

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES DE L'HOMME ET DE LA SOCIÉTÉ

Laboratoire d'Economie d'Orléans

THÈSE présentée par :

Jaouad MADKOUR

soutenue le : **19 avril 2013**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : Sciences Economiques

Modèles non-linéaires et prévision
--

THÈSE dirigée par :

Gilbert COLLETAZ
Christophe HURLIN

Professeur, Université d'Orléans
Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Julien CHEVALLIER
Olivier DARNE

Professeur, Université Paris Ouest-Nanterre la Défense
Professeur, Université de Nantes

JURY :

Julien CHEVALLIER
Gilbert COLLETAZ
Olivier DARNE
Christophe HURLIN
Bertrand MAILLET
Sessi TOKPAVI

Professeur, Université Paris Ouest-Nanterre la Défense
Professeur, Université d'Orléans
Professeur, Université de Nantes
Professeur, Université d'Orléans
Maître de conférences, Université d'Orléans
Maître de conférences, Université Paris Ouest-Nanterre la Défense

*L'Université d'Orléans n'entend donner aucune approbation ni
improbation aux opinions émises dans les thèses ;
elles doivent être considérées comme propres
à leurs auteurs.*

Remerciements

Je tiens d'abord à adresser mes remerciements à mes directeurs de thèse Monsieur Gilbert Colletaz et Monsieur Christophe Hurlin qui ont accepté de diriger ma thèse et surtout de m'avoir laissé la totale indépendance dans mon travail de recherche au sein du Laboratoire d'Economie d'Orléans (LEO) durant ces quatre années. Je leur exprime ici ma profonde gratitude. Je remercie très sincèrement Monsieur Julien Chevallier et Monsieur Olivier Darné d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse ainsi que Monsieur Bertrand Maillet et Monsieur Sessi Tokpavi d'avoir accepté de faire partie du jury.

Un remerciement chaleureux à mes trois amis Anas Benjelloun, Choukri Abdorabi et Cherif Elmsiyah qui m'ont soutenu moralement et par tous les moyens jusqu'à l'issue de cette thèse. Je remercie également l'ensemble des mes amis à Aix en Provence et à Orléans que je ne saurais citer sans risque d'oubli. A vous tous, je dis merci.

Deux personnes assurant les services administratif et technique du LEO, et sans qui celui-ci cesserai de fonctionner, méritent plus que des remerciements. Je pense à Renée-Hélène Saliège pour tous les services administratifs qu'elle m'a rendus au moment où j'étais installé dans le sud, loin du laboratoire. Je pense également à Yvan Stroppa pour ces aides informatiques et aussi pour sa bonne humeur. A vous deux, je dis merci.

Enfin, je souhaite remercier tous les membres de ma famille pour leur soutien constant. Je commence par mes parents Mohamed et Naïma à qui je ne dois pas que mon existence mais bien plus. Je voudrais également remercier mon grand frère Taoufik, mon frère Zohaïr, son épouse Noura ainsi que leur petite Firdawss. Merci à ma sœur Fadoua et son époux Younes et à mes frères Fouad et Sami. A vous tous, je dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modèles non linéaires et prévision	9
1.1 Introduction	9
1.2 Modèles à changement de régimes	10
1.2.1 Les modèles à variable de transition observable	11
1.2.2 Les modèles à variable de transition inobservable	13
1.3 Prévision	14
1.3.1 Prévision ponctuelle	15
1.3.2 Intervalle de prévision	18
1.3.3 Densité de prévision	19
1.4 Evaluation des prévisions	20
1.4.1 Evaluation des intervalles de prévision	20
1.4.2 Evaluation des densités de prévision	39
1.5 Conclusion	49
2 Evaluation des intervalles de prévision	51
2.1 Introduction	51
2.2 Une nouvelle approche GMM	52
2.2.1 Environnement du test	53
2.2.2 Conditions de moment	54
2.2.3 Procédure de test	56
2.3 Simulations Monte Carlo	58
2.3.1 Taille empirique	58
2.3.2 Puissance empirique	58
2.3.3 Ratios de faisabilité des tests GMM et LR	62
2.4 Application empirique	64

2.5	Conclusion	68
3	Evaluation des densités de prévision	69
3.1	Introduction	69
3.2	Une approche GMM	70
3.2.1	Conditions de moment	71
3.2.2	Statistiques de test et distributions asymptotiques	72
3.3	Expériences Monte Carlo	73
3.3.1	Tailles empiriques	74
3.3.2	Puissances empiriques	74
3.4	Application empirique	75
3.5	Conclusion	83
4	Apport des modèles à changement de régimes : une analyse empirique	85
4.1	Introduction	85
4.2	Les données	86
4.3	Les modèles	91
4.4	Mise en œuvre	92
4.4.1	Spécification	93
4.4.2	Estimation	93
4.4.3	Calcul des prévisions	95
4.4.4	Comparaison et évaluation des prévisions	104
4.5	Résultats	107
4.6	Conclusion	111
	Conclusion générale	113
	Bibliographie	117
	Annexes	125
A		127
A.1	Estimation des paramètres des modèles TAR et SETAR	127
A.2	Estimation des paramètres du modèle STAR	128
A.3	Estimation des paramètres du modèle MS-AR	129
A.3.1	La probabilité prévue	130
A.3.2	La probabilité filtrée	130
A.3.3	La probabilité lissée	131

B	133
B.1 J-statistiques	133
B.2 Procédure Monte Carlo de Dufour (2006)	134
C	135
C.1 Distribution des transformées de Rosenblatt (1952)	135
C.2 Distribution des transformées de Berkowitz (2001)	136
D	137
D.1 Evolution graphique des séries	138
D.2 Critères d'information AIC	142
D.3 Estimation du seuil des modèles SETAR	145
D.4 Probabilités filtrées et probabilités lissées associées aux modèles MS-AR .	149

Liste des figures

1.1	Fonctions de transition	13
1.2	Intervalles de prévision	19
1.3	Densités de prévision	20
1.4	Value-at-Risk	21
1.5	VaR(5%) des rendements du SP 500 et violations correspondantes	22
1.6	VaR(1%) des rendements du SP 500 et violations correspondantes	22
1.7	Approche graphique de Diebold <i>et al.</i> (1998)	47
1.8	Approche graphique de Clements and Smith (2001)	48
2.1	Transformation en blocs des violations	53
2.2	Polynômes de Krawtchouk	55
2.3	Evolution de la puissance en fonction de la taille d'échantillon	64
2.4	Evolution de la puissance en fonction de la taille du bloc	64
3.1	Polynômes orthonormaux de Legendre et d'Hermite	72
3.2	Puissance des tests <i>vs</i> Nombre de polynômes ($\alpha = 1\%$)	79
3.3	Puissance des tests <i>vs</i> Taille d'échantillon ($\alpha = 1\%$)	79
3.4	Puissance des tests <i>vs</i> Nombre de polynômes ($\alpha = 5\%$)	80
3.5	Puissance des tests <i>vs</i> Taille d'échantillon ($\alpha = 5\%$)	80
3.6	Puissance des tests <i>vs</i> Nombre de polynômes ($\alpha = 10\%$)	81
3.7	Puissance des tests <i>vs</i> Taille d'échantillon ($\alpha = 10\%$)	81
D.1	Indices de production industrielle	138
D.2	Taux de chômage	139
D.3	Indices boursiers	140
D.4	Taux de change	141
D.5	Seuils des modèles SETAR - Production industrielle	145
D.6	Seuils des modèles SETAR - Taux de chômage	146

D.7	Seuils des modèles SETAR - Indices boursiers	147
D.8	Seuils des modèles SETAR - Taux de change	148
D.9	Probabilités filtrées - Production industrielle	149
D.10	Probabilités lissées - Production industrielle	150
D.11	Probabilités filtrées - Taux de chômage	151
D.12	Probabilités lissées - Taux de chômage	152
D.13	Probabilités filtrées - Indices boursiers	153
D.14	Probabilités lissées - Indices boursiers	154
D.15	Probabilités filtrées - Taux de change	155
D.16	Probabilités lissées - Taux de change	156

Liste des tableaux

2.1	Tailles des tests d'évaluation des intervalles de prévision ($N = 100$)	59
2.2	Tailles des tests d'évaluation des intervalles de prévision ($N = 25$)	60
2.3	Puissances des tests d'évaluation des intervalles de prévision ($N = 100$) . .	62
2.4	Puissances des tests d'évaluation des intervalles de prévision ($N = 25$) . .	63
2.5	Ratios de faisabilité des tests d'évaluation des intervalles de prévision . . .	65
2.6	Evaluation des intervalles de prévision (SP 500)	66
2.7	Evaluation des intervalles de prévision (Nikkei 225)	67
3.1	Tailles des tests d'évaluation des densités de prévision (Lois normales) . .	75
3.2	Tailles des tests d'évaluation des densités de prévision (Lois de khi 2) . . .	76
3.3	Puissances des tests d'évaluation des densités de prévision (Lois normales)	77
3.4	Puissances des tests d'évaluation des densités de prévision (Lois de khi 2)	78
3.5	Sélection de Modèles	82
3.6	Tests d'évaluation des densités de prévision	82
4.1	Statistiques descriptives des variables en niveaux	87
4.2	<i>P-values</i> des tests de racine unitaire de Dickey et Fuller	89
4.3	Statistiques descriptives des taux de croissance des variables	90
4.4	Sélection des modèles AR, SETAR et MS-AR	94
4.5	Estimation de la constante de la marche aléatoire	95
4.6	Paramètres estimés des modèles AR - Production industrielle	96
4.7	Paramètres estimés des modèles AR - Taux de chômage	96
4.8	Paramètres estimés des modèles AR - Indices boursiers	97
4.9	Paramètres estimés des modèles AR - Taux de change	97
4.10	Paramètres estimés des modèles SETAR - Production industrielle	98
4.11	Paramètres estimés des modèles SETAR - Taux de chômage	99
4.12	Paramètres estimés des modèles SETAR - Indices boursiers	100
4.13	Paramètres estimés des modèles SETAR - Taux de change	101

4.14 Paramètres estimés des modèles MS-AR - Production industrielle	102
4.15 Paramètres estimés des modèles MS-AR - Taux de chômage	103
4.16 Paramètres estimés des modèles MS-AR - Indices boursiers	104
4.17 Paramètres estimés des modèles MS-AR - Taux de change	105
4.18 Comparaison des prévisions ponctuelles	108
4.19 Evaluation des intervalles de prévision	110
4.20 Evaluation des densités de prévision	111
 D.1 Critères d'information AIC - Modèles AR	 142
D.2 Critères d'information AIC - Modèles SETAR	143
D.3 Critères d'information AIC - Modèles MS-AR	144

Introduction générale

“ *Whilst non-linear models are often used for a variety of purposes, one of their uses is for forecasting, and it is in terms of their forecasting performance that they are most often judged*”. Cette citation de Clements *et al.* (2004) souligne l’importance des modèles non-linéaires dans la modélisation économique en général et dans la prévision en particulier. Nous en tirons trois enseignements : *i)* Les modèles non-linéaires sont utilisés à des fins diverses, en particulier dans l’ajustement des données. En effet, étant donné qu’il est impossible de rendre compte des phénomènes non-linéaires observés dans la plupart des séries macroéconomiques et financières à l’aide de modèles linéaires usuels, il a été nécessaire de recourir à des modèles non-linéaires qui puissent rendre compte de ce type de phénomènes. Or, la notion de non-linéarité étant assez générale, la famille des modèles non-linéaires est très large. Néanmoins, une classe très particulière a émergé en économie, il s’agit des modèles à changement de régimes dans lesquels la non-linéarité est approximée localement par des modèles linéaires de type ARMA. Avec cette nouvelle forme de modélisation, une nouvelle structuration des données économiques du genre « conjoncture haute/conjoncture basse » par exemple est alors possible. *ii)* La prévision est l’une des utilisations des modèles non-linéaires : celle-ci prend, en effet, tout son sens avec ce genre de modélisation car, au-delà de la prévision ponctuelle, et contrairement au cadre restrictif « dynamique linéaire/erreurs normales », les densités de prévision ne sont plus nécessairement symétriques ni unimodales et les intervalles de prévision qui en résultent peuvent être asymétriques et/ou discontinus permettant une description plus fine de l’incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle. Ceci n’est pas sans conséquences au niveau de la prise de décision car il est maintenant possible de formuler des prévisions plus nuancées telles que « le taux de croissance du produit intérieur brut est prévu, le prochain trimestre, à 2% avec une probabilité de 0.95 qu’il soit compris entre 0.5% et 3% ». *iii)* C’est en termes de leur qualité prédictive que les modèles non-linéaires sont jugés : une prévision, et *in fine* le modèle ayant servi à son calcul, n’a d’intérêt pour l’utilisateur que si elle est valide. Mais étant donné la multitude de ces modèles, sans

compter les modèles linéaires habituels, l'élimination de certains d'entre eux s'impose, encore faut-il disposer d'outils statistiques permettant l'évaluation et la comparaison des prévisions, en particulier par intervalle et par densité car c'est à ce niveau qu'un gain en performance par rapport aux modèles linéaires est possible.

Problématique

La particularité des modèles non-linéaires en général et des modèles à changement de régimes en particulier réside, au niveau de l'ajustement des données, dans leur capacité à reproduire les asymétries et les multimodalités mises en évidence dans les séries macroéconomiques et financières, ce qui n'est pas le cas avec leurs homologues linéaires de type ARMA. Au niveau de la prévision, ils se démarquent par leur aptitude à mieux décrire l'incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle en donnant lieu à des intervalles de prévision asymétriques et/ou discontinus et des densités de prévision asymétriques et/ou multimodales. Mais cette avancée, notamment en matière de prévision, est-elle assez significative pour privilégier les modèles non-linéaires malgré la complexité de cette modélisation ? La réponse ne peut être que d'ordre empirique et nécessite des outils d'évaluation assez puissants. Or, contrairement aux méthodes de construction des prévisions, de tels outils sont relativement rares et appellent à plus de développement. Au niveau empirique, la comparaison des qualités prédictives des modèles linéaires et des modèles non-linéaires (e.g. Stock and Watson, 1999) a montré que de simples modèles linéaires s'avèrent plus performants si le critère de comparaison est la prévision ponctuelle. Par contre, en termes d'intervalles et de densités de prévision, on tend à privilégier les modèles non-linéaires (e.g. Clements and Smith, 2001). De telles conclusions méritent d'être révisées notamment à la lumière de notre nouvelle approche d'évaluation.

Méthodologie adoptée

Cette thèse, portant sur les modèles non-linéaires et la prévision, commence par un état des lieux des différents aspects de la modélisation non-linéaire et plus précisément des modèles à changement de régimes. En particulier, les méthodes de construction et d'évaluation des prévisions sont passées en revue. Si au niveau ponctuel, l'apport de ces modèles à changement de régimes en matière de prévision peut être négligeable relativement à leurs homologues linéaires, les intervalles et les densités de prévision qu'ils permettent de construire sont au contraire plus informatifs quant à l'incertitude autour de la prévision ponctuelle dans la mesure où ces dernières formes de prévisions dérogent au cadre standard de symétrie et de continuité des intervalles de prévision et de symétrie et d'unimodalité des densités de prévision, ce qui implique une meilleure prise de déci-

sion au niveau économique. Ces formes de prévisions requièrent donc plus d'attention, notamment en termes d'évaluation. Concernant les intervalles de prévision, il est bien établi, depuis Christoffersen (1998), qu'ils sont valides si et seulement si le processus des violations associées est une suite de réalisations indépendantes d'une loi de Bernoulli, ou de façon équivalente, si la somme de ces violations suit une loi binomiale. Par conséquent, une façon de tester la validité d'un intervalle de prévision est de tester l'hypothèse nulle que la somme des violations suit une loi binomiale. Pour ce faire, nous construisons des J-statistiques à partir des polynômes orthonormaux de Krawtchouk associés à la loi binomiale, et ce, en se basant sur les travaux de Bontemps and Meddahi (2012) qui ont développé un cadre GMM de tests d'hypothèses distributionnelles. Dans ce même esprit, nous proposons des tests d'évaluation des densités de prévision. En effet, comme dans le cas des intervalles de prévision, tester la validité d'une densité de prévision revient simplement à tester des hypothèses distributionnelles, en l'occurrence la loi uniforme (Diebold *et al.*, 1998) ou la loi normale centrée et réduite (Berkowitz, 2001). A ces deux lois correspondent les polynômes orthonormaux de Legendre et d'Hermite, respectivement, à partir desquels nous construisons des J-statistiques dans un cadre GMM. Nous utilisons cette nouvelle approche d'évaluation lors d'une comparaison empirique entre des modèles linéaires et des modèles non-linéaires en matière de prévision. L'originalité de cette analyse par rapport à l'abondante littérature sur ce sujet est qu'elle considère simultanément des données relatives à différents pays, différentes variables économiques et différentes fréquences d'observation.

Plan de la thèse

Cette thèse comporte quatre chapitres. L'objectif du premier chapitre est de montrer comment les méthodes récentes en séries temporelles non-linéaires peuvent être mises en œuvre dans la modélisation des séries macroéconomiques et financières. Plus précisément, les différentes écritures des modèles à changement de régimes sont présentées et regroupées selon la nature de la transition entre les régimes (transition lisse/transition abrupte) et selon l'observabilité de la variable de transition (modèles à seuil/modèles à changement de régimes markovien). Ces modèles, conçus pour reproduire les asymétries observées dans la pratique, sont progressivement utilisés à des fins de prévision. Celle-ci prend, en fait, tout son sens avec cette nouvelle forme de modélisation car au-delà de la prévision au point moyen, les intervalles et les densités de prévision sont exploitables dans la prise de décision. En effet, contrairement au cadre linéaire où elles sont symétriques et continues (respectivement, unimodales), ces nouvelles formes de prévision fournissent une information supplémentaire sur le niveau d'incertitude qui accompagne la prévision

ponctuelle. Au niveau analytique, hormis certaines spécifications particulières, il n'existe pas de relations récursives entre les prévisions ponctuelles dès que l'horizon de prévision dépasse une période. Différentes solutions sont exposées notamment la simulation numérique (Monte Carlo ou Bootstrap). Cette dernière technique est également privilégiée dans la construction de densités et d'intervalles de prévision tels que la Highest Density Region (HDR), des formes de prévisions qui tendent à se généraliser notamment avec le développement de la gestion du risque en finance et la production de *fan charts* par les banques centrales. Quelle qu'en soit la nature, une prévision n'a de valeur que si elle est valide. Etant donné que l'originalité des modèles non-linéaires par rapport aux modèles linéaires est de fournir des intervalles et des densités de prévision inhabituellement asymétriques et/ou discontinus (respectivement multimodales), les tests d'évaluation de ces formes de prévision sont d'une importance capitale, ils sont synthétisés dans la dernière section.

Dans le chapitre 2, nous proposons un test d'évaluation des intervalles de prévision dans le cadre de ce que Clements and Taylor (2003) appellent une "*Event Probability Forecast Approach*". En effet, malgré les nombreuses façons de construire les intervalles de prévision et malgré leur intérêt croissant notamment en finance avec la généralisation de la Value-at-Risk comme mesure de risque, les tests d'évaluation de cette forme de prévision ne sont qu'à leur début et le test qui revient fréquemment dans les travaux empiriques est celui de Christoffersen (1998) considéré comme la référence en la matière. Selon cet auteur, un intervalle de prévision est valide s'il respecte l'hypothèse de couverture conditionnelle, *i.e.* si ses violations *ex post* se produisent arbitrairement (hypothèse d'indépendance) et dans une proportion égale au taux de couverture considéré (hypothèse de couverture non conditionnelle), une violation étant une situation exceptionnelle dans laquelle la réalisation de la variable aléatoire n'appartient pas à cet intervalle. Tester l'hypothèse de couverture conditionnelle se traduit généralement par un test d'hypothèse distributionnelle sur le processus des violations (test de la loi de Bernoulli (Christoffersen, 1998)) ou sur le processus des durées entre les violations (test de la loi géométrique (Candelon *et al.*, 2011; Haas, 2005) et test de la loi exponentielle (Christoffersen and Pelletier, 2004)). Nous proposons de tester la loi binomiale, une transformation sous l'hypothèse nulle de la loi de Bernoulli, en se basant sur les travaux de Bontemps and Meddahi (2012) et Candelon *et al.* (2011). Les premiers ont développé un cadre GMM de tests d'hypothèses distributionnelles en construisant des J-statistiques à partir de polynômes orthonormaux associés à certaines lois de probabilité. Les derniers ont repris les polynômes de Meixner associés (indirectement) à la loi géométrique pour tester cette loi sur le processus des durées séparant les violations de la VaR. En ce qui nous concerne, nous

considérons les polynômes orthonormaux de Krawtchouk associés à la loi binomiale. En effet, sous l'hypothèse nulle de validité d'un intervalle de prévision, les violations de celui-ci sont les réalisations indépendantes d'une loi de Bernoulli avec un taux de succès égal au taux de couverture nominal, ou de façon équivalente, la somme des violations est la réalisation d'une loi binomiale dont le premier paramètre correspond au taux de couverture et le deuxième au nombre de violations additionnées. L'avantage des polynômes de Krawtchouk, comme tous les polynômes orthonormaux, est qu'ils sont d'espérance nulle et servent donc directement dans la construction de conditions de moment dans un cadre GMM. De plus, leur matrice de variance-covariance, étant égale à la matrice identité, évite l'estimation de la matrice de poids optimaux. Des J-statistiques sont ainsi aisément calculées avec la liberté de choisir le polynôme ou la combinaison de polynômes à utiliser pour tester conjointement l'hypothèse de couverture conditionnelle ou individuellement les hypothèses de couverture non conditionnelle ou d'indépendance. Des exercices de simulation de la taille et de la puissance de notre test pour différentes combinaisons de polynômes et différentes tailles d'échantillon ont mis en évidence la supériorité de notre approche relativement à celle développée par Christoffersen (1998).

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la façon la plus complète de décrire l'incertitude autour de la prévision ponctuelle, il s'agit de la densité de prévision définie comme une estimation de la distribution de probabilité de l'ensemble des valeurs futures possibles de la variable aléatoire étudiée (Tay and Wallis, 2000; Wallis, 2003). Plus précisément, nous proposons une nouvelle approche d'évaluation similaire à celle développée dans le chapitre 2. Cette approche s'inscrit dans ce que Clements and Smith (2000) appellent une "*Density Forecast Approach*" dans la mesure où elle s'intéresse à l'évaluation de l'ensemble de la densité de prévision au lieu de se limiter à des quantiles particuliers. Les tests de ce genre se décomposent en deux familles : des tests de spécification correcte et des tests de comparaison de densités de prévision mal spécifiées. Les premiers supposent, sous l'hypothèse nulle, que la densité de prévision est correctement spécifiée tandis que les derniers, supposent que toutes les densités sont mal spécifiées. Notre approche appartient à la famille des premiers dont le test de référence est celui de Diebold *et al.* (1998). L'idée de ce test est que si la densité de prévision est correctement spécifiée alors les transformations de Rosenblatt (1952), ou Probability Integral Transform (p.i.t), des observations de la variable étudiée sur la période de validation, calculées par rapport à la densité de prévision, sont les réalisations aléatoires d'une loi uniforme discrète sur l'intervalle $[0,1]$. Les auteurs ont développé une approche graphique pour tester l'adéquation des p.i.t à cette loi. La première version de notre approche consiste à construire des J-statistiques à partir des polynômes de Legendre associés à la loi uniforme discrète, ces derniers étant

d'espérance nulle et de variance unitaire permettent aisément de tester la validité des densités de prévision dans un cadre GMM. Une autre façon de tester la validité d'une densité de prévision, analytique cette fois-ci, a été proposée par Berkowitz (2001). L'auteur opère une deuxième transformation, que nous appelons transformée de Berkowitz, en évaluant la fonction quantile associée à la loi normale centrée et réduite en chacune des valeurs prises par la transformée de Rosenblatt. Sous l'hypothèse nulle de validité de la densité de prévision, les transformées de Berkowitz sont des tirages indépendants dans une loi normale centrée et réduite. Berkowitz teste cette hypothèse à l'aide d'un test du rapport de vraisemblance (LR). La deuxième version de notre approche se base sur les polynômes d'Hermite associés à la loi normale centrée et réduite. De la même façon que précédemment, des J-statistiques sont calculées à partir de ces derniers polynômes et la validité des densités de prévision est testée différemment dans un cadre GMM. Des simulations des tailles et des puissances de nos tests ainsi que celles du test LR de Berkowitz (2001) ont favorisé notre nouvelle approche.

Enfin, dans le chapitre 4, nous menons une analyse empirique pour tenter de répondre à la perpétuelle question sur l'apport des modèles non-linéaires à la prévision économique. Des études de comparaison des modèles linéaires et des modèles non-linéaires ont déjà eu lieu, elles se sont intéressées, pour la plupart, à la comparaison des modèles en termes de prévisions ponctuelles (Clements and Krolzig, 1998; Stock and Watson, 1999; Marcellino, 2002). Leur conclusion est que les prévisions ponctuelles issues des modèles non-linéaires ne sont pas plus précises que celles obtenues à partir des modèles linéaires. Plus récemment, une idée a émergé, elle stipule que les modèles non-linéaires peuvent être plus pertinents dans la description de l'incertitude autour de la prévision ponctuelle. Cette intuition a été confirmée par des travaux sur la comparaison des intervalles et des densités de prévision (e.g. Clements and Smith, 2000, 2001; Boero and Marrocu, 2002; van Dijk *et al.*, 2003). Cependant, l'une des limites de l'ensemble de ces travaux est qu'ils ne se basent, pour la majorité, que sur des données américaines. Dans notre analyse, nous utilisons une gamme de données correspondant à plusieurs variables économiques (Indices de la production industrielle, taux de chômage, indices boursiers et taux de change) et à plusieurs pays (Allemagne, Canada, Grande-Bretagne, Japon et Etats-Unis d'Amérique). L'idée de cette étude est d'ajuster des modèles linéaires et des modèles non-linéaires à chaque série de données, de calculer des prévisions *out of sample* à différents horizons et de comparer les prévisions ponctuelles, les intervalles et les densités de prévisions issues des différents modèles. Pour ce faire, nous mettons à contribution notre approche GMM d'évaluation des intervalles et des densités de prévision ainsi que les tests de la littérature. Les résultats de notre étude corroborent les résultats d'autres études empiriques et

confirment l'intuition initiale, à savoir, les modèles linéaires sont préférables, en termes de prévisions ponctuelles et les modèles non-linéaires sont les plus à même de décrire l'incertitude autour de ces prévisions ponctuelles.

Chapitre 1

Modèles non linéaires et prévision

1.1 Introduction

La succession de phases d'expansion et de récession dans le cycle économique et de périodes de forte et de faible volatilité sur les marchés financiers sont des phénomènes asymétriques qui attirent de plus en plus l'attention des économistes. De tels phénomènes indiquent que la dynamique des variables macroéconomiques et financières varie en fonction de l'état de l'économie. Sur le plan économétrique, le nouveau défi est de trouver des modèles capables de capturer et de reproduire ces asymétries afin de mieux les expliquer. Les modèles linéaires de la famille ARMA, de par la constance de leurs paramètres, ne permettant pas cette tâche, il a fallu sortir de leur cadre restrictif et explorer des modèles non-linéaires. Or, la notion de non-linéarité étant assez générale, la famille des modèles non-linéaires est très large. Néanmoins, une classe très particulière a émergé et a eu du succès en économie, c'est la classe des modèles à changement de régimes. Avec cette nouvelle forme de modélisation, la construction et l'évaluation des prévisions ont été entièrement repensées.

L'objectif de ce premier chapitre est de montrer comment les méthodes récentes en séries temporelles non-linéaires peuvent être mises en œuvre dans la modélisation des séries macroéconomiques et financières. Plus précisément, les différentes écritures des modèles à changement de régimes sont présentées dans la section 1.2 et regroupées selon la nature de la transition entre les régimes (transition lisse/transition abrupte) et selon l'observabilité de la variable de transition (modèles à seuil/modèles à changement de régimes markovien). Ces modèles, conçus pour reproduire les asymétries observées dans la pratique, sont progressivement utilisés à des fins de prévision (section 1.3). Celle-ci prend, en fait, tout son sens avec ces modèles car au-delà de la prévision au point moyen, les intervalles et les

densités de prévision sont exploitables dans la prise de décision. En effet, contrairement au cadre linéaire où elles sont symétriques et continues (respectivement, unimodales), ces nouvelles formes de prévision fournissent une information supplémentaire sur le niveau d'incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle. Au niveau analytique, hormis certaines spécifications particulières, il n'existe pas de relations récursives entre les prévisions ponctuelles dès que l'horizon de prévision dépasse une période. Différentes solutions sont exposées notamment la simulation numérique (Monte Carlo ou Bootstrap). Cette dernière technique est également privilégiée dans la construction de densités et d'intervalles de prévision tels que la Highest Density Region (HDR), des formes de prévisions qui tendent à se généraliser notamment avec le développement de la gestion du risque en finance et la production de *fan charts* par les banques centrales. Quelle qu'en soit la nature, une prévision n'a de valeur que si elle est valide. Etant donné que l'originalité des modèles non-linéaires par rapport aux modèles linéaires est de fournir des intervalles et des densités de prévision inhabituellement asymétriques et/ou discontinus (respectivement multimodales), les tests d'évaluation de ces formes de prévision sont tout aussi importants, ils sont synthétisés dans la section 1.4.

1.2 Modèles à changement de régimes

Un modèle de séries temporelles relie une série d'observations $\{y_t\}_{t=1}^T$ à une série de chocs $\{\epsilon_t\}_{t=1}^T$ non-corrélés, de moyenne nulle et de variance σ_ϵ^2 . Dans une configuration linéaire, le théorème de représentation de Wold (1954) stipule que tout processus stationnaire $\{y_t\}_{t=1}^T$ peut s'écrire sous forme d'une moyenne mobile infinie des chocs présent et passés :

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \epsilon_{t-i}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.1)$$

avec μ une constante et ϕ_i des coefficients réels tels que $\phi_0 = 1$. Dans les cas d'une représentation non-linéaire, la série $\{y_t\}_{t=1}^T$ est reliée à l'historique des chocs $\{\epsilon_t\}_{t=1}^T$ à travers une fonction non-linéaire $f(\cdot)$:

$$y_t = f(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.2)$$

Cette écriture étant très générale, Campbell *et al.* (1996) proposent un cadre plus restrictif pour décrire un processus non-linéaire :

$$y_t = g(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) + \epsilon_t \sqrt{h(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots)}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.3)$$

où la fonction $g(\cdot)$ est l'espérance conditionnelle de y_t , et $h(\cdot)$ sa variance conditionnelle. Par conséquent, selon que c'est la fonction $g(\cdot)$ ou $h(\cdot)$ qui est non-linéaire, un processus peut être non-linéaire en moyenne et/ou en variance. Un modèle non-linéaire en moyenne permet de modéliser les rendements d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs, tandis qu'un modèle non-linéaire en variance est particulièrement adapté à la modélisation du risque. Dans le cadre de ce chapitre, et par soucis de concision, seuls seront considérés les modèles paramétriques¹ d'espérance conditionnelle. En particulier, et sans perte de généralité, le nombre de régimes sera fixé à 2, chacun sera représenté par un modèle autorégressif $AR(p)$. Suivant la nature, observable ou non, de la variable qui conditionne la transition d'un régime vers un autre, on distingue deux classes de modèles à changement de régimes : les modèles à changement de régimes à variable de transition observable et les modèles à changement de régimes à variable de transition inobservable.

