\partial l_{11}}{\partial \lambda_2} = -2\lambda_2 \quad \frac{\partial l_{11}}{\partial \lambda_3} = -2\lambda_3$$

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial \lambda_0} = +2\lambda_3 \quad \frac{\partial l_{12}}{\partial \lambda_1} = +2\lambda_2 \quad \frac{\partial l_{12}}{\partial \lambda_2} = +2\lambda_1 \quad \frac{\partial l_{12}}{\partial \lambda_3} = +2\lambda_0$$

$$\frac{\partial l_{13}}{\partial \lambda_0} = -2\lambda_2 \quad \frac{\partial l_{13}}{\partial \lambda_1} = +2\lambda_3 \quad \frac{\partial l_{13}}{\partial \lambda_2} = -2\lambda_0 \quad \frac{\partial l_{13}}{\partial \lambda_3} = +2\lambda_1$$

$$\frac{\partial l_{21}}{\partial \lambda_0} = -2\lambda_3 \quad \frac{\partial l_{21}}{\partial \lambda_1} = +2\lambda_2 \quad \frac{\partial l_{21}}{\partial \lambda_2} = +2\lambda_1 \quad \frac{\partial l_{21}}{\partial \lambda_3} = -2\lambda_0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial \lambda_0} = +2\lambda_0 \quad \frac{\partial l_{22}}{\partial \lambda_1} = -2\lambda_1 \quad \frac{\partial l_{22}}{\partial \lambda_2} = +2\lambda_2 \quad \frac{\partial l_{22}}{\partial \lambda_3} = -2\lambda_3$$

$$\frac{\partial l_{23}}{\partial \lambda_0} = +2\lambda_1 \quad \frac{\partial l_{23}}{\partial \lambda_1} = +2\lambda_0 \quad \frac{\partial l_{23}}{\partial \lambda_2} = +2\lambda_3 \quad \frac{\partial l_{23}}{\partial \lambda_3} = +2\lambda_2$$

$$\frac{\partial l_{31}}{\partial \lambda_0} = +2\lambda_2 \quad \frac{\partial l_{31}}{\partial \lambda_1} = +2\lambda_3 \quad \frac{\partial l_{31}}{\partial \lambda_2} = +2\lambda_0 \quad \frac{\partial l_{31}}{\partial \lambda_3} = +2\lambda_1$$

$$\frac{\partial l_{32}}{\partial \lambda_0} = -2\lambda_1 \quad \frac{\partial l_{32}}{\partial \lambda_1} = -2\lambda_0 \quad \frac{\partial l_{32}}{\partial \lambda_2} = +2\lambda_3 \quad \frac{\partial l_{32}}{\partial \lambda_3} = +2\lambda_2$$

$$\frac{\partial l_{33}}{\partial \lambda_0} = +2\lambda_0 \quad \frac{\partial l_{33}}{\partial \lambda_1} = -2\lambda_1 \quad \frac{\partial l_{33}}{\partial \lambda_2} = -2\lambda_2 \quad \frac{\partial l_{33}}{\partial \lambda_3} = +2\lambda_3$$

Annexe C

Expression des éléments du quaternion

Comme mentionné dans le chapitre 3 (cf. section 3.1.4), le quaternion permet d'alléger sensiblement l'expression du modèle balistique à six degrés du projectile et de lever les indéterminations pesant sur les angles au cours du calcul. Il permet également de passer facilement d'un repère à un autre dans la mesure où sa valeur est la même dans tous les repères utilisés. En revanche, la valeur de ses éléments λ_0 , λ_1 , λ_2 et λ_3 dépend du repère utilisé. Nous donnons donc les expressions des éléments du quaternion pour chaque repère utilisé en fonction des angles balistiques.

Quaternion de rotation du repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ vers le repère trajectoire $(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$

Le passage du repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ au repère trajectoire $(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ fait intervenir les angles de hausse θ et de gisement η .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \cos(\eta/2) \cos(\theta/2) \\ \lambda_1 = \sin(\eta/2) \sin(\theta/2) \\ \lambda_2 = \sin(\eta/2) \cos(\theta/2) \\ \lambda_3 = \cos(\eta/2) \sin(\theta/2) \end{array} \right.$$

Quaternion de rotation du repère trajectoire $(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ vers le repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$

Le passage du repère trajectoire $(\underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ au repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ fait intervenir les angles d'obliquité δ , de précession ψ et de roulis ϕ .

$$\begin{cases} \lambda_0 = \cos(\delta/2) [\cos(\psi/2) \cos(\phi/2) - \sin(\psi/2) \sin(\phi/2)] \\ \lambda_1 = \cos(\delta/2) [\sin(\psi/2) \cos(\phi/2) + \cos(\psi/2) \sin(\phi/2)] \\ \lambda_2 = -\sin(\delta/2) [\sin(\psi/2) \cos(\phi/2) - \cos(\psi/2) \sin(\phi/2)] \\ \lambda_3 = \sin(\delta/2) [\sin(\psi/2) \sin(\phi/2) + \cos(\psi/2) \cos(\phi/2)] \end{cases}$$

Quaternion de rotation du repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ vers le repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$

Le passage du repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ au repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ fait intervenir les 5 angles précédemment cités.

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & + \cos(\eta/2) \cos(\psi/2) \cos(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) - \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & + \sin(\eta/2) \sin(\psi/2) \cos(\phi/2) [\cos(\theta/2) \sin(\delta/2) - \sin(\theta/2) \cos(\delta/2)] \\ & - \cos(\eta/2) \sin(\psi/2) \sin(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) + \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & - \sin(\eta/2) \cos(\psi/2) \sin(\phi/2) [\sin(\theta/2) \cos(\delta/2) + \cos(\theta/2) \sin(\delta/2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & + \cos(\eta/2) \sin(\psi/2) \cos(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) + \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & + \sin(\eta/2) \cos(\psi/2) \cos(\phi/2) [\sin(\theta/2) \cos(\delta/2) + \cos(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & + \cos(\eta/2) \cos(\psi/2) \sin(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) - \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & + \sin(\eta/2) \sin(\psi/2) \sin(\phi/2) [\cos(\theta/2) \sin(\delta/2) - \sin(\theta/2) \cos(\delta/2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & + \cos(\eta/2) \sin(\psi/2) \cos(\phi/2) [\sin(\theta/2) \cos(\delta/2) - \cos(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & + \sin(\eta/2) \cos(\psi/2) \cos(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) - \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & + \cos(\eta/2) \cos(\psi/2) \sin(\phi/2) [\sin(\theta/2) \cos(\delta/2) + \cos(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\ & - \sin(\eta/2) \sin(\psi/2) \sin(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) + \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 = & - \cos(\eta/2) \sin(\psi/2) \sin(\phi/2) [\sin(\theta/2) \cos(\delta/2) - \cos(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\
& - \sin(\eta/2) \cos(\psi/2) \sin(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) - \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\
& + \cos(\eta/2) \cos(\psi/2) \cos(\phi/2) [\sin(\theta/2) \cos(\delta/2) + \cos(\theta/2) \sin(\delta/2)] \\
& - \sin(\eta/2) \sin(\psi/2) \cos(\phi/2) [\cos(\theta/2) \cos(\delta/2) + \sin(\theta/2) \sin(\delta/2)]
\end{aligned}$$

Annexe D

Expression de la pesanteur locale

Avant d'aborder la force de pesanteur à proprement parler, il est nécessaire de préciser l'expression du vecteur rotation de la Terre $\underline{\Omega}_T$ représenté sur la figure D.1. Dans le repère $(\underline{N}, \underline{j}, \underline{k})$, $\underline{\Omega}_T$ vaut :

$$\underline{\Omega}_T = \begin{pmatrix} \Omega_N \\ \Omega_j \\ \Omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_T \cos(Lat) \\ \Omega_T \sin(Lat) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

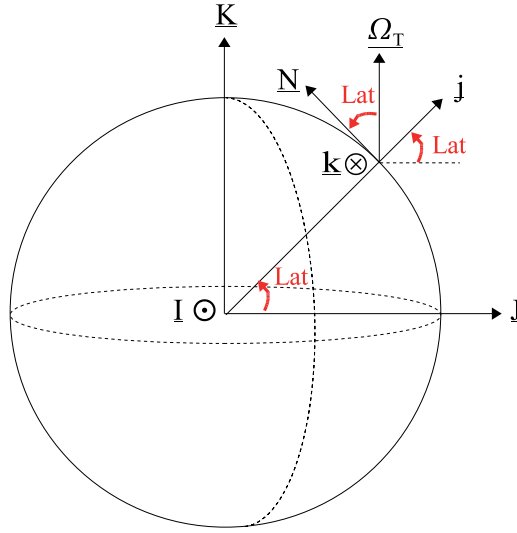
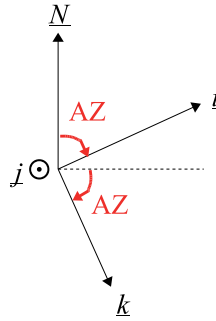
L'expression de $\underline{N}$ dans le repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ est :

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} \cos(AZ) \\ 0 \\ -\sin(AZ) \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (D.2)$$

L'expression du vecteur rotation de la Terre $\underline{\Omega}_T$ dans le repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ est donc :

$$\underline{\Omega}_T = \begin{pmatrix} \Omega_i \\ \Omega_j \\ \Omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_T \cos(Lat) \cos(AZ) \\ \Omega_T \sin(Lat) \\ -\Omega_T \cos(Lat) \sin(AZ) \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (D.3)$$

Maintenant que le vecteur rotation de la Terre est connu, nous allons définir la force de pesanteur locale [34].