1.2.1 Les modèles à variable de transition observable

Introduit par Tong (1978), Tong and Lim (1980) et Tong (1993), le modèle TAR (*Threshold Auto-Regression*), est un modèle linéaire par morceaux, chacun étant déterminé par la position de la variable de transition x_t par rapport à un seuil donné c . Formellement, un modèle TAR à 2 régimes d'ordres p_1 et p_2 , noté $TAR(2; p_1, p_2)$, s'écrit :

$$y_t = \begin{cases} \phi_0^1 + \phi_1^1 y_{t-1} + \phi_2^1 y_{t-2} + \cdots + \phi_{p_1}^1 y_{t-p_1} + \epsilon_t^1 & \text{si } x_t \leq c \\ \phi_0^2 + \phi_1^2 y_{t-1} + \phi_2^2 y_{t-2} + \cdots + \phi_{p_2}^2 y_{t-p_2} + \epsilon_t^2 & \text{si } x_t > c \end{cases}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.4)$$

avec ϕ_0^j la constante du régime j , $\{\phi_1^j, \phi_2^j, \dots, \phi_{p_j}^j\}$ ses coefficients autorégressifs et ϵ_t^j un bruit blanc de variance σ_j^2 ($j \in \{1, 2\}$). La variable de transition peut être la variable elle-même retardée de d périodes, on obtient alors le modèle SETAR (*Self Exciting Threshold Auto-Regression*), noté $SETAR(2; p_1, p_2)$:

$$y_t = \begin{cases} \phi_0^1 + \phi_1^1 y_{t-1} + \phi_2^1 y_{t-2} + \cdots + \phi_{p_1}^1 y_{t-p_1} + \epsilon_t^1 & \text{si } y_{t-d} \leq c \\ \phi_0^2 + \phi_1^2 y_{t-1} + \phi_2^2 y_{t-2} + \cdots + \phi_{p_2}^2 y_{t-p_2} + \epsilon_t^2 & \text{si } y_{t-d} > c \end{cases}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.5)$$

1. Il existe des modèles non-linéaires non-paramétriques tels que les réseaux de neurones et les algorithmes génétiques. Nous ne nous intéressons, dans le cadre de cette thèse, qu'aux modèles paramétriques.

De manière générale, les modèles à seuil peuvent s'écrire de façon plus compacte comme suit :

$$y_t = (\phi_0^1 + \phi_1^1 y_{t-1} + \phi_2^1 y_{t-2} + \dots + \phi_{p_1}^1 y_{t-p_1} + \epsilon_t^1) \mathbb{I}(q_t \leq c) \\ + (\phi_0^2 + \phi_1^2 y_{t-1} + \phi_2^2 y_{t-2} + \dots + \phi_{p_2}^2 y_{t-p_2} + \epsilon_t^2) \mathbb{I}(q_t > c), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.6)$$

avec $\mathbb{I}(\cdot)$ la fonction indicatrice qui vaut 1 si son argument est vrai et 0 dans le cas contraire. La variable de transition est $q_t = x_t$ dans le cas d'un modèle TAR et $q_t = y_{t-d}$ dans le cas d'un modèle SETAR. Dans ces modèles, la transition d'un régime vers un autre se fait de façon abrupte à cause du caractère discret de la fonction indicatrice. Il est possible de considérer une fonction de transition lisse $G(\cdot)$, prenant un continuum de valeurs allant de 0 à 1 à mesure que q_t augmente, on obtient alors le modèle STAR (*Smooth Threshold Auto-Regression*), noté $\text{STAR}(2; p_1, p_2)$:

$$y_t = (\phi_0^1 + \phi_1^1 y_{t-1} + \phi_2^1 y_{t-2} + \dots + \phi_{p_1}^1 y_{t-p_1} + \epsilon_t^1) G(q_t; \gamma, c) \\ + (\phi_0^2 + \phi_1^2 y_{t-1} + \phi_2^2 y_{t-2} + \dots + \phi_{p_2}^2 y_{t-p_2} + \epsilon_t^2) (1 - G(q_t; \gamma, c)), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.7)$$

où γ est un paramètre de lissage de la fonction de transition $G(\cdot)$. L'idée d'une transition lisse a été introduite par Chan and Tong (1986) et popularisée ensuite par Granger and Teräsvirta (1993) et Teräsvirta (1994)². Une première possibilité de fonction de transition lisse est offerte par la fonction logistique (Figure 1.1a). On obtient alors le modèle LSTAR (*Logistic Smooth Auto-Regression*) :

$$G(q_t; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp[-\gamma(q_t - c)]} \quad (1.8)$$

Notons que si le paramètre de lissage γ est suffisamment grand, la fonction logistique passe instantanément de 0 à 1 dès que la quantité $q_t - c$ change de signe, approchant ainsi la fonction indicatrice. Par conséquent, le modèle LSTAR constitue une bonne approximation des modèles TAR et SETAR. Par contre, si γ tend vers 0 alors la fonction logistique se stabilise au voisinage de 0.5 et le modèle LSTAR se réduit à un simple modèle linéaire AR. Une autre possibilité de fonction de transition est donnée par la fonction exponentielle (Figure 1.1b). Dans ce cas, le modèle STAR devient ESTAR (*Exponential Smooth Threshold Auto-Regression*) :

$$G(q_t; \gamma, c) = 1 - \exp[-\gamma(q_t - c)^2] \quad (1.9)$$

2. Pour une revue de littérature, consulter Teräsvirta (1996)

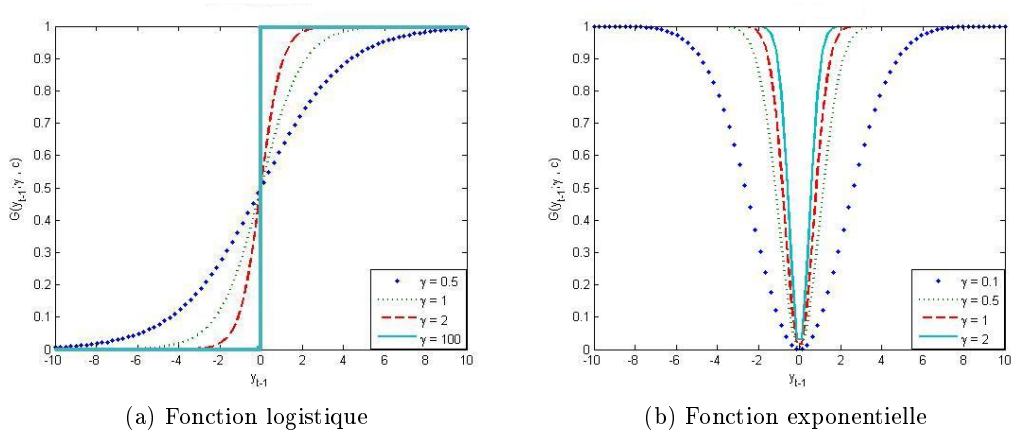


FIGURE 1.1 – Fonctions de transition

Contrairement à la configuration précédente, l'effet du signe de $q_t - c$ est neutralisé par la forme quadratique. Il en résulte que plus γ est important, plus longtemps le modèle ESTAR reste sur le même régime et ne le quitte que lorsque ce paramètre s'affaiblit ou quand la variable de transition q_t s'approche du seuil c , mais en aucun cas il ne se réduit à une spécification linéaire de type AR.

1.2.2 Les modèles à variable de transition inobservable

La variable de transition q_t n'est pas nécessairement toujours observable. Elle peut être cachée et suivre un processus aléatoire auquel cas nous ne disposons que de probabilités sur les valeurs qu'elle peut prendre. Par conséquent, le régime dans lequel la variable expliquée se situe n'est jamais connu avec certitude. Le modèle le plus connu de cette classe est le modèle à changement de régimes markovien MS-AR (*Markov Switching AutoRegression*) introduit par Hamilton (1989) pour modéliser le PIB américain. Dans ce modèle, la variable transition suit une chaîne de Markov d'ordre 1 avec un nombre d'états égal au nombre de régimes. Le modèle MS(2)-AR(p_1, p_2), par exemple, s'écrit :

$$y_t = \begin{cases} \phi_0^1 + \phi_1^1 y_{t-1} + \phi_2^1 y_{t-2} + \cdots + \phi_{p_1}^1 y_{t-p_1} + \epsilon_t^1 & \text{si } R_t = 1 \\ \phi_0^2 + \phi_1^2 y_{t-1} + \phi_2^2 y_{t-2} + \cdots + \phi_{p_2}^2 y_{t-p_2} + \epsilon_t^2 & \text{si } R_t = 2 \end{cases}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.10)$$

Pour que le modèle soit complètement spécifié, il faut en même temps caractériser la matrice de transition $\mathbb{P}$ associée à la chaîne de Markov :

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

dans laquelle les éléments p_{ij} représentent la probabilité de passer d'un régime $R_{t-1} = i$ à un régime $R_t = j$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(S_t = j | S_{t-1} = i) , \forall t = 1, 2, \dots, T , j \in \{1, 2\} \quad (1.12)$$

1.3 Prévision

La prévision à partir des modèles linéaires était directement obtenue grâce aux propriétés de l'opérateur espérance mathématique qui transforme toute combinaison linéaire de variables aléatoires en une combinaison linéaire d'espérances mathématiques de ces variables. Cependant, dès que l'on sort du cadre des fonctions linéaires, notamment pour des horizons supérieurs à 1, cette transformation n'est plus valable. Se pose alors la question de savoir comment construire une prévision dans une telle situation ?

Qu'il s'agisse de modèles linéaires ou non, il existe trois façons de construire des prévisions. La plus simple est la prévision ponctuelle qui consiste à résumer la distribution conditionnelle des futures réalisations de la variable aléatoire étudiée par une seule valeur, la moyenne par exemple. Il est également possible de rapporter un intervalle de confiance autour de cette prévision ponctuelle, nous appellerons ce deuxième type : intervalle de prévision³. Enfin, une dernière possibilité est de représenter l'ensemble de la distribution conditionnelle des valeurs futures possibles par une densité de probabilité, il s'agit de la densité de prévision. Ces deux derniers types de prévisions permettent d'avoir une information additionnelle sur le degré d'incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle.

3. Différentes appellations existent dans la littérature pour désigner un intervalle de confiance autour de la prévision ponctuelle : Interval forecasts (e.g. Granger, 1996), Confidence interval, (e.g. Box and Jenkins, 1970; Granger and Newbold, 1986), Prediction interval (Abraham and Ledolter, 1983; Bowerman and O'Connell, 1987; Chatfield, 1993; Harvey, 1991) ...etc. Nous employons l'expression « intervalle de prévision » pour éviter toute confusion avec un « intervalle de confiance » qui est habituellement réservé à l'estimation de paramètres déterministes inconnus.

1.3.1 Prévision ponctuelle

La forme la plus simple de prévision consiste à fournir la valeur centrale de la distribution des valeurs futures d'une variable économique sans aucune information supplémentaire sur l'incertitude autour de ce point moyen. Il s'agit par exemple d'annoncer que le taux d'inflation s'établira à 2% bien que d'autres valeurs sont bien toutes aussi possibles.

Dans un modèle linéaire, la prévision ponctuelle d'une variable économique à n'importe quel horizon s'obtenait aisément par des formules récursives. Ce n'est malheureusement plus le cas pour la plupart des modèles non-linéaires dès que l'horizon de prévision dépasse une période. En effet, hormis certaines spécifications telles que les processus TMA (*Threshold Moving Average*) et les modèles MS-AR (*Markov Switching AutoRegression*), on a recours à certaines approximations pour obtenir les prévisions à des horizons supérieurs à une période. Considérons le cas du modèle TMA qui s'écrit :

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_{t-j} \mathbb{I}(\epsilon_{t-j} > 0) + \epsilon_t \quad (1.13)$$

où $\mathbb{I}(\cdot)$ est la fonction indicatrice valant 1 si $\epsilon_{t-j} > 0$ et 0 dans le cas contraire et q l'ordre des parties MA. Supposons que les r sids ϵ_t suivent une loi normale $N(0, \sigma^2)$. La prévision à partir de ce modèle est obtenue analytiquement.   l'horizon 1, elle est précisément équivalente au *skeleton* :

$$\hat{y}_{t+1|t} = \mu + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_{t-j} \mathbb{I}(\epsilon_{t-j} > 0) \quad (1.14)$$

Par contre, à l'horizon 2, le processus $\epsilon_{t+1} \mathbb{I}(\epsilon_{t+1} > 0)$ suit une loi normale censurée d'espérance $\sigma/\sqrt{2\pi}$. La prévision est donc donnée par :

$$\hat{y}_{t+2|t} = \mu + \sum_{j=2}^q \alpha_j \epsilon_{t-j} + \sum_{j=2}^q \beta_j \epsilon_{t-j} \mathbb{I}(\epsilon_{t-j} > 0) + \beta_1 \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.15)$$

De façon générale, si l'ordre de prévision h est inférieur à l'ordre q de la moyenne mobile, la prévision ponctuelle à l'ordre h vérifie :

$$\hat{y}_{t+h|t} = \mu + \sum_{j=h}^q \alpha_j \epsilon_{t-j} + \sum_{j=h}^q \beta_j \epsilon_{t-j} \mathbb{I}(\epsilon_{t-j} > 0) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{h-1} \beta_j, \quad \forall h \leq q \quad (1.16)$$

Pour un horizon de prévision supérieur à l'ordre q de la moyenne mobile, la prévision correspond simplement à l'espérance non conditionnelle du processus :

$$\hat{y}_{t+h|t} = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^q \beta_j, \quad \forall h > q \quad (1.17)$$

Le deuxième cas particulier dans lequel la prévision est obtenue analytiquement est le modèle MS-AR :

$$y_t = \phi_0^j + \phi_1^j y_{t-1} + \phi_2^j y_{t-2} + \cdots + \phi_p^j y_{t-p} + \epsilon_t \quad (1.18)$$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(S_t = j | S_{t-1} = i), \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (1.19)$$

La prévision à l'horizon 1 est directement fournie par l'expression suivante :

$$\hat{y}_{t+1|t} = \mathbb{E}[y_{t+1} | S_{t+1} = 1, \Omega_t] \cdot \mathbb{P}(S_{t+1} = 1 | \Omega_t; \theta) + \mathbb{E}[y_{t+1} | S_{t+1} = 2, \Omega_t] \cdot \mathbb{P}(S_{t+1} = 2 | \Omega_t; \theta) \quad (1.20)$$

avec

$$\mathbb{E}[y_{t+1} | S_{t+1} = j, \Omega_t] = \phi_0^j + \phi_1^j y_t + \phi_2^j y_{t-1} + \cdots + \phi_p^j y_{t-p+1}, \quad j \in \{1, 2\} \quad (1.21)$$

$$\mathbb{P}(S_{t+1} = j | \Omega_t; \theta) = \hat{p}_{t+1|t}, \quad j \in \{1, 2\} \quad (1.22)$$

Les prévisions d'ordre supérieur sont obtenues de façon similaire. Voir Tjøstheim (1986) et Hamilton (1989). Notons que cette prévision est composée de deux parties : la prévision de y_{t+h} conditionnellement au régime qui se réalisera en $t+h$:

$$\mathbb{E}[y_{t+h} | S_{t+h} = j, \Omega_t], \quad j \in \{1, 2\} \quad (1.23)$$

et la prévision des probabilités de réalisation de chaque régime en $t+h$:

$$\mathbb{P}(S_{t+h} = j | \Omega_t; \theta), \quad j \in \{1, 2\} \quad (1.24)$$

Hormis ces deux cas, la construction de prévisions nécessite certaines approximations. Considérons le modèle non-linéaire général suivant :

$$y_t = F(y_{t-1}; \theta) + \epsilon_t \quad (1.25)$$

où θ un vecteur de paramètres et ϵ_t est un terme d'erreurs *i.i.d.*($0, \sigma^2$). La prévision

optimale au sens du critère MSFE formulée au temps t pour un horizon h ainsi que l'erreur de prévision associée sont respectivement données par :

$$\hat{y}_{t+h|t} = \mathbb{E}[y_{t+h}|\Omega_t] \quad (1.26)$$

$$\hat{\epsilon}_{t+h|t} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t} \quad (1.27)$$

Pour un horizon 1, la prévision ponctuelle est, comme dans les modèles linéaires, égale au *skeleton* :

$$\hat{y}_{t+1|t} = \mathbb{E}[y_{t+1}|\Omega_t] = F(y_t; \theta) \quad (1.28)$$

Pour un horizon supérieur à 1, il n'est plus possible d'obtenir une relation récursive entre des prévisions à des horizons consécutifs. A un horizon 2 par exemple, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+2|t} &= \mathbb{E}[y_{t+2}|\Omega_t] \\ &= \mathbb{E}[F(y_{t+1}; \theta) + \epsilon_{t+2}|\Omega_t] \\ &= \mathbb{E}[F(F(y_t) + \epsilon_{t+1}; \theta)|\Omega_t] \\ &= \mathbb{E}[F(\hat{y}_{t+1|t} + \epsilon_{t+1}; \theta)|\Omega_t] \end{aligned} \quad (1.29)$$

L'opérateur linéaire espérance mathématique $\mathbb{E}[\cdot]$ ne permet pas de transformer une fonction non-linéaire $F(\cdot)$ en une combinaison linéaire d'espérances ($\mathbb{E}[F(\cdot)] \neq F[\mathbb{E}(\cdot)]$). Seule une approximation linéaire de cette fonction rendrait le calcul d'une prévision possible. Une première approximation serait de négliger le terme d'erreur de prévision ϵ_{t+1} . On obtient alors la formule récursive du prédicteur *naïf* :

$$\hat{y}_{t+2|t}^{naïf} = F(\hat{y}_{t+1|t}; \theta) \quad (1.30)$$

Une deuxième solution serait de calculer explicitement la prévision en écrivant :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+2|t}^c &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\hat{y}_{t+1|t} + \epsilon; \theta) f(\epsilon) d\epsilon \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y_{t+1}; \theta) g(y_{t+1}|\Omega_t) dy_{t+1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[y_{t+2}|y_{t+1}] g(y_{t+1}|\Omega_t) dy_{t+1} \end{aligned} \quad (1.31)$$

où $g(y_{t+1}|\Omega_t)$ désigne la distribution du vrai processus y_{t+1} conditionnellement à un ensemble d'informations Ω_t . Elle correspond, en fait, à la distribution du résidu ϵ_{t+1} avec une moyenne égale à $F(y_t; \theta)$. La généralisation de l'expression (1.31) à un horizon h est

donnée par :

$$\hat{y}_{t+h|t}^c = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[y_{t+h}|y_{t+h-1}]g(y_{t+h-1}|\Omega_t)dy_{t+h-1} \quad (1.32)$$

Pemberton (1987) a proposé une méthode fondée sur l'hypothèse de normalité de la dernière erreur de prévision, elle est connue sous le nom de méthode NFE (*Normal Forecast Error*) :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+h|t}^{NFE} = & \Phi(q_{t+h-1|t})(\phi_0^1 + \phi_1^1 \hat{y}_{t+h-1|t}) + \Phi(-q_{t+h-1|t})(\phi_0^2 + \phi_1^2 \hat{y}_{t+h-1|t}) \\ & + \phi(q_{t+h-1|t})(\phi_1^2 - \phi_1^1)\sigma_{h-1} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Une troisième solution consiste simplement à simuler les résidus un grand nombre N de fois soit par simulations Monte Carlo en faisant des tirages indépendants dans la distribution supposée des résidus, soit par Bootstrap en faisant des tirages avec remise dans les résidus historiques et calculer la prévision à l'horizon 2, par exemple, de la façon suivante :

$$\hat{y}_{t+2|t}^{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\hat{y}_{t+1|t} + \epsilon_i; \theta) \quad (1.34)$$

$$\hat{y}_{t+2|t}^{Boot} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\hat{y}_{t+1|t} + \hat{\epsilon}_i; \theta) \quad (1.35)$$

1.3.2 Intervalle de prévision

La deuxième forme de prévision consiste à fournir, au delà de la valeur centrale de la distribution des prévisions, une information supplémentaire sur l'incertitude autour de ce point moyen par le biais d'un intervalle de confiance. Il s'agit par exemple de dire que le taux d'inflation s'établira à 2% et qu'avec 95% de confiance, il sera compris entre 1% et 3%.

Hyndman (1995) dénombre trois sortes d'intervalles de confiance à $1 - \alpha$ ⁴ autour de la prévision ponctuelle $\hat{y}_{t+h|t}$:

- Un intervalle de confiance continu et symétrique (Figure 1.2a) constitué d'une seule zone centrée sur la prévision ponctuelle $\hat{y}_{t+h|t}$:

$$IC_\alpha = [\hat{y}_{t+h|t} - \omega; \hat{y}_{t+h|t} + \omega] \quad (1.36)$$

où ω est une constante telle que $\mathbb{P}(y_{t+h} \in IC_\alpha | \Omega_t) = 1 - \alpha$.

4. Dans la suite, on appellera le niveau de confiance $1 - \alpha$ taux de couverture et le niveau de risque α taux de non-couverture.

- Un intervalle de confiance continu mais pas nécessairement symétrique (Figure 1.2b) constitué d’une seule zone dont les bornes sont déterminées par les quantiles $Q_{\alpha/2}$ et $Q_{1-\alpha/2}$ de la distribution conditionnelle des futures réalisations $\hat{y}_{t+h|t}$: $g(\hat{y}_{t+h|t}|\Omega_t)$:

$$IC_{\alpha} = [Q_{\alpha/2}; Q_{1-\alpha/2}] \quad (1.37)$$

- Un intervalle de confiance pas nécessairement continu ni symétrique (Figures 1.2c) pouvant être constitué de plusieurs zones, mettant en évidence une multitude de régimes. Il est connu sous l’appellation *HDR* (*Highest Density Region*) :

$$HDR_{\alpha} = \{y_{t+h} | g(\hat{y}_{t+h|t}|\Omega_t) \geq g_{\alpha}\} \quad (1.38)$$

où g_{α} est une constante telle que $\mathbb{P}(y_{t+h} \in HDR_{\alpha}|\Omega_t) = 1 - \alpha$.

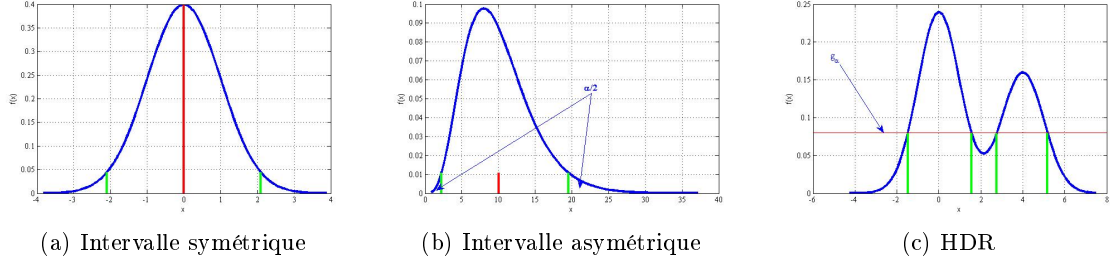


FIGURE 1.2 – Intervalles de prévision

Notons que lorsque la distribution conditionnelle $g(\hat{y}_{t+h|t}|\Omega_t)$ est symétrique et unimodale comme dans le cas des modèles linéaires avec des erreurs gaussiennes, ces trois types d’intervalles de prévision se confondent et se réduisent à un intervalle de prévision symétrique et continu. Dans le cadre non-linéaire qui nous intéresse, on retrouve bien ces trois formes de façon distincte, chacune étant associée à une forme particulière de la densité de prévision.

1.3.3 Densité de prévision

Un avantage des méthodes de prévisions ponctuelles par simulations réside dans le fait qu’elles produisent un ensemble de N répliques qui permettent une estimation de la densité de prévision. Celle-ci fournit bien plus d’informations que la simple prévision ponctuelle. En particulier, elle permet d’appréhender les éventuelles asymétries de la distribution conditionnelle de prévision et son éventuelle multimodalité (Figure 1.3). For-

mellement, les simulations Monte Carlo ou Bootstrap $\hat{y}_{t+h|t}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N$, peuvent être considérées comme des réalisations de la distribution conditionnelle théorique $g(y_{t+h}|\Omega_t)$. On peut dès lors construire un estimateur à noyau de la densité conditionnelle de la façon suivante :

$$\hat{g}(\hat{y}_{t+h|t}^{(i)}|\Omega_t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{\hat{y}_{t+h|t}^{(i)} - \hat{y}_{t+h|t}^{(j)}}{\lambda}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.39)$$

où $K(\cdot)$ est un noyau et λ un paramètre de lissage. Le choix de ce dernier peut, contrairement au choix du premier, avoir des conséquences sur le biais et la variance de l'estimateur. Une valeur optimale est obtenue en minimisant un critère tel que l'AMISE (*Approximate Mean Integrated Squared Error*) ou la GCV (*General Cross-Validation*).

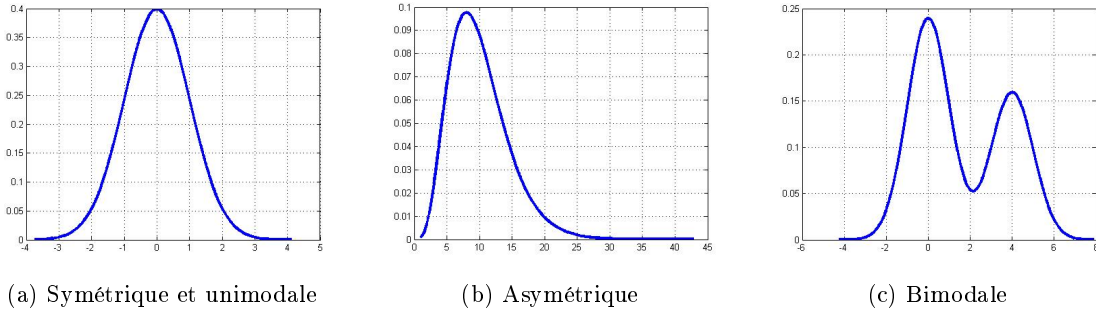


FIGURE 1.3 – Densités de prévision

1.4 Evaluation des prévisions

Une prévision n'a d'intérêt pour l'utilisateur que si elle est valide, il est donc nécessaire de disposer d'outils statistiques permettant la comparaison et l'évaluation des prévisions. Comme l'avantage des modèles non-linéaires en général et des modèles à changement de régimes en particulier réside dans la construction d'intervalles et de densités de prévision inhabituellement asymétriques et/ou discontinus (respectivement multimodales), nous ne présenterons que les tests d'évaluation de ces formes de prévisions.

1.4.1 Evaluation des intervalles de prévision

Soit $\{y_t\}_{t=-(R-1)}^T$ une série temporelle de longueur $T + R$ dont les R premières observations $\{y_{-(R-1)}, \dots, y_{-1}, y_0\}$ servent à estimer les paramètres des modèles et les T

dernières $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ à tester la validité des prévisions obtenues à partir des modèles ajustés. Soit $\{C_{t|t-1}(\alpha)\}_{t=1}^T$ la série des intervalles de prévision à $(1 - \alpha)100\%$ calculés à l'instant t conditionnellement à un ensemble d'informations Ω_{t-1} disponibles en $t - 1$, tels que :

$$\mathbb{P}[y_t \in C_{t|t-1}(\alpha)] = 1 - \alpha, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.40)$$

Les tests d'évaluation des intervalles de prévision ont été principalement développés dans le cadre de l'évaluation de la *Value-at-Risk* (notée VaR) définie par Manganelli and Engle (2001) comme la perte potentielle maximale de la valeur d'un portefeuille qui ne peut se produire qu'avec une probabilité α sur un certain horizon. Concrètement⁵, la $VaR_{t|t-1}(\alpha)$ est le quantile d'ordre α de la distribution conditionnelle des rendements y_t (Figure 1.4) :

$$\mathbb{P}[y_t < -VaR_{t|t-1}(\alpha)] = \alpha, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.41)$$

Par conséquent, la VaR correspond à la borne inférieure d'un intervalle de prévision des

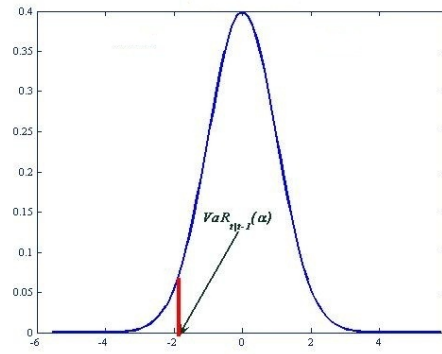


FIGURE 1.4 – Value-at-Risk

rendements y_t (Christoffersen, 1998; Lopez, 1999) :

$$C_{t|t-1}(\alpha) = [-VaR_{t|t-1}(\alpha), +\infty[, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.42)$$

Les tests d'évaluation de la VaR peuvent donc être généralisés à l'évaluation des intervalles de prévision. Ils sont construits à partir du processus des *violations* défini comme suit :

5. Comme la VaR est exprimée en termes monétaires, un signe moins ($-$) apparaît pour indiquer qu'il s'agit d'un montant de pertes.

Définition 1. On définit le processus des violations par la variable indicatrice⁶ $I_t(\alpha)$ prenant la valeur 1 si la réalisation *ex post* de y_t n'appartient pas à l'intervalle de prévision $C_{t|t-1}(\alpha)$ et 0 dans le cas contraire :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t \notin C_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{si } y_t \in C_{t|t-1}(\alpha) \end{cases}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.43)$$

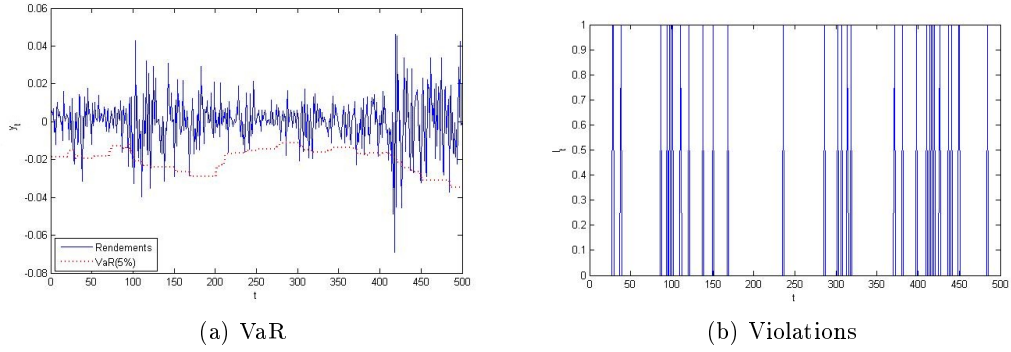


FIGURE 1.5 – VaR(5%) des rendements du SP 500 et violations correspondantes

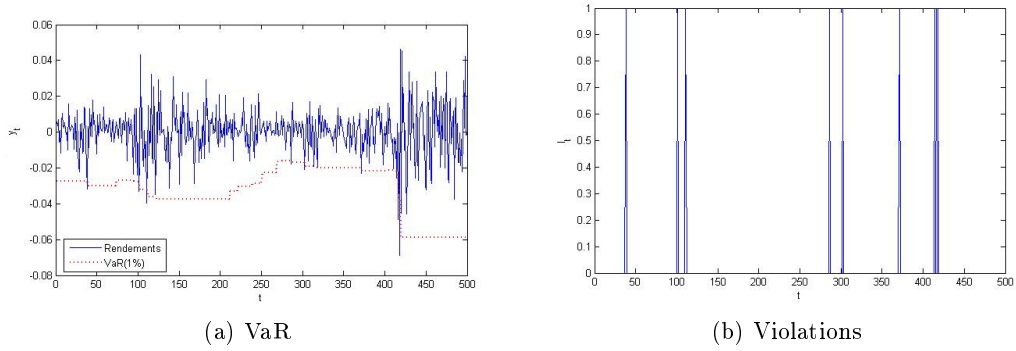


FIGURE 1.6 – VaR(1%) des rendements du SP 500 et violations correspondantes

Afin d'illustrer cette notion de *violations*, les figures 1.5a et 1.6a représentent simultanément les réalisations des rendements journaliers de l'indice boursier SP 500 enregistrées entre le 09/12/2009 et le 02/12/2011 inclus, soient 500 observations, et les prévisions à

6. Pour alléger les notations, le symbole α sera omis quand il n'y a pas de risque d'ambiguïté.

l'horizon 1 de la VaR calculées par la méthode de la simulation historique⁷ pour des taux de non couverture $\alpha = 0.05$ et $\alpha = 0.01$ respectivement. La confrontation des réalisations *ex post* des rendements et des prévisions *ex-ante* de la VaR donne lieu au processus des violations $\{I_t\}_{t=1}^{500}$ (Figures 1.5b et 1.6b). Notons que plus la valeur de α est faible, *i.e.* risque faible, moins les violations sont fréquentes pour la même série des rendements et *vice versa*.