FIGURE D.1 – Représentation du vecteur rotation $\vec{\Omega}_T$ de la TerreFIGURE D.2 – Représentation des repères $(\vec{N}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

La Terre n'est pas parfaitement sphérique (rotation de la planète, déplacement des masses d'eau,...), c'est pourquoi les équipotentielles (courbes sur lesquelles le potentiel de gravitation est constant) ne sont ni sphériques ni concentriques.

C'est pourquoi un géoïde est introduit (figure D.4). Cette surface équipotentielle virtuelle est proche du niveau moyen des mers. Par définition, la direction du champ de pesanteur est normale au géoïde, donc elle varie sur la surface terrestre. On définit l'altitude selon la normale locale au géoïde.

Toutefois, la surface du géoïde est irrégulière et ne permet pas une représentation

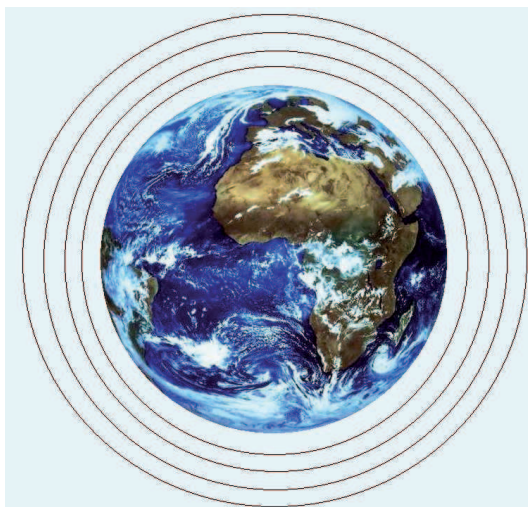


FIGURE D.3 – Tracé des équipotentiellles si la Terre était parfaitement sphérique

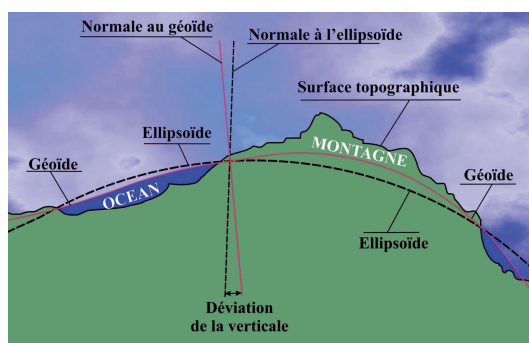


FIGURE D.4 – Illustration du géoïde

géométrique simple. Pour simplifier cette représentation, on suppose que la Terre est constituée du géoïde surmonté du relief. Dans le but d'avoir une surface terrestre de référence et définie mathématiquement, on utilise un ellipsoïde (figure D.5) permettant de définir une bonne approximation du géoïde. L'ellipsoïde de révolution choisi est une représentation aplatie de la Terre. On considère que l'équateur et les parallèles sont des cercles, tandis que les méridiens sont des ellipses. Il existe un très grand nombre d'ellipsoïdes de référence pouvant être ajustés sur le géoïde.

Celui retenu est l'ellipsoïde de Hayford (introduit en 1924 et adopté au niveau in-

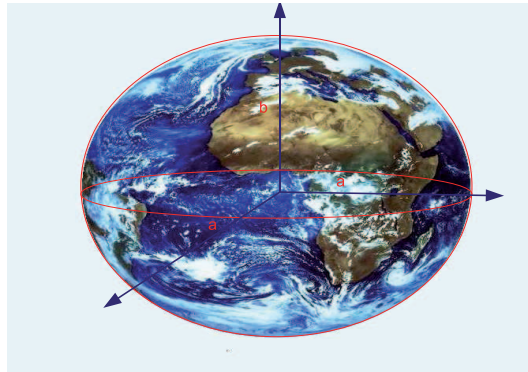


FIGURE D.5 – Illustration de l'ellipsoïde

ternational en 1929) caractérisé par :

- $a = 6378388m$
- $b = 6356912m$
- avec $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

soit un aplatissement de 22 km environ. La différence d'altitude entre le géoïde et l'ellipsoïde est de moins de 100 m sur toute la surface du globe (figure D.6).

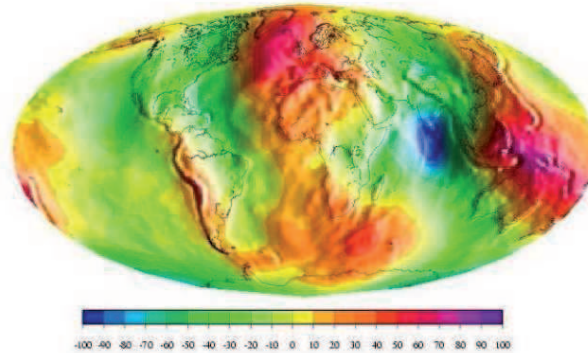
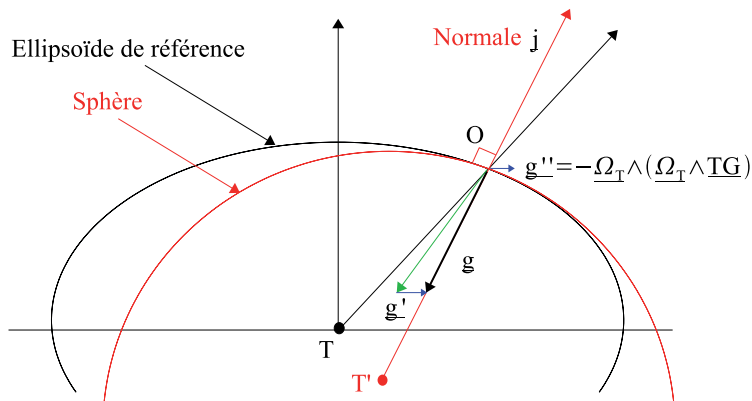


FIGURE D.6 – Hauteurs de géoïdes en mètres (modèle EGM 2008) par rapport à un ellipsoïde de référence [© CNES, GRGS, CNRS, Dynamique terrestre et planétaire]

En balistique, nous faisons l'hypothèse que la Terre est localement (c'est-à-dire sur le parcours balistique) assimilable à une sphère de centre T' différent du centre de gravité terrestre T (fig. D.7).

Cette représentation incorpore l'effet centrifuge $\underline{g''}$, qui est une composante de l'ac-

FIGURE D.7 – Représentation du centre virtuel T' de la sphère

célération de la pesanteur globale $\underline{g}$, dirigée vers T' sur tout le vol. On travaille donc sur une Terre localement sphérique de centre T' autour duquel les équipotentielles de pesanteur sont également des sphères. Suite à ces considérations géodésiques, nous pouvons dire que l'accélération de la pesanteur résulte de deux choses :

- de l'attraction terrestre $\underline{g}'$ sur le projectile, qui varie avec l'altitude :

$$\underline{g}' = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(i,j,k)} \quad (\text{D.4})$$

où R_T est le rayon de la Terre et h l'altitude du lieu considéré,

- l'accélération centrifuge $\underline{g}''$ subie par le projectile :

$$\underline{g}'' = -\Omega_T \wedge (\Omega_T \wedge \underline{TG}) \quad (\text{D.5})$$

où T est le centre de la Terre et G la position du centre de gravité du projectile.

En mécanique du solide, $\underline{g}$ a pour définition mathématique :

$$\underline{g} = -g_0 \cdot \frac{R_T^2}{\|T'G\|^2} \cdot \frac{\underline{T'G}}{\|T'G\|} \quad (\text{D.6})$$

Par conséquent (on pourrait même dire par définition), $\underline{g}$ est colinéaire à $\underline{T'G}$:

$$\begin{aligned} \underline{T'G} &= x\underline{x} + (R_T + y)\underline{y} + z\underline{z} \\ \text{donc } \|\underline{T'G}\| &= \sqrt{x^2 + (R_T + y)^2 + z^2} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

qui, incorporé dans l'expression de $\underline{g}$ donne :

$$\underline{g} = -g_0 \begin{pmatrix} \frac{x}{R_T} \\ 1 - \frac{2y}{R_T} \\ \frac{z}{R_T} \end{pmatrix}_{(i, \underline{j}, \underline{k})} \quad (\text{D.8})$$

Enfin, dans un souci de rigueur, il faut également prendre en compte la variation de g_0 avec la latitude, suivant la formule :

$$g_0 = 9.80665 (1 - 0.0026 \cos(2 \text{ Lat})) \quad (\text{D.9})$$

où la valeur 9.80665 est définie à la latitude 45° et à altitude nulle.

Annexe E

Formulation détaillée du modèle balistique

Nous présentons ici la formulation détaillée du modèle balistique à six degrés de liberté.

Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique projeté dans le repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ nous donne trois équations différentielles :

$$\begin{cases} v_{a\dot{b}s_i} = \frac{\rho S}{2m} \left[-v_r v_{ri} C_x + C_{z\delta} \left(l_{11} (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - l_{12} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{ri} v_{rk} \right) + C_{yp\delta} \omega_c D (l_{12} v_{rk} - l_{13} v_{rj}) \right] + 2 (v_{rj} \Omega_{T_k} - v_{rk} \Omega_{T_j}) - g_0 \frac{x}{R_T} \\ v_{a\dot{b}s_j} = \frac{\rho S}{2m} \left[-v_r v_{rj} C_x + C_{z\delta} \left(l_{12} (v_{ri}^2 + v_{rk}^2) - l_{11} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{rj} v_{rk} \right) + C_{yp\delta} \omega_c D (l_{13} v_{ri} - l_{11} v_{rk}) \right] \\ + 2 (v_{rk} \Omega_{T_i} - v_{ri} \Omega_{T_k}) - g_0 \left(1 - \frac{2y}{R_T} \right) \\ v_{a\dot{b}s_k} = \frac{\rho S}{2m} \left[-v_r v_{rk} C_x + C_{z\alpha} \left(l_{13} (v_{ri}^2 + v_{rj}^2) - l_{11} v_{ri} v_{rk} - l_{12} v_{rj} v_{rk} \right) + C_{yp\alpha} \omega_c D (l_{11} v_{rj} - l_{12} v_{ri}) \right] + 2 (v_{ri} \Omega_{T_j} - v_{rj} \Omega_{T_i}) - g_0 \frac{z}{R_T} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique projeté dans le repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ nous donne les trois équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_c = \frac{-\rho S}{2I_1} \left[D^2 C_{lp} \omega_c v_r - D C_{l0} v_r^2 \right] \\ \dot{\omega}_a = \frac{1}{I_2} \left[\omega_c \omega_b (I_2 - I_1) + \frac{\rho S}{2} \left(D C_{m\delta} v_r (l_{31} v_{ri} + l_{32} v_{rj} + l_{33} v_{rk}) + D^2 C_{np\delta} \omega_c (l_{21} v_{ri} + l_{22} v_{rj} + l_{23} v_{rk}) - C_{mq} D^2 v_r \omega_a \right) \right] \\ \dot{\omega}_b = \frac{1}{I_2} \left[\omega_c \omega_a (I_1 - I_2) + \frac{\rho S}{2} \left(-D C_{m\delta} v_r (l_{21} v_{ri} + l_{22} v_{rj} + l_{23} v_{rk}) + D^2 C_{np\delta} \omega_c (l_{31} v_{ri} + l_{32} v_{rj} + l_{33} v_{rk}) - C_{mq} D^2 v_r \omega_b \right) \right] \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

Equations cinématiques des éléments du quaternion

L'utilisation du quaternion nécessite de prendre en compte les 4 équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = \frac{1}{2} [-\omega_c \lambda_1 - \omega_a \lambda_2 - \omega_b \lambda_3] \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2} [\omega_c \lambda_0 - \omega_a \lambda_3 + \omega_b \lambda_2] \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2} [\omega_c \lambda_3 + \omega_a \lambda_0 - \omega_b \lambda_1] \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2} [-\omega_c \lambda_2 + \omega_a \lambda_1 + \omega_b \lambda_0] \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

Equations donnant la position du centre de gravité du projectile

L'intégration des composantes de la vitesse absolue dans le repère canon nous donne trois équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{abs_i} \\ \dot{y} = v_{abs_i} \\ \dot{z} = v_{abs_i} \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Pour alléger l'écriture du modèle, nous pouvons donc écrire l'ensemble des équations (E_1 - E_4) sous une forme simplifiée :

$$\underline{\dot{U}} = \underline{f}(\underline{U}(t), \underline{C}, t) \quad (\text{E.5})$$

où $\underline{U}(t) = \underline{U}$ et $\underline{f}(\underline{U}, \underline{C}, t) = \underline{f}$ et

- $\underline{U} = [v_{abs_i}, v_{abs_j}, v_{abs_k}, \omega_c, \omega_a, \omega_b, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x, y, z]^T$
- $\underline{C} = [C_x, C_{yp\delta}, C_{z\delta}, C_{lp}, C_{l0}, C_{m\delta}, C_{np\delta}, C_{mq}]^T$
- $\underline{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}]^T$ correspondant aux seconds membres des différentes équations différentielles.

Annexe F

Dérivées des équations de la mécanique du vol

Nous donnons, pour la fonction f_1 les expressions analytiques des dérivées premières et secondes non nulles par rapport à chaque paramètre d'état et par rapport à chaque coefficient aérodynamique.

$$f_1 = \frac{\rho S}{2m} \left[-v_r v_{ri} C_x + C_{z\delta} \left(l_{11} (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - l_{12} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{ri} v_{rk} \right) + C_{yp\delta} \omega_c D (l_{12} v_{rk} - l_{13} v_{rj}) \right] + 2 (v_{rj} \Omega_{Tk} - v_{rk} \Omega_{Tj}) - g_0 \frac{x}{R_T}$$

Dérivées premières (non nulles) de f_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial v_{ri}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(v_r + v_{ri} * \frac{v_{ri}}{v_r} \right) + C_{z\delta} (-l_{12} v_{rj} - l_{13} v_{rk}) \right] \\ \frac{\partial f_1}{\partial v_{rj}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(v_{ri} * \frac{v_{rj}}{v_r} \right) + C_{z\delta} (l_{11} 2v_{rj} - l_{12} v_{ri}) + C_{yp\delta} \omega_c D (-l_{13}) \right] + 2\Omega_{Tk} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v_{rk}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(v_{ri} * \frac{v_{rk}}{v_r} \right) + C_{z\delta} (l_{11} 2v_{rk} - l_{13} v_{ri}) + C_{yp\delta} \omega_c D l_{12} \right] - 2\Omega_{Tj} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega_c} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{yp\delta} D (l_{12} v_{rk} - l_{13} v_{rj})] \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_0} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (2\lambda_0 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_3 v_{ri} v_{rj} - (-2\lambda_2) v_{ri} v_{rk}) + C_{yp\delta} \omega_c D (2\lambda_3 v_{rk} - (-2\lambda_2) v_{rj})] \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (2\lambda_1 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_2 v_{ri} v_{rj} - 2\lambda_3 v_{ri} v_{rk}) + C_{yp\delta} \omega_c D (2\lambda_2 v_{rk} - 2\lambda_3 v_{rj})] \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-2\lambda_2 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_1 v_{ri} v_{rj} - (-2\lambda_0) v_{ri} v_{rk}) + C_{yp\delta} \omega_c D (2\lambda_1 v_{rk} - (-2\lambda_0) v_{rj})] \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-2\lambda_3 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_0 v_{ri} v_{rj} - 2\lambda_1 v_{ri} v_{rk}) + C_{yp\delta} \omega_c D (2\lambda_0 v_{rk} - 2\lambda_1 v_{rj})] \\ \frac{\partial f_1}{\partial C_x} &= \frac{-\rho S}{2m} v_r v_{ri} \\ \frac{\partial f_1}{\partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [l_{11} (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - l_{12} v_{ri} v_{rj} - l_{13} v_{ri} v_{rk}] \\ \frac{\partial f_1}{\partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [\omega_c D (l_{12} v_{rk} - l_{13} v_{rj})] \end{aligned}$$