Sur la base de ce processus de violations, un critère général des tests d'évaluation des intervalles de prévision peut être établi. Nous présentons successivement les tests fondés sur le processus des violations puis les tests fondés sur la durée entre les violations. Ensuite, nous étendrons l'ensemble d'informations à d'autres variables.

Tests fondés sur le processus des violations

Les premiers tests d'évaluation des intervalles de prévision ont vu le jour vers le début des années 1990 (e.g. Granger *et al.*, 1989; Baillie and Bollerslev, 1992; Kupiec, 1995; McNees, 1995). Ils consistaient, initialement, à vérifier que la probabilité d'observer une violation est précisément égale au taux α , hypothèse dite de *couverture non conditionnelle* (notée *uc*). Cette hypothèse s'exprime comme suit :

$$H_{0,uc} : \mathbb{E}[I_t] = \alpha, \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.44)$$

Si cette probabilité⁸ est différente du taux α , l'intervalle de prévision est ou bien assez étroit ou bien assez large. Dans ce cas, l'hypothèse de couverture non conditionnelle n'est pas respectée et le modèle ayant servi au calcul de l'intervalle de prévision est mal spécifié.

Kupiec (1995) propose un test de rapport de vraisemblance⁹ qui compare la proportion π des violations observées au taux α . Sous l'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle, le nombre de violations suit une loi binomiale $B(T, \alpha)$. Par conséquent, la probabilité d'observer un nombre n_1 de violations sur une série de T intervalles de prévision est donnée par la formule binomiale suivante :

$$\mathbb{P}(n_1; \alpha, T) = C_T^{n_1} \alpha^{n_1} (1 - \alpha)^{T-n_1} \quad (1.45)$$

7. La $VaR(\alpha)$ calculée par la méthode de la simulation historique est simplement le quantile empirique d'ordre α de l'historique des rendements sur une certaine période (de longueur 100 dans notre exemple).

8. Dans le cas d'une variable aléatoire binaire I prenant les valeurs 0 et 1, la probabilité d'obtenir la valeur 1 est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire I car $\mathbb{E}[I] = \mathbb{P}(I = 1) \times 1 + \mathbb{P}(I = 0) \times 0 = \mathbb{P}(I = 1)$.

9. Pour gagner de l'espace, les tests de rapport de vraisemblance seront désignés par LR.

Alternativement, si l'intervalle de prévision est invalide, les violations se produiront avec une proportion π différente du taux α . Dans ce cas, le nombre de violations suit une loi binomiale $B(T, \pi)$ et la probabilité d'observer un nombre n_1 de violations est donnée par :

$$\mathbb{P}(n_1; \pi, T) = C_T^{n_1} \pi^{n_1} (1 - \pi)^{T-n_1} \quad (1.46)$$

Le test de Kupiec (1995) d'égalité de la proportion¹⁰ π des violations observées au taux α s'écrit :

$$POF = -2 \left\{ \log [\alpha^{n_1} (1 - \alpha)^{T-n_1}] - \log [\hat{\pi}^{n_1} (1 - \hat{\pi})^{T-n_1}] \right\} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.47)$$

avec $\hat{\pi}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de la proportion des violations π .

Campbell (2005) note qu'il est possible de construire un test de Wald équivalent au test LR précédent. En effet, conformément au théorème de Moivre-Laplace, comme n_1 est la réalisation d'une loi binomiale $B(T, \alpha)$, il en résulte que la variable $\frac{\sqrt{T}(\hat{\pi} - \alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$ converge¹¹ vers une loi normale $N(0, 1)$. Par conséquent, la statistique du test de Wald suivante suit asymptotiquement une loi de khi 2 à un degré de liberté :

$$W = \frac{T(\hat{\pi} - \alpha)^2}{\alpha(1 - \alpha)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.48)$$

Ce dernier test est même préféré puisque sa statistique est toujours définie contrairement à celle du test de Kupiec qui ne l'est pas dans le cas où aucune violation ne s'est produite (*i.e.* $n_1 = 0$).

Cependant, l'hypothèse de couverture non conditionnelle n'est qu'une condition nécessaire à la validité d'un intervalle de prévision. En effet, en présence d'hétéroscédasticité conditionnelle souvent mise en évidence dans les séries des rendements des actifs financiers, un intervalle de prévision valide doit être plus large en périodes de forte volatilité qu'en périodes de faible volatilité (Engle, 1982), de telle sorte que les violations soient uniformément réparties entre ces périodes au lieu de former des *clusters* en périodes volatiles et disparaître en périodes calmes. Pour cette raison, Christoffersen (1998) suggère qu'il faut aller au-delà de l'hypothèse de couverture non conditionnelle et tester l'hypothèse de *couverture conditionnelle* en vérifiant, au passage, l'hypothèse d'*indépendance* des violations.

Cette dernière hypothèse (notée *ind*) est l'analogue de l'hypothèse d'absence d'auto-

10. La statistique de test est nommée POF (Proportion Of Failures).

11. Les conditions de convergence de la loi binomiale $B(T, \alpha)$ vers la loi normale $N(\alpha T, \alpha(1 - \alpha)T)$ sont : $T > 30$, $\alpha T > 5$ et $(1 - \alpha)T > 5$.

corrélacion d'ordre supérieur ou égal à l'horizon de prévision dans la série des erreurs de prévision associées à une prévision ponctuelle optimale (Wallis, 2003). Elle signifie que deux violations I_j et I_k observées à deux dates différentes j et k ne doivent pas être autocorrélées. Autrement dit, les violations passées ne doivent signaler aucune information sur les violations à venir. Formellement, cette hypothèse s'écrit :

$$H_{0,ind} : \mathbb{E}[I_t | \Omega_{t-1}] = \mathbb{E}[I_t] , \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.49)$$

L'hypothèse de couverture conditionnelle (notée *cc*) est la fusion des deux hypothèses précédentes (1.44) et (1.49). Elle signifie que la probabilité d'observer une violation conditionnellement à un ensemble d'informations Ω_{t-1} disponible en $t-1$ est précisément égale au taux α . Elle s'écrit ¹² :

$$H_{0,cc} : \mathbb{E}[I_t | \Omega_{t-1}] = \alpha , \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.50)$$

Dans son Lemme 1, Christoffersen (1998) considère un ensemble d'informations composé uniquement de la chronique des violations passées associées aux taux de couverture considéré, *i.e.* $\Omega_{t-1} = \{I_{t-1}, I_{t-2}, \dots, I_1\}$. Il montre que dans ce cas, tester l'hypothèse de couverture conditionnelle revient simplement à vérifier que les violations $\{I_t\}_{t=1}^T$ sont des tirages indépendamment et identiquement distribués selon une loi de Bernoulli $B(\alpha)$. Il teste l'ensemble des hypothèses précédentes par une approche de type LR :

Test LR de couverture non conditionnelle : Comme nous l'avons défini plus haut, il s'agit de tester l'hypothèse nulle que la probabilité d'une violation est précisément égale au taux α contre l'hypothèse alternative que cette probabilité est différente du taux α . La fonction de vraisemblance associée à une série de variables de Bernoulli $\{I_t\}_{t=1}^T$ de paramètre α connu s'écrit :

$$L(\alpha; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \alpha)^{n_0} \alpha^{n_1} \quad (1.51)$$

où n_0 et n_1 désignent le nombre de fois où la variable I_t a pris les valeurs 0 et 1 respectivement. La fonction de vraisemblance associée à une série de variables de Bernoulli $\{I_t\}_{t=1}^T$ de paramètre π inconnu s'écrit :

$$L(\pi; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi)^{n_0} \pi^{n_1} \quad (1.52)$$

12. Notons que si l'ensemble d'informations est vide, *i.e.* $\Omega_{t-1} = \emptyset$, on retrouve l'hypothèse de couverture non conditionnelle.

Le test LR de l'hypothèse de couverture non conditionnelle est :

$$LR_{uc} = -2 \log[L(\alpha; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\pi}; I_1, I_2, \dots, I_T)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(s-1) \quad (1.53)$$

avec $\hat{\pi} = \frac{n_1}{n_0+n_1}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de π et s le nombre de valeurs que la variable I_t peut prendre, *i.e.* $s = 2$ dans le cas présent. Ce test correspond simplement au test de Kupiec (1.47).

Test LR d'indépendance : Christoffersen (1998) teste l'hypothèse d'indépendance des violations contre une chaîne de Markov d'ordre 1 à deux états, de matrice de transition Π_1 donnée par :

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

avec $\pi_{ij} = \mathbb{P}(I_t = j | I_{t-1} = i)$. La fonction de vraisemblance associée à ce processus est :

$$L(\Pi_1; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}} \quad (1.55)$$

avec n_{ij} est le nombre de i suivis de j dans le processus des violations et $i, j \in \{0, 1\}$. La maximisation de cette fonction de vraisemblance donne l'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice de transition Π_1 :

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Sous l'hypothèse nulle d'indépendance, la probabilité d'un événement (violation ou non) ne dépend pas de l'événement qui l'a précédé, *i.e.* $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi_2$ et $\pi_{00} = \pi_{10} = 1 - \pi_2$. Dans ce cas, la matrice de transition s'écrit :

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

et la fonction de vraisemblance correspondante est :

$$L(\Pi_2; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_2)^{(n_{00}+n_{10})} \pi_2^{(n_{01}+n_{11})} \quad (1.58)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice Π_2 est obtenu par la maximisation de cette vraisemblance :

$$\hat{\Pi}_2 = \hat{\pi}_2 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}} \quad (1.59)$$

Le test LR de l'hypothèse d'indépendance est alors donné par :

$$LR_{ind} = -2 \log[L(\hat{\Pi}_2; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2((s-1)^2) \quad (1.60)$$

La statistique de test est distribuée selon une loi de khi 2 à $(s-1)^2$ degrés de liberté (Hoel, 1954), avec s le nombre d'états dans la chaîne de Markov, *i.e.* $s = 2$ dans notre cas. Notons que ce test est indépendant du taux α , seule la partie indépendance de la couverture conditionnelle est testée.

Test LR de couverture conditionnelle : Le test LR de l'hypothèse de couverture conditionnelle est un test joint des hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance. Le test est formé à partir de la fonction de vraisemblance sous l'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle (1.51) et de la fonction de vraisemblance sous l'hypothèse alternative d'indépendance (1.55). Il se présente comme suit :

$$LR_{cc} = -2 \log[L(\alpha; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(s(s-1)) \quad (1.61)$$

La statistique de test est distribuée selon une loi de khi 2 à $s(s-1)$ degrés de liberté¹³ avec s le nombre d'états de la chaîne de Markov, *i.e.* $s = 2$ dans notre situation.

Partant de l'équivalence asymptotique avec le test LR, Wallis (2003) propose des tests de khi 2 de Pearson pour chacune des hypothèses testées par Christoffersen (1998). Au test de couverture non conditionnelle (1.53), l'auteur fait correspondre le carré de la statistique du test normal d'une proportion empirique. La statistique de test suit asymptotiquement une loi de khi 2 à un degré de liberté :

$$X^2 = \frac{T(\hat{\pi} - \alpha)^2}{\alpha(1 - \alpha)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.62)$$

On reconnaît le test de Wald (1.48) suggéré par Campbell (2005). Ensuite, pour tester

13. Voir la proposition -page 847- de Christoffersen, 1998

l'hypothèse d'indépendance, Wallis se base sur la table de contingence suivante :

O	I _t = 0	I _t = 1	Total
I _{t-1} = 0	n ₀₀	n ₀₁	m ₀
I _{t-1} = 1	n ₁₀	n ₁₁	m ₁
Total	n ₀	n ₁	T

(1.63)

où n_{ij} désigne comme précédemment l'effectif observé (O) des valeurs i suivies des valeurs j dans la série des violations, avec $i, j \in \{0, 1\}$. Il utilise la statistique de Yates (1984) suivante :

$$\chi^2 = \frac{T(n_{00}n_{11} - n_{01}n_{10})^2}{n_0n_1m_0m_1} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.64)$$

Tout comme la statistique du test LR correspondant (1.60), la statistique du test de khi 2 de l'hypothèse d'indépendance suit asymptotiquement une loi de khi 2 à un degré de liberté. Enfin, le test de l'hypothèse jointe de couverture conditionnelle compare les effectifs observés (O) aux effectifs théoriques (E) calculés sous les hypothèses nulles d'indépendance et de couverture non conditionnelle et présentés dans la table suivante :

E	I _t = 0	I _t = 1	Total
I _{t-1} = 0	$(1-\alpha)m_0$	αm_0	m ₀
I _{t-1} = 1	$(1-\alpha)m_1$	αm_1	m ₁
Total	n ₀	n ₁	T

(1.65)

La statistique prend la forme habituelle $\sum(O - E)^2/E$, elle suit une loi de khi 2 à 2 degrés de liberté car les proportions utilisées dans la table précédente sont les proportions théoriques sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle et elles ne sont pas estimées.

L'apport majeur de Christoffersen (1998) est d'avoir déplacé la problématique des tests d'évaluation des intervalles de prévision d'un cadre non conditionnel à un cadre conditionnel en testant, en plus, l'hypothèse d'indépendance des violations. Néanmoins, son approche ne considère que des corrélations d'ordre 1 dans le processus des violations ce qui peut entraîner une perte de puissance face à des alternatives dans lesquelles peut exister une corrélation d'ordre supérieur.

Des travaux ont succédé dans l'espoir d'améliorer le test de l'hypothèse d'indépendance. Clements and Taylor (2003), par exemple, redéfinissent la matrice de transition (1.54) de sorte à permettre des retards périodiques dans la chaîne de Markov. Ainsi, les probabilités de transition sont calculées en tenant compte de la périodicité S des données :

$$\pi_{ij,S} = \mathbb{P}(I_t = j | I_{t-S} = i) \quad (1.66)$$

Elles sont estimées de la même manière que dans Christoffersen (1998) en remplaçant simplement les effectifs n_{ij} par $n_{ij,S}$, *i.e.* le nombre de i suivis de j avec S périodes¹⁴ de décalage dans la série des violations. La distribution asymptotique du test reste inchangée. Christoffersen and Diebold (2000) utilisent un test de séquences¹⁵ (Wald and Wolfowitz, 1940; David, 1947).

L'ensemble des tests basés sur le processus des violations ont des limites, notamment en termes de puissance. Kupiec, par exemple, note que son test peut échouer à détecter des intervalles de prévision invalides si les violations sont rares. Cette remarque vaut aussi pour le test LR_{uc} de Christoffersen. De plus, l'ensemble d'informations Ω_{t-1} retenu dans les tests de couverture conditionnelle ne contient que la chronique des violations passées, excluant ainsi toute autre variable pouvant être utile dans l'explication de l'invalidité de l'intervalle de prévision. La sous-section 1.4.1 traite de ce genre de situations en considérant un ensemble d'informations Ψ_{t-1} plus large. La sous-section suivante s'intéresse plutôt au processus des durées entre les violations.

Tests fondés sur la durée entre les violations

Pour pallier le problème lié à la puissance des tests précédents, la recherche s'est orientée vers l'exploration du processus des durées entre deux violations consécutives. En effet, depuis Christoffersen (1998), il est établi que, sous l'hypothèse de couverture conditionnelle, les violations associées à une série d'intervalles de prévision à $(1-\alpha)\%$ sont indépendamment et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre α . Ce résultat implique que la probabilité d'observer une violation aujourd'hui ne dépend pas du nombre de jours passés depuis la dernière violation, traduisant ainsi une absence de mémoire dans le processus des durées qui séparent les violations. L'idée centrale de cette nouvelle approche est donc de tester cette dernière propriété sur les réalisations de

14. On retrouve le test d'indépendance de Christoffersen comme cas particulier $S = 1$.

15. Une séquence est une chaîne de 0 ou de 1 consécutifs dans la série des violations.

la variable aléatoire de durée D données par :

$$d_i = t_i - t_{i-1}, \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (1.67)$$

avec t_i la date de la violation numéro i et N le nombre de durées. Le concept statistique caractérisant la mémoire d'une distribution de durées est la fonction de hasard définie comme la probabilité conditionnelle d'observer une violation le jour d sachant que $d - 1$ jours sont passés sans violations. Formellement, elle s'écrit :

$$\lambda(d) = \mathbb{P}(D = d | D \geq d), \quad d \in \mathbb{N} \quad (1.68)$$

Une fonction de hasard constante indique une absence de mémoire dans la série des durées $\{d_i\}_{i=1}^N$. Par conséquent, une façon de tester la validité d'un intervalle de prévision est de spécifier, sous l'hypothèse alternative, une distribution de probabilité avec une fonction de hasard flexible et qui emboîte une distribution de probabilité ayant une fonction de hasard constante de telle sorte que la propriété d'absence de mémoire puisse être testée au moyen d'un test LR. C'est cette logique qui a été adoptée par Christoffersen and Pelletier (2004) qui considèrent, sous l'hypothèse nulle, la loi exponentielle de paramètre α dont la fonction de densité est :

$$f_{exp}(d; p) = \alpha \exp(-\alpha d), \quad d > 0 \quad (1.69)$$

et la fonction de hasard est :

$$\lambda_{exp}(d; \alpha) = \alpha, \quad d > 0 \quad (1.70)$$

Les auteurs suggèrent la loi Weibull sous l'hypothèse alternative¹⁶. Cette loi est caractérisée par sa fonction de densité :

$$f_{CW}(d; a, b) = a^b b d^{b-1} \exp[-(ad)^b], \quad a, b > 0, \quad d > 0 \quad (1.71)$$

et par sa fonction de hasard :

$$\lambda_{CW}(d; a, b) = a^b b d^{b-1}, \quad a, b > 0, \quad d > 0 \quad (1.72)$$

16. Christoffersen et Pelletier suggèrent la loi Gamma également. Haas (2005) trouve à travers des simulations Monte Carlo que le test LR correspondant à la loi Weibull est plus puissant que celui associé à la loi Gamma.

Si $b = 1$, cette fonction de hasard se réduit à une constante indiquant une absence de mémoire dans les processus des durées $\{d_i\}_{i=1}^N$ (hypothèse d'indépendance). Si de plus, $a = \alpha$ (hypothèse de couverture non conditionnelle), la fonction de densité de la loi Weibull (1.71) devient identique à celle de la loi exponentielle (1.69). Les hypothèses nulle et alternative de couverture conditionnelle peuvent donc s'écrire respectivement :

$$H_{0,cc} : a = \alpha \text{ et } b = 1 \quad (1.73)$$

$$H_{1,cc} : a \neq \alpha \text{ ou } b \neq 1 \quad (1.74)$$

Christoffersen et Pelletier précisent que si la valeur initiale (respectivement, finale) du processus des violations est nulle, *i.e.* $I_1 = 0$ (respectivement, $I_T = 0$), alors la durée initiale (respectivement, finale), *i.e.* d_1 (respectivement, d_N), est censurée¹⁷. Dans ce cas, sa contribution à la vraisemblance sera représentée par sa fonction de survie¹⁸ $S_{CW}(d_1; a, b)$ (respectivement, $S_{CW}(d_N; a, b)$). La fonction de log-vraisemblance associée à la série des durées est donc :

$$\begin{aligned} \ell_{cw}(a, b; d_1, d_2, \dots, d_N) = & \delta_1 \ln S_{CW}(d_1; a, b) + (1 - \delta_1) \ln f_{CW}(d_1; a, b) \\ & + \sum_{i=2}^{N-1} \ln f_{CW}(d_i; a, b) + \delta_N \ln S_{CW}(d_N; a, b) + (1 - \delta_N) \ln f_{CW}(d_N; a, b) \end{aligned} \quad (1.75)$$

avec δ_i une variable indicatrice prenant la valeur 1 si la durée d_i est censurée et 0 si elle est observée, et $f_{CW}(\cdot)$ la fonction de densité de la loi Weibull (1.71). Ainsi, le test LR de l'hypothèse de couverture conditionnelle s'écrit :

$$LR_{cc}^{cp} = -2[\ell_{cw}(\alpha, 1; d_1, d_2, \dots, d_N) - \ell_{cw}(\hat{a}, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(2) \quad (1.76)$$

où $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations par maximum de vraisemblance des paramètres a et b de la loi Weibull respectivement. Les hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance peuvent être testées individuellement en imposant une seule contrainte dans la configuration précédente. Ainsi, les hypothèses nulle et alternative de couverture

17. Pour une discussion sur les modèles de durées, en particulier, comment construire une fonction de vraisemblance en présence de durées censurées, se référer à Kiefer (1988).

18. La fonction de survie $S_{CW}(\cdot)$ est donnée par : $S_{CW}(d; a, b) = \int_d^{+\infty} f_{CW}(x; a, b) dx$ avec $f_{CW}(\cdot)$ la fonction de densité de la loi Weibull (1.71).

non conditionnelle s'écrivent respectivement :

$$H_{0,uc} : a = \alpha \quad (1.77)$$

$$H_{1,uc} : a \neq \alpha \quad (1.78)$$

Dans ce cas, le test LR devient :

$$LR_{uc}^{cp} = -2[\ell_{cw}(\alpha, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N) - \ell_{cw}(\hat{a}, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.79)$$

De façon équivalente, les hypothèses nulle et alternative d'indépendance s'écrivent respectivement :

$$H_{0,ind} : b = 1 \quad (1.80)$$

$$H_{1,ind} : b \neq 1 \quad (1.81)$$

Le test LR correspondant est simplement :

$$LR_{ind}^{cp} = -2[\ell_{cw}(\hat{a}, 1; d_1, d_2, \dots, d_N) - \ell_{cw}(\hat{a}, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.82)$$

Notons que Christoffersen and Pelletier (2004) considèrent la loi exponentielle sous l'hypothèse nulle même si la durée est discrète puisqu'elle est comptée en nombre de jours. L'argument que les auteurs avancent est que la loi exponentielle peut être vue comme la limite continue du processus discret des durées. Haas (2005) considère, au contraire, la loi géométrique qui est l'équivalent discret la loi exponentielle. Contrairement à l'approche de Christoffersen and Pelletier (2004), le paramètre de la loi géométrique est directement interprété comme la probabilité de succès dans une loi de Bernoulli. De plus, des expériences Monte Carlo à la Dufour (2006), ont montré que le passage à une loi discrète améliore la puissance du test.

Une loi géométrique de paramètre α consiste à répéter une épreuve de Bernoulli $B(\alpha)$ de manière indépendante jusqu'au premier succès. En termes d'évaluation des intervalles de prévision, ceci revient à définir le rang de la violation suivante ou de façon équivalente à calculer la durée écoulée depuis la dernière violation. Formellement, la loi géométrique de paramètre α est définie par la fonction de densité suivante :

$$f_G(d; p) = (1 - \alpha)^{d-1} \alpha, \quad d \in \mathbb{N} \quad (1.83)$$

Elle est aussi caractérisée par sa fonction de hasard :

$$\lambda_G(d; \alpha) = \alpha, \quad d \in \mathbb{N} \quad (1.84)$$

Tout comme la loi exponentielle, la loi géométrique a une fonction de hasard constante reflétant son absence de mémoire.

Etant donné la nature discrète du problème, Haas utilise, sous l'hypothèse alternative, la loi Weibull discrète de Nakagawa and Osaki (1975) dont la fonction de densité est :

$$f_{DW}(d; a, b) = \exp \left\{ -a^b(d-1)^b \right\} - \exp \left\{ -a^b d^b \right\}, \quad a, b > 0, \quad d \in \mathbb{N} \quad (1.85)$$

La fonction de hasard associée à cette loi est donnée par :

$$\lambda_{DW}(d; a, b) = 1 - \exp \left\{ -a^b[d^b - (d-1)^b] \right\}, \quad a, b > 0, \quad d \in \mathbb{N} \quad (1.86)$$

Si $b = 1$, la fonction de hasard est constante traduisant l'absence de mémoire dans le processus des durées (hypothèse d'indépendance). Si de plus $a = -\log(1 - \alpha)$ (hypothèse de couverture non conditionnelle), la fonction de densité de loi Weibull discrète (1.85) devient identique à celle de la loi géométrique (1.83). Dans ces nouvelles conditions, les hypothèses nulle et alternative de couverture conditionnelle s'écrivent respectivement :

$$H_{0,cc} : a = -\log(1 - \alpha) \text{ et } b = 1 \quad (1.87)$$

$$H_{1,cc} : a \neq -\log(1 - \alpha) \text{ ou } b \neq 1 \quad (1.88)$$

Comme dans Christoffersen and Pelletier (2004), la fonction de log-vraisemblance tenant compte d'éventuelles durées censurées s'écrit :

$$\begin{aligned} \ell_{dw}(a, b; d_1, d_2, \dots, d_N) = & \delta_1 \ln S_{DW}(d_1; a, b) + (1 - \delta_1) \ln f_{DW}(d_1; a, b) \\ & + \sum_{i=2}^{N-1} \ln f_{DW}(d_i; a, b) + \delta_N \ln S_{DW}(d_N; a, b) + (1 - \delta_N) \ln f_{DW}(d_N; a, b) \end{aligned} \quad (1.89)$$

avec δ_i une variable indicatrice prenant la valeur 1 si la durée d_i est censurée et 0 si elle est observée, $S_{DW}(\cdot)$ la fonction de survie¹⁹ et $f_{DW}(\cdot)$ la fonction de densité (1.85) associées à la loi Weibull discrète. Ainsi, le test LR de l'hypothèse de couverture conditionnelle

19. La fonction de survie $S_{DW}(\cdot)$ est donnée par : $S_{DW}(d; a, b) = \int_d^{+\infty} f_{DW}(x; a, b) dx$ avec $f_{DW}(\cdot)$ la fonction de densité de la loi Weibull discrète (1.85).

s'écrit :

$$LR_{cc}^{cp} = -2[\ell_{dw}(\alpha, 1; d_1, d_2, \dots, d_N) - \ell_{dw}(\hat{a}, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(2) \quad (1.90)$$

où $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations par maximum de vraisemblance des paramètres a et b de la loi Weibull discrète respectivement. Encore une fois, les hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance peuvent être testées individuellement. Ainsi, les hypothèses nulle et alternative de couverture non conditionnelle s'écrivent respectivement :

$$H_{0,uc} : a = -\log(1 - \alpha) \quad (1.91)$$

$$H_{1,uc} : a \neq -\log(1 - \alpha) \quad (1.92)$$

Dans ce cas, le test LR devient :

$$LR_{uc}^{cp} = -2[\ell_{dw}(\alpha, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N) - \ell_{dw}(\hat{a}, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.93)$$

De façon équivalente, les hypothèses nulle et alternative d'indépendance s'écrivent respectivement :

$$H_{0,ind} : b = 1 \quad (1.94)$$

$$H_{1,ind} : b \neq 1 \quad (1.95)$$

Le test LR correspondant est simplement :

$$LR_{ind}^{cp} = -2[\ell_{dw}(\hat{a}, 1; d_1, d_2, \dots, d_N) - \ell_{dw}(\hat{a}, \hat{b}; d_1, d_2, \dots, d_N)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.96)$$

Une autre approche, fondée sur la méthode des moments généralisée, a été proposée par Candelon *et al.* (2011). Pour tester la validité du modèle ayant servi à la construction de l'intervalle de prévision, les auteurs forment des conditions de moment à partir de polynômes orthonormaux associés à la loi géométrique (*cf.* Bontemps and Meddahi, 2012) et testent, ensuite, des conditions de sur-identification. En effet, à la loi géométrique de paramètre α , représentée par la fonction de densité suivante :

$$f_G(d; \alpha) = \alpha(1 - \alpha)^{d-1} \quad (1.97)$$

on associe les polynômes orthonormaux²⁰ suivants :

$$M_{j+1}(d; \alpha) = \frac{(1 - \alpha)(2j + 1) + \alpha(j - d + 1)}{(j + 1)\sqrt{1 - \alpha}} M_j(d; \alpha) - \left(\frac{j}{j + 1} \right) M_{j-1}(d; \alpha), \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (1.98)$$

avec $M_{-1}(d; \alpha) = 0$ et $M_0(d; \alpha) = 1$. Sous l'hypothèse nulle que la durée D suit une loi géométrique de paramètre α , et donc que le modèle est valide, ces polynômes orthonormaux sont d'espérance nulle. Ainsi, l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle s'écrit :

$$H_{0,cc} : \mathbb{E}[M_j(d; \alpha)] = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, p \quad (1.99)$$

et le test correspondant est :

$$J_{cc}(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right)' \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(p) \quad (1.100)$$

avec $M(d_i; \alpha) = [M_1(d_i; \alpha), M_2(d_i; \alpha), \dots, M_p(d_i; \alpha)]'$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$.

L'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle correspond simplement à l'hypothèse de couverture conditionnelle précédente (1.99) dans laquelle seul intervient le premier polynôme orthonormal $M_1(d; \alpha)$:

$$H_{0,uc} : \mathbb{E}[M_1(d; \alpha)] = 0 \quad (1.101)$$

Par conséquent, la distribution asymptotique du test n'a plus qu'un seul degré de liberté :

$$J_{uc}(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M_1(d_i; \alpha) \right)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (1.102)$$

Enfin, l'hypothèse nulle d'indépendance est obtenue en remplaçant α , dans l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle (1.99), par l'estimation de la proportion des violations $\hat{\pi}$:

$$H_{0,ind} : \mathbb{E}[M_j(d; \hat{\pi})] = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, p \quad (1.103)$$

20. La loi géométrique de paramètre α est le cas particulier de la loi de Pascal de paramètres n et α où $n = 1$. Par conséquent, les polynômes de Meixner associés à la loi de Pascal sont adaptés à la loi géométrique.

Il en résulte que la distribution asymptotique du test perd un degré de liberté :

$$J_{ind}(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \hat{\pi}) \right)' \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \hat{\pi}) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(p-1) \quad (1.104)$$

Les auteurs ont prouvé, à travers des simulations Monte Carlo, que leurs tests fondés sur la méthode des moments généralisée ont une puissance supérieure à celle des tests LR notamment sur des tailles d'échantillon comparables à celles des séries disponibles dans la pratique.

Tests fondés sur le processus des violations centrées

Imaginons que l'on veuille étudier la sensibilité d'un intervalle de prévision à un q -vecteur de variables observables Z_{t-1} appartenant à un ensemble d'informations plus large Ψ_{t-1} pouvant contenir, outre les violations associées au taux α $\{I_{t-1}, I_{t-2}, \dots, I_1\}$, d'autres variables telles que les rendements passés $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1\}$. Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle, une violation doit se produire avec une probabilité égale au taux α et doit être non corrélée avec les variables Z_{t-1} de l'ensemble d'informations Ψ_{t-1} et plus particulièrement avec son propre passé. Dans ce cas, l'hypothèse de couverture conditionnelle s'écrit :

$$H_{0,cc} : \mathbb{E}[I_t - \alpha | \Psi_{t-1}] = 0, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.105)$$

On reconnaît la définition formelle d'une série de différences de martingales $\{I_t - \alpha\}_{t=1}^T$.