Dérivées secondes (non nulles) de f_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (v_{ri})^2} &= \frac{-\rho S}{2m} \left[C_x \left(3 \frac{v_{ri}}{v_r} - \frac{v_{ri}^3}{v_r^3} \right) \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial v_{rj}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(\frac{v_{rj}}{v_r} + v_{ri}^2 \left(-\frac{v_{rj}}{v_r^3} \right) \right) + C_{z\delta} (-l_{12}) \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial v_{rk}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(\frac{v_{rk}}{v_r} + v_{ri}^2 \left(-\frac{v_{rk}}{v_r^3} \right) \right) + C_{z\delta} (-l_{13}) \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial \lambda_0} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-2\lambda_3 v_{rj} - (-2\lambda_2) v_{rk})] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial \lambda_1} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-2\lambda_2 v_{rj} - 2\lambda_3 v_{rk})] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-2\lambda_1 v_{rj} - (-2\lambda_0) v_{rk})] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-2\lambda_0 v_{rj} - 2\lambda_1 v_{rk})] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial C_x} &= \frac{-\rho S}{2m} \left[v_r + \frac{v_{ri}^2}{v_r} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{ri} \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [-l_{12} v_{rj} - l_{13} v_{rk}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (v_{rj})^2} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(v_{ri} \frac{v_r^2 - v_{rj}^2}{v_r^3} \right) + C_{z\delta} 2l_{11} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial v_{rk}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(\frac{v_{ri} v_{rj} * (-v_{rk})}{v_r^3} \right) \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial \omega_c} &= \frac{-\rho S}{2m} C_{yp\delta} D l_{13} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial \lambda_0} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (4\lambda_0 v_{rj} - 2\lambda_3 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c (-(-2\lambda_2))] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial \lambda_1} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (4\lambda_1 v_{rj} - 2\lambda_2 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c (-2\lambda_3)] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_2 v_{rj} - 2\lambda_1 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c (-(-2\lambda_0))] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_3 v_{rj} - 2\lambda_0 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c (-2\lambda_1)] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial C_x} &= \frac{-\rho S}{2m} \frac{v_{ri} v_{rj}}{v_r} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [2l_{11} v_{rj} - l_{12} v_{ri}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D (-l_{13}) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (v_{rk})^2} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(v_{ri} \frac{v_r^2 - v_{rk}^2}{v_r^3} \right) + C_{z\delta} 2l_{11} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \omega_c} &= \frac{\rho S}{2m} C_{yp\delta} D l_{12} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_0} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (4\lambda_0 v_{rk} + 2\lambda_2 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c 2\lambda_3] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_1} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (4\lambda_1 v_{rk} - 2\lambda_3 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c 2\lambda_2] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_2 v_{rk} + 2\lambda_0 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c 2\lambda_1] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_3 v_{rk} - 2\lambda_1 v_{ri}) + C_{yp\delta} D \omega_c 2\lambda_0] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial C_x} &= \frac{-\rho S}{2m} \frac{v_{ri} v_{rk}}{v_r} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [2l_{11} v_{rk} - l_{13} v_{ri}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D l_{12} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial v_{rj}} &= \frac{-\rho S}{2m} C_{yp\delta} D l_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_2 v_{rj} - 2\lambda_1 v_{ri}) + C_{yp\delta} D\omega_c (-(-2\lambda_0))] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_3 v_{rj} - 2\lambda_0 v_{ri}) + C_{yp\delta} D\omega_c (-2\lambda_1)] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial C_x} &= \frac{-\rho S}{2m} \frac{v_{ri} v_{rj}}{v_r} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [2l_{11} v_{rj} - l_{12} v_{ri}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rj} \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D (-l_{13}) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (v_{rk})^2} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_x \left(v_{ri} \frac{v_r^2 - v_{rk}^2}{v_r^3} \right) + C_{z\delta} 2l_{11} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \omega_c} &= \frac{\rho S}{2m} C_{yp\delta} D l_{12} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_0} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (4\lambda_0 v_{rk} + 2\lambda_2 v_{ri}) + C_{yp\delta} D\omega_c 2\lambda_3] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_1} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (4\lambda_1 v_{rk} - 2\lambda_3 v_{ri}) + C_{yp\delta} D\omega_c 2\lambda_2] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_2 v_{rk} + 2\lambda_0 v_{ri}) + C_{yp\delta} D\omega_c 2\lambda_1] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} (-4\lambda_3 v_{rk} - 2\lambda_1 v_{ri}) + C_{yp\delta} D\omega_c 2\lambda_0] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial C_x} &= \frac{-\rho S}{2m} \frac{v_{ri} v_{rk}}{v_r} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [2l_{11} v_{rk} - l_{13} v_{ri}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{rk} \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D l_{12} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial v_{rj}} &= \frac{-\rho S}{2m} C_{yp\delta} D l_{13} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial v_{rk}} &= \frac{\rho S}{2m} C_{yp\delta} D l_{12} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial \lambda_0} &= \frac{\rho S}{2m} C_{yp\delta} D (2\lambda_3 v_{rk} + 2\lambda_2 v_{rj}) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial \lambda_1} &= \frac{\rho S}{2m} C_{yp\delta} D (2\lambda_2 v_{rk} - 2\lambda_3 v_{rj}) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} C_{yp\delta} D (2\lambda_1 v_{rk} + 2\lambda_0 v_{rj}) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} C_{yp\delta} D (2\lambda_0 v_{rk} - 2\lambda_1 v_{rj}) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_c \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} D (l_{12} v_{rk} - l_{13} v_{rj}) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (\lambda_0)^2} &= \frac{\rho S}{2m} C_{z\delta} 2 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_0 \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [C_{z\delta} 2v_{ri} v_{rk} + C_{yp\delta} \omega_c D 2v_{rj}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_0 \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [-C_{z\delta} 2v_{ri} v_{rj} + C_{yp\delta} \omega_c D 2v_{rk}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_0 \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} [2\lambda_0 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_3 v_{ri} v_{rj} + 2\lambda_2 v_{ri} v_{rk}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_0 \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D [2\lambda_3 v_{rk} + 2\lambda_2 v_{rj}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (\lambda_1)^2} &= \frac{\rho S}{2m} C_{z\delta} 2 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} &= \frac{\rho S}{2m} [-C_{z\delta} 2v_{ri} v_{rj} + C_{yp\delta} \omega_c D 2v_{rk}] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3} &= \frac{\rho S}{2m} [-C_{z\delta} 2v_{ri} v_{rk} - C_{yp\delta} \omega_c D 2v_{rj}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1 \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[2\lambda_1 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_2 v_{ri} v_{rj} - 2\lambda_3 v_{ri} v_{rk} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1 \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D \left[2\lambda_2 v_{rk} - 2\lambda_3 v_{rj} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (\lambda_2)^2} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_{z\delta} 2 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_2 \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-2\lambda_2 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_1 v_{ri} v_{rj} + 2\lambda_0 v_{ri} v_{rk} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_2 \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D \left[2\lambda_1 v_{rk} + 2\lambda_0 v_{rj} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial (\lambda_3)^2} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-C_{z\delta} 2 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_3 \partial C_{z\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \left[-2\lambda_3 (v_{rj}^2 + v_{rk}^2) - 2\lambda_0 v_{ri} v_{rj} - 2\lambda_1 v_{ri} v_{rk} \right] \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_3 \partial C_{yp\delta}} &= \frac{\rho S}{2m} \omega_c D \left[2\lambda_0 v_{rk} - 2\lambda_1 v_{rj} \right]
\end{aligned}$$

Comme nous pouvons le constater, le calcul des dérivées premières et secondes de la première équation de la mécanique du vol par rapport aux treize paramètres d'état et aux huit coefficients aérodynamiques est très dense. Il est nécessaire de répéter ce calcul pour chacune des douze autres équations de la mécanique du vol.

Annexe G

Formulation détaillée de la mise en oeuvre numérique de la technique d'identification

Nous donnons dans cet annexe quelques détails sur la mise en oeuvre numérique de la technique d'identification proposée. On note :

- i le numéro de la composante du vecteur considéré (variant de 1 à 13 pour $\underline{U}$ et de 1 à 8 pour $\underline{C}$),
- m le numéro de la mesure courante,
- N_{max} le nombre total d'instants de mesures disponibles.

Ainsi, l'indice i désigne le numéro des composantes du vecteur

$\underline{U} = [v_{abs_i}^m, v_{abs_j}^m, v_{abs_k}^m, \omega_c^m, \omega_a^m, \omega_b^m, \lambda_0^m, \lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, x^m, y^m, z^m]$ et du vecteur $\underline{C} = [C_x, C_{z\delta}, C_{yp\delta}, C_{lp}, C_{l0}, C_{m\delta}, C_{np\delta}, C_{mq}]^T$ strictement dans ces ordres d'écriture. Si l'on utilise le schéma d'Euler explicite pour intégrer les équations de la mécanique du vol, la fonctionnelle discrétisée s'écrit :

$$J(\underline{U}, \underline{C}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{13} \sum_{m=1}^{N_{max}} (U_i^m - \tilde{U}_i^m)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{13} \sum_{m=2}^{N_{max}} \left(\underbrace{-U_i^m + U_i^{m-1} + f_i(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1})}_{A_i(m)} (t^m - t^{m-1}) \right)^2 \Delta t$$

Pour alléger l'écriture, nous définissons des fonctions $A_i(m)$ où i est le numéro du paramètre d'état considéré, et m est le numéro de mesure.

Calcul du gradient de la fonctionnelle J par rapport aux paramètres d'état $\underline{U}$

$$\frac{\partial J}{\partial U_i^m} = \left(U_i^m - \tilde{U}_i^m \right) + \sum_{j=1}^{13} \left[A_j(m) \frac{\partial A_j(m)}{\partial U_i^m} + A_j(m+1) \frac{\partial A_j(m+1)}{\partial U_i^m} \right]$$

Calcul du gradient de la fonctionnelle J par rapport aux coefficients aérodynamiques $\underline{C}$

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^{13} \sum_{m=2}^{N_{max}} \left[A_j(m) \frac{\partial A_j(m)}{\partial C_i} \right]$$

Calcul des dérivées secondes de J

Si l'on dérive J deux fois par rapport au même paramètre d'état et au même instant de mesure, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial (U_i^m)^2} = 1 &+ \sum_{j=1}^{13} \left(\frac{\partial A_j(m)}{\partial U_i^m} \right)^2 + A_j(m) \frac{\partial^2 A_j(m)}{\partial (U_i^m)^2} \\ &+ \left(\frac{\partial A_j(m+1)}{\partial U_i^m} \right)^2 + A_j(m+1) \frac{\partial^2 A_j(m+1)}{\partial (U_i^m)^2} \end{aligned}$$

Dans tous les autres cas (soit deux paramètres d'état identiques $i_1 = i_2$ à des instants différents $m_1 \neq m_2$, soit deux paramètres d'état différents $i_1 \neq i_2$, au même instant de mesure ou non), si l'on dérive J deux fois par rapport aux paramètres d'état, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial U_i^{m_1} \partial U_k^{m_2}} = \sum_{j=1}^{13} \frac{\partial A_j(m_1)}{\partial U_k^{m_2}} \frac{\partial A_j(m_1)}{\partial U_i^{m_1}} + A_j(m_1) \frac{\partial^2 A_j(m_1)}{\partial U_i^{m_1} \partial U_k^{m_2}} \\ + \frac{\partial A_j(m_1+1)}{\partial U_k^{m_2}} \frac{\partial A_j(m_1+1)}{\partial U_i^{m_1}} + A_j(m_1+1) \frac{\partial^2 A_j(m_1+1)}{\partial U_i^{m_1} \partial U_k^{m_2}} \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on dérive J une fois par rapport à un paramètre d'état, puis une fois par rapport à un coefficient aérodynamique, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial U_i^m \partial C_k} &= \sum_{j=1}^{13} \frac{\partial A_j(m)}{\partial C_k} \frac{\partial A_j(m)}{\partial U_i^m} + A_j(m) \frac{\partial^2 A_j(m)}{\partial U_i^m \partial C_k} \\ &+ \frac{\partial A_j(m+1)}{\partial C_k} \frac{\partial A_j(m+1)}{\partial U_i^m} + A_j(m+1) \frac{\partial^2 A_j(m+1)}{\partial U_i^m \partial C_k} \end{aligned}$$