Christoffersen (1998), dans son Lemme 2, teste la validité d'un intervalle de prévision sur la base de la régression suivante :

$$I_t - \alpha = \beta_0 + \sum_{k=1}^K \beta_k f_k(Z_{t-1}) + \epsilon_t, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.106)$$

avec $f_k(\cdot)$ une fonction telle que $f_k : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_K]'$ le vecteur des paramètres du modèle. Un intervalle de prévision est valide si ce vecteur des paramètres s'annule, *i.e.* $\beta = 0$, et comme le terme d'erreur ϵ_t est homoscédastique sous l'hypothèse nulle (1.105), les procédures d'inférence standard associées à un modèle de régression linéaire peuvent s'appliquer. De plus, les hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance peuvent être testées individuellement en vérifiant séparément que $\beta_0 = 0$ et $[\beta_1, \dots, \beta_K] = 0$.

Christoffersen envisage aussi une approche alternative. Il montre que, d'après le théo-

rème des espérances itérées, l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle (1.105) implique :

$$H_{0,cc} : \mathbb{E}[(I_t - \alpha) \otimes f(Z_{t-1})] = 0, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.107)$$

avec $f(Z_{t-1}) = [f_1(Z_{t-1}), f_2(Z_{t-1}), \dots, f_K(Z_{t-1})]'$. Cette dernière écriture donne lieu à K conditions de moment que l'on peut tester par des J-statistiques dans un cadre GMM (Hansen, 1982).

D'autre part, Engle and Manganelli (2004) proposent le test de Wald suivant :

$$DQ_{cc} = \frac{\hat{\beta}' X' X \hat{\beta}}{\alpha(1 - \alpha)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi^2(K + 1) \quad (1.108)$$

avec $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_K]'$ le vecteur des paramètres estimés et X la matrice des régresseurs. La statistique de test DQ_{cc} est distribuée asymptotiquement selon une loi de khi 2 à $K + 1$ degrés de liberté. Comme dans les tests précédents, les hypothèses de couverture non conditionnelle ($\beta_0 = 0$) et d'indépendance ($[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K] = 0$) peuvent être testées séparément en ne considérant que le sous-ensemble des paramètres correspondants et en adaptant le nombre de degrés de liberté de la distribution asymptotique de la statistique de test en conséquence.

Cependant, étant donné la nature dichotomique de la variable I_t , Patton (2002) ajuste un modèle logit au lieu du modèle de probabilité linéaire (1.106). L'auteur considère que si l'intervalle de prévision est valide alors la probabilité d'une violation, notée π_t , doit être égale, à chaque instant t , au taux α . Cette probabilité, qui dépend du taux α et du modèle ayant servi à la construction de l'intervalle de prévision, est modélisée à travers la fonction logistique suivante :

$$\pi_t \equiv \pi_t(Z_{t-1}, \beta, \alpha) = \Lambda \left[\lambda(Z_{t-1}, \beta) - \ln \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \right] \quad (1.109)$$

avec $\Lambda(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ est la transformation logistique et $\lambda(\cdot)$ une fonction des régresseurs et des paramètres telle que $\lambda(Z_{t-1}, 0) = 0$, $\forall Z_{t-1} \in \Psi_{t-1}$. La condition sur la fonction $\lambda(\cdot)$ est imposée de telle sorte que $\beta = 0$ implique $\pi_t = \alpha$, $\forall t = 1, 2, \dots, T$. Le vecteur des paramètres β est estimé en maximisant la log-vraisemblance suivante :

$$\ell(\pi(Z, \beta, \alpha); I_1, I_2, \dots, I_T) = \sum_{t=1}^T I_t \cdot \ln \pi_t(Z_{t-1}, \beta, \alpha) + (1 - I_t) \cdot \ln(1 - \pi_t(Z_{t-1}, \beta, \alpha)) \quad (1.110)$$

Patton propose le test LR suivant :

$$LR = -2 \left[\ell(\alpha; I_1, I_2, \dots, I_T) - \ell(\pi(Z, \hat{\beta}, \alpha); I_1, I_2, \dots, I_T) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(K+1) \quad (1.111)$$

La statistique de test suit asymptotiquement une loi de khi 2 à $K+1$ degrés de liberté.

Enfin, comme le processus des violations centrées $\{I_t - \alpha\}_{t=1}^T$ est une série de différences de martingales sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle, Berkowitz *et al.* (2011) vérifient la validité d'un intervalle de prévision en testant cette propriété. En effet, comme nous l'avons mentionné précédemment, l'hypothèse de couverture conditionnelle (1.105) implique :

$$\mathbb{E}[(I_t - \alpha) \otimes f(Z_{t-1})] = 0, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.112)$$

En particulier, si $f(Z_{t-1}) = I_{t-1} - \alpha$, l'expression (1.112) devient :

$$\mathbb{E}[(I_t - \alpha)(I_{t-1} - \alpha)] = 0, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.113)$$

Dans ce cas, tester l'hypothèse de couverture conditionnelle revient à tester l'absence d'autocorrélation d'ordre 1 dans le processus des violations centrées. Nous pouvons donc appliquer le test LR de Christoffersen (1998). Il est également possible de tester l'absence d'autocorrélation d'ordre k supérieur à 1. Dans ce cas, on pose $f(Z_{t-1}) = I_{t-k} - \alpha$ et l'expression (1.112) devient :

$$\mathbb{E}[(I_t - \alpha)(I_{t-k} - \alpha)] = 0, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.114)$$

Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle, le processus des violations centrées est un bruit blanc. Une stratégie de test naturelle est de vérifier que les m premières autocorrélations γ_k , $\forall k > 0$ sont conjointement nulles en utilisant un test de Portemanteau tel que celui de Ljung and Box (1978) :

$$LB(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k^2}{T-k} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(m) \quad (1.115)$$

Plus généralement, si $f(Z_{t-1}) = [f_1(Z_{t-1}), f_2(Z_{t-1}), \dots, f_K(Z_{t-1})]'$, on peut tester la validité de l'intervalle de prévision à travers la régression (1.106) en utilisant les approches précédentes de Christoffersen (1998), Engle and Manganelli (2004) et Patton (2002).

1.4.2 Evaluation des densités de prévision

Soit $\{y_t\}_{t=-(R-1)}^T$ une série temporelle de longueur $T + R$ dont les R premières observations $\{y_t\}_{t=-(R-1)}^0$ servent à estimer les paramètres θ_0 des modèles et les T dernières $\{y_t\}_{t=1}^T$ à tester la validité des prévisions obtenues à partir des modèles ajustés. Soit $\{f_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ la série des densités conditionnelles associées à la série temporelle $\{y_t\}_{t=1}^T$ et $\{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ la série des densités de prévision associée aux prévisions ponctuelles $\{\hat{y}_{t|t-1}\}_{t=1}^T$, calculées conditionnellement à un ensemble d'informations Ω_{t-1} disponible en $t - 1$. Les tests d'évaluation des densités de prévisions sont regroupés en deux familles : des tests de spécification correcte et des tests de comparaison de densités mal spécifiées.

Tests de spécification correcte

Comme leur nom l'indique, ces tests permettent de tester l'hypothèse nulle que les densités de prévision $\{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ sont bien spécifiées, c'est à dire qu'elles sont identiques à chaque instant t aux vraies densités conditionnelles $\{f_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$. Tout le problème de l'évaluation des densités de prévision est donc de mesurer la « distance » qui les sépare des vraies densités conditionnelles $\{f_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ et de tester sa significativité. Pour cela, les tests de spécification correcte des densités de prévision se basent, pour la plupart, sur la transformation probabiliste²¹ de Rosenblatt (1952).

Définition 2. *Rosenblatt définit la transformation probabiliste z_t de la variable y_t par sa fonction de densité conditionnelle $f_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)$ comme suit :*

$$\begin{aligned} z_t &= \int_{-\infty}^{y_t} f_t(u|\Omega_{t-1};\theta_0) du, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \\ &= F_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0) \end{aligned} \tag{1.116}$$

avec $F_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)$ la fonction de répartition associée à la fonction de densité conditionnelle $f_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)$.

Propriété 1. *Les transformations probabilistes $\{z_t\}_{t=1}^T$ sont les réalisations indépendantes d'une loi uniforme $U[0, 1]$:*

$$z_t \stackrel{i.i.d}{\sim} U[0, 1], \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \tag{1.117}$$

Démonstration 1. Annexe C.1

21. Probability Integral Transform ou transformée de Rosenblatt (1952).

Ainsi, une manière évidente de tester la validité d'un modèle de prévision est de transformer les réalisations $\{y_t\}_{t=1}^T$ de la variable économique étudiée par les densités de prévisions $\{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ au lieu des vraies densités conditionnelles $\{f_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$:

$$\begin{aligned} z_t &= \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u|\Omega_{t-1};\theta_0)du, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \\ &= P_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0) \end{aligned} \quad (1.118)$$

Sous l'hypothèse nulle que ces densités de prévision sont correctement spécifiées, les transformations probabilistes $\{z_t\}_{t=1}^T$ qui en résultent devraient être des réalisations indépendantes d'une loi uniforme $U[0, 1]$. Il s'agit de l'hypothèse nulle des tests de spécification correcte tels que les tests de Diebold *et al.* (1998); Bai (2003).

Test de Diebold *et al.* (1998) : Diebold *et al.* (1998) proposent une approche graphique d'évaluation des densités de prévision. Pour tester que la série des transformations probabilistes $\{z_t\}_{t=1}^T$ est issue d'une loi uniforme $U[0, 1]$, les auteurs estiment la densité de ces transformations par un histogramme et vérifient que les sommets de ce dernier sont bien contenus dans l'intervalle de confiance construit autour de la densité d'une loi uniforme $U[0, 1]$, *i.e.* une ligne horizontale d'ordonnée égale à 1 (Figures 1.7a et 1.7b). En même temps, pour révéler une éventuelle dépendance dans les moments conditionnels de la série $\{z_t\}_{t=1}^T$, ils estiment l'autocorrélation des séries²² $(z_t - \bar{z})$, $(z_t - \bar{z})^2$, $(z_t - \bar{z})^3$, et $(z_t - \bar{z})^4$ ($\forall t = 1, 2, \dots, T$) par des corrélogrammes munis d'intervalles de confiance de Bartlett (Figures 1.7c, 1.7d, 1.7e et 1.7f).

Clements and Smith (2001) considèrent les fonctions de répartition au lieu des fonctions de densité. Ils tracent sur le même graphique la fonction de répartition empirique des transformations probabilistes $\{z_t\}_{t=1}^T$:

$$F_z(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}(z_t \leq r), \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.119)$$

et la fonction de répartition théorique de la loi uniforme $U[0, 1]$, *i.e.* la droite à 45°, ainsi qu'un intervalle de confiance sur celle-ci (Figure 1.8). Pour cela, les auteurs utilisent les valeurs critiques exactes de la statistique de Kolmogorov pour de petits échantillons de taille T . Un intervalle de confiance à 95% ($\alpha = 0.025$) est donné par les droites à $45^\circ \pm \sqrt{\ln(1/\alpha)/(2T)}$. Si la fonction de répartition empirique F_z des transformations probabilistes $\{z_t\}_{t=1}^T$ est contenue dans cet intervalle (Figure 1.8a), on conclut à l'adé-

22. $\bar{z}$ représente la moyenne de la variable z_t .

quation de ces deux fonctions de répartition empirique et théorique et donc à la validité des densités de prévision $\{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$, sinon on rejette leur validité (Figure 1.8b).

Test de Bai (2003) : Une autre façon de tester la validité des densités de prévision $\{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ consiste simplement à appliquer un test non paramétrique d'adéquation entre deux fonctions, tel que le test de Kolmogorov-Smirnov. Le problème est que les densités conditionnelles $\{f_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ dépendent généralement de paramètres θ_0 qui ne sont pas connus mais estimés et donc s'accompagnent de « bruits » qui viennent polluer les densités conditionnelles de prévision $\{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ et qui peuvent conduire au rejet à tort de la nulle. De plus, l'ensemble d'informations Ω_{t-1} n'est généralement pas observé dans son intégralité ce qui peut accentuer ces bruits. Au final, on se retrouve avec un test dont la distribution asymptotique dépend de paramètres de nuisance. Pour résoudre ces problèmes, Bai (2003) propose un test général de spécification correcte dont le principe est similaire au test de Kolmogorov-Smirnov à la différence près qu'il considère des paramètres estimés $\hat{\theta}$ et un ensemble d'informations tronqué $\tilde{\Omega}_{t-1}$. Enfin, il applique une transformation martingale de Khmaladze (1981) qui permet de purger l'effet des erreurs d'estimation sur la conclusion du test. Formellement, soit $V_T(r)$ un processus défini à partir des transformations probabilistes $\{z_t\}_{t=1}^T$ tel que :

$$V_T(r) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T [\mathbb{I}(z_t \leq r) - r] , \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.120)$$

où $\mathbb{I}(\cdot)$ est une fonction indicatrice qui vaut 1 si son argument est vrai et 0 dans le cas contraire. Soit $\hat{V}_T(r)$ son équivalent empirique défini à partir de $\hat{z}_t = P_t(y_t|\tilde{\Omega}_{t-1};\hat{\theta})$:

$$\hat{V}_T(r) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T [\mathbb{I}(\hat{z}_t \leq r) - r] , \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.121)$$

Bai montre que le processus $\hat{V}_T(r)$ admet la représentation asymptotique suivante :

$$\hat{V}_T(r) = V_T(r) - \bar{g}(r)' \sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) + o_p(1) , \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.122)$$

avec

$$\bar{g}(r) = \text{plim} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial P_t(x|\tilde{\Omega}_{t-1};\theta_0)}{\partial \theta} \Big|_{x=P_t^{-1}(r|\tilde{\Omega}_{t-1};\theta_0)} , \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.123)$$

C'est à travers le terme $\bar{g}(r)' \sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0)$ de (1.122) que le processus $\hat{V}_T(r)$ dépend des vrais paramètres θ_0 dont l'erreur d'estimation vient « polluer » le test d'adéquation à la

loi uniforme. Toute l'astuce de Bai (2003) consiste à transformer le processus empirique $\hat{V}_T(r)$ de sorte à retirer ce terme de la façon suivante :

$$\hat{W}_T(r) = \hat{V}_T(r) - \int_0^1 \left[\dot{g}(s)' C^{-1}(s) \int_s^1 \dot{g}(\tau) d\hat{V}_T(r) \right] ds, \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.124)$$

où le vecteur $g(r)$ est défini par :

$$g(r) = (r, \bar{g}(r)')', \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.125)$$

et $\dot{g}$ est la dérivée de $g(r)$:

$$\dot{g}(r) = (1, \dot{\bar{g}}(r)')', \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.126)$$

Enfin, la quantité $C(r)$ est donnée par :

$$C(r) = \int_r^1 \dot{g}(\tau) \dot{g}(\tau)' d\tau, \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.127)$$

Bai propose une statistique de test indépendante des paramètres du modèle considéré :

$$T_T = \sup_{0 \leq r \leq 1} \left| \hat{W}_T(r) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \max_{0 \leq r \leq 1} |W(r)|, \quad \forall r \in [0, 1] \quad (1.128)$$

où $W(\cdot)$ est un mouvement Brownien standard. Les valeurs critiques à 10%, 5% , et 1% de cette statistique ont été simulées par Bai (2003), elles sont respectivement : 1.94, 2.22 et 2.80.

Test de Berkowitz (2001) : Berkowitz (2001) propose une transformation²³, notée z_t^* , des transformées de Rosenblatt z_t en évaluant la fonction quantile associée à la loi normale centrée et réduite en z_t :

$$z_t^* = \Phi^{-1}(z_t), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.129)$$

Berkowitz montre que si les variables z_t sont des tirages aléatoires dans une loi uniforme $U[0, 1]$ alors les variables z_t^* sont des tirages aléatoires dans une loi normale $N(0, 1)$ (Annexe C.2) :

$$z_t \stackrel{i.i.d}{\sim} U[0, 1] \Rightarrow z_t^* \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.130)$$

23. Nous l'appellerons par la suite : transformée de Berkowitz.

Par conséquent, les densités de prévision $\{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\theta_0)\}_{t=1}^T$ sont valides si et seulement si les transformées de Berkowitz $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ sont des tirages aléatoires dans une loi normale centrée et réduite $N(0,1)$. Dans ce contexte, Berkowitz (2001) construit un test LR sur la base d'un modèle autorégressif d'ordre 1 dans lequel les différentes hypothèses testées s'obtiennent en imposant certaines contraintes :

$$z_t^* - \mu = \rho(z_{t-1}^* - \mu) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad \forall t = 2, 3, \dots, T \quad (1.131)$$

A ce modèle, il associe la fonction de log-vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma^2, \rho) = & -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{(z_1^* - \mu/(1-\rho))^2}{2\sigma^2/(1-\rho^2)} \\ & - \frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{t=2}^T \frac{(z_t^* - \mu - \rho z_{t-1}^*)^2}{2\sigma^2} \end{aligned} \quad (1.132)$$

Les variables $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ sont non-autocorrélées si $\rho = 0$. Dans ce cas, le test LR d'indépendance est obtenu en imposant une seule contrainte :

$$LR_{ind} = -2 \{ \ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, 0) - \ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}) \} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi^2(1) \quad (1.133)$$

De la même manière, le test de la loi normale $N(0,1)$ s'obtient en imposant deux contraintes : $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Il est formulé comme suit :

$$LR_{norm} = -2 \{ \ell(0, 1, \hat{\rho}) - \ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}) \} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi^2(2) \quad (1.134)$$

Enfin, la validité d'une densité de prévision est vérifiée en testant conjointement les hypothèses précédentes, *i.e.* en imposant les trois contraintes $\rho = 0$, $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Le test LR correspondant s'écrit :

$$LR = -2 \{ \ell(0, 1, 0) - \ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}) \} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi^2(3) \quad (1.135)$$

Berkowitz montre, à travers des simulations Monte Carlo, que ces tests présentent l'avantage d'être puissants sur des échantillons de tailles disponibles dans la pratique.

Tests de comparaison de densités conditionnelles mal spécifiées

Contrairement aux tests précédents, les tests de comparaison de densités conditionnelles mal spécifiées permettent de choisir parmi un ensemble de modèles prédictifs, celui

qui engendre la densité de prévision la plus proche de la réalité. On oppose deux façons de comparer les densités conditionnelles de prévision : soit sur la base d'un critère d'information de type Kullback and Leibler (1951), soit sur la base d'un test statistique. Nous ne présenterons ici que le test de Bao and Lee (2004) qui appartient à la première catégorie.

Test de Bao and Lee (2004) : Bao and Lee (2004) proposent un test issu de cette nouvelle génération. Pour cela, ils considèrent une densité de prévision à l'horizon $h = 1$ de la variable y_t , conditionnellement à l'ensemble d'informations Ω_{t-1} , notée $p_t(y_t|\Omega_{t-1}; \theta)$ avec θ un vecteur de paramètres et une série de réalisations $\{y_t\}_{t=1}^T$ sur la période d'évaluation du modèle qu'ils supposent générées selon une fonction de densité conditionnelle inconnue $\varphi_t(y_t|\Omega_{t-1})$. La densité de prévision $p_t(y_t|\Omega_{t-1}; \theta)$ est correctement spécifiée si et seulement si pour une valeur θ_0 des paramètres, on a :

$$p_t(y_t|\Omega_{t-1}; \theta_0) = \varphi_t(y_t|\Omega_{t-1}) , \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.136)$$

Dès lors, la mesure de la distance entre la vraie densité conditionnelle $\varphi_t(y_t|\Omega_{t-1})$ et la densité conditionnelle de prévision $p_t(y_t|\Omega_{t-1}; \theta)$ doit permettre de classer les modèles du plus proche au plus éloigné du processus générateur de données. La mesure de distance retenue par les auteurs est le critère d'information de Kullback-Leibler défini par :

$$I(\varphi : p; \theta) \equiv \mathbb{E}[\ln \varphi_t(y_t; \theta) - \ln p_t(y_t; \theta)] \quad (1.137)$$

où l'espérance est définie par rapport à la vraie densité conditionnelle $\varphi_t(y_t|\Omega_{t-1})$. La distance entre la densité conditionnelle de prévision $p_t(y_t|\Omega_{t-1}; \theta)$ et la vraie densité conditionnelle $\varphi_t(y_t|\Omega_{t-1})$ correspond au minimum en θ de ce critère, soit :

$$I(\varphi : p; \theta^*) \leq I(\varphi : p; \theta) , \quad \forall \theta \in \Theta \quad (1.138)$$

où θ^* désigne la pseudo-vraie valeur de θ qui minimise $I(\varphi : p; \theta)$. Ce critère peut être estimé par :

$$I(\varphi : p; \hat{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\ln \varphi_t(y_t|\Omega_{t-1}) - \ln p_t(y_t|\Omega_{t-1}; \hat{\theta})] \quad (1.139)$$

où $\hat{\theta}$ est l'estimateur par maximum de vraisemblance de θ^* . Le problème est que ce critère n'est pas directement exploitable du fait que la vraie densité conditionnelle $\varphi_t(y_t|\Omega_{t-1})$ est inobservable. Néanmoins, Bao and Lee (2004) proposent un critère modifié à partir

du résultat suivant de Berkowitz (2001) :

$$\ln \left[\frac{\varphi_t(y_t|\Omega_{t-1})}{p_t(y_t|\Omega_{t-1};\hat{\theta})} \right] = \ln \left[\frac{q_t(x_t)}{\phi(y_t)} \right], \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.140)$$

où $\phi(\cdot)$ désigne la densité d'une loi normale centrée et réduite et où x_t est le fractile normal associé à la transformation probabiliste z_t de y_t et $q_t(\cdot)$ la densité conditionnelle des fractiles de la loi normale associée à l'inverse de la transformation probabiliste de Rosenblatt (1952) :

$$x_t = \Phi^{-1}(z_t), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.141)$$

avec $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite et z_t défini par :

$$z_t = \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u|\Omega_{t-1};\hat{\theta})du, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (1.142)$$

Le critère modifié s'écrit :

$$\tilde{I}(\varphi : p; \hat{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\ln q_t(x_t) - \ln \phi(x_t)] \quad (1.143)$$

La difficulté consiste alors à postuler une distribution conditionnelle $q_t(\cdot)$ pour les variables x_t . Les auteurs considèrent un processus $AR(L)$ tel que :

$$x_t = X'_{t-1}\beta + \sigma\epsilon_t \quad (1.144)$$

où X_{t-1} est un vecteur de retards de x_t , β un vecteur de paramètres et ϵ_t un résidu *i.i.d.* dont la loi de probabilité est $g(\epsilon_t; \zeta)$ où ζ est un vecteur de paramètres. Les auteurs retiennent une distribution de type semi-non-paramétrique²⁴ d'ordre K :

$$g(\epsilon_t; \zeta) = \frac{(\sum_{k=0}^K r_k \epsilon_t^k)^2 \phi(\epsilon_t)}{\int_{-\infty}^{\infty} (\sum_{k=0}^K r_k u^k)^2 \phi(u) du} \quad (1.145)$$

avec $\zeta \equiv (r_1, r_2, \dots, r_K)'$, $r_0 = 1$. Si $r_k = 0 \quad \forall k > 0$ alors $p(\epsilon_t) = \phi(\epsilon_t)$. ainsi, la densité de x_t s'écrit :

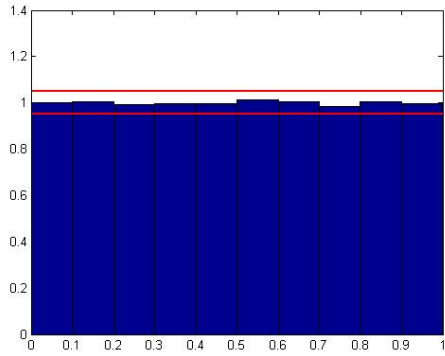
$$q_t(x_t) = \frac{1}{\sigma} g \left(\frac{x_t - X'_{t-1}\beta}{\sigma}; \zeta \right) \quad (1.146)$$

24. Cette distribution a été proposée par Gallant and Nychka (1987).

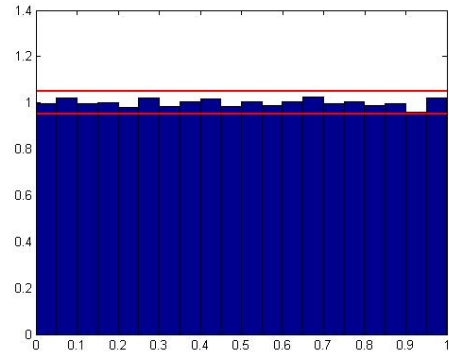
qui dégénère en une loi normale centrée et réduite si et seulement si $\beta = 0$, $\sigma = 1$ et $\zeta = 0'_K$. Dans ces conditions, le critère modifié s'écrit :

$$\tilde{I}(\varphi : p; \hat{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln \left[\frac{1}{\hat{\sigma}} g \left(\frac{x_t - X'_{t-1} \hat{\beta}}{\hat{\sigma}}; \hat{\zeta} \right) \right] - \ln \phi(x_t) \right\} \quad (1.147)$$

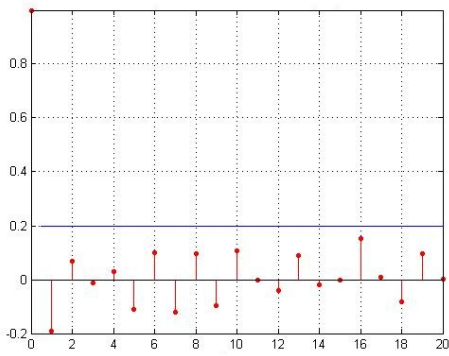
où $\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}$ et $\hat{\zeta}$ sont les estimations par maximum de vraisemblance des paramètres θ , σ et ζ respectivement.



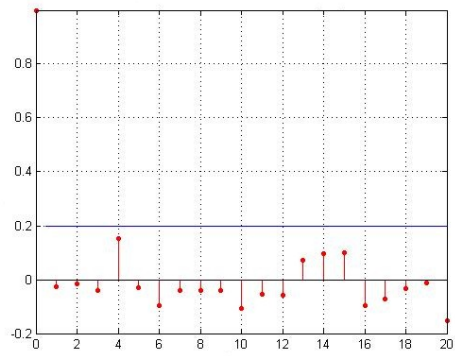
(a) Histogramme de z_t (10 bâtons)



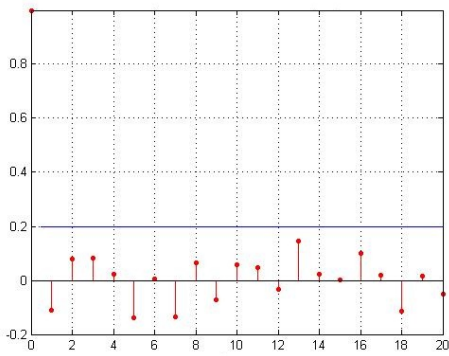
(b) Histogramme de z_t (20 bâtons)



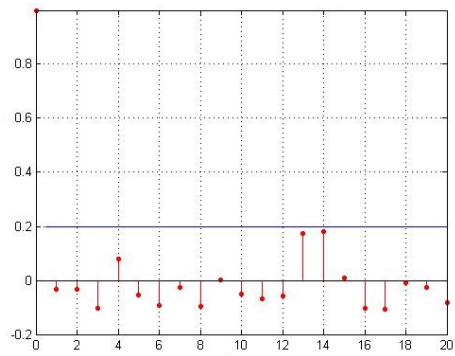
(c) Correlogramme de $z_t - \bar{z}$



(d) Correlogramme de $(z_t - \bar{z})^2$

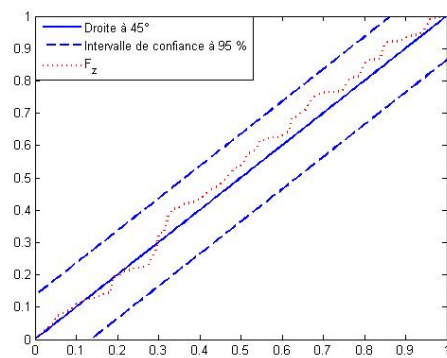


(e) Correlogramme de $(z_t - \bar{z})^3$

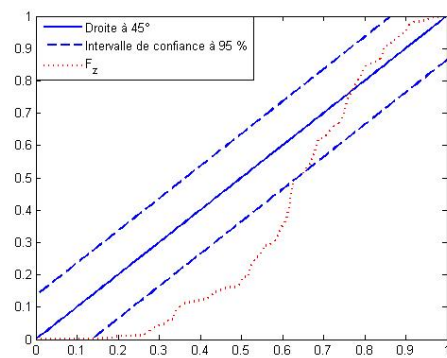


(f) Correlogramme de $(z_t - \bar{z})^4$

FIGURE 1.7 – Approche graphique de Diebold *et al.* (1998)



(a) Densité de prévision bien spécifiée



(b) Densité de prévision mal spécifiée

FIGURE 1.8 – Approche graphique de Clements and Smith (2001)

1.5 Conclusion

L'objectif de ce premier chapitre était de passer en revue les différents modèles à changement de régimes les plus rencontrés dans la pratique. Plus précisément, les différentes représentations ont été présentées et classées selon la nature de la transition entre les régimes et selon l'observabilité de la variable de transition. Ces modèles sont de plus en plus utilisés dans les applications empiriques notamment à des fins de prévision. La construction et l'évaluation de celle-ci ont également été revues. Avec cette nouvelle forme de modélisation, les intervalles et les densités de prévision ont du sens et sont exploitables dans la prise de décision. En effet, contrairement au cadre linéaire où elles sont symétriques et continues (respectivement, unimodales), ces formes de prévision fournissent une information supplémentaire sur le niveau d'incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle. Les tests d'évaluation correspondants ont été présentés dans la dernière section.

A l'issue de cette revue de littérature, on s'aperçoit que malgré l'utilisation croissante des modèles à changement de régimes, leur apport en termes de prévision relativement à la modélisation linéaire standard ne fait pas l'unanimité des chercheurs car si l'on se réfère à la simple prévision ponctuelle, les modèles linéaires sont assez satisfaisants. Par contre, si le critère de comparaison est l'intervalle ou la densité de prévision, les modèles non-linéaires peuvent s'avérer très utiles dans la mesure où ces dernières formes de prévision sortent du cadre habituel (intervalles de prévision symétriques et continus et densités de prévision symétriques et unimodales) et fournissent au décideur économique plus d'informations. Cependant, les tests d'évaluation des prévisions, notamment par intervalle et par densité ne sont pas assez nombreux et souffrent parfois de problèmes de taille et/ou de puissance. C'est pour remédier à ces problèmes que nous allons proposer une nouvelle approche d'évaluation des intervalles (chapitre 2) et des densités de prévisions (chapitre 3) puis l'utiliser lors d'une analyse empirique (chapitre 4) pour tenter de répondre la question sur l'apport des modèles à changement de régimes à la prévision économique.

Chapitre 2

Evaluation des intervalles de prévision

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un test d'évaluation des intervalles de prévision dans le cadre de ce que Clements and Taylor (2003) appellent une “*Event Probability Forecast Approach*”. En effet, malgré les nombreuses façons de construire les intervalles de prévision et malgré leur intérêt croissant notamment en finance avec la généralisation de la Value-at-Risk comme mesure de risque, les tests d'évaluation de cette forme de prévision ne sont qu'à leur début et le test qui revient fréquemment dans les travaux empiriques est celui de Christoffersen (1998), la référence en la matière. Avec son hypothèse de couverture conditionnelle, Christoffersen pose le fondement des tests d'évaluation des intervalles de prévision ; Un intervalle de prévision est valide si ses violations *ex post* se produisent arbitrairement (hypothèse d'indépendance) et dans une proportion égale au taux de couverture considéré (hypothèse de couverture non conditionnelle), une violation étant une situation exceptionnelle dans laquelle la réalisation de la variable aléatoire n'appartient pas à l'intervalle de prévision. Tester l'hypothèse de couverture conditionnelle se traduit généralement par un test d'hypothèse distributionnelle sur le processus des violations (test de la loi de Bernoulli (Christoffersen, 1998)) ou sur le processus des durées entre les violations (test de la loi géométrique (Candelon *et al.*, 2011; Haas, 2005) et test de la loi exponentielle (Christoffersen and Pelletier, 2004)). Nous proposons de tester la loi binomiale, une transformation sous l'hypothèse nulle de la loi de Bernoulli, en se basant sur les travaux de Bontemps and Meddahi (2012) et Candelon *et al.* (2011). Les premiers ont développé un cadre GMM de tests d'hypothèses distributionnelles en

construisant des J-statistiques à partir de polynômes orthonormaux associés à certaines lois de probabilité. Les derniers ont repris les polynômes de Meixner associés (indirectement) à la loi géométrique pour tester cette loi sur le processus des durées séparant les violations de la VaR. En ce qui nous concerne, nous considérons les polynômes orthonormaux de Krawtchouk associés à la loi binomiale. En effet, sous l'hypothèse nulle de validité d'un intervalle de prévision, les violations de celui-ci sont les réalisations indépendantes d'une loi de Bernoulli avec un taux de succès égal au taux de couverture nominal, ou de façon équivalente, la somme des violations est la réalisation d'une loi binomiale dont le premier paramètre correspond au taux de couverture et le deuxième au nombre de violations additionnées. L'avantage des polynômes de Krawtchouk, comme tous les polynômes orthonormaux, est qu'ils sont d'espérance nulle et servent donc directement de conditions de moment dans la méthode des moments généralisée. De plus, leur matrice de variance-covariance, étant égale à la matrice identité, évite l'estimation de la matrice de poids optimaux. Des J-statistiques sont ainsi aisément calculées avec la liberté de choisir le polynôme ou la combinaison de polynômes à utiliser pour tester conjointement l'hypothèse de couverture conditionnelle ou individuellement les hypothèses de couverture non conditionnelle ou d'indépendance. Des exercices de simulation de la taille et de la puissance de notre test pour différentes combinaisons de polynômes et différentes tailles d'échantillon ont mis en évidence la supériorité de notre approche relativement à celle développée par Christoffersen (1998).

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.2, nous proposons un nouveau test fondé sur la méthode des moments généralisée. Sur la base de polynômes orthonormaux, nous testons indirectement l'adéquation de la série des violations transformées en blocs à une loi binomiale $B(N, \alpha)$ par des J-statistiques, N étant la taille des blocs et α le taux de couverture considéré. Ensuite, nous étudierons les propriétés à distance finie de notre test dans la section 2.3. Nous prouverons que notre approche présente certains avantages, notamment en termes de taille et de puissance, par rapport à l'approche fondatrice de Christoffersen (1998). Enfin, l'application de cette nouvelle approche d'évaluation des intervalles de prévision à deux séries de rendements d'indices boursiers (SP 500 et Nikkei 225) fera l'objet de la section 2.4 avant de conclure dans la section 2.5.

2.2 Une nouvelle approche GMM

Dans cette section, nous proposons une nouvelle approche d'évaluation des intervalles de prévision en testant l'hypothèse d'une distribution binomiale sur la série des viola-

tions I_t . Notre analyse est basée sur le cadre GMM développé par Bontemps and Meddahi (2005, 2012). Nous présentons d'abord l'environnement du test, puis nous définissons les conditions de moment utilisées pour tester la validité des intervalles de prévision. Enfin, nous proposons de simples J-statistiques correspondant aux trois hypothèses de couverture non conditionnelle (UC), d'indépendance (IND) et de couverture conditionnelle (CC).

2.2.1 Environnement du test

Une implication directe du Lemme 1¹ de Christoffersen (1998) est que, sous l'hypothèse de couverture conditionnelle, la somme des violations suit une loi binomiale $B(T, \alpha)$:

$$H_{0,cc} : \sum_{t=1}^T I_t \sim B(T, \alpha) \quad (2.1)$$

Une façon naturelle de tester l'hypothèse de couverture conditionnelle consiste donc à tester cette hypothèse distributionnelle. Cependant, cette propriété ne peut être directement utilisée pour développer une procédure de test, puisque pour une série donnée d'intervalles de prévision $\{C_{t|t-1}(\alpha)\}_{t=1}^T$ nous ne disposons que d'une seule réalisation de la somme des violations. Pour cette raison, nous proposons de diviser l'échantillon des violations en blocs. Comme les violations $\{I_t\}_{t=1}^T$ sont indépendantes sous l'hypothèse nulle, il est possible de les regrouper en H blocs de même taille N , avec $H = \lceil T/N \rceil$ (Figure 2.1). La somme des violations I_t à l'intérieur de chaque bloc suit une loi binomiale

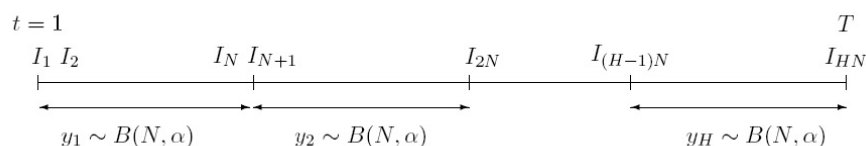


FIGURE 2.1 – Transformation en blocs des violations

$B(N, \alpha)$. Plus formellement, pour chaque bloc, on définit la variable y_h comme la somme

1. Rappelons que dans son Lemme 1, Christoffersen (1998) montre que tester l'hypothèse de couverture conditionnelle est équivalent à vérifier que les violations $\{I_t(\alpha)\}_{t=1}^T$ sont des tirages *i.i.d.* dans une loi de Bernoulli $B(\alpha)$.

des N violations correspondantes :

$$y_h = \sum_{t=(h-1)N+1}^{hN} I_t, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.2)$$

Sous l'hypothèse nulle, le nouveau processus $\{y_h\}_{h=1}^H$ ainsi construit est *i.i.d.* $B(N, \alpha)$ et l'hypothèse de couverture conditionnelle peut s'exprimer de la façon suivante :

$$H_{0,cc} : y_h \sim B(N, \alpha), \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.3)$$

2.2.2 Conditions de moment

Il existe de nombreuses façons de tester l'hypothèse de couverture conditionnelle à travers le test de l'hypothèse de distribution (2.3). Suivant Bontemps and Meddahi (2012), nous proposons un cadre GMM. L'idée générale est qu'il est possible d'associer des polynômes orthonormaux, dont l'espérance est nulle, à certaines lois de probabilité. De tels polynômes peuvent être utilisés dans la construction de conditions de moment dans un cadre GMM pour tester des hypothèses de distributions bien définies. Ainsi, les polynômes d'Hermite associés à la loi normale peuvent être utilisés pour construire un test de normalité (Bontemps and Meddahi, 2005). Un cas particulier des polynômes de Meixner² a été utilisé par Candelon *et al.* (2011) pour tester la loi géométrique dans le cadre du backtesting de la *Value-at-Risk*. Dans le cas particulier de la loi binomiale, les polynômes orthonormaux associés sont les polynômes de Krawtchouk. Ils sont définis comme suit :

Définition 3. Soit y_h une variable aléatoire discrète distribuée selon une loi binomiale $B(N, \alpha)$. Les polynômes de Krawtchouk (Figure 2.2) correspondants sont définis par la formule récursive suivante :

$$K_{i+1}^{(N, \alpha)}(y_h) = \frac{\alpha(N-i) + (1-\alpha)i - y_h}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)(N-i)(i+1)}} K_i^{(N, \alpha)}(y_h) - \sqrt{\frac{i(N-i+1)}{(i+1)(N-i)}} K_{i-1}^{(N, \alpha)}(y_h), \quad \forall i < N \quad (2.4)$$

avec $K_{-1}^{(N, \alpha)}(y_h) = 0$ et $K_0^{(N, \alpha)}(y_h) = 1$, ils vérifient les conditions de moment suivantes :

$$E \left[K_i^{(N, \alpha)}(y_h) \right] = 0, \quad \forall i < N \quad (2.5)$$

2. Les polynômes de *Meixner* sont associés à la loi de Pascal.

Les deux premiers polynômes de Krawtchouk, par exemple, sont :

$$K_1^{(N,\alpha)}(y_h) = \frac{\alpha N - y_h}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)N}}, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.6)$$

$$K_2^{(N,\alpha)}(y_h) = \left(\frac{\alpha(N-1) + (1-\alpha) - y_h}{\sqrt{2\alpha(1-\alpha)(N-1)}} \right) \left(\frac{\alpha N - y_h}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)N}} \right) - \sqrt{\frac{N}{2(N-1)}}, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.7)$$

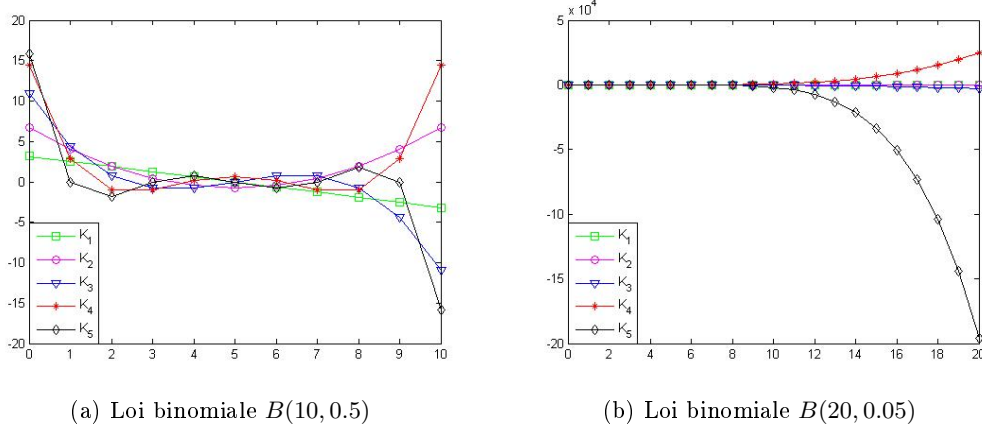


FIGURE 2.2 – Polynômes de Krawtchouk

Notre approche exploite les conditions de moment (2.5). Plus précisément, définissons la série des sommes $\{y_1, y_2, \dots, y_H\}$ définies par l'équation (2.2) et calculées à partir de la série des violations $\{I_t\}_{t=1}^T$. Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle, les variables y_h sont indépendamment et identiquement distribuées selon une loi binomiale $B(N, \alpha)$, où N désigne la taille du bloc. Ainsi, cette hypothèse peut être exprimée comme suit :

$$H_{0,cc} : E[K_i^{(N,\alpha)}(y_h)] = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m < N\}, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.8)$$

Une propriété intéressante de cette approche est qu'elle permet de tester séparément les hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance. En effet, rappelons-nous que sous la première hypothèse, la probabilité non conditionnelle d'avoir une violation est égale au taux α . Par conséquent, sous cette hypothèse, l'espérance mathématique de

la somme y_h est égale à αN puisque :

$$\mathbb{E}[y_h] = \sum_{t=(h-1)N+1}^{hN} \mathbb{E}[I_t] = \alpha N, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.9)$$

On peut donc écrire :

$$\mathbb{E}[\alpha N - y_h] = 0, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.10)$$

ou encore :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\alpha N - y_h}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)N}} \right] = 0, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.11)$$

qui n'est rien d'autre que l'espérance mathématique du premier polynôme de Krawtchouk. L'hypothèse de couverture non conditionnelle peut s'écrire simplement :

$$H_{0,uc} : \mathbb{E}[K_1^{(N,\alpha)}(y_h)] = 0, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.12)$$

Il suffit donc d'utiliser le premier polynôme de Krawtchouk $K_1^{(N,\alpha)}$ dans la construction de la condition de moment du test de l'hypothèse de couverture non conditionnelle. Sous l'hypothèse d'indépendance, les violations sont indépendamment distribuées et leur probabilité β n'est pas nécessairement égale au taux α . Dans ce cas, la somme y_h suit une loi binomiale $B(N, \beta)$ et l'hypothèse d'indépendance s'écrit simplement :

$$H_{0,ind} : \mathbb{E}[K_i^{(N,\beta)}(y_h)] = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m < N\}, \quad \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (2.13)$$

2.2.3 Procédure de test

Soit $K^{(N,\alpha)}$ le m -vecteur des polynômes de Krawtchouk $K_i^{(N,\alpha)}$ ($i = 1, 2, \dots, m < N$) associés à la loi binomiale $B(N, \alpha)$. Sous l'hypothèse de couverture conditionnelle et certaines conditions de régularité (Hansen, 1982), on peut montrer que :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{h=1}^H K^{(N,\alpha)}(y_h) \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{h=1}^H K^{(N,\alpha)}(y_h) \right) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(m) \quad (2.14)$$

où Σ est la matrice de variance-covariance de long terme associée à $K^{(N,\alpha)}$. Les polynômes étant orthonormaux, cette matrice de variance-covariance correspond à la matrice identité³ simplifiant ainsi le calcul de la J-statistique. Désignons par $J_{cc}(m)$ la statistique

3. Si nous négligeons cette propriété, il est également possible d'utiliser un estimateur à noyau de la matrice de variance-covariance de long terme.

de test correspondant à l'hypothèse de couverture conditionnelle associée au m -vecteur des polynômes orthonormaux $K^{(N,\alpha)}$.

Propriété 2. *Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle, la statistique de test vérifie :*

$$J_{cc}(m) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{h=1}^H K_i^{(N,\alpha)}(y_h) \right)^2 \xrightarrow[H \rightarrow \infty]{d} \chi^2(m) \quad (2.15)$$

où $K_i^{(N,\alpha)}(y_h)$ désigne le polynôme de Krawtchouk d'ordre $i \in \{1, 2, \dots, m < m\}$ correspondant à la loi binomiale $B(N, \alpha)$.

Démonstration 2. *Annexe B.1*

Puisque la statistique J_{uc} correspondant à l'hypothèse de couverture non conditionnelle est un cas particulier de la statistique $J_{cc}(m)$, elle peut être immédiatement calculée en ne prenant en compte que la première condition de moment $\mathbb{E}[K_1^{(N,\alpha)}(y_h)] = 0$, elle s'exprime comme suit :

$$J_{uc} = J_{cc}(1) = \frac{1}{H} \left(\sum_{h=1}^H K_1^{(N,\alpha)}(y_h) \right)^2 \xrightarrow[H \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (2.16)$$

Enfin, la statistique de test de l'hypothèse d'indépendance, notée $J_{ind}(m)$, s'écrit :

$$J_{ind}(m) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{h=1}^H K_i^{(N,\beta)}(y_h) \right)^2 \xrightarrow[H \rightarrow \infty]{d} \chi^2(m) \quad (2.17)$$

avec $K_i^{(N,\beta)}(y_h)$ le polynôme de Krawtchouk d'ordre $i \in \{1, 2, \dots, m < N\}$ associé à la loi binomiale $B(N, \beta)$ et β la probabilité d'une violation qui peut être différente du taux α . Cette probabilité est généralement inconnue, elle est estimée par un estimateur convergent $\hat{\beta} = (1/T) \sum_{t=1}^T I_t$. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté de la distribution asymptotique de la statistique de test $J_{ind}(m)$ doit être ajusté en conséquence :

$$J_{ind}(m) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{h=1}^H K_i^{(N,\hat{\beta})}(y_h) \right)^2 \xrightarrow[H \rightarrow \infty]{d} \chi^2(m-1) \quad (2.18)$$

avec $K_i^{(N,\hat{\beta})}(y_h)$ le polynôme de Krawtchouk d'ordre $i \in \{1, 2, \dots, m < N\}$ associé à la loi binomiale $B(N, \hat{\beta})$.

2.3 Simulations Monte Carlo

Dans cette section, nous étudions les propriétés à distance finie de nos tests basés sur la méthode des moments généralisée à travers des expériences Monte Carlo. Nous analysons, dans un premier temps, la taille de nos tests, puis leur puissance dans un cadre similaire à celui de Berkowitz *et al.* (2011). Nous comparons ces performances à distance finie à celles des tests LR de Christoffersen (1998). Afin de contrôler les distorsions de la taille, nous utilisons la méthode Monte Carlo proposée par Dufour (2006) (Annexe B.2).

2.3.1 Taille empirique

Afin d'étudier la taille empirique de nos tests, nous générons une série de T violations en considérant des tirages indépendants dans une loi de Bernoulli et en considérant successivement deux taux de couverture 0.99 et 0.95. Plusieurs tailles d'échantillon T sont considérées allant de 250 (qui correspond à une année de prévisions journalières) à 1500. La taille des blocs N , utilisée pour calculer les H sommes y_h , est fixée à 100 ou 25 observations. Le nombre m de polynômes varie de 1 (pour le test de l'hypothèse de couverture non conditionnelle) à 5. Sur la base d'une série $\{y_h\}_{h=1}^H$, avec $H = [T/N]$, nous calculons les statistiques J_{uc} et J_{cc} . Les tailles empiriques rapportées correspondent aux taux de rejets de l'hypothèse nulle calculés à partir de 10000 simulations pour une taille nominale égale à 5%.

Les tables 2.1 et 2.2 présentent les fréquences de rejets de l'hypothèse nulle par nos tests GMM et par les tests LR de Christoffersen (1998). Le test LR de l'hypothèse de couverture conditionnelle semble être *undersized* pour un taux de couverture de 0.95 et *oversized* pour un taux de couverture de 0.99, en particulier pour des tailles d'échantillons supérieures à 1000. Le test LR de l'hypothèse de couverture non conditionnelle, quant à lui, présente un comportement irrégulier bien que sa taille empirique reste proche de sa valeur nominale. Par contre, nos tests GMM ont globalement une taille empirique correcte notamment pour une taille de blocs égale à 25 et des valeurs m égales à 2 ou 3.

2.3.2 Puissance empirique

Nous étudions à présent la puissance empirique de nos tests basés sur la méthode des moments généralisée et nous la comparons à celle des tests LR de Christoffersen (1998) dans le contexte de la gestion du risque. Comme nous l'avions mentionné précédemment, la prévision de la *Value-at-Risk* peut être interprétée comme une prévision de la borne inférieure d'un intervalle de prévision semi-ouvert $C_{t|t-1}(\alpha) = [VaR_{t|t-1}(\alpha), +\infty[$. Nous

TABLE 2.1 – Tailles des tests d'évaluation des intervalles de prévision
($N = 100$)

Taux de couverture 0.95							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	2	0.0316	0.0643	0.0499	0.0442	0.0587	0.0404
500	5	0.0521	0.0556	0.0615	0.0662	0.0544	0.0443
750	7	0.0409	0.0513	0.0595	0.0734	0.0503	0.0462
1000	10	0.0487	0.0535	0.0614	0.0655	0.0503	0.0565
1250	12	0.0522	0.0490	0.0543	0.0577	0.0417	0.0781
1500	15	0.0489	0.0479	0.0596	0.0577	0.0489	0.0656
Taux de couverture 0.99							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	2	0.0516	0.0397	0.0397	0.0397	0.0132	0.0112
500	5	0.0314	0.0397	0.0360	0.0383	0.0640	0.0113
750	7	0.0330	0.0543	0.0456	0.0425	0.0384	0.0220
1000	10	0.0361	0.0482	0.0548	0.0473	0.0572	0.0251
1250	12	0.0575	0.0517	0.0592	0.0575	0.0627	0.0286
1500	15	0.0487	0.0518	0.0489	0.0414	0.0541	0.0312

Note : Sous l'hypothèse nulle, les violations sont *i.i.d.* et suivent une loi de Bernoulli. Les résultats sont basés sur 10000 réplifications. Pour chaque échantillon, nous calculons la fréquence de rejets à 5%. $J_{cc}(m)$ désigne le test GMM de l'hypothèse de couverture conditionnelle obtenu en utilisant les m premiers polynômes de Krawtchouk. J_{uc} est le test GMM de l'hypothèse de couverture non conditionnelle calculé à partir du polynôme de Krawtchouk d'ordre 1. LR_{cc} (respectivement LR_{uc}) est le test LR de Christoffersen (1998) de couverture conditionnelle (respectivement, non conditionnelle). T est le nombre de violations des intervalles de prévision I_t et $H = \lceil T/N \rceil$ est le nombre de blocs de taille $N = 100$ utilisés pour construire la série des sommes des violations y_t .

allons donc simuler des rendements financiers et calculer des prévisions de la *Var* de sorte à fournir des prévisions invalides selon les hypothèses de Christoffersen (1998). Nous adoptons pour cela le schéma de Berkowitz *et al.* (2011) en supposant que les rendements r_t sont issus d'un simple modèle t-GARCH avec un effet de levier asymétrique :

$$r_t = \sigma_t z_t \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (2.19)$$

TABLE 2.2 – Tailles des tests d'évaluation des intervalles de prévision
($N = 25$)

Taux de couverture 0.95							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	10	0.0386	0.0481	0.0417	0.0345	0.0558	0.0417
500	20	0.0547	0.0546	0.0550	0.0469	0.0573	0.0425
750	30	0.0461	0.0520	0.0583	0.0533	0.0572	0.0496
1000	40	0.0545	0.0567	0.0607	0.0510	0.0573	0.0592
1250	50	0.0489	0.0472	0.0555	0.0476	0.0423	0.0745
1500	60	0.0503	0.0515	0.0546	0.0472	0.0532	0.0685

Taux de couverture 0.99							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	10	0.0456	0.0551	0.0551	0.0462	0.0157	0.0128
500	20	0.0309	0.0673	0.0632	0.0537	0.0651	0.0114
750	30	0.0592	0.0588	0.0645	0.0624	0.0390	0.0196
1000	40	0.0345	0.0498	0.0508	0.0849	0.0534	0.0231
1250	50	0.0423	0.0546	0.0448	0.0438	0.0582	0.0244
1500	60	0.0461	0.0540	0.0449	0.0289	0.0513	0.0286

Note : Sous l'hypothèse nulle, les violations sont *i.i.d.* et suivent une loi de Bernoulli. Les résultats sont basés sur 10000 réplifications. Pour chaque échantillon, nous calculons la fréquence de rejets à 5%. $J_{cc}(m)$ désigne le test GMM de l'hypothèse de couverture conditionnelle obtenu en utilisant les m premiers polynômes de Krawtchouk. J_{uc} est le test GMM de l'hypothèse de couverture non conditionnelle calculé à partir du polynôme de Krawtchouk d'ordre 1. LR_{cc} (respectivement LR_{uc}) est le test LR de Christoffersen (1998) de couverture conditionnelle (respectivement, non conditionnelle). T est le nombre de violations des intervalles de prévision I_t et $H = \lceil T/N \rceil$ est le nombre de blocs de taille $N = 25$ utilisés pour construire la série des sommes des violations y_t .

avec $\{z_t\}_{t=1}^T$ une série de tirages *i.i.d.* dans une loi de Student à ν degrés de liberté et où la variance conditionnelle σ_t^2 est donnée ⁴ par :

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma \sigma_{t-1}^2 \left(\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} z_{t-1} - \theta \right)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (2.20)$$

Une fois la série des rendements générée, nous calculons la prévision de la VaR par la méthode de la simulation historique avec une fenêtre glissante de taille $g = 250$ observa-

4. Le modèle est paramétrisé comme dans Berkowitz *et al.* (2011) : $\gamma = 0.1$, $\theta = 0.5$, $\beta = 0.85$, $\omega = 3.9683e^{-6}$ et $d = 8$. En même temps, ω a été choisi de telle sorte à correspondre à un écart type annuel de 0.2. La paramétrisation globale correspond à une volatilité journalière de 0.975.

tions. Cette méthode de prévision produit en général des *clusters* de violations (et viole donc l'hypothèse d'indépendance) et une légère déviation de la couverture non conditionnelle quand nous considérons des prévisions *out of sample* (ces déviations dépendent de la taille de la fenêtre glissante). Formellement, nous définissons la VaR calculée par la méthode de simulation historique de la façon suivante :

$$VaR_{t|t-1}(\alpha) = Percentile(\{r_i\}_{i=t-g}^{t-1}, 100\alpha) , \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (2.21)$$

Pour chaque simulation, une série de violations $\{I_t\}_{t=1}^T$ est construite en comparant les prévisions *ex-ante* de la $VaR_{t|t-1}(\alpha)$ aux réalisations *ex post* des rendements r_t . Ensuite, la série $\{y_h\}_{h=1}^H$ est calculée en additionnant les éléments de chaque bloc de taille N . A partir de cette nouvelle série, les statistiques de test J_{cc} sont calculées pour différents nombre de polynômes et pour des tailles d'échantillon T allant de 250 à 1500. Les statistiques de test LR_{uc} et LR_{cc} sont également calculées pour chaque simulation afin de pouvoir comparer les performances respectives des tests GMM et LR. La fréquence de rejets de l'hypothèse alternative, pour une taille nominale 5%, est obtenue à partir de 10000 simulations. Afin de contrôler les distorsions des tailles des tests, nous utilisons la méthode de Dufour (2006) (Annexe B.2).

La table 2.3 présente les puissances corrigées des tests GMM et LR pour différentes tailles d'échantillons T et deux taux de couverture 0.95 et 0.99. La taille des blocs utilisée dans notre approche est $N = 100$. Seuls les résultats relatifs aux 2^{ème}, 3^{ème} et 5^{ème} polynôme de Krawtchouk ont été rapportés. A la lecture de cette table, il ressort que, pour un taux de couverture de 0.95, notre test de l'hypothèse de couverture conditionnelle est deux fois plus puissant que le test LR de Christoffersen (1998). Cette différence de puissance s'atténue légèrement quand le taux de couverture passe à 0.99. La puissance de notre test de couverture non conditionnelle est également supérieure à celle du test LR, notamment pour un taux de couverture de 0.99. Pour un taux de couverture de 0.95, même si les puissances des deux tests sont anormalement décroissantes (ceci est spécifique à cette expérience), notre test reste quand même le plus puissant. La table 2.4 présente également les puissances corrigées des tests GMM et LR pour une taille de blocs plus petite $N = 25$. Les résultats sont similaires à ceux de la table 2.3. Notons simplement que la réduction de la taille des blocs a affecté la puissance de nos tests mais pas leur performance relativement aux tests LR, car dans tous les cas nos tests présentent une puissance supérieure. La figure 2.3 représente l'évolution de la puissance du test $J_{cc}(2)$ en fonction de la taille d'échantillon T pour différentes tailles de blocs N . La meilleure puissance est obtenue avec une taille $N = 25$ et c'est cette taille qui sera

TABLE 2.3 – Puissances des tests d'évaluation des intervalles de prévision
($N = 100$)

Taux de couverture 0.95							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	2	0.2776	0.3991	0.4274	0.4203	0.2268	0.3333
500	5	0.1586	0.6151	0.6379	0.6221	0.1464	0.3298
750	7	0.1457	0.7197	0.7280	0.7099	0.1209	0.3632
1000	10	0.1302	0.8164	0.8209	0.8116	0.1152	0.4212
1250	12	0.1266	0.8703	0.8774	0.8639	0.1179	0.4874
1500	15	0.1367	0.9122	0.9118	0.9079	0.1322	0.5207
Taux de couverture 0.99							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	2	0.1828	0.2709	0.2709	0.2820	0.1662	0.2330
500	5	0.2348	0.4525	0.4601	0.4403	0.1498	0.2761
750	7	0.2604	0.5410	0.5458	0.5516	0.2175	0.3073
1000	10	0.2980	0.6495	0.6596	0.6518	0.2116	0.3786
1250	12	0.3422	0.7051	0.6999	0.7058	0.2771	0.4407
1500	15	0.3663	0.7795	0.7738	0.7686	0.3330	0.4899

Note : Les simulations de la puissance sont effectuées pour différentes tailles d'échantillon T et pour différents nombres de blocs H pour des taux de couverture 0.90 et 0.99. $J_{cc}(m)$ désigne le test GMM de couverture conditionnelle avec m polynômes orthonormaux, J_{uc} est le test de couverture non conditionnelle, il correspond au test $J_{cc}(1)$. LR_{uc} et LR_{cc} sont respectivement les tests LR de Christoffersen (1998) de couverture non conditionnelle et de couverture conditionnelle. Les résultats sont obtenus après 10000 simulations en utilisant la procédure Monte Carlo de Dufour (2006) avec 9999 simulations. La taille nominale est fixée à 5%.

adoptée dans l'application empirique. La figure 2.4 représente l'évolution de la puissance en fonction de la taille du bloc pour différentes tailles d'échantillons. On remarque que la puissance est maximale pour une taille de bloc comprise entre 10 et 30 confirmant le résultat précédent.

2.3.3 Ratios de faisabilité des tests GMM et LR

Notons que les tailles empiriques (tables 2.1 et 2.2) et les puissances empiriques (tables 2.3 et 2.4) sont uniquement données pour les simulations permettant de calculer les statistiques de test LR, car pour une taille d'échantillon $T = 250$ par exemple et un taux de couverture 0.99, la statistique de test LR_{cc} n'est définie que s'il y a au moins une

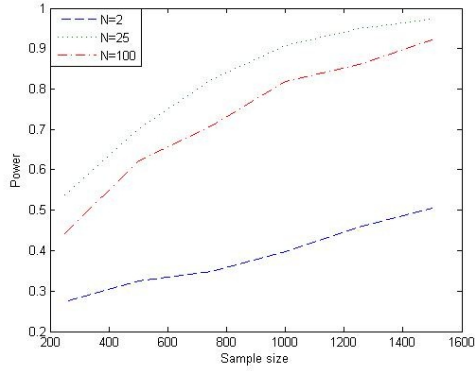
TABLE 2.4 – Puissances des tests d'évaluation des intervalles de prévision
($N = 25$)

Taux de couverture 0.95							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	10	0.2656	0.5229	0.5314	0.4864	0.2285	0.3355
500	20	0.1842	0.7116	0.7022	0.6815	0.1482	0.3334
750	30	0.1509	0.8333	0.8277	0.8098	0.1155	0.3605
1000	40	0.1441	0.9091	0.9073	0.8919	0.1154	0.4374
1250	50	0.1444	0.9492	0.9439	0.9358	0.1218	0.4881
1500	60	0.1529	0.9717	0.9674	0.9637	0.1287	0.4981
Taux de couverture 0.99							
T	H	J_{uc}	$J_{cc}(2)$	$J_{cc}(3)$	$J_{cc}(5)$	LR_{uc}	LR_{cc}
250	10	0.2447	0.3697	0.3825	0.3866	0.1835	0.2336
500	20	0.2423	0.5163	0.5368	0.5410	0.1455	0.2746
750	30	0.2721	0.6436	0.6569	0.6232	0.2112	0.2991
1000	40	0.3253	0.7176	0.7428	0.7226	0.2044	0.3781
1250	50	0.3753	0.7926	0.7911	0.7896	0.2741	0.4387
1500	60	0.4373	0.8499	0.8456	0.8352	0.3368	0.4926

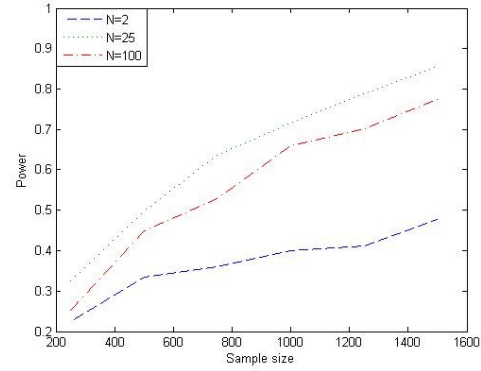
Note : Les simulations de la puissance sont effectuées pour différentes tailles d'échantillon T et pour différents nombres de blocs H pour des taux de couverture 0.95 et 0.99. $J_{cc}(m)$ désigne le test GMM de couverture conditionnelle avec m polynômes orthonormaux, J_{uc} est le test de couverture non conditionnelle, il correspond au test $J_{cc}(1)$. LR_{uc} et LR_{cc} sont respectivement les tests LR de Christoffersen (1998) de couverture non conditionnelle et de couverture conditionnelle. Les résultats sont obtenus après 10000 simulations en utilisant la procédure Monte Carlo de Dufour (2006) avec 9999 simulations. La taille nominale est fixée à 5%.

violation dans l'échantillon, et que celle-ci ne se trouve pas sur le bord. La proportion d'échantillons pour lesquels le calcul de la taille et de la puissance empiriques est faisable est rapportée, pour chaque taille d'échantillon et pour un taux de couverture de 0.99, dans la table 2.5. Par contre, nos tests fondés sur la méthode des moments généralisée étant toujours réalisables⁵, ils ont volontairement été omis.