Si l'on dérive deux fois J par rapport à deux coefficients aérodynamiques identiques ou non, nous avons :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial C_i \partial C_k} = \sum_{j=1}^{13} \sum_{m=2}^{N_{max}} \frac{\partial A_j(m)}{\partial C_k} \frac{\partial A_j(m)}{\partial C_i} + A_j(m) \underbrace{\frac{\partial^2 A_j(m)}{\partial C_i \partial C_k}}_{=0}$$

Les fonctions $A_i(m)$ dépendent des équations de la mécanique du vol. A titre d'exemple, les dérivées premières et secondes de la première équation de la mécanique du vol f_1 se trouvent en annexe F, et celles des composantes l_{ij} de la matrice de passage entre les repères intervenant dans les équations $\underline{f}$ se trouvent en annexe B.

Détail de la méthode d'identification dans un cas simple

Supposons que nous ne tenions compte que des paramètres d'état v_{abs_i} et ω_c et des trois coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} et C_{l0} . $\underline{U}$ s'écrit alors $\underline{U}^m = [v_{abs_i}^m, \omega_c^m]^T$ $\forall m \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket$ et $\underline{C}$ s'écrit $\underline{C} = [C_x, C_{lp}, C_{l0}]^T$.

Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\underline{U}(t), \underline{C}, t) = \frac{1}{2} \left(\int_{t=0}^T (v_{abs_i}(t) - \tilde{v}_{abs_i}(t))^2 dt + \int_{t=0}^T (\omega_c(t) - \tilde{\omega}_c(t))^2 dt \right) \\ \text{Sous les contraintes :} \\ v_{abs_i} = f_1(v_{abs_i}, \omega_c, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t) \\ v_{abs_i} = f_4(v_{abs_i}, \omega_c, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t) \end{array} \right. \quad (\text{G.1})$$

Forme discrétisée du problème d'optimisation :

$$\min J(\underline{U}(t), \underline{C}, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (v_{abs_i}^m - \tilde{v}_{abs_i}^m)^2 \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\omega_c^m - \tilde{\omega}_c^m)^2 \Delta t$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} v_{abs_i}^m &= v_{abs_i}^{m-1} + f_1(v_{abs_i}^{m-1}, \omega_c^{m-1}, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t^{m-1}) (t^m - t^{m-1}) \quad m \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \omega_c^m &= \omega_c^{m-1} + f_4(v_{abs_i}^{m-1}, \omega_c^{m-1}, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t^{m-1}) (t^m - t^{m-1}) \quad m \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned}$$

On remplace les contraintes par des termes de pénalisation dans la fonctionnelle. Le problème d'optimisation non linéaire devient : $\min J$ avec

$$\begin{aligned} J(\underline{U}(t), \underline{C}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (v_{abs_i}^m - \tilde{v}_{abs_i}^m)^2 \Delta t + \sum_{m=1}^n (\omega_c^m - \tilde{\omega}_c^m)^2 \Delta t \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=2}^n \underbrace{[-v_{abs_i}^m + v_{abs_i}^{m-1} + f_1(v_{abs_i}^{m-1}, \omega_c^{m-1}, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t^{m-1}) (t^m - t^{m-1})]^2}_{A_1(m)^2} \Delta t \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=2}^n \underbrace{[-\omega_c^m + \omega_c^{m-1} + f_4(v_{abs_i}^{m-1}, \omega_c^{m-1}, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t^{m-1}) (t^m - t^{m-1})]^2}_{A_4(m)^2} \Delta t \end{aligned}$$

A titre d'exemple, nous donnons la formulation du gradient de J par rapport à $v_{abs_i}^m$ où $1 < m < n$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial v_{abs_i}^m} &= (v_{abs_i}^m - \tilde{v}_{abs_i}^m) \Delta t + \underbrace{(-1)}_{\frac{\partial A_1(m)}{\partial v_{abs_i}^m}} \Delta t \\ &+ \underbrace{\left(1 + \frac{\partial f_1(v_{abs_i}^m, \omega_c^m, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t^m) (t^m - t^{m-1})}{\partial v_{abs_i}^m}\right)}_{\frac{\partial A_1(m+1)}{\partial v_{abs_i}^m}} \Delta t \\ &+ (0) \Delta t + \underbrace{\left(\frac{\partial f_4(v_{abs_i}^m, \omega_c^m, C_x, C_{lp}, C_{l0}, t^m) (t^m - t^{m-1})}{\partial v_{abs_i}^m}\right)}_{\frac{\partial A_4(m+1)}{\partial v_{abs_i}^m}} \Delta t \\ &= (v_{abs_i}^m - \tilde{v}_{abs_i}^m) \Delta t + (-1) \Delta t + \left(1 + \frac{\rho S}{2m} [-C_x (2 v_{abs_i}^m)]\right) \Delta t \\ &+ \left(\frac{-\rho S}{2I_1} [C_{lp} D^2 \omega_c - C_{l0} 2 D v_{abs_i}]\right) \Delta t \end{aligned}$$

Nous effectuons de la même manière le calcul du gradient de J par rapport à chaque instant de mesure et pour chacun des deux paramètres d'état v_{abs_i} et ω_c mais aussi par rapport à chacun des coefficients aérodynamiques C_x , C_{lp} et C_{l0} . Nous obtenons alors un système d'équations non linéaires en dimension finie.

Nous utilisons ensuite la méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce système non linéaire. Pour cela, nous linéarisons chacune des équations non linéaire par rapport aux différentes grandeurs. Nous posons

$\underline{P} = [v_{abs_i}^1, v_{abs_i}^2, \dots, v_{abs_i}^n, \omega_c^1, \dots, \omega_c^n, C_x, C_{lp}, C_{l0}]^T$ et aboutissons alors à un système d'équations linéaires que nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$[A] [d\underline{P}] = [B]$$

où :

- $[d\underline{P}]$ désigne le vecteur des incréments (inconnus) des paramètres d'état et des coefficients aérodynamiques,
- $[A]$ est une matrice par bloc des dérivées secondes de J , connues et calculées de manière analytique,
- $[B]$ est fonction du gradient de J , connu et calculé de manière analytique.

La résolution du système matriciel (G.2) nous donne les incréments des paramètres d'état et des coefficients aérodynamiques à chaque itération. En notant k le numéro de l'itération en cours, cela nous permet de mettre à jour les composantes du vecteur $\underline{P}$ de la manière suivante :

$$\underline{P}^{k+1} = \underline{P}^k + d\underline{P}^k \quad (\text{G.2})$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (v_{abs_i}^m)^{k+1} &= (v_{abs_i}^m)^k + (dv_{abs_i}^m)^k \quad \forall m \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket \\ (\omega_c^m)^{k+1} &= (\omega_c^m)^k + (d\omega_c^m)^k \quad \forall m \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket \\ (C_x)^{k+1} &= (C_x)^k + (dC_x)^k \quad \forall m \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket \\ (C_{lp})^{k+1} &= (C_{lp})^k + (dC_{lp})^k \quad \forall m \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket \\ (C_{l0})^{k+1} &= (C_{l0})^k + (dC_{l0})^k \quad \forall m \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket \end{aligned}$$

La matrice A est carrée symétrique ($A_{JI} = A_{IJ}^T$) de dimension $(2n + 3) \times (2n + 3)$ et s'écrit par blocs :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{G.3})$$

Nous donnons ici l'expression des blocs de la partie supérieure de la matrice A .

$$\underbrace{A_{11}}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial (v_{abs_i}^1)^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial v_{abs_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial v_{abs_i}^n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial v_{abs_i}^1} & \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial v_{abs_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial (v_{abs_i}^n)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

$$\underbrace{A_{12}}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial \omega_c^1} & \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial \omega_c^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial \omega_c^n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial \omega_c^1} & \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial \omega_c^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial \omega_c^n} \end{bmatrix} \quad (\text{G.5})$$

$$\underbrace{A_{13}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial C_x} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^2 \partial C_x} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial C_x} \end{bmatrix} \quad (\text{G.6})$$

$$\underbrace{A_{14}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial C_{lp}} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^2 \partial C_{lp}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial C_{lp}} \end{bmatrix} \quad (\text{G.7})$$

$$\underbrace{A_{15}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^1 \partial C_{l0}} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^2 \partial C_{l0}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial v_{abs_i}^n \partial C_{l0}} \end{bmatrix} \quad (\text{G.8})$$

$$\underbrace{A_{22}}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial (\omega_c^1)^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^1 \partial \omega_c^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^1 \partial \omega_c^n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^n \partial \omega_c^1} & \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^n \partial \omega_c^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial (\omega_c^n)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{G.9})$$

$$\underbrace{A_{23}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^1 \partial C_x} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^2 \partial C_x} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^n \partial C_x} \end{bmatrix} \quad (\text{G.10})$$

$$\underbrace{A_{24}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^1 \partial C_{lp}} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^2 \partial C_{lp}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^n \partial C_{lp}} \end{bmatrix} \quad (\text{G.11})$$

$$\underbrace{A_{25}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^1 \partial C_{l0}} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^2 \partial C_{l0}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \omega_c^n \partial C_{l0}} \end{bmatrix} \quad (\text{G.12})$$

$$\underbrace{A_{33}}_{1 \times 1} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial (C_x)^2} \right] \quad (\text{G.13})$$

$$\underbrace{A_{34}}_{1 \times 1} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial C_x \partial C_{lp}} \right] \quad (\text{G.14})$$

$$\underbrace{A_{35}}_{1 \times 1} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial C_x \partial C_{l0}} \right] \quad (\text{G.15})$$

$$\underbrace{A_{44}}_{1 \times 1} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial (C_{lp})^2} \right] \quad (\text{G.16})$$

$$\underbrace{A_{45}}_{1 \times 1} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial C_{lp} \partial C_{l0}} \right] \quad (\text{G.17})$$

$$\underbrace{A_{55}}_{1 \times 1} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial (C_{l0})^2} \right] \quad (\text{G.18})$$

Précisons que ces blocs ne sont pas symétriques, il est donc nécessaire de calculer chacune de leurs composantes.

Annexe H

Les différents schémas pour l'intégration du système différentiel

Nous présentons les différents schémas d'intégration employés dans ce manuscrit. Soit une fonction f réelle et continue d'une variable réelle. Nous notons h le pas de temps.

Schéma d'Euler explicite

Ce schéma s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

Schéma multipas explicite d'Adams-Bashforth

L'ordre 1 de ce schéma n'est autre que le schéma d'Euler explicite.

Ordre 2 :

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{3}{2}f(y_n) - \frac{1}{2}f(y_{n-1}) \right)$$

Ordre 3 :

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{23}{12}f(y_n) - \frac{16}{12}f(y_{n-1}) + \frac{5}{12}f(y_{n-2}) \right)$$

Ordre 4 :

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{55}{24} f(y_n) - \frac{59}{24} f(y_{n-1}) + \frac{37}{24} f(y_{n-2}) - \frac{9}{24} f(y_{n-3}) \right)$$

Schéma implicite BDF (Backward Differentiation Formula)

Le premier ordre s'écrit :

$$y_{n+1} - y_n = h f_{n+1}$$

Ordre 2 :

$$\frac{3}{2} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = h f(y_{n+1})$$

Ordre 3 :

$$\frac{11}{6} y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{2} y_{n-1} - \frac{1}{3} y_{n-2} = h f(y_{n+1})$$

Ordre 4 :

$$\frac{25}{12} y_{n+1} - 4y_n + 3y_{n-1} - \frac{4}{3} y_{n-2} + \frac{1}{4} y_{n-3} = h f(y_{n+1})$$

Ordre 5 :

$$\frac{137}{60} y_{n+1} - 5y_n + 5y_{n-1} - \frac{10}{3} y_{n-2} + \frac{5}{4} y_{n-3} - \frac{1}{5} y_{n-4} = h f(y_{n+1})$$

Ordre 6 :

$$\frac{49}{20} y_{n+1} - 6y_n + \frac{15}{12} y_{n-1} - \frac{20}{3} y_{n-2} + \frac{15}{4} y_{n-3} - \frac{6}{5} y_{n-4} + \frac{1}{6} y_{n-5} = h f(y_{n+1})$$

Schéma implicite de Runge-Kutta d'ordre 4

Ce schéma s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n) \\ k_2 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(y_n + hk_3) \end{aligned}$$

Schéma explicite de Runge-Kutta Feldberg d'ordre 7

Ce schéma s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{41}{840}k_1 + \frac{34}{105}k_6 + \frac{9}{35}k_7 + \frac{9}{35}k_8 + \frac{9}{280}k_9 + \frac{9}{35}k_{10} + \frac{41}{840}k_{11}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n) \\ k_2 &= f\left(y_n + \frac{2}{27}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(y_n + \frac{1}{36}hk_1 + \frac{1}{12}hk_2\right) \\ k_4 &= f\left(y_n + \frac{1}{24}hk_1 + \frac{1}{8}hk_3\right) \\ k_5 &= f\left(y_n + \frac{5}{12}hk_1 - \frac{25}{16}hk_3 + \frac{25}{16}hk_4\right) \\ k_6 &= f\left(y_n + \frac{1}{20}hk_1 + \frac{1}{4}hk_4 + \frac{1}{5}hk_5\right) \\ k_7 &= f\left(y_n - \frac{25}{108}hk_1 + \frac{125}{108}hk_4 + \frac{65}{27}hk_5 + \frac{125}{54}hk_6\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_8 &= f\left(y_n + \frac{31}{300}hk_1 + \frac{61}{225}hk_5 + \frac{2}{9}hk_6 + \frac{13}{900}hk_7\right) \\
k_9 &= f\left(y_n + 2hk_1 - \frac{53}{6}hk_4 + \frac{704}{45}hk_5 - \frac{107}{109}hk_6 + \frac{67}{90}hk_7 + 3hk_8\right) \\
k_{10} &= f\left(y_n - \frac{91}{108}hk_1 + \frac{23}{108}hk_4 + \frac{976}{135}hk_5 + \frac{311}{54}hk_6 + \frac{19}{60}hk_7 + \frac{17}{6}hk_8 - \frac{1}{12}hk_9\right) \\
k_{11} &= f\left(y_n + \frac{2383}{4100}hk_1 - \frac{341}{164}hk_4 + \frac{4496}{1025}hk_5 - \frac{301}{82}hk_6 + \frac{2133}{4100}hk_7 + \frac{45}{82}hk_8 + \frac{45}{164}hk_9 + \frac{18}{41}hk_{10}\right)
\end{aligned}$$

Annexe I

Expressions du terme de pénalisation pour les différents schémas d'intégration

Nous donnons ici l'expression du terme de pénalisation $\underline{R}$ intervenant dans la fonctionnelle J de notre problème pour différents schémas d'intégration. Nous notons h le pas de temps.

Schéma d'Euler explicite

L'utilisation de ce schéma d'intégration conduit à l'expression suivante du terme de pénalisation $\underline{R}$:

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=2}^n \left[-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + h\underline{f}(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1}) \right]^2 \Delta t$$

Schéma multipas explicite d'Adams-Bashforth

En employant le schéma d'intégration à l'ordre 2 le terme de pénalisation $\underline{R}$ s'écrit :

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=3}^n \left[-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + h\frac{3}{2}\underline{f}(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1}) - h\frac{1}{2}\underline{f}(\underline{U}^{m-2}, \underline{C}, t^{m-2}) \right]^2 \Delta t$$

A l'ordre 3 il s'écrit :

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=4}^n \left[-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + h \frac{23}{12} \underline{f}(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1}) - h \frac{16}{12} \underline{f}(\underline{U}^{m-2}, \underline{C}, t^{m-2}) + h \frac{5}{12} \underline{f}(\underline{U}^{m-3}, \underline{C}, t^{m-3}) \right]^2 \Delta t$$

A l'ordre 4, il s'écrit :

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=5}^n \left[-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + h \frac{55}{24} \underline{f}(\underline{U}^{m-1}, \underline{C}, t^{m-1}) - h \frac{59}{24} \underline{f}(\underline{U}^{m-2}, \underline{C}, t^{m-2}) + h \frac{37}{24} \underline{f}(\underline{U}^{m-3}, \underline{C}, t^{m-3}) - h \frac{9}{24} \underline{f}(\underline{U}^{m-4}, \underline{C}, t^{m-4}) \right]^2 \Delta t$$

Schéma implicite BDF (Backward Differentiation Formula)

L'utilisation de ce schéma d'intégration conduit à l'expression suivante du terme de pénalisation $\underline{R}$:

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=2}^n \left[-\underline{U}^m + \underline{U}^{m-1} + h \underline{f}(\underline{U}^m, \underline{C}, t^m) \right]^2 \Delta t$$

A l'ordre 2, il s'écrit :

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=3}^n \left[-\frac{3}{2} \underline{U}^m + 2 \underline{U}^{m-1} - \frac{1}{2} \underline{U}^{m-2} + h \underline{f}(\underline{U}^m, \underline{C}, t^m) \right]^2 \Delta t$$

A l'ordre 3, il s'écrit :

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=4}^n \left[-\frac{11}{6} \underline{U}^m + 3 \underline{U}^{m-1} - \frac{3}{2} \underline{U}^{m-2} + \frac{1}{3} \underline{U}^{m-3} + h \underline{f}(\underline{U}^m, \underline{C}, t^m) \right]^2 \Delta t$$

A l'ordre 4, il s'écrit :

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=5}^n \left[-\frac{25}{12} \underline{U}^m + 4 \underline{U}^{m-1} - 3 \underline{U}^{m-2} + \frac{4}{3} \underline{U}^{m-3} - \frac{1}{4} \underline{U}^{m-4} + h \underline{f}(\underline{U}^m, \underline{C}, t^m) \right]^2 \Delta t$$