5. A condition que le nombre de polynômes considérés m soit inférieur ou égal à la taille du bloc N .

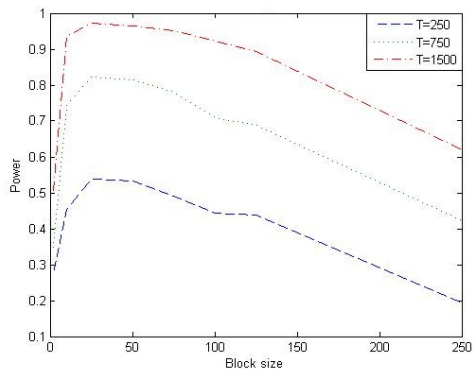


(a) Taux de couverture = 0.95

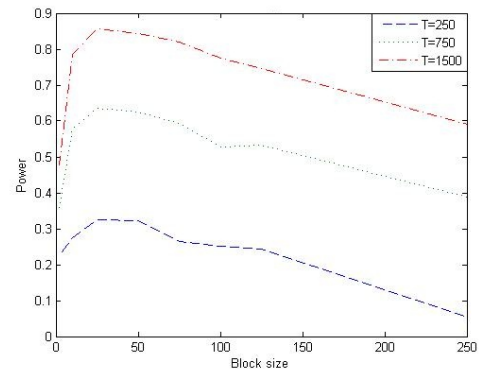


(b) Taux de couverture = 0.99

FIGURE 2.3 – Evolution de la puissance en fonction de la taille d'échantillon



(a) Taux de couverture = 0.95



(b) Taux de couverture = 0.99

FIGURE 2.4 – Evolution de la puissance en fonction de la taille du bloc

2.4 Application empirique

Nous proposons à présent une application empirique basée les rendements journaliers des indices boursiers SP 500 (entre le 05 janvier 1953 et le 19 décembre 1957) et Nikkei 225 (entre le 27 janvier 1987 et le 21 février 1992). L'idée de cette application est de sélectionner certains actifs pour lesquels l'hypothèse de linéarité est rejetée, d'utiliser à tort un modèle linéaire pour calculer une série d'intervalles de prévision invalides et d'évaluer ces derniers. On s'attend à ce que les tests rejettent les hypothèses nulles de couverture non conditionnelle, d'indépendance et/ou de couverture conditionnelle.

TABLE 2.5 – Ratios de faisabilité des tests d'évaluation des intervalles de prévision

Simulation de taille				
	$T = 250$	$T = 500$	$T = 750$	$T = 1000$
LR_{uc}	0.9185	0.9939	0.9991	0.9999
LR_{cc}	0.9179	0.9936	0.9991	0.9999
Simulation de puissance				
	$T = 250$	$T = 500$	$T = 750$	$T = 1000$
LR_{uc}	0.9023	0.9966	1.0000	1.0000
LR_{cc}	0.9010	0.9966	1.0000	1.0000

Note : La fraction d'échantillons pour lesquels un test est réalisable est rapportée pour chaque taille d'échantillon et pour un taux de couverture de 0.99. LR_{uc} et LR_{cc} désignent respectivement les tests LR de Christoffersen (1998) de couverture non conditionnelle et de couverture conditionnelle. Notons que le ratio de faisabilité de notre test GMM de couverture conditionnelle $J_{cc}(m)$ est indépendant du nombre de polynômes m et il est égal à 1. Les résultats sont basés sur 10000 simulations de la taille et de la puissance empiriques.

La linéarité des deux séries des rendements a été vérifiée à l'aide du test de Harvey and Leybourne (2007), réputé pour ses bonnes propriétés à distance finie, contre deux hypothèses alternatives : un modèle non-linéaire ESTAR et un modèle non-linéaire LSTAR. Le test rejette l'hypothèse de linéarité pour les deux séries en question. Les statistiques de test associées aux rendements des indices SP 500 et Nikkei 225 sont égales à 24.509 et 89.496 respectivement avec des p -values inférieures à 0.0001. Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous utilisons un modèle autorégressif linéaire AR(1) pour calculer des intervalles de prévision à des horizons $h = 2, 5$ et 10 jours. Plus précisément, les modèles sont estimés sur les 1000 premières observations et des intervalles de prévision continus et symétriques sont calculés sur les 250 dernières observations pour des taux de couverture 0.95 et 0.99.

La table 2.6 présente les résultats des tests d'évaluation des intervalles de prévision des rendements de l'indice SP 500 basés sur des blocs de taille $N = 25$. Si nous adoptons le seuil de risque d'erreur de première espèce habituel de 5% et pour un taux de couverture de 0.95, nos tests GMM rejettent toujours l'hypothèse de couverture conditionnelle et donc la validité du modèle ayant généré les prévisions. Ce rejet est toujours dû à celui de l'hypothèse d'indépendance (et aussi à celui de l'hypothèse de couverture non conditionnelle quand $h = 5$). Les tests LR ne rejettent la validité de ces intervalles de

TABLE 2.6 – Evaluation des intervalles de prévision (SP 500)

Taux de couverture 0.95						
Horizon	Tests GMM			Tests LR		
	J_{uc}	$J_{ind}(2)$	$J_{cc}(2)$	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}
2	2.5263 (0.1120)	11.612 (0.0006)	29.493 (<0.0001)	2.4217 (0.1197)	3.3138 (0.0687)	5.8816 (0.0528)
5	4.4912 (0.0341)	10.615 (0.0011)	37.604 (<0.0001)	4.0607 (0.0439)	7.5661 (0.0059)	11.787 (0.0028)
10	2.5263 (0.1120)	19.605 (<0.0001)	46.040 (<0.0001)	2.4217 (0.1197)	3.3138 (0.0687)	5.8816 (0.0528)
Taux de couverture 0.99						
Horizon	Tests GMM			Tests LR		
	J_{uc}	$J_{ind}(2)$	$J_{cc}(2)$	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}
2	109.09 (<0.0001)	11.612 (0.0006)	2072.4 (<0.0001)	49.234 (<0.0001)	3.3138 (0.0687)	52.693 (<0.0001)
5	134.68 (<0.0001)	10.615 (0.0011)	2658.3 (<0.0001)	57.475 (<0.0001)	7.5661 (0.0059)	65.201 (<0.0001)
10	109.09 (<0.0001)	19.605 (<0.0001)	2714.6 (<0.0001)	49.234 (<0.0001)	3.3138 (0.0687)	52.693 (<0.0001)

Note : 250 intervalles de prévision de l'indice SP 500 (entre le 20 décembre 1956 et le 19 décembre 1957) sont calculés pour trois horizons (2, 5 et 10) et deux taux de couverture (0.95 et 0.99). Les résultats correspondent à l'évaluation de ces intervalles de prévision par notre nouvelle approche GMM et par l'approche de Christoffersen (1998) respectivement. La taille des blocs dans notre nos tests a été fixée à $N = 25$. Les nombres entre parenthèses représentent les *p-values* associées aux différentes statistiques de test.

prévision que quand $h = 5$ à cause du non respect simultané des deux hypothèses élémentaires de couverture non conditionnelle et d'indépendance. Pour un taux de couverture de 0.99, tous les intervalles de prévision sont invalidés par l'ensemble des tests (GMM et LR). Les tests GMM rejettent leur validité à cause du rejet conjoint des hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance tandis que les tests LR rejettent leur validité simplement à cause de l'invalidité de l'hypothèse de couverture non conditionnelle (et de l'hypothèse d'indépendance quand $h = 5$). Concernant les résultats des tests d'évaluation des intervalles de prévision des rendements de l'indice Nikkei 225 et pour un taux de couverture de 0.95, la table 2.7 montre que nos tests GMM, contrairement aux tests LR, rejettent la validité des intervalles de prévision à cause du non respect de

TABLE 2.7 – Evaluation des intervalles de prévision (Nikkei 225)

Taux de couverture 0.95						
Horizon	Tests GMM			Tests LR		
	J_{uc}	$J_{ind}(2)$	$J_{cc}(2)$	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}
2	2.5263 (0.1120)	3.9132 (0.0479)	12.060 (0.0024)	1.7470 (0.1863)	0.2521 (0.6156)	2.1382 (0.3433)
5	1.7544 (0.1853)	3.8728 (0.0491)	9.6337 (0.0081)	1.1744 (0.2785)	0.4005 (0.5268)	1.7072 (0.4259)
10	1.7544 (0.1853)	3.8728 (0.0491)	9.6337 (0.0081)	1.1744 (0.2785)	0.4005 (0.5268)	1.7072 (0.4259)
Taux de couverture 0.99						
Horizon	Tests GMM			Tests LR		
	J_{uc}	$J_{ind}(2)$	$J_{cc}(2)$	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}
2	109.09 (0.0000)	3.9132 (0.0479)	1279.3 (0.0000)	45.258 (<0.0001)	0.2521 (0.6100)	45.649 (<0.0001)
5	97.306 (0.0000)	3.8728 (0.0491)	1073.6 (0.0000)	41.384 (<0.0001)	0.4005 (0.5268)	41.916 (<0.0001)
10	97.306 (0.0000)	3.8728 (0.0491)	1073.6 (0.0000)	41.384 (<0.0001)	0.4005 (0.5268)	41.916 (<0.0001)

Note : 250 intervalles de prévision de l'indice Nikkei (entre le 27 janvier 1987 et le 21 février 1992) sont calculés pour trois horizons (2, 5 et 10) et deux taux de couverture (0.95 et 0.99). Les résultats correspondent à l'évaluation de ces intervalles de prévision par notre nouvelle approche GMM et par l'approche de Christoffersen (1998) respectivement. La taille des blocs dans notre nos tests a été fixée à $N = 25$. Les nombres entre parenthèses représentent les *p-values* associées aux différentes statistiques de test.

l'hypothèse d'indépendance. Pour un taux de couverture de 0.99, les tests GMM et LR s'accordent sur la remise en cause de l'adéquation des modèles linéaires adoptés même si ce rejet n'a pas la même origine. En effet, les tests GMM justifient ce rejet par la violation simultanée des deux hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance tandis que les tests LR attribuent ce rejet à celui de l'hypothèse de couverture non conditionnelle. On conclut que la validité des intervalles de prévision associés aux deux séries des rendements considérés dans cette application a été rejetée par nos tests GMM principalement à cause de la présence de *clusters* dans la série des violations et aussi de la déviation de la proportion des violations de sa valeur nominale quand le taux de couverture est de 0.99. Pour ce taux de couverture, les tests LR rejettent la validité

de l'ensemble des intervalles de prévision, mais à cause du non respect de l'hypothèse de couverture non conditionnelle. Pour un taux de couverture 0.95, ils ne rejettent presque jamais leur validité.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche d'évaluation des intervalles de prévision basée sur la méthode des moments généralisée. L'idée est que si le modèle ayant servi au calcul des intervalles de prévision est correctement spécifié, alors la somme des violations doit être distribuée selon une loi binomiale. Nous avons donc adapté le cadre GMM proposé par Bontemps and Meddahi (2012) afin de tester cette hypothèse de distribution qui correspond à l'hypothèse nulle de validité des intervalles de prévision. Plus précisément, nous avons transformé la série des violations en une série de sommes de violations définie pour H blocs, chacun de taille N . Sous l'hypothèse nulle de validité, de telles sommes sont distribuées selon une loi binomiale $B(N, \alpha)$, α étant le taux de couverture considéré. Des simulations Monte Carlo ont montré que cette nouvelle approche présente de bonnes propriétés en termes de puissance, surtout pour des petits échantillons et pour un taux de couverture 0.95. L'application de nos tests, ainsi que ceux de Christoffersen (1998), à l'évaluation des intervalles de prévision des rendements journaliers des indices boursiers SP 500 et Nikkei 225 a confirmé la bonne performance de nos tests. Dans le chapitre suivant, nous proposons une approche d'évaluation des densités de prévision similaire à celle que nous venons de développer.

Chapitre 3

Evaluation des densités de prévision

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la façon la plus complète de décrire l'incertitude autour de la prévision ponctuelle, il s'agit de la densité de prévision définie comme une estimation de la distribution de probabilité de l'ensemble des valeurs futures possibles de la variable aléatoire étudiée (Tay and Wallis, 2000; Wallis, 2003). Plus précisément, nous proposons une nouvelle approche d'évaluation similaire à celle développée dans le chapitre précédent. Cette approche s'inscrit dans ce que Clements and Smith (2000) appellent une “*Density Forecast Approach*” dans la mesure où elle s'intéresse à l'évaluation de l'ensemble de la densité de prévision au lieu de se limiter à des quantiles particuliers. Les tests de ce genre se décomposent en deux familles : des tests de spécification correcte et des tests de comparaison de densités de prévision mal spécifiées. Les premiers supposent, sous l'hypothèse nulle, que la densité de prévision est correctement spécifiée tandis que les derniers supposent, au contraire, que toutes les densités sont mal spécifiées. Notre approche appartient à la famille des premiers dont le test de référence est celui de Diebold *et al.* (1998). L'idée de ce test est que si la densité de prévision est correctement spécifiée alors les transformations de Rosenblatt (1952), ou Probability Integral Transform (p.i.t), des observations de la variable étudiée sur la période de validation, calculées par rapport à la densité de prévision, sont les réalisations aléatoires d'une loi uniforme discrète sur l'intervalle $[0,1]$. Les auteurs ont développé une approche graphique pour tester l'adéquation des p.i.t à cette loi. A la loi uniforme discrète on associe les polynômes orthonormaux de Legendre dont les propriétés (espérance nulle et variance unitaire) permettent de construire aisément des J-statistiques et de tester, dans un cadre GMM, la validité de la densité de prévision. Une autre façon de tester la validité d'une

densité de prévision, analytique cette fois-ci, a été proposée par Berkowitz (2001). L’auteur opère une deuxième transformation, que nous appelons transformée de Berkowitz, en évaluant la fonction quantile associée à la loi normale centrée et réduite en chacune des valeurs prises par la transformée de Rosenblatt. Sous l’hypothèse nulle de validité de la densité de prévision, les transformées de Berkowitz sont des tirages indépendants dans une loi normale centrée et réduite. Berkowitz teste cette hypothèse à l’aide d’un test du rapport de vraisemblance (LR). A cette loi normale centrée et réduite, on associe les polynômes d’Hermite ayant les propriétés habituelles des polynômes orthonormaux, à savoir, espérance nulle et variance unitaire. De la même façon que précédemment, des J-statistiques sont calculées à partir de ces derniers polynômes et la validité des densités de prévision est testée différemment dans un cadre GMM. Des simulations des tailles et des puissances de nos tests ainsi que celles du test LR de Berkowitz (2001) ont favorisé notre nouvelle approche.

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.2, nous proposerons une nouvelle approche d’évaluation des densités de prévision fondée sur la méthode des moments généralisée. Sur la base de polynômes orthonormaux, nous testons l’adéquation de la série des transformées de Rosenblatt (1952) à la loi uniforme $U[0, 1]$, ou l’adéquation des transformées de Berkowitz (2001) à la loi normale centrée et réduite $N(0, 1)$, par des J-statistiques. Ensuite, nous montrerons dans la section 3.3, à travers des exercices Monte Carlo, que nos tests disposent de propriétés à distance finie intéressantes. Enfin, dans la section 3.4, nous appliquerons cette nouvelle méthode sur des données réelles avant de conclure dans la section 3.5.

3.2 Une approche GMM

Finalement, tester la validité d’une densité de prévision revient simplement, comme dans le cadre de l’évaluation des prévisions par intervalle de confiance (Christoffersen, 1998; Christoffersen and Pelletier, 2004; Haas, 2005), à tester une hypothèse distributionnelle. Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche d’évaluation des densités de prévision en testant l’hypothèse que les transformées de Rosenblatt (1952) z_t suivent une loi uniforme $U[0, 1]$ (Diebold *et al.*, 1998) ou, de façon équivalente, que les transformées de Berkowitz (2001) z_t^* suivent une loi normale $N(0, 1)$ (Berkowitz, 2001). Notre approche est basée sur les travaux de Bontemps and Meddahi (2005, 2012) qui ont développé des tests de distributions fondés sur la méthode des moments généralisée. Une approche similaire a été utilisée par Candelon *et al.* (2011) dans l’évaluation de la Value-at-Risk (test de la loi géométrique) et par Dumitrescu *et al.* (2011) dans l’évaluation des

prévisions par intervalle (test de la loi binomiale). Nous commençons par présenter les conditions de moment utilisées pour tester la validité des densités de prévision, puis nous proposons les J-statistiques associées ainsi que leurs distributions asymptotiques.

3.2.1 Conditions de moment

Bontemps and Meddahi (2012) associent à certaines lois de probabilité des polynômes orthonormaux d'espérance nulle, ces polynômes orthonormaux peuvent être utilisés comme des conditions de moment dans un cadre GMM pour tester des hypothèses de distribution. Dans le cadre de l'évaluation des densités de prévision, les lois qui nous intéressent sont la loi uniforme $U[0, 1]$ et la loi normale $N(0, 1)$. A ces deux lois, on associe respectivement les polynômes de Legendre et les polynômes d'Hermite, ils sont définis comme suit :

Définition 4. Soit x une variable aléatoire distribuée selon une loi uniforme $U[0, 1]$. Les polynômes de Legendre (Figure 3.1a) correspondant sont définis par la formule récursive suivante :

$$L_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n} \left\{ \sqrt{2n-1}(2x-1)L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{\sqrt{2n-3}}L_{n-2}(x) \right\}, \quad \forall n > 2 \quad (3.1)$$

avec $L_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ et $L_2(x) = \sqrt{5}(6x^2-6x+1)$, ils vérifient :

$$E[L_i(x)] = 0, \quad \forall i \geq 1 \quad (3.2)$$

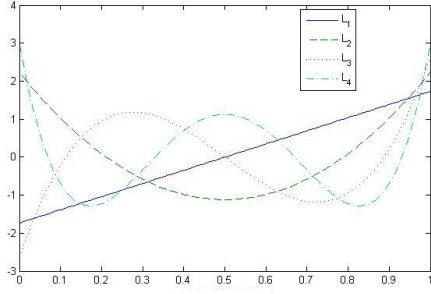
Définition 5. Soit x une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée et réduite. Les polynômes d'Hermite (Figure 3.1b) correspondant sont définis par la formule récursive suivante :

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \{xH_{n-1}(x) - \sqrt{n-1}H_{n-2}(x)\}, \quad \forall n > 1 \quad (3.3)$$

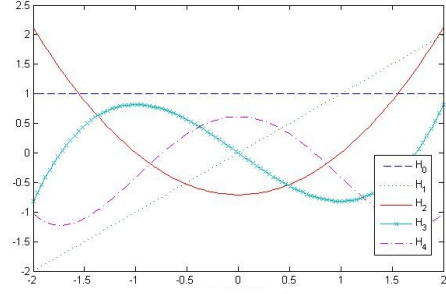
avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = x$, ils vérifient :

$$E[H_i(x)] = 0, \quad \forall i \geq 1 \quad (3.4)$$

La première manière de tester la validité d'une densité de prévision est de vérifier que les transformées de Rosenblatt (1952) z_t sont des tirages aléatoires dans une loi uniforme $U[0, 1]$ (Diebold *et al.*, 1998). Considérons la série des T réalisations hors échantillon de la variable aléatoire étudiée $\{y_t\}_1^T$ et les transformées de Rosenblatt (1952) correspondant



(a) Polynômes de Legendre



(b) Polynômes d'Hermite

FIGURE 3.1 – Polynômes orthonormaux de Legendre et d'Hermite

$\{z_t\}_1^T$. Sous l'hypothèse nulle que les densités de prévision sont valides, les variables z_t sont *i.i.d* et ont une loi uniforme $U[0, 1]$. Ainsi, l'hypothèse nulle de validité des densités de prévisions peut s'écrire :

$$H_{0,unif} : E[L_i(z_t)] = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

n étant le nombre de polynômes de Legendre considérés. Une autre façon de tester la validité d'une densité de prévision est de vérifier que les transformées de Berkowitz (2001) sont des tirages aléatoires dans une loi normale $N(0, 1)$ (Berkowitz, 2001). Soient z_t^* les transformées de Rosenblatt (1952) associées à z_t . Sous l'hypothèse nulle que les densités de prévisions sont valides, les variables z_t^* sont *i.i.d* et ont une loi normale $N(0, 1)$. Ainsi, l'hypothèse nulle de validité des densités de prévision peut s'écrire :

$$H_{0,norm} : E[H_j(z_t^*)] = 0, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

m étant le nombre de polynômes d'Hermite considérés.

3.2.2 Statistiques de test et distributions asymptotiques

Désignons par $L(z_t)$ (respectivement, $H(z_t^*)$) le vecteur composé de n polynômes de Legendre (respectivement, m polynômes d'Hermite). La J-statistique associée au test de la loi uniforme $U[0, 1]$ s'écrit :

$$J_{unif}(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T L(z_t) \right)^\top \Sigma_{unif}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T L(z_t) \right) \quad (3.7)$$

et celle associée au test de la loi normale $N(0, 1)$ s'écrit :

$$J_{norm}(m) = \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T H(z_t^*) \right)^\top \Sigma_{norm}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T H(z_t^*) \right) \quad (3.8)$$

avec Σ_{unif} et Σ_{norm} les matrices de variance-covariance de long terme associées aux polynômes de Legendre et d'Hermite respectivement. Elles sont égales à la matrice identité par la définition des polynômes orthonormaux si les variables sous-jacentes sont indépendantes (Bontemps and Meddahi, 2012), ou estimées non paramétriquement par un estimateur de Newey and West (1987) ou de Andrews (1991). Sous l'hypothèse nulle de validité des densités de prévision, et sous certaines conditions de régularité (Hansen, 1982), ces J-statistiques sont asymptotiquement distribuées selon une loi de khi 2 à n (respectivement, m) degrés de liberté.

Propriété 3. *Sous l'hypothèse nulle de validité des densités de prévision, la statistique de test associée aux transformées de Rosenblatt (1952) z_t vérifie :*

$$J_{unif}(n) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^T L_i(z_t) \right)^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(n) \quad (3.9)$$

avec $L_i(z_t)$ le polynôme de Legendre d'ordre $i \leq n$ associé à la loi uniforme $U[0, 1]$ et la statistique de test associée aux transformées de Berkowitz (2001) z_t^* vérifie :

$$J_{norm}(m) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=1}^T H_j(z_t^*) \right)^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(m) \quad (3.10)$$

avec $L_j(z_t^*)$ le polynôme d'Hermite d'ordre $j \leq m$ associé à la loi normale $N(0, 1)$.

3.3 Expériences Monte Carlo

Une fois les statistiques des tests obtenues et leurs distributions asymptotiques établies, leurs performances respectives à distance finie seront comparées à celles du test LR de Berkowitz (2001) à travers des simulations Monte Carlo. 10000 répliques sont effectuées pour trois tailles nominales α (1%, 5% et 10%). Le nombre de polynômes pour chacun des tests varie de 1 à 10^1 . Enfin, différentes tailles d'échantillons T sont considérées allant de 20 à 100.

1. Seuls les résultats relatifs aux trois premiers nombres de polynômes ont été reportés pour gagner de l'espace.

3.3.1 Tailles empiriques

Sous l'hypothèse nulle que le modèle ayant engendré les prévisions est bien spécifié, les transformées de Rosenblatt (1952) $\{z_t\}_{t=1}^T$ sont des tirages aléatoires dans une loi uniforme $U[0, 1]$ ou, de façon équivalente, les transformées de Berkowitz (2001) $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ sont des tirages aléatoires dans une loi normale centrée et réduite. La série $\{z_t\}_{t=1}^T$ est obtenue en générant des pseudo-nombres aléatoires à partir d'une loi de probabilité bien déterminée et en les transformant par le procédé de Rosenblatt (1952) en utilisant la fonction de densité de cette même loi de probabilité. La série $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ est calculée, ensuite, en évaluant la fonction quantile de la loi normale centrée et réduite en chacune des valeurs prises par z_t . Deux lois de probabilité sont considérées, à savoir, la loi normale $N(0, 1)$ et la loi de khi 2 à un degré de liberté $\chi^2(1)$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux 3.1 et 3.2.

A la lumière de ces résultats, il ressort qu'asymptotiquement l'ensemble des tests ont une taille empirique voisine de sa valeur nominale .

3.3.2 Puissances empiriques

Sous l'hypothèse alternative que le modèle ayant engendré les prévisions est mal spécifié et/ou que sa dynamique est mal prise en compte, les transformées de Rosenblatt (1952) $\{z_t\}_{t=1}^T$ sont des tirages, éventuellement corrélés, dans une loi autre que la loi uniforme $U[0, 1]$ ou, de façon équivalente, les transformées $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ sont des tirages, éventuellement corrélés, dans une loi différente de la loi normale centrée et réduite. La série $\{z_t\}_{t=1}^T$ est obtenue en générant des pseudo-nombres aléatoires à partir d'une loi de probabilité bien déterminée et en les transformant par le procédé de Rosenblatt (1952) en utilisant la fonction de densité d'une autre loi de probabilité. La série $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ est calculée en évaluant la fonction quantile de la loi normale centrée et réduite en chacune des valeurs prises par z_t . Deux scénarios sont considérés : le premier consiste à tirer des nombres aléatoires dans une loi normale $N(0.4, 1)$ et à tester l'hypothèse alternative qu'ils sont générés par une loi normale $N(0, 1)$ (Table 3.3). Le deuxième consiste à tirer des nombres aléatoires dans une loi de khi 2 à 4 degrés de liberté $\chi^2(4)$ et à tester l'hypothèse alternative qu'ils sont générés par une loi de khi 2 à 3 degrés de liberté $\chi^2(3)$ (Table 3.4).

Contrairement aux tailles empiriques des tests, les résultats relatifs aux puissances sont nuancés. D'abord, on remarque que la puissance de nos tests décroît avec le nombre de polynômes utilisés et qu'elle devient inférieure à celle du test du ratio de vraisemblance de Berkowitz (2001) à mesure que le nombre de polynômes augmente (Figures 3.2, 3.4 et 3.6). Ceci permet de limiter le choix des polynômes, de façon optimale, à un nombre

TABLE 3.1 – Tailles des tests d'évaluation des densités de prévision
(Lois normales)

α	T	$J_{unif}(1)$	$J_{unif}(2)$	$J_{unif}(3)$	$J_{norm}(1)$	$J_{norm}(2)$	$J_{norm}(3)$	LR
1%	20	0.0094	0.0092	0.0112	0.0089	0.0152	0.0305	0.0072
	40	0.0091	0.0074	0.0090	0.0103	0.0121	0.0220	0.0076
	60	0.0105	0.0107	0.0122	0.0096	0.0121	0.0217	0.0100
	80	0.0097	0.0107	0.0099	0.0116	0.0127	0.0190	0.0096
	100	0.0096	0.0108	0.0102	0.0109	0.0117	0.0181	0.0114
5%	20	0.0531	0.0465	0.0439	0.0537	0.0492	0.0634	0.0468
	40	0.0484	0.0467	0.0477	0.0509	0.0477	0.0570	0.0468
	60	0.0479	0.0493	0.0477	0.0489	0.0496	0.0560	0.0461
	80	0.0526	0.0514	0.0517	0.0519	0.0517	0.0561	0.0499
	100	0.0495	0.0472	0.0463	0.0489	0.0467	0.0575	0.0487
10%	20	0.0974	0.0955	0.0922	0.0975	0.0860	0.0905	0.0940
	40	0.1000	0.0980	0.0977	0.1028	0.0954	0.0966	0.1005
	60	0.0979	0.0986	0.0962	0.0983	0.0954	0.0980	0.0958
	80	0.1045	0.0958	0.1003	0.1029	0.0990	0.1001	0.0997
	100	0.0959	0.0958	0.0978	0.0948	0.0918	0.0981	0.0980

Notes : J_{unif} et J_{norm} désignent respectivement les J-statistiques des tests GMM des lois uniforme et normale calculées en utilisant les 1, 2 et 3 premiers polynômes orthonormaux et LR le test du ratio de vraisemblance de Berkowitz (2001). La série $\{z_t\}_{t=1}^T$ est obtenue en générant des pseudo-nombres aléatoires à partir d'une loi normale $N(0,1)$ et en les transformant par le procédé de Rosenblatt (1952) en utilisant la fonction de densité de cette même loi. La série $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ est calculée, ensuite, en évaluant la fonction quantile de la loi normale centrée et réduite en z_t . 10000 répliquions sont effectuées pour trois tailles nominales α (1%, 5% et 10%). Enfin, différentes tailles d'échantillons T sont considérées allant de 20 à 100.

réduit. Ensuite, si l'ensemble des tests ont les mêmes performances asymptotiquement, nos tests fondés sur la méthodes des moments généralisée ont une meilleure puissance sur des échantillons de petite taille (Figures 3.3, 3.5 et 3.7).

3.4 Application empirique

Nous appliquons notre nouvelle approche à l'évaluation des densités des prévisions des rendements du taux de change de l'euro contre quatre devises étrangères, à savoir, le dollar canadien (EUR/CAD), le franc suisse (EUR/CHF), la livre sterling (EUR/GBP) et le yen (EUR/JPY). Plus précisément, nous allons calculer les densités des prévisions

TABLE 3.2 – Tailles des tests d'évaluation des densités de prévision
(Lois de khi 2)

α	T	$J_{unif}(1)$	$J_{unif}(2)$	$J_{unif}(3)$	$J_{norm}(1)$	$J_{norm}(2)$	$J_{norm}(3)$	LR
1%	20	0.0088	0.0099	0.0119	0.0090	0.0188	0.0299	0.0088
	40	0.0098	0.0106	0.0105	0.0108	0.0136	0.0255	0.0110
	60	0.0092	0.0096	0.0111	0.0099	0.0119	0.0207	0.0105
	80	0.0094	0.0091	0.0102	0.0089	0.0105	0.0211	0.0098
	100	0.0098	0.0098	0.0102	0.0100	0.0123	0.0169	0.0101
5%	20	0.0537	0.0516	0.0516	0.0525	0.0551	0.0708	0.0542
	40	0.0509	0.0461	0.0442	0.0499	0.0475	0.0617	0.0470
	60	0.0470	0.0490	0.0490	0.0479	0.0461	0.0556	0.0494
	80	0.0534	0.0513	0.0509	0.0526	0.0543	0.0595	0.0537
	100	0.0496	0.0504	0.0490	0.0497	0.0511	0.0542	0.0509
10%	20	0.0993	0.0975	0.0944	0.0990	0.0877	0.0981	0.0980
	40	0.0955	0.0966	0.0964	0.0968	0.0933	0.0956	0.1027
	60	0.0953	0.0991	0.0981	0.0953	0.0925	0.0986	0.0970
	80	0.0999	0.0980	0.1035	0.1016	0.0963	0.0964	0.1033
	100	0.0998	0.0989	0.0960	0.0987	0.0984	0.0999	0.1015

Notes : J_{unif} et J_{norm} désignent respectivement les J-statistiques des tests GMM des lois uniforme et normale calculées en utilisant les 1, 2 et 3 premiers polynômes orthonormaux et LR le test du ratio de vraisemblance de Berkowitz (2001). La série $\{z_t\}_{t=1}^T$ est obtenue en générant des pseudo-nombres aléatoires à partir d'une loi de khi 2 à un degré de liberté $\chi^2(1)$ et en les transformant par le procédé de Rosenblatt (1952) en utilisant la fonction de densité de cette même loi. La série $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ est calculée, ensuite, en évaluant la fonction quantile de la loi normale centrée et réduite en z_t . 10000 répliques sont effectuées pour trois tailles nominales α (1%, 5% et 10%). Enfin, différentes tailles d'échantillons T sont considérées allant de 20 à 100.