A l'ordre 5, il s'écrit :

$$\|\underline{R}(\Psi)\|_E^2 = \sum_{m=6}^n \left[-\frac{137}{60} \underline{U}^m + 5 \underline{U}^{m-1} - 5 \underline{U}^{m-2} + \frac{10}{3} \underline{U}^{m-3} - \frac{5}{4} \underline{U}^{m-4} + \frac{1}{5} \underline{U}^{m-5} + h \underline{f}(\underline{U}^m, \underline{C}, t^m) \right]^2 \Delta t$$

A l'ordre 6, il s'écrit :

$$\|\underline{R}(\underline{\Psi})\|_E^2 = \sum_{m=7}^n \left[-\frac{49}{20}\underline{U}^m + 6\underline{U}^{m-1} - \frac{15}{12}\underline{U}^{m-2} + \frac{20}{3}\underline{U}^{m-3} - \frac{15}{4}\underline{U}^{m-4} + \frac{6}{5}\underline{U}^{m-5} - \frac{1}{6}\underline{U}^{m-6} + h\underline{f}(\underline{U}^m, \underline{C}, t^m) \right]^2 \Delta t$$

Annexe J

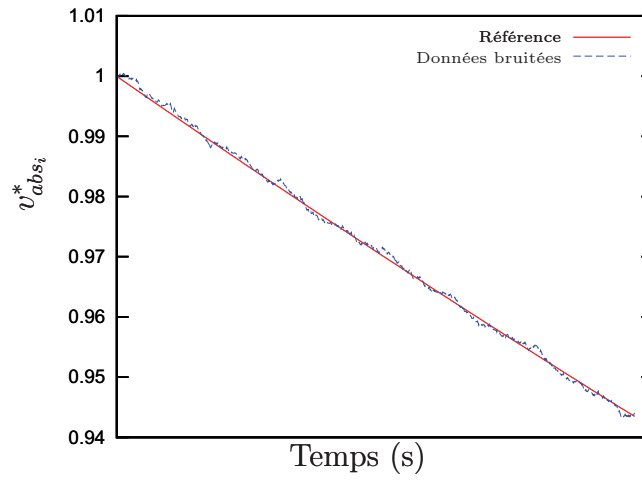
Génération de données d'entrée bruitées

La simulation directe fournit à l'issue du calcul les valeurs v_i , v_j , v_k , ω_c , ω_a , ω_b , x , y et z à chaque instant. Ces données sont utilisées en entrée de la procédure d'identification, et sont éventuellement bruitées.

Pour bruitez nos données [65], une liste de valeurs pseudo-aléatoires est générée et transformée en loi Gaussienne (de moyenne nulle et d'écart-type 1) par le théorème central limite [57]. Puis le bruit affectant les données est généré en appliquant un filtre passe-bas fonction du pas de temps du modèle, d'un gain g_{filtre} et d'un écart-type σ_{filtre} choisis par l'utilisateur. Cette technique permet de simuler un bruit de mesure sur les données plus réaliste qu'un bruit blanc. Le bruit ainsi généré est caractérisé par sa moyenne μ_{bruit} et son écart-type σ_{bruit} . Le tableau J.1 présente les moyennes μ_{bruit} et écarts-types σ_{bruit} du bruit obtenus à partir des gains g_{filtre} et écarts-types σ_{filtre} donnés en entrée du filtre passe-bas. A titre d'exemple, la courbe J.1 présente un jeu de données de vitesse non bruitées et ce même jeu bruité avec un bruit d'écart-type 0.27 et une moyenne de 1.1. Les paramètres σ_{filtre} , g_{filtre} , μ_{bruit} et σ_{bruit} sont en $m.s^{-1}$.

Données d'entrée		Données de sortie	
σ_{filtre}	g_{filtre}	μ_{bruit}	σ_{bruit}
0	0	0	0
1	1	0.011	0.042
2	2	0.043	0.17
3	3	0.097	0.38
4	4	0.17	0.68
5	5	0.27	1.1
6	6	0.39	1.5
7	7	0.53	2.07
8	8	0.69	2.75
9	9	0.87	3.4
10	10	1.07	4.23
20	20	4.30	16.91
30	30	9.66	38.05
40	40	17.18	67.64
50	50	26.85	105.69

TABLE J.1 – Génération du bruit

FIGURE J.1 – Vitesse v_{abs_i} bruitée

Bibliographie

- [1] U. M. Ascher and L. R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1ère édition, 1998.
- [2] S.M. Aseev and A.V. Kryazhimskiy. *The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons*. International Institute for Applied Systems Analysis, 2005.
- [3] R. C. Aster, B. Borchers, and C. H. Thurber. *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier Academic Press, USA, 1ère édition, 2005.
- [4] C. Berner, V. Fleck, E. Sommer, A. Lentz, and A. Dupuis. Comparison of simultaneous free flight measurements between 3D magnetic sensors and aeroballistic range data. (PU 627/2004), 2004.
- [5] M. Bertero and C. De Mol. *SVD for linear inverse problems*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1995.
- [6] D.P. Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena Scientific Belmont, MA, 1999.
- [7] R. Bracewell. *The Fourier transform and its applications*. Springer-Verlag, Boston, 3ème édition Mc-Graw-Hill édition, 2000. Notes in Math.
- [8] J.C. Butcher and J. Wiley. *Numerical methods for ordinary differential equations*. Wiley Online Library, Angleterre, 1ère édition, 2003.
- [9] D. Calvetti, S. Morigi, L. Reichel, and F. Sgallari. Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems. *Journal of computational and applied mathematics*, 123(1-2) :423–446, 2000.
- [10] P. Champigny and P. Denis. The ONERA aeroprediction code missile. In *21st AIAA Advanced Measurement Technology and Ground Testing Conference*. ONERA, Châtillon, FRANCE, 19-23 avril 2004.

- [11] S. Changey, V. Fleck, and D. Beauvois. Projectile attitude and position determination using magnetometer sensor only. In *Proceedings of SPIE*, volume 5803, page 49, 2005.
- [12] G. T. Chapman and D. B. Kirk. A method for extracting aerodynamic coefficients from free-flight data. *AIAA Journal*, 8(4) :753 – 758, 1970.
- [13] Y. Chen, R. Duan, and V. Rokhlin. On the inverse scattering problem in the acoustic environment. *Journal of Computational Physics*, 228(9) :3209 – 3231, 2009.
- [14] Y. Chen, C. Wen, H. Dou, and M. Sun. Iterative learning identification of aerodynamic drag curve from tracking radar measurements. *Control Engineering practice*, 5(11) :1543–1553, 1997.
- [15] Y. Chen, C. Wen, Z. Gong, and M. Sun. Drag coefficient curve identification of projectiles from flight tests via optimal dynamic fitting. *Control Engineering practice*, 5(5) :627–636, 1997.
- [16] Y. Ching-Yu. Solution of an inverse vibration problem using a linear least-squares error method. *Applied Mathematical Modelling*, 20(10) :785 – 788, 1996.
- [17] G. Chowdhary and R. Jategaonkar. Aerodynamic parameter estimation from flight data applying extended and unscented Kalman filter. *Aerospace science and technology*, 14 :106–117, 2010.
- [18] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using an iterated Tikhonov regularisation. *Inverse Problems*, 17 :553–570, 2001.
- [19] J. Dardé. *Méthodes de quasi-réversibilité et de lignes de niveau appliquées aux problèmes inverses elliptiques*. Thèse de l’Université de Paris 7, Paris, 2010.
- [20] Direction Générale de l’Armement (DGA). Mesures de vitesse par radar doppler, 2007. Mode opératoire ETBS n°208 S-CAT Ed02.
- [21] F. Delvare and A. Cimetière. A robust data completion method for two dimensional Cauchy problems associated with the Laplace equation. *European Journal of Computational Mechanics*, 20 :309–340, 2011.
- [22] H. Demailly, F. Delvare, C. Grignon, S. Heddadj, and P. Bailly. Identification inverse des coefficients aérodynamiques d’un engin hypersonique à partir de don-

- nées issues de vol. In *20ème Congrès Français de Mécanique*, Août-Septembre 2011.
- [23] H. Demailly, F. Delvare, C. Grignon, S. Heddadj, and P. Bailly. Identification of aerodynamic coefficients of a kinetic energy projectile from flight data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011. Soumis le 24 octobre 2011.
- [24] H. Demailly, F. Delvare, C. Grignon, S. Heddadj, and P. Bailly. Inverse aerodynamic coefficients identification of a kinetic energy projectile from flight data. In *26th International symposium on ballistics*, Septembre 2011.
- [25] Observatoire Français des techniques avancées. *Problèmes inverses, de l'expérimentation à la modélisation*. Editions TEC & DOC, Paris, France, 1ère édition, 1999.
- [26] J. M. Elble, N. V. Sahinidis, and P. Vouzis. GPU computing with Kaczmarz's and other iterative algorithms for linear systems. *Parallel Computing*, 36(5-6) :215 – 231, 2010. Parallel Matrix Algorithms and Applications.
- [27] W.R. Fan and H.X. Wang. Maximum entropy regularization method for electrical impedance tomography combined with a normalized sensitivity map. *Flow Measurement and Instrumentation*, 21(3) :277 – 283, 2010.
- [28] V. Fleck. Introduction à la balistique extérieure avec exercices, 2005. Cours de balistique extérieure, Coetquidan.
- [29] V. Fleck, E. Sommer, and C. Berner. Aerodynamic characteristics of a long range spinning artillery shell obtained from 3D magnetic sensors. In *22nd International symposium on ballistics*. NDIA, November 2005.
- [30] Military Agency for Standardization (MAS). The six/seven degrees of freedom guided projectile trajectory model : Standardization agreement (stanag). Technical Report STANAG 4618, Draft Edition 2., North Atlantic Treaty Organization (NATO), 2006.
- [31] A.N. Galybin. An inverse problem of elastostatics in mechanics of composites. *Composites Science and Technology*, 68(5) :1188 – 1197, 2008.
- [32] E. Gandino, L. Garibaldi, and S. Marchesiello. Pescara benchmarks : nonlinear identification. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 305. IOP Publishing, 2011. article n°012132.