à l'horizon 1 à partir de modèles non linéaires et tester leur validité. Pour cela, nous disposons de données journalières couvrant la période du 01/01/2009 au 07/05/2010, soient 480 observations. Les modèles seront ajustés sur les 400 premières observations et validés hors échantillon sur les 80 dernières.

De nombreuses études empiriques², se sont penchées sur l'étude du taux de change, elles concluent que ses rendements sont gouvernés par des processus de type SETAR. Nous adoptons donc cette spécification et, pour en réduire le nombre, seuls seront considérés les modèles à 2 régimes du même ordre. La variable de transition est le premier retard du rendement du taux de change considéré. Après l'ajustement de différents modèles par les

2. A titre d'exemple, nous citons Kräger and Kugler (1993), Peel and Speight (1994) et Chappell et al. (1996)

TABLE 3.3 – Puissances des tests d'évaluation des densités de prévision
(Lois normales)

α	T	$J_{unif}(1)$	$J_{unif}(2)$	$J_{unif}(3)$	$J_{norm}(1)$	$J_{norm}(2)$	$J_{norm}(3)$	LR
1%	20	0.1957	0.1511	0.1388	0.2184	0.1859	0.1704	0.0989
	40	0.4527	0.3587	0.3187	0.4809	0.3982	0.3532	0.3016
	60	0.6713	0.5727	0.5193	0.7038	0.6053	0.5417	0.5096
	80	0.8145	0.7293	0.6879	0.8421	0.7631	0.7058	0.6853
	100	0.9110	0.8541	0.8143	0.9249	0.8720	0.8243	0.8173
5%	20	0.4220	0.3343	0.3007	0.4421	0.3540	0.3235	0.2819
	40	0.6847	0.5868	0.5445	0.7186	0.6153	0.5562	0.5344
	60	0.8594	0.7790	0.7359	0.8780	0.8024	0.7407	0.7353
	80	0.9368	0.8903	0.8614	0.9468	0.9056	0.8654	0.8683
	100	0.9715	0.9457	0.9301	0.9788	0.9554	0.9310	0.9340
10%	20	0.5404	0.4539	0.4117	0.5573	0.4609	0.4103	0.4074
	40	0.7836	0.7009	0.6573	0.8054	0.7179	0.6587	0.6591
	60	0.9149	0.8603	0.8267	0.9250	0.8736	0.8292	0.8301
	80	0.9678	0.9354	0.9168	0.9736	0.9476	0.9181	0.9185
	100	0.9896	0.9725	0.9624	0.9922	0.9782	0.9624	0.9644

Notes : J_{unif} et J_{norm} désignent respectivement les J-statistiques des tests GMM des lois uniforme et normale calculées en utilisant les 1, 2 et 3 premiers polynômes orthonormaux et LR le test du ratio de vraisemblance de Berkowitz (2001). La série $\{z_t\}_{t=1}^T$ est obtenue en générant des pseudo-nombres aléatoires à partir d'une loi normale $N(0.4, 1)$ et en les transformant par le procédé de Rosenblatt (1952) en utilisant à tort la fonction de densité de la loi normale $N(0, 1)$. La série $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ est calculée, ensuite, en évaluant la fonction quantile de la loi normale centrée et réduite en z_t . 10000 répliques sont effectuées pour trois tailles nominales α (1%, 5% et 10%). Enfin, différentes tailles d'échantillons T sont considérées allant de 20 à 100.

moindres carrés linéaires (conditionnellement à la valeur du seuil de transition), ils ont été classés selon les critères d'information AIC et BIC. La table 3.5 présente les modèles retenus pour chaque série de données.

A la lecture de la table 3.5, il apparaît que les rendements du taux de change de l'euro contre le franc suisse, la livre sterling et le yen sont gouvernés par un modèle SETAR(2; 1, 1) limitant la mémoire du processus à une période contrairement aux rendements du taux de change de l'euro contre le dollar canadien qui disposent d'une mémoire plus longue.

L'étape suivante consiste à générer 80 prévisions à l'horizon 1 de chacune des séries à partir des modèles précédents ainsi que leurs densités de prévisions afin de tester leurs

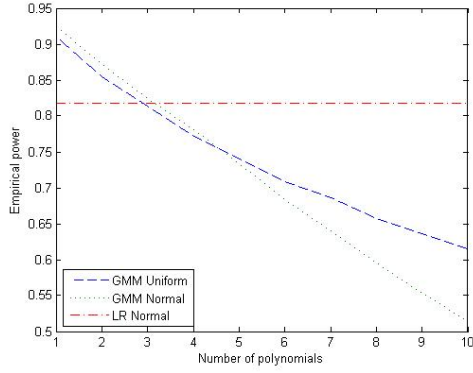
TABLE 3.4 – Puissances des tests d'évaluation des densités de prévision
(Lois de khi 2)

α	T	$J_{unif}(1)$	$J_{unif}(2)$	$J_{unif}(3)$	$J_{norm}(1)$	$J_{norm}(2)$	$J_{norm}(3)$	LR
1%	20	0.2141	0.1491	0.1309	0.2267	0.1651	0.1475	0.1136
	40	0.5217	0.3898	0.3308	0.5414	0.4010	0.3405	0.3472
	60	0.7390	0.6229	0.5537	0.7546	0.6320	0.5507	0.5852
	80	0.8744	0.7910	0.7376	0.8866	0.8050	0.7365	0.7697
	100	0.9506	0.9053	0.8719	0.9558	0.9141	0.8687	0.8912
5%	20	0.4576	0.3422	0.2891	0.4662	0.3349	0.2884	0.3162
	40	0.7614	0.6559	0.5885	0.7683	0.6594	0.5716	0.6229
	60	0.9080	0.8406	0.7923	0.9190	0.8473	0.7859	0.8185
	80	0.9663	0.9316	0.9052	0.9704	0.9406	0.9042	0.9221
	100	0.9873	0.9749	0.9652	0.9902	0.9773	0.9617	0.9685
10%	20	0.8964	0.8651	0.8386	0.9006	0.8673	0.8041	0.8422
	40	0.9771	0.9642	0.9526	0.9798	0.9697	0.9511	0.9610
	60	0.9961	0.9925	0.9881	0.9968	0.9943	0.9877	0.9902
	80	0.9996	0.9987	0.9977	0.9997	0.9992	0.9979	0.9979
	100	0.9997	0.9996	0.9992	0.9998	0.9996	0.9991	0.9993

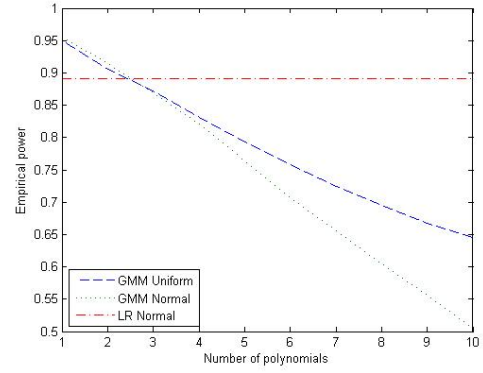
Notes : J_{unif} et J_{norm} désignent respectivement les J-statistiques des tests GMM des lois uniforme et normale calculées en utilisant les 1, 2 et 3 premiers polynômes orthonormaux et LR le test du ratio de vraisemblance de Berkowitz (2001). La série $\{z_t\}_{t=1}^T$ est obtenue en générant des pseudo-nombres aléatoires à partir d'une loi de khi 2 à 4 degrés de liberté $\chi^2(4)$ et en les transformant par le procédé de Rosenblatt (1952) en utilisant à tort la fonction de densité de la loi de khi 2 à 3 degrés de liberté $\chi^2(3)$. La série $\{z_t^*\}_{t=1}^T$ est calculée, ensuite, en évaluant la fonction quantile de la loi normale centrée et réduite en z_t . 10000 répliquions sont effectuées pour trois tailles nominales α (1%, 5% et 10%). Enfin, différentes tailles d'échantillons T sont considérées allant de 20 à 100.

validité. Les prévisions sont obtenues par *fenêtre glissante* dont la taille a été fixée à 400 observations. Les densités de prévisions ont été estimées non paramétriquement³ par noyau gaussien après le calcul par Bootstrap de 500 répliquions de prévisions ponctuelles. La table 3.6 présente les résultats des tests GMM et LR de validation des densités de prévisions. À la lumière de ces résultats, il ressort que l'ensemble des tests valident les densités de prévisions des rendements du taux de change de l'euro et par conséquent les modèles considérés pour chaque série de données même à des niveaux de risque élevés. Si par contre on considère un niveau de risque habituel de 5%, nos J-statistiques valident le modèle SETAR(2; 1, 1) pour les rendements du taux de change de l'euro contre le franc

3. La fonction `ksdensity` de Matlab 7.9.0 a été utilisée, le `bandwidth` est fixé automatiquement par le logiciel de façon proportionnelle à taille d'échantillon.

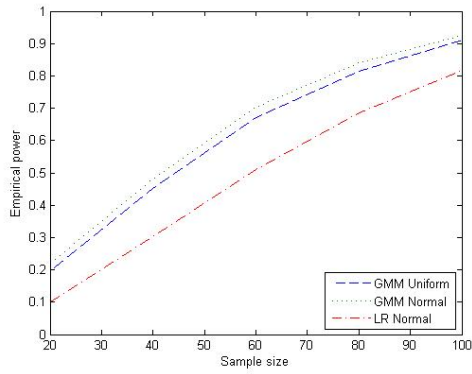


(a) Simulations sous loi normale

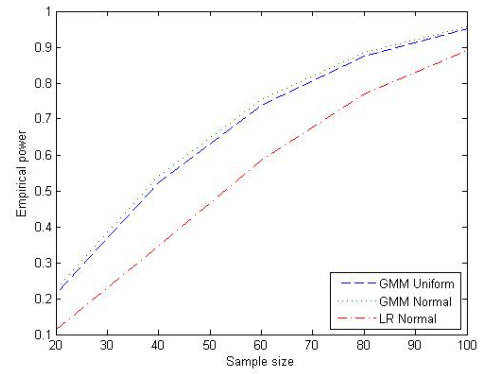


(b) Simulations sous loi de khi2

FIGURE 3.2 – Puissance des tests *vs* Nombre de polynômes ($\alpha = 1\%$)



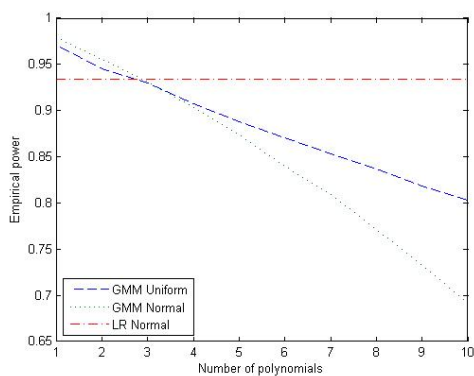
(a) Simulations sous loi normale



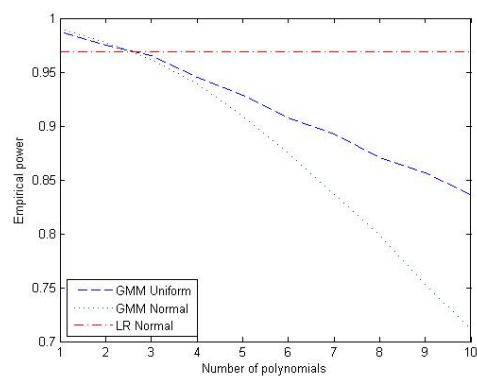
(b) Simulations sous loi de khi 2

FIGURE 3.3 – Puissance des tests *vs* Taille d'échantillon ($\alpha = 1\%$)

suisse tandis que le test *LR* de Berkowitz (2001) le rejette.

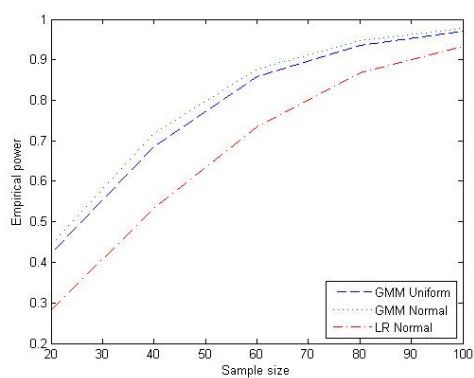


(a) Simulations sous loi normale

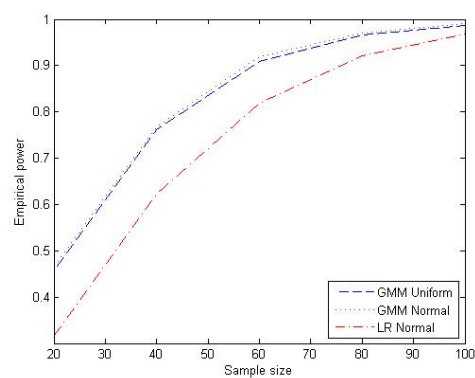


(b) Simulations sous loi de khi 2

FIGURE 3.4 – Puissance des tests *vs* Nombre de polynômes ($\alpha = 5\%$)

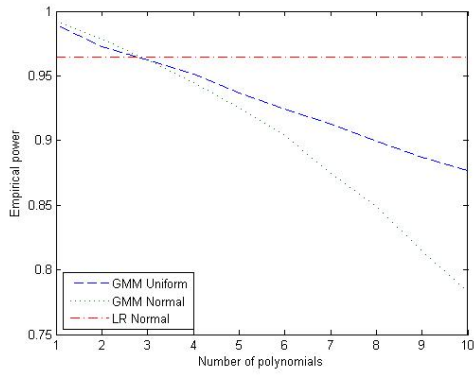


(a) Simulations sous loi normale

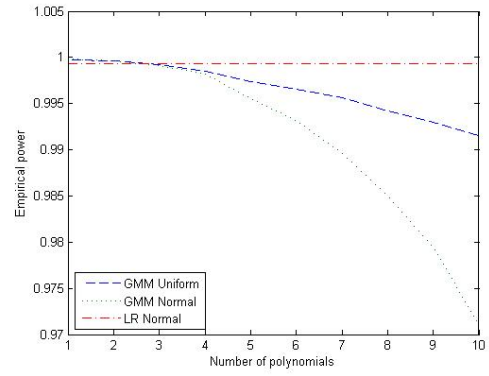


(b) Simulations sous loi de khi 2

FIGURE 3.5 – Puissance des tests *vs* Taille d'échantillon ($\alpha = 5\%$)

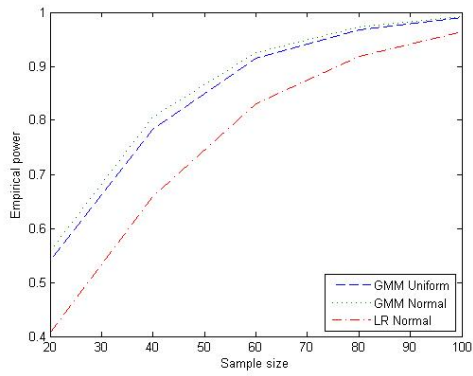


(a) Simulations sous loi normale

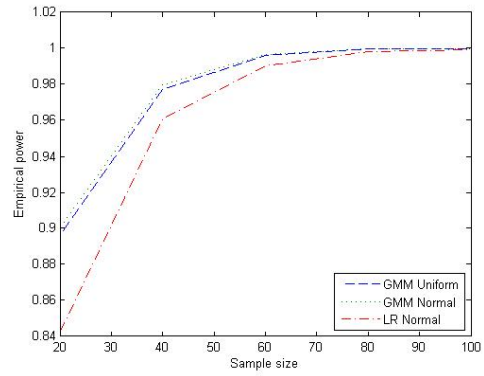


(b) Simulations sous loi de khi 2

FIGURE 3.6 – Puissance des tests *vs* Nombre de polynômes ($\alpha = 10\%$)



(a) Simulations sous loi normale



(b) Simulations sous loi de khi 2

FIGURE 3.7 – Puissance des tests *vs* Taille d'échantillon ($\alpha = 10\%$)

TABLE 3.5 – Sélection de Modèles

Données	Modèle	AIC	BIC
EUR/CAD	SETAR(2 ;5,5)	-5.0039 10^3	-4.9822 10^3
EUR/CHF	SETAR(2 ;1,1)	-5.0425 10^3	-5.0349 10^3
EUR/GBP	SETAR(2 ;1,1)	-4.4249 10^3	-4.4165 10^3
EUR/JPY	SETAR(2 ;1,1)	-4.1494 10^3	-4.1422 10^3

Notes : Les données sont les rendements du taux de change de l'euro contre le dollar canadien (EUR/CAD), le franc suisse (EUR/CHF), la livre sterling (EUR/GBP) et le yen (EUR/JPY). Les critères d'information d'Akaike (AIC) et de Schwarz (BIC) ont été utilisés dans la sélection des modèles.

TABLE 3.6 – Tests d'évaluation des densités de prévision

Données	$J_{unif}(1)$	$P\text{-value}$	$J_{norm}(1)$	$P\text{-value}$	LR	$P\text{-value}$
EUR/CAD	1.8677	0.1717	1.4579	0.2273	4.1309	0.2477
EUR/CHF	0.0504	0.8224	0.0572	0.8109	10.5803	0.0142
EUR/GBP	0.0387	0.8440	0.0293	0.8641	0.3810	0.9441
EUR/JPY	0.5634	0.4529	0.7960	0.3723	4.9925	0.1724

Notes : Tests GMM (uniforme et normale) et LR d'évaluation des densités de prévisions associées aux variations des taux de change de l'euro contre le dollar canadien (EUR/CAD), le franc suisse (EUR/CHF), la livre sterling (EUR/GBP) et le yen (EUR/JPY). La valeur de la statistique de test de chaque test (à gauche) est accompagnée de sa $p\text{-value}$ (à droite). Les tests GMM des lois uniforme et normale sont effectués à partir des premiers polynômes de Legendre et d'Hermite respectivement. L'échantillon de validation contient 80 observations.

3.5 Conclusion

Comme dans le chapitre précédent, nous avons proposé dans ce chapitre une nouvelle approche d'évaluation des densités de prévision basée également sur la méthode des moments généralisée. Les tests d'évaluation des densités de prévision correctement spécifiées reposent sur la notion de p.i.t (Probability Integral Transform) qui remonte à Rosenblatt (1952). En effet, le modèle ayant servi au calcul des densités de prévision est correctement spécifié si les p.i.t associés sont distribués selon une loi uniforme discrète sur l'intervalle $[0, 1]$ (Diebold *et al.*, 1998). Une façon alternative de tester la validité de ce modèle est de considérer les transformées de Berkowitz (2001). Sous l'hypothèse nulle que le modèle ayant servi au calcul de la densité de prévision est correctement spécifié, ces nouvelles transformées suivent une loi normale centrée et réduite (Berkowitz, 2001). Nous avons donc adapté le cadre GMM proposé par Bontemps and Meddahi (2012) afin de tester ces deux hypothèses de distributions qui correspondent à l'hypothèse nulle de validité des densités de prévision. Plus précisément, nous avons construit des J-statistiques à partir des polynômes orthonormaux associés aux deux lois en question, à savoir, les polynômes de Legendre et les polynômes d'Hermite respectivement. Ces polynômes étant d'espérances nulles et de matrices de variance-covariance identiques à la matrice identité sont, en effet, pratiques dans l'écriture des conditions de moment sur lesquelles reposent les J-statistiques de la méthode des moments généralisée. Des exercices Monte Carlo ont mis en évidence les bonnes propriétés à distance finie de cette nouvelle approche et son application à l'évaluation des densités de prévision des rendements du taux de change de l'euro contre certaines devises a montré que les résultats de nos tests peuvent être nettement différents des conclusions du test LR de Berkowitz (2001).

Chapitre 4

Apport des modèles à changement de régimes : une analyse empirique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous menons une étude empirique pour tenter de répondre à la perpétuelle question sur l'apport des modèles non-linéaires à la prévision économique. Des comparaisons des prévisions ponctuelles issues de ces deux familles de modèles ont conclu à l'égalité de leur qualité prédictive (Clements and Krolzig, 1998; Stock and Watson, 1999; Marcellino, 2002). Une autre voie de recherche s'est orientée vers la comparaison des modèles sur la base des intervalles et des densités de prévision (Clements and Smith, 2000, 2001; Boero and Marrocu, 2002), elle a confirmé l'idée selon laquelle les modèles non-linéaires peuvent s'avérer plus pertinents dans la description de l'incertitude autour de la prévision ponctuelle. Cependant, l'une des limites de l'ensemble de ces travaux est qu'ils ne se basent, pour la majorité, que sur des données américaines. Nous allons, dans cette étude, utiliser des données sur l'indice de la production industrielle, le taux de chômage et les indices boursiers de six pays de l'OCDE : L'Allemagne, le Canada, la France, la Grande-Bretagne, le Japon et les États-Unis d'Amérique. Nous allons également considérer des données sur les taux de change de l'euro et du dollar américain contre le dollar canadien, la livre sterling et le yen. Des modèles linéaires et des modèles non-linéaires seront ajustés sur chaque série de données, et des prévisions ponctuelles, par intervalle et par densité à différents horizons seront calculées et comparées. Pour ce faire, nous mettons à contribution notre approche d'évaluation des intervalles et des densités de prévision ainsi que des tests de la littérature. Les résultats de notre étude vont dans le sens des résultats d'autres études empiriques, à savoir, les modèles linéaires

sont préférables, de par leur simplicité, en termes de prévisions ponctuelles et les modèles non-linéaires sont les plus à même de décrire l'incertitude autour de ces prévisions ponctuelles.

Nous commençons, dans la section 4.2, par présenter nos séries de données ainsi que quelques statistiques descriptives pour avoir une idée sur la forme de leurs distributions. Puis, dans la section 4.3, nous présentons les modèles linéaires et les modèles non-linéaires qui seront utilisés pour calculer les prévisions. La mise en œuvre de cette étude sera expliquée dans la section 4.4. Ensuite, les résultats seront présentés dans la section 4.5. Enfin, nous concluons ce chapitre dans la section 4.6

4.2 Les données

Nous considérons quatre types de données relatives à six pays de l'OCDE : l'Allemagne, le Canada, la France, la Grande-Bretagne, le Japon et les Etats-Unis d'Amérique. Le premier type de données, corrigées des variations saisonnières, correspond à l'indice mensuel de la production de l'ensemble des industries de chaque pays (base 100 en 2005) entre avril 1970 et décembre 2011, soit 501 observations par pays. Le deuxième type représente le taux mensuel de chômage harmonisé (données corrigées des variations saisonnières) dans les pays concernés entre janvier 1992 et novembre 2011, soit 239 observations par pays¹. Le troisième type de données sont les indices boursiers journaliers (cours ajustés à la clôture) des principales places boursières des pays en question entre le 22 janvier 2010 et le 30 décembre 2011² : DAX (bourse de Francfort), SP TSX (bourse de Toronto), CAC 40 (bourse de Paris), FTSE 100 (bourse de Londres), NIKKEI 225 (bourse de Tokyo) et SP 500 (bourse de New York). Enfin, le dernier type de données est relatif aux taux de change de l'euro contre le dollar canadien (EUR/CAD), la livre sterling (EUR/GBP) et le yen et du dollar américain contre l'euro (USD/EUR), la livre sterling (USD/GBP) et le yen (USD/JPY). Les données, hebdomadaires, s'étalent sur la période du 8 janvier 2007 au 25 décembre 2011, soit 247 observations par pays³.

La table 4.1 résume les principales statistiques descriptives de chacune des séries des données étudiées. On note que la France et la Grande-Bretagne ont enregistré, en moyenne, les indices de production industrielle les plus élevés sur la période considérée

1. Ces données (indices de production industrielle et taux de chômage) sont issues des bases de données des principaux indicateurs économiques des pays de l'OCDE. Site web : <http://stats.oecd.org/mei/>

2. Etant donné que les jours fériés ne sont pas les mêmes dans tous les pays, le nombre d'observations sur la même période varie.

3. Les deux derniers types de données sont extraits du site internet de Yahoo-Finance. Site web : <http://fr.finance.yahoo.com/indices>

TABLE 4.1 – Statistiques descriptives des variables en niveaux

Prod. industrielle	Allemagne	Canada	France	G. Bretagne	Japon	Etats-Unis
Nb. observations	501	501	501	501	501	501
Moyenne	81.9390	71.6970	84.7047	86.4368	80.9904	70.4418
Ecart-type	15.4294	18.6240	11.5322	11.9959	18.8352	20.7747
Skewness	0.4804	0.1088	-0.2137	-0.2103	-0.5517	0.2178
Excès de Kurtosis	-0.6071	-1.3165	-0.78761	-1.3548	-1.0612	-1.4254
Taux de chômage	Allemagne	Canada	France	G. Bretagne	Japon	Etats-Unis
Nb.observations	239	239	239	239	239	239
Moyenne	8.5577	8.1293	9.6013	6.7021	4.1146	5.9464
Ecart-type	1.3134	1.5821	1.0287	1.7562	0.9359	1.6589
Skewness	0.1276	0.7165	-0.0317	0.5926	-0.5209	1.0715
Excès de Kurtosis	-0.3161	-0.3855	-1.0394	-0.9633	-0.7423	0.1322
Indices boursiers	Francfort	Toronto	Paris	Londres	Tokyo	New York
Nb.observations	499	482	501	490	476	491
Moyenne	6400.5754	12537.3329	3658.0160	5576.6494	9689.2019	1205.5089
Ecart-type	625.7926	842.6995	345.9793	314.7020	728.1233	87.7423
Skewness	0.1578	0.3794	-0.8028	-0.1809	0.0500	-0.0281
Excès de Kurtosis	-1.2382	-1.1035	-0.5151	-1.1127	-0.6619	-1.1368
Taux de change	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	USD/EUR	USD/GBP	USD/JPY
Nb.observations	247	247	247	247	247	247
Moyenne	1.4686	0.8273	133.2818	0.7188	0.5952	95.3120
Ecart-type	0.1041	0.0733	21.4039	0.0426	0.0669	13.0124
Skewness	0.1268	-0.8488	0.3777	0.0150	-0.4093	0.4738
Excès de Kurtosis	-1.1396	-0.3728	-1.3690	-0.3165	-1.1895	-0.7915

Note : Statistiques descriptives associées à l'indice de la production industrielle, au taux de chômage harmonisé, à l'indice boursier de l'Allemagne, du Canada, de la France, de la Grande-Bretagne, du Japon et des Etats-Unis d'Amérique ainsi qu'aux taux de change de l'euro contre le dollar canadien (EUR/CAD), la livre sterling (EUR/GBP) et le yen (EUR/JPY) et du dollar américain contre l'euro (USD/EUR), la livre sterling (USD/GBP) et le yen (USD/JPY). Les données sont issues des bases de données des principaux indicateurs économiques des pays de l'OCDE et de Yahoo-Finance.

(84.70 et 86.44 respectivement) contre 70.44 seulement aux Etats-Unis et 71.70 au Canada. L'Allemagne et le Japon se situent à des niveaux intermédiaires (81.94 et 80.99 respectivement). Ces séries d'indices de production industrielle sont plus ou moins volatiles. Les indices français, britannique et allemand arrivent en tête des séries les moins volatiles avec des écarts-types respectifs de 11.53, 12 et 15.43 suivies de celles des autres

pays où l'écart-type a dépassé 18.62. Cette disparité de volatilité est quasiment absente dans les taux de chômage qui ont été, en moyenne, plus élevés en France (9.60%), en Allemagne (8.56%) et au Canada (8.13%) et moins élevés au Japon (4.11%), aux Etats-Unis (5.95%) et en Grande-Bretagne (6.70%). L'ensemble des séries considérées présentent un excès de kurtosis négatif (exception faite du taux de chômage harmonisé aux Etats-Unis d'Amérique) indiquant que les distributions, tantôt asymétriques à droite (dans une proportion égale à 3/5) tantôt asymétriques à gauche (dans une proportion égale à 2/5), ont des queues plus épaisses que la normale. L'évolution des variables étudiées est reproduite dans les figures D.1, D.2, D.3 et D.4 (courbes bleues).

L'allure des courbes indique clairement que les séries étudiées sont non stationnaires contrairement à leurs taux de croissance respectifs également tracés sur les figures précédentes (courbes vertes). De telles intuitions ont été confirmées par les résultats des tests de racine unitaire de Dickey et Fuller (augmentés) contre l'hypothèse alternative d'un modèle auto-régressif stationnaire AR(1) sans trend ni constante (AR), contre l'hypothèse alternative d'un modèle auto-régressif stationnaire AR(1) avec constante seulement (ARD) et contre l'hypothèse alternative d'un modèle auto-régressif stationnaire AR(1) avec trend (TS) respectivement. Les *p-values* de chacun de ces tests sont données dans la table 4.2.

Nous considérons donc les séries stationnaires des taux de croissance des variables étudiées au lieu de leurs niveaux non stationnaires. La table 4.3 donne les statistiques descriptives de ces nouvelles variables. Il ressort que la production industrielle a connu, en moyenne, une croissance positive sur la période considérée. Le taux de chômage a augmenté en France, au Japon et Etats-Unis et il a baissé en Allemagne, au Canada et en Grande-Bretagne. Les indices des bourses de New York, de Londres et de Toronto ont connu une variation à la hausse contrairement à ceux des bourses de Paris et de Tokyo qui ont baissés en moyenne. L'indice de la bourse de Francfort, quant à lui, est resté stable en moyenne tout comme le taux de change du dollar américain contre l'euro. A l'exception des taux de change de l'euro et du dollar américain contre le yen, le reste des taux de change ont augmenté. Toutes les séries de taux de croissance, sauf celle du taux de chômage allemand, ont un excès de kurtosis positif. Elles sont deux fois asymétriques à gauche qu'à droite.

TABLE 4.2 – *P-values* des tests de racine unitaire de Dickey et Fuller

	Variable			Taux de croissance		
Prod. industrielle	AR	ARD	TS	AR	ARD	TS
Allemagne	0.8183	0.6388	0.0128	0.0001	0.0001	0.0001
Canada	0.8258	0.2314	0.6426	0.0001	0.0001	0.0001
France	0.7715	0.1734	0.1829	0.0001	0.0001	0.0001
Grande-Bretagne	0.7549	0.5442	0.8751	0.0001	0.0001	0.0001
Japon	0.7852	0.3523	0.6225	0.0001	0.0001	0.0001
Etats-Unis d'Amérique	0.8637	0.3416	0.3347	0.0001	0.0001	0.0001
Taux de chômage	AR	ARD	TS	AR	ARD	TS
Allemagne	0.6601	0.5614	0.5850	0.0010	0.0116	0.0131
Canada	0.6506	0.5147	0.8835	0.0001	0.0010	0.0010
France	0.7101	0.2157	0.3069	0.0001	0.0198	0.0190
Grande-Bretagne	0.6416	0.4670	0.3613	0.0001	0.0123	0.0061
Japon	0.7838	0.1091	0.5975	0.0001	0.0010	0.0010
Etats-Unis d'Amérique	0.6816	0.7251	0.4362	0.0010	0.0010	0.0010
Indices boursiers	AR	ARD	TS	AR	ARD	TS
Frankfort	0.7246	0.5023	0.7150	0.0010	0.0001	0.0001
Toronto	0.7316	0.5592	0.7837	0.0010	0.0001	0.0001
Paris	0.6934	0.6638	0.7037	0.0010	0.0001	0.0001
Londres	0.7301	0.1950	0.5251	0.0010	0.0001	0.0001
Tokyo	0.6928	0.6261	0.5531	0.0001	0.0001	0.0001
New York	0.7462	0.4663	0.7108	0.0010	0.0001	0.0001
Taux de change	AR	ARD	TS	AR	ARD	TS
EUR/CAD	0.7019	0.5212	0.5662	0.0010	0.0001	0.0010
EUR/GBP	0.7516	0.2813	0.7110	0.0001	0.0001	0.0001
EUR/JPY	0.6518	0.6402	0.4961	0.0001	0.0010	0.0010
USD/EUR	0.7280	0.1119	0.1965	0.0001	0.0001	0.0010
USD/GBP	0.7553	0.6060	0.8770	0.0001	0.0010	0.0010
USD/JPY	0.6560	0.1587	0.2817	0.0001	0.0001	0.0010

Note : *P-values* des tests de Dickey et Fuller (Augmentés) de l'hypothèse nulle de racine unitaire contre l'hypothèse alternative d'un modèle auto-régressif stationnaire AR(1) sans tend ni constante (AR), contre l'hypothèse alternative d'un modèle auto-régressif stationnaire AR(1) avec constante (ARD) et contre l'hypothèse alternative d'un modèle auto-régressif stationnaire AR(1) avec trend (TS) respectivement associés aux variables listées dans les tables 4.1 et 4.3.