- [33] S. George and M. Thamban Nair. On a generalized Arcangeli's method for tikhonov regularization with inexact data. *Numerical functional analysis and optimization*, 19(7-8) :773–787, 1998.
- [34] C. Grignon. Introduction à la balistique extérieure, cours de la DGA tt, 2009.
- [35] C. Grignon. Notions d'aérodynamique appliquées aux munitions, cours de la DGA tt, 2009.
- [36] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13(49-52) :28, 1902.
- [37] S. Heddadj. *Aéroélasticité des corps de grand allongement en régime supersonique*. Thèse de l'Université d'Orléans, 2001.
- [38] J. Idier. *Bayesian approach to inverse problems*. Wiley-ISTE, 2008.
- [39] K. W. Illif. Parameter estimation for flight vehicles. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 12(5) :609–622, 1989.
- [40] I.M. Johnstone and B.W. Silverman. Speed of estimation in positron emission tomography and related inverse problems. *The Annals of Statistics*, pages 251–280, 1990.
- [41] K. Judd. Forecasting with imperfect models, dynamically constrained inverse problems, and gradient descent algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(2) :216 – 232, 2008.
- [42] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on automatic control*, 45 :477–482, 2000.
- [43] J. R. Kelsey and D. P. Peterson. Real time estimation of aerodynamic coefficients for a re-entry body by means of an extended Kalman filter. *Acta aeronautica et astronautica Sinica*, 3 :15–24, 1982.
- [44] V. Klein. Estimation of aircraft aerodynamic parameters from flight data. *Prog. Aerospace Sci.*, 26(4) :1 – 77, 1989.
- [45] Z.S. Kuo and H.Y. Huang. Parameter identification of spin-stabilised projectiles using a modified Newton-Raphson technique. In *Trans. Japan Soc. Aero. S Sci. 13th International section*, 2000.
- [46] R. Lattès and J. L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Dunod, Paris, 1967.

- [47] D. T.W. Lin, C.C. Wang, C.Y. Yang, and J.C. Li. Inverse estimation of temperature boundary conditions with irregular shape of gas tank. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(21-22) :4651 – 4662, 2010.
- [48] J. L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, volume 1. Dunod, Paris, 1968.
- [49] I.S. Liu. Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 46 :131–148, 1972.
- [50] S. Liu. Inverse problem for structural acoustic interaction. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 74(7) :2647 – 2662, 2011.
- [51] T. Lu, B. Liu, P.X. Jiang, Y.W. Zhang, and H. Li. A two-dimensional inverse heat conduction problem in estimating the fluid temperature in a pipeline. *Applied Thermal Engineering*, 30(13) :1574 – 1579, 2010.
- [52] G. Mahmutyazicioglu and B. E. Platin. Aerodynamic data identification using linear aeroballistic theory. In *System Identification for Integrated A/C Development and Flight Testing, RTO Symposium*, number RTO MP-11. Research and Technology Organization, May 1998.
- [53] T. Merkel. Quaternions d’Hamilton pour le calcul des mouvements d’un projectile, 1982. Notice 611/82.
- [54] J. More. The Levenberg-Marquardt algorithm : implementation and theory. *Numerical analysis*, pages 105–116, 1978.
- [55] V. A. Morozov. Error estimates for the solution of an incorrectly posed problem involving unbounded linear operators. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(1) :35–49, 1969.
- [56] B. F. Nielsen, X. Cai, and M. Lysaker. On the possibility for computing the transmembrane potential in the heart with a one shot method : An inverse problem. *Mathematical Biosciences*, 210(2) :523 – 553, 2007.
- [57] D. Nualart and G. Peccati. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Annals of Probability*, 33(1) :177–193, 2005.
- [58] G. Paulus. Méthodes explicites de Runge-Kutta pour l’intégration d’équations différentielles ordinaires. Technical Report Notice N601/79, Institut Saint-Louis, Saint-Louis, FRANCE, 1979.

- [59] H.H. Qin and T. Wei. Quasi-reversibility and truncation methods to solve a Cauchy problem for the modified Helmholtz equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(2) :352 – 366, 2009.
- [60] J. Quanwei and C. Qiongang. Dynamic model for real-time estimation of aerodynamic characteristics. *Journal of Aircraft*, 26 :315–321, 1989.
- [61] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical mathematics*. Springer, New-York, 2000.
- [62] J. C. Raynal, C. Quémard, and J. P. Bècle. The need for dry air conditions in engine airframe integration windtunnel studies. In *21st AIAA Advanced Measurement Technology and Ground Testing Conference*, 19-22 June 2000.
- [63] R. Tyrrell Rockafellar. Lagrange multipliers and optimality. *SIAM Review*, 35 :183–238, June 1993.
- [64] Y. Runfola. Traitement des mesures en tir tendu. 2007. Cours de la DGA Tt.
- [65] J. M. Smith. *Mathematical modeling and digital simulation for engineers and scientists*. 1. Wiley, New-York, 2ème edition, 1987.
- [66] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. *Solution of ill-posed problems*. John Wiley and Sons, 1977.
- [67] L. Tung. *A Bidomain model for describing ischemic myocardial D-C potentials*. Ph.d. diss., Cambridge, 1978.
- [68] E. Walter and L. Pronzato. *Identification of parametric models from experimental data*. Springer-Verlag, Germany, 1ère edition, 1997.
- [69] S. Weiss, K.F. Doherr, and H. Schiling. Analytical solution and parameter estimation of projectile dynamics. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 32 :67–74, 1995.
- [70] P. Wey, F. Seiler, J. Srulijes, M. Bastide, and B. Martinez. Free-flight motion analysis based on shock-tunnel experiments. In *26th International symposium on ballistics*. NDIA, September 2011.
- [71] W. E. Jr. Williamson and J. L. McDowell. Instrument modeling for aerodynamic coefficient identification from flight test data. *Journal of Guidance and Control*, 3(3) :275–279, 1980.

- [72] H. Yamada, T. Miyata, and H. Ichikawa. Measurement of aerodynamic coefficients by system identification methods. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 42 :1255–1263, 1992.
- [73] J. Zhou, Y. Zhang, J.K. Chen, and Z.C. Feng. Inverse estimation of surface heating condition in a three-dimensional object using conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(13-14) :2643 – 2654, 2010.

Hélène DEMAILLY

Identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol

Résumé :

La maîtrise du comportement en vol d'un projectile est, en partie, conditionnée par la connaissance des coefficients associés à chaque effort aérodynamique. Différents outils sont utilisés dans l'industrie, tels que les codes numériques aérodynamiques ou les essais en soufflerie, afin d'obtenir une première estimation des coefficients en phase d'avant-projet. Il est ensuite nécessaire de vérifier la valeur des coefficients et de valider le comportement du projectile en vol au moyen de tirs instrumentés. Un outil automatisé est donc proposé afin d'identifier les coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir des mesures issues d'un vol. La technique d'identification est pensée pour être applicable à une gamme la plus large de projectiles. Elle introduit un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie. La fonctionnelle du problème contient deux termes : un terme d'écart entre les paramètres d'état et les mesures, de sorte à s'approcher au mieux des mesures et à les relaxer, et un terme de pénalisation prenant en compte les équations de la mécanique du vol. L'outil proposé est testé, pour un projectile de type flèche, avec des données simulées ou avec des données issues de tirs. Il permet l'identification des coefficients aérodynamiques recherchés. L'algorithme est robuste face au bruit et permet également la reconstruction d'une trajectoire débruitée.

Mots clés : Identification, coefficients aérodynamiques, optimisation non linéaire, technique de Newton-Raphson, projectile flèche

Identification of the aerodynamic coefficients of a projectile from flight data

Abstract :

The control of the flight behaviour of a projectile partly depends on the knowledge of the coefficients associated with each aerodynamic loading. Different tools are used in the industry, such as numerical aerodynamic codes or wind tests in order to obtain a first estimate of the coefficients during the stage of pilot study. It is then necessary to verify the value of the coefficients and to validate the behaviour of the projectile thanks to scored fires. An automated tool is consequently proposed in order to identify the aerodynamic coefficients of a projectile from flight data. The identification technique is designed so as to be applicable to the widest range of projectiles. It presents a nonlinear optimization problem in finite dimension. The functional of the problem contains two terms : the first one is a gap between the state parameters and the measurements, in order to approach the measurements at best and to relax them, and the second one is a penalization term which takes the flight mechanics equations into account. The proposed tool is tested, for a Kinetic Energy projectile, with simulated data or real flight data. It enables the identification of the searched out aerodynamic coefficients. The algorithm is robust in a noisy environment and also enables the reconstruction of a denoised trajectory.

Keywords : Identification of aerodynamic coefficients, flight data, nonlinear optimization, Newton-Raphson technique, Kinetic Energy projectile

Laboratoire PRISME, 88 Boulevard Lahitolle, 18020 Bourges Cédex