TABLE 4.3 – Statistiques descriptives des taux de croissance des variables

Prod. industrielle	Allemagne	Canada	France	G. Bretagne	Japon	Etats-Unis
Nb. observations	500	500	500	500	500	500
Moyenne	0.0013	0.0017	0.0009	0.0006	0.0015	0.0019
Ecart-type	0.0172	0.0111	0.0137	0.0141	0.0175	0.0076
Skewness	-0.1648	-0.3527	-0.0355	-0.1738	-2.4722	-1.1340
Excès de Kurtosis	7.0773	0.9501	1.4278	10.4551	19.1164	4.8712
Taux de chômage	Allemagne	Canada	France	G. Bretagne	Japon	Etats-Unis
Nb. observations	238	238	238	238	238	238
Moyenne	-0.0002	-0.0014	0.0004	-0.0004	0.0032	0.0007
Ecart-type	0.0115	0.0231	0.0103	0.0163	0.0277	0.0269
Skewness	-0.1476	0.5353	0.1736	0.6094	0.2451	0.3138
Excès de Kurtosis	-0.7623	1.2130	0.8027	0.7898	0.4459	0.6676
Indices boursiers	Francfort	Toronto	Paris	Londres	Tokyo	New York
Nb. observations	498	481	500	489	475	490
Moyenne	0.000	0.0001	-0.0004	0.0001	-0.0005	0.0003
Ecart-type	0.0152	0.0101	0.0166	0.0124	0.0142	0.0132
Skewness	-0.1842	-0.2656	0.0887	-0.1591	-1.0938	-0.4481
Excès de Kurtosis	2.1852	1.7417	3.1109	1.6016	8.3254	3.0833
Taux de change	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	USD/EUR	USD/GBP	USD/JPY
Nb.observations	246	246	246	246	246	246
Moyenne	0.0006	0.0009	-0.0018	0.0000	0.0001	-0.0017
Ecart-type	0.0126	0.0105	0.0158	0.0130	0.0122	0.0112
Skewness	0.0111	-0.0276	-0.8026	-0.1227	0.6089	-0.0637
Excès de Kurtosis	1.1603	3.4970	2.5648	2.0915	1.3386	0.2379

Note : Statistiques descriptives associées au taux de croissance de l'indice de la production industrielle, du taux de chômage harmonisé, de l'indice boursier de l'Allemagne, du Canada, de la France, de la Grande-Bretagne, du Japon et des Etats-Unis d'Amérique ainsi que des taux de change de l'euro contre le dollar canadien (EUR/CAD), la livre sterling (EUR/GBP) et le yen (EUR/JPY) et du dollar américain contre l'euro (USD/EUR), la livre sterling (USD/GBP) et le yen (USD/JPY). Les données sont issues des bases de données des principaux indicateurs économiques des pays de l'OCDE et de Yahoo-Finance.

4.3 Les modèles

Soit x_t la variable aléatoire d'intérêt (dans notre cas, il s'agit de l'indice de la production industrielle et du taux de chômage de l'Allemagne, du Canada, de la France, de la Grande-Bretagne, du Japon et des Etats-Unis d'Amérique, des indices des bourses de ces pays ainsi que des taux de change de l'euro et du dollar américain). Désignons pas $y_t = \ln x_t - \ln x_{t-1}$ son taux de croissance. Nous considérons dans cette étude empirique quatre modèles pour calculer les prévisions des taux de croissance y_t : une marche aléatoire avec constante, un modèle autorégressif linéaire, un modèle autorégressif à seuil avec variable de transition endogène et un modèle autorégressif à changement de régimes markovien.

Marche aléatoire avec constante (RW) : Nous considérons, comme premier modèle, une marche aléatoire avec constante car des études antérieures ont montré qu'une simple marche aléatoire s'est avérée plus performante dans la prévision de séries telles que le taux de change (Meese and Rogoff, 1983). Pour le logarithme de la variable x_t , ce modèle s'écrit :

$$\ln x_t = \phi + \ln x_{t-1} + \epsilon_t, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (4.1)$$

avec ϕ la constante de la marche aléatoire et $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ un terme d'erreurs. Pour les taux de croissance de la variable x_t se modèle devient :

$$y_t = \phi + \epsilon_t, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (4.2)$$

Modèle autorégressif linéaire (AR) : Des études telles que celle de Stock and Watson (1999) ont conclu que même si des modèles plus compliqués permettent de mieux ajuster les données grâce à leur grande flexibilité, ils ne fournissent pas des prévisions plus précises que celles issues de simples modèles linéaires. Pour cette raison, nous considérons également un modèle autorégressif linéaire d'ordre p pour la variable y_t :

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (4.3)$$

où ϕ_0 est la constante du modèle, $\phi_1, \phi_2 \dots$ et ϕ_p ces paramètres autorégressifs et où $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ est un terme d'erreurs.

Modèle autorégressif à seuil avec variable de transition endogène (SETAR) : Un modèle à changement de régimes avec variable de transition endogène est un modèle

linéaire par morceaux, chacun étant associé à un régime. Il est défini par :

$$y_t = \begin{cases} \phi_0^1 + \phi_1^1 y_{t-1} + \phi_2^1 y_{t-2} + \cdots + \phi_p^1 y_{t-p} + \epsilon_t^1 & \text{si } y_{t-d} \leq c \\ \phi_0^2 + \phi_1^2 y_{t-1} + \phi_2^2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p^2 y_{t-p} + \epsilon_t^2 & \text{si } y_{t-d} > c \end{cases}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (4.4)$$

avec $\epsilon_t^1 \sim iid(0, \sigma_1^2)$ et $\epsilon_t^2 \sim iid(0, \sigma_2^2)$ les termes d'erreurs associés aux régimes respectifs. Le passage d'un régime à un autre est conditionné par la position de la variable de transition, en l'occurrence la variable y_t retardée de d périodes (délai de transition), par rapport au seuil c .

Modèle autorégressif à changement de régimes markovien (MS-AR) : Un quatrième modèle sera considéré dans cette étude, il s'agit du modèle à changement de régimes markovien exprimé comme suit :

$$y_t = \begin{cases} \phi_0^1 + \phi_1^1 y_{t-1} + \phi_2^1 y_{t-2} + \cdots + \phi_p^1 y_{t-p} + \epsilon_t^1 & \text{si } R_t = 1 \\ \phi_0^2 + \phi_1^2 y_{t-1} + \phi_2^2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p^2 y_{t-p} + \epsilon_t^2 & \text{si } R_t = 2 \end{cases}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (4.5)$$

avec $\epsilon_t^j \sim iid(0, \sigma_j^2)$ un terme d'erreurs. Les paramètres de ce modèle dépendent du régime inobservable R_t que l'on suppose suit une chaîne de Markov à deux états 1 et 2. Le passage d'un régime à un autre est contrôlé par la probabilité de transition suivante :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(R_t = j | R_{t-1} = i), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad \forall t = 2, 3, \dots, T \quad (4.6)$$

4.4 Mise en œuvre

L'idée de cette étude est de spécifier et d'ajuster chacun des modèles présentés dans la section précédente à chacune des séries de données, de calculer des prévisions ponctuelles, des intervalles et des densités de prévision à des horizons h allant de 1 à 5, et de comparer et d'évaluer ces prévisions. Chaque série de données sera répartie en deux groupes : nous gardons les 100 dernières (partie *out of sample*) pour la comparaison et l'évaluation des prévisions quel que soit l'horizon h . Les premières observations (partie *in sample*) serviront à la spécification et à l'estimation des modèles. Nous adoptons un schéma de prévision fixe : les modèles seront spécifiés et ajustés sur la partie *in sample* et les prévisions seront calculées, évaluées et comparées sur la partie *out of sample*.

4.4.1 Spécification

L'ordre autorégressif p de chaque modèle est déterminé par la minimisation du critère d'information AIC d'Akaike (1974). Dans le cas linéaire, ce critère s'écrit :

$$AIC(p) = N \ln \hat{\sigma}^2(p) + 2(p + 1) \quad (4.7)$$

où $\hat{\sigma}^2(p)$ désigne l'estimation de la variance des résidus conditionnellement à la valeur de p . Dans le cas du modèle non-linéaire SETAR(2; p,p), ce critère a été adapté par Wong and Li (1998), il s'écrit :

$$AIC(p, d) = N \ln \hat{\sigma}^2(p, d) + (p + 1) \ln N_1 + (p + 1) \ln N_2 \quad (4.8)$$

Enfin, pour le modèle à changement de régimes markovien MS(2)-AR(p), ce critère s'écrit (Smith *et al.*, 2006) :

$$AIC(p) = -2 \log L + 2n \quad (4.9)$$

avec L la vraisemblance maximisée et n le nombre de paramètres libres dans le modèle, il est donné par $n = Rp + R^2$ où R désigne le nombre de régimes ($R = 2$ dans le cas présent).

Nous utilisons ces critères d'information pour déterminer l'ordre auto-régressif p de chacun des modèles ci-dessus, le résultat est donné dans la table 4.4.

4.4.2 Estimation

Comme nous adoptons un schéma de prévision fixe, les modèles ne sont ajustés qu'une seule fois sur la partie *in sample* de l'échantillon. La constante ϕ , l'unique paramètre de la marche aléatoire (4.2) est estimée par la moyenne empirique des taux de croissance des variables étudiées, les résultats sont récapitulés dans la table 4.5. Le modèle linéaire AR (4.3) est estimé selon la méthode de Box and Jenkins (1970), les résultats sont donnés dans les tables 4.6 à 4.9. Les paramètres des modèles non-linéaires SETAR (4.4) et MS-AR (4.5) sont estimés selon les procédures détaillées dans l'annexe A, les résultats figurent dans les tables 4.10 à 4.13 pour le modèle SETAR et dans les tables 4.14 à 4.17 pour le modèle MS-AR. Les figures D.5 à D.8 illustrent l'approche graphique d'estimation du seuil de transition c du modèle SETAR, munie d'un intervalle de confiance à 95% obtenu par inversion de la statistique LR (Hansen, 1997) et les figures D.9 à D.16 montrent les probabilités filtrées et les probabilités lissées des régimes du modèle à changement de régimes markovien MS-AR.

TABLE 4.4 – Sélection des modèles AR, SETAR et MS-AR

	AR(p)	SETAR(2; p,p)	MS(2)-AR(p)
Prod. industrielle :			
Allemagne	AR(4)	SETAR(2;2,2)	MS(2)-AR(2)
Canada	AR(5)	SETAR(2;3,3)	MS(2)-AR(3)
France	AR(3)	SETAR(2;3,3)	MS(2)-AR(3)
Grande-Bretagne	AR(1)	SETAR(2;3,3)	MS(2)-AR(1)
Japon	AR(2)	SETAR(2;2,2)	MS(2)-AR(4)
Etats-Unis d'Amérique	AR(5)	SETAR(2;2,2)	MS(2)-AR(3)
Taux de chômage :			
Allemagne	AR(3)	SETAR(2;5,5)	MS(2)-AR(2)
Canada	AR(4)	SETAR(2;5,5)	MS(2)-AR(2)
France	AR(3)	SETAR(2;4,4)	MS(2)-AR(1)
Grande-Bretagne	AR(4)	SETAR(2;3,3)	MS(2)-AR(1)
Japon	AR(4)	SETAR(2;5,5)	MS(2)-AR(1)
Etats-Unis d'Amérique	AR(3)	SETAR(2;4,4)	MS(2)-AR(1)
Indices boursiers :			
Francfort	AR(2)	SETAR(2;2,2)	MS(2)-AR(1)
Toronto	AR(1)	SETAR(2;3,3)	MS(2)-AR(1)
Paris	AR(4)	SETAR(2;1,1)	MS(2)-AR(1)
Londres	AR(1)	SETAR(2;4,4)	MS(2)-AR(1)
Tokyo	AR(2)	SETAR(2;4,4)	MS(2)-AR(1)
New York	AR(3)	SETAR(2;4,4)	MS(2)-AR(1)
Taux de change :			
EUR/CAD	AR(2)	SETAR(2;5,5)	MS(2)-AR(1)
EUR/GBP	AR(3)	SETAR(2;1,1)	MS(2)-AR(3)
EUR/JPY	AR(4)	SETAR(2;1,1)	MS(2)-AR(1)
USD/EUR	AR(4)	SETAR(2;1,1)	MS(2)-AR(1)
USD/GBP	AR(4)	SETAR(2;1,1)	MS(2)-AR(1)
USD/JPY	AR(4)	SETAR(2;2,2)	MS(2)-AR(1)

Note : Les modèles AR, SETAR et MS-AR sélectionnés pour les taux de croissance des indices de production industrielle, des taux de chômage, des indices boursiers des pays étudiés ainsi que des taux de change de l'euro (EUR) et du dollar américain (USD) contre la livre sterling (GBP), le dollar canadien (CAD) et le yen (JPY). L'ordre autorégressif p de chaque modèle est déterminé par le critère d'information AIC rapporté dans les tables D.1, D.2 et D.3.

TABLE 4.5 – Estimation de la constante de la marche aléatoire

P. industrielle	Allemagne	Canada	France	G. Bretagne	Japon	Etats-Unis
	0.0011 (0.0169)	0.0022 (0.0113)	0.0013 (0.0132)	0.0010 (0.0152)	0.0019 (0.0134)	0.0022 (0.0074)
T. de chômage	Allemagne	Canada	France	G. Bretagne	Japon	Etats-Unis
	0.0036 (0.0094)	-0.0022 (0.0225)	0.0000 (0.0094)	-0.0045 (0.0134)	0.0066 (0.0265)	-0.0012 (0.0264)
I. boursiers	Francfort	Toronto	Paris	Londres	Tokyo	New York
	0.0000 (0.0121)	0.0000 (0.0083)	0.0000 (0.0143)	0.0000 (0.0108)	0.0000 (0.0143)	0.0000 (0.0114)
T. de change	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	USD/EUR	USD/GBP	USD/JPY
	0.0000 (0.0132)	0.0018 (0.0116)	-0.0014 (0.0172)	0.0000 (0.0133)	0.0013 (0.0137)	-0.0018 (0.0124)

Note : Les nombres représentent l'estimation de la constante ϕ de la marche aléatoire (4.2). Ils sont suivis, entre parenthèses, de l'écart-type de l'estimation.

4.4.3 Calcul des prévisions

Des prévisions ponctuelles, par intervalles et par densités à des horizons h allant de 1 à 5 sont calculées à l'aide des modèles ajustés dans la section précédente. Ces prévisions sont obtenues par des simulations Bootstrap en tirant les chocs (avec remise) dans les résidus de l'estimation des modèles. Cette méthode de prévision permet, d'un côté, de s'affranchir de toute hypothèse de distribution sur les innovations ϵ_t des modèles (seule l'hypothèse d'un bruit blanc est imposée), et de l'autre côté, de disposer d'une série de simulations (500 dans le cas présent) qui peuvent être considérées comme des réalisations du vrai processus générateur des données et donc servir à estimer la densité de prévision. Celle-ci est estimée non-paramétriquement à l'aide d'un noyau gaussien grâce à la fonction 'KSDENSITY' du logiciel MATLAB⁴, qui fixe automatiquement la taille de la fenêtre de lissage en fonction de la taille d'échantillon. Enfin, un intervalle de prévision à un taux de couverture 80% est calculé à partir du premier et du dernier déciles de la densité de prévision. Cette procédure est reproduite pour l'ensemble de la partie *out of sample*, soit 100 fois.

4. Matlab R2009b.

TABLE 4.6 – Paramètres estimés des modèles AR - Production industrielle

	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
ϕ_0	0.0012 (0.0009)	0.0010 (0.0005)	0.0010 (0.0006)	0.0007 (0.0006)	0.0012 (0.0009)	0.0008 (0.0004)
ϕ_1	-0.2795 (0.0925)	-0.0812 (0.0519)	-0.3202 (0.0557)	-0.1744 (0.1037)	0.0345 (0.0809)	0.2622 (0.0757)
ϕ_2	0.0316 (0.0669)	0.1145 (0.0441)	0.0872 (0.0627)	–	0.1656 (0.1181)	0.1434 (0.0531)
ϕ_3	0.1891 (0.0560)	0.2831 (0.0427)	0.2003 (0.0470)	–	–	0.1397 (0.0555)
ϕ_4	0.0933 (0.0526)	0.0683 (0.0494)	–	–	–	0.0766 (0.0458)
ϕ_5	–	0.0726 (0.0471)	–	–	–	-0.0498 (0.0372)
σ	0.0163 (0.0043)	0.0105 (0.0074)	0.0127 (0.0020)	0.0139 (0.0015)	0.0172 (0.0010)	0.0069 (0.0021)

Note : Estimation des paramètres du modèle AR (4.3) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.7 – Paramètres estimés des modèles AR - Taux de chômage

	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
ϕ_0	-0.0002 (0.0005)	-0.0013 (0.0016)	0.0001 (0.0005)	-0.0002 (0.0010)	0.0032 (0.0018)	0.0003 (0.0016)
ϕ_1	0.3233 (0.0714)	0.0383 (0.0908)	0.3123 (0.0641)	0.2464 (0.0758)	-0.0591 (0.0615)	-0.0334 (0.0618)
ϕ_2	0.4316 (0.0658)	-0.0081 (0.0657)	0.2942 (0.0790)	0.1299 (0.0672)	-0.0377 (0.0744)	0.2282 (0.0687)
ϕ_3	0.1041 (0.0805)	0.1132 (0.0695)	0.1294 (0.0699)	0.0119 (0.0880)	0.1647 (0.0703)	0.2887 (0.0577)
ϕ_4	–	0.0686 (0.0607)	–	0.2399 (0.0578)	-0.0504 (0.0668)	–
σ	0.0070 (0.0041)	0.0227 (0.0021)	0.0081 (0.0014)	0.0146 (0.0023)	0.0270 (0.0042)	0.0251 (0.042)

Note : Estimation des paramètres du modèle AR (4.3) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.8 – Paramètres estimés des modèles AR - Indices boursiers

	Francfort	Toronto	Paris	Londres	Tokyo	New York
ϕ_0	0.0001 (0.0007)	0.0001 (0.0005)	-0.0004 (0.0007)	0.0001 (0.0006)	-0.0004 (0.0006)	0.0003 (0.0006)
ϕ_1	0.1205 (0.0571)	0.0523 (0.0584)	0.0499 (0.0579)	0.0810 (0.0560)	0.0039 (0.1648)	-0.0820 (0.0556)
ϕ_2	-0.0718 (0.0648)	—	-0.0653 (0.0604)	—	-0.0544 (0.0689)	0.0528 (0.0738)
ϕ_3	—	—	-0.0553 (0.0578)	—	—	-0.0946 (0.0572)
ϕ_4	—	—	-0.0433 (0.0645)	—	—	—
σ	0.0151 (0.0045)	0.0101 (0.0014)	0.0165 (0.0052)	0.0123 (0.0024)	0.0142 (0.0041)	0.0131 (0.0012)

Note : Estimation des paramètres du modèle AR (4.3) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.9 – Paramètres estimés des modèles AR - Taux de change

	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	USD/EUR	USD/GBP	USD/JPY
ϕ_0	-0.0004 (0.0008)	0.0005 (0.0006)	-0.0014 (0.0009)	0.0001 (0.0008)	0.0006 (0.0007)	-0.0015 (0.0007)
ϕ_1	0.3868 (0.0724)	0.4920 (0.0777)	0.3623 (0.0770)	0.4284 (0.0789)	0.4024 (0.0686)	0.3343 (0.0671)
ϕ_2	-0.1572 (0.0584)	-0.3224 (0.0937)	-0.1421 (0.0953)	-0.1201 (0.0831)	-0.2349 (0.0822)	-0.0963 (0.0743)
ϕ_3	—	0.1669 (0.1058)	0.2868 (0.0666)	0.1639 (0.1017)	0.3527 (0.0805)	0.0526 (0.0707)
ϕ_4	—	—	-0.2345 (0.0762)	-0.1519 (0.0731)	-0.1625 (0.0816)	-0.1319 (0.0740)
σ	0.0118 (0.0024)	0.0094 (0.0035)	0.0145 (0.0023)	0.0118 (0.0017)	0.0110 (0.0052)	0.0105 (0.0062)

Note : Estimation des paramètres du modèle AR (4.3) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.10 – Paramètres estimés des modèles SETAR - Production industrielle

	Allemagne		Canada		France	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0062 (0.0029)	0.0013 (0.0009)	0.0000 (0.0009)	0.0033 (0.0013)	0.0068 (0.0039)	0.0009 (0.0007)
ϕ_1^i	0.1313 (0.0703)	-0.5010 (0.0545)	0.0132 (0.0576)	-0.1767 (0.0648)	-0.0331 (0.0885)	-0.4489 (0.0513)
ϕ_2^i	0.2532 (0.1165)	-0.0239 (0.0661)	0.02227 (0.0573)	0.0368 (0.0634)	0.4096 (0.1723)	0.0426 (0.0646)
ϕ_3^i	—	—	0.2223 (0.0844)	0.1730 (0.1051)	0.2281 (0.0971)	0.1406 (0.0499)
c	-0.0102 [-0.0131;0.0086]		0.0074 [0.0060;0.0102]		-0.0040 [-0.0047;-0.0015]	
d	2		3		2	
σ_i	0.0159 (0.0054)	0.0241 (0.0041)	0.0105 (0.0075)	0.0143 (0.0051)	0.0125 (0.0047)	0.0172 (0.0061)
	Grande-Bretagne		Japon		Etats-Unis	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	-0.0031 (0.0014)	0.0002 (0.0010)	-0.0160 (0.0030)	0.0024 (0.0009)	0.0035 (0.0013)	0.0003 (0.0004)
ϕ_1^i	0.0246 (0.0712)	-0.3784 (0.0566)	0.5257 (0.0780)	-0.1331 (0.0508)	0.1752 (0.0696)	0.3805 (0.0568)
ϕ_2^i	-0.0874 (0.0639)	-0.0808 (0.0630)	-0.2698 (0.0888)	0.1388 (0.0726)	0.3514 (0.1108)	0.2535 (0.0683)
ϕ_3^i	-0.2501 (0.0936)	0.1682 (0.0776)	—	—	—	—
c	-0.0014 [-0.0014;-0.0013]		-0.0013 [-0.0014;-0.0013]		-0.0043 [-0.0045;0.0034]	
d	3		2		2	
σ_i	0.0142 (0.0052)	0.0135 (0.0031)	0.0163 (0.0015)	0.0142 (0.0012)	0.0069 (0.0041)	0.0054 (0.0009)

Note : Estimation des paramètres du modèle SETAR (4.4) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations sauf pour le seuil de transition c pour lequel un intervalle de confiance obtenu par inversion de la statistique LR (Hansen, 1997) est fourni (Figure D.5). Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.11 – Paramètres estimés des modèles SETAR - Taux de chômage

	Allemagne		Canada		France	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	-0.0126 (0.0048)	-0.0007 (0.0005)	-0.0052 (0.0018)	-0.0026 (0.0070)	-0.0005 (0.0007)	0.0088 (0.0027)
ϕ_1^i	0.5463 (0.1254)	0.1981 (0.0766)	-0.2498 (0.0964)	0.2071 (0.2036)	0.2775 (0.0767)	0.3647 (0.1251)
ϕ_2^i	0.1375 (0.1457)	0.4899 (0.0786)	-0.1893 (0.0712)	0.4275 (0.1323)	0.3531 (0.0798)	0.0718 (0.1269)
ϕ_3^i	0.0388 (0.1557)	0.2292 (0.0842)	0.0513 (0.0668)	0.0586 (0.1550)	0.0745 (0.0783)	0.3177 (0.1336)
ϕ_4^i	-0.3063 (0.1605)	0.0666 (0.0787)	0.1481 (0.0699)	-0.2165 (0.1296)	-0.0026 (0.0894)	-0.5312 (0.1955)
ϕ_5^i	-0.4859 (0.2547)	-0.0633 (0.0791)	0.1875 (0.0678)	0.3793 (0.1438)	–	–
c	-0.0121 [-0.0123;-0.0120]		0.0140 [0.0129;0.0157]		0.0095 [0.0089;0.0104]	
d	5		1		4	
σ_i	0.0068 (0.0042)	0.0055 (0.0021)	0.0210 (0.0031)	0.0245 (0.0036)	0.0080 (0.0012)	0.0065 (0.0152)
	Grande-Bretagne		Japon		Etats-Unis	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0016 (0.0106)	-0.0024 (0.0011)	0.0032 (0.0026)	-0.0176 (0.0068)	-0.0027 (0.0019)	0.0267 (0.0118)
ϕ_1^i	-0.0374 (0.4533)	0.4414 (0.0787)	0.0207 (0.0795)	-0.2222 (0.1108)	-0.1201 (0.0682)	0.3080 (0.1991)
ϕ_2^i	0.5351 (0.2066)	0.1387 (0.0668)	-0.0668 (0.0876)	-0.0667 (0.0982)	0.0811 (0.0722)	0.6110 (0.1293)
ϕ_3^i	-0.5830 (0.2125)	0.0612 (0.0663)	0.2050 (0.0756)	-0.0007 (0.1231)	0.2832 (0.0710)	0.1087 (0.1376)
ϕ_4^i	–	–	-0.1464 (0.0776)	0.1449 (0.1211)	-0.1132 (0.0902)	-0.6962 (0.2897)
ϕ_5^i	–	–	0.1082 (0.1269)	0.7088 (0.1858)	–	–
c	0.0230 [0.0227;0.0230]		0.0183 [0.0183;0.0274]		0.0230 [0.0227;0.0230]	
d	1		5		4	
σ_i	0.0145 (0.0014)	0.0162 (0.0016)	0.0269 (0.0142)	0.0211 (0.0017)	0.0243 (0.0099)	0.0321 (0.0109)

Note : Estimation des paramètres du modèle SETAR (4.4) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations sauf pour le seuil de transition c pour lequel un intervalle de confiance obtenu par inversion de la statistique LR (Hansen, 1997) est fourni (Figure D.6). Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.12 – Paramètres estimés des modèles SETAR - Indices boursiers

	Francfort		Toronto		Paris	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	-0.0058 (0.0031)	0.0002 (0.0009)	-0.0009 (0.0022)	0.0007 (0.0006)	-0.0139 (0.0040)	0.0005 (0.0009)
ϕ_1^i	0.2656 (0.0763)	0.0428 (0.0550)	0.1340 (0.0804)	0.0126 (0.0541)	-0.3935 (0.1511)	0.0177 (0.0662)
ϕ_2^i	-0.3405 (0.1319)	-0.0436 (0.0708)	-0.0922 (0.0801)	0.0437 (0.0544)	—	—
ϕ_3^i	—	—	-0.6526 (0.1429)	-0.0969 (0.0720)	—	—
c	0.0096 [0.0075 ; 0.0109]		-0.0064 [-0.0092 ; -0.0055]		-0.0122 [-0.0143 ; -0.0098]	
d	2		3		1	
σ_i	0.0150 (0.0196)	0.1543 (0.0020)	0.0099 (0.0124)	0.0124 (0.0021)	0.0164 (0.0014)	0.0201 (0.0135)
	Londres		Tokyo		New York	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	-0.0056 (0.0030)	0.0011 (0.0007)	-0.0064 (0.0017)	0.0011 (0.0011)	-0.0041 (0.0018)	-0.0003 (0.0009)
ϕ_1^i	0.0481 (0.0751)	0.1093 (0.0566)	-0.1347 (0.0663)	0.1465 (0.0615)	-0.0444 (0.0658)	-0.1021 (0.0612)
ϕ_2^i	0.1438 (0.0789)	-0.1472 (0.0553)	-0.1377 (0.0606)	0.0331 (0.0664)	-0.0768 (0.0722)	0.1067 (0.0574)
ϕ_3^i	-0.0999 (0.0803)	-0.0037 (0.0549)	0.0436 (0.0632)	0.0698 (0.0636)	-0.3805 (0.1026)	0.0399 (0.0831)
ϕ_4^i	-0.2313 (0.1571)	-0.1445 (0.0697)	-0.4281 (0.0953)	-0.2038 (0.0929)	-0.1289 (0.0786)	0.1353 (0.0555)
c	-0.0095 [-0.0105 ; -0.0041]		-0.0040 [-0.0140 ; 0.0018]		-0.0032 [-0.0091 ; 0.0000]	
d	4		4		3	
σ_i	0.0122 (0.0021)	0.0142 (0.0013)	0.0138 (0.0018)	0.0241 (0.0041)	0.0129 (0.0124)	0.0234 (0.0132)

Note : Estimation des paramètres du modèle SETAR (4.4) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations sauf pour le seuil de transition c pour lequel un intervalle de confiance obtenu par inversion de la statistique LR (Hansen, 1997) est fourni (Figure D.7). Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.13 – Paramètres estimés des modèles SETAR - Taux de change

	EUR/CAD		EUR/GBP		EUR/JPY	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	-0.0126 (0.0039)	-0.0021 (0.0010)	0.0034 (0.0032)	-0.0007 (0.0007)	0.0011 (0.0020)	-0.0027 (0.0022)
ϕ_1^i	-0.3966 (0.2200)	0.6473 (0.0981)	0.3258 (0.1967)	0.5251 (0.0807)	0.4026 (0.1088)	0.3370 (0.1681)
ϕ_2^i	-0.3769 (0.1750)	-0.1939 (0.0737)	—	—	—	—
ϕ_3^i	-0.0796 (0.1581)	0.0812 (0.0759)	—	—	—	—
ϕ_4^i	-0.1602 (0.1189)	-0.0463 (0.0821)	—	—	—	—
ϕ_5^i	-0.1020 (0.1425)	-0.0412 (0.0717)	—	—	—	—
c	-0.0065 [-0.0099;-0.0037]		-0.0105 [-0.0121;-0.0087]		0.0112 [0.0074;0.0121]	
d	1		1		1	
σ_i	0.0115 (0.0021)	0.0223 (0.0185)	0.0097 (0.0015)	0.0090 (0.0016)	0.0152 (0.0017)	0.0183 (0.0162)
	USD/EUR		USD/GBP		USD/JPY	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0025 (0.0016)	-0.0029 (0.0017)	-0.0062 (0.0027)	0.0008 (0.0012)	-0.0009 (0.0023)	0.0009 (0.0012)
ϕ_1^i	0.5263 (0.1311)	0.5641 (0.1300)	-0.2605 (0.2135)	0.3242 (0.0964)	0.1381 (0.0949)	0.5074 (0.0851)
ϕ_2^i	—	—	—	—	0.0488 (0.1595)	-0.3810 (0.1330)
c	0.0085 [0.0085;0.0097]		0.0025 [0.0000;0.0134]		-0.0040 [-0.0096;0.0016]	
d	1		1		2	
σ_i	0.0120 (0.0021)	0.0136 (0.0013)	0.0116 (0.0024)	0.0118 (0.0022)	0.0104 (0.0014)	0.0111 (0.0015)

Note : Estimation des paramètres du modèle SETAR (4.4) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations sauf pour le seuil de transition c pour lequel un intervalle de confiance obtenu par inversion de la statistique LR (Hansen, 1997) est fourni (Figure D.8). Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.14 – Paramètres estimés des modèles MS-AR - Production industrielle

	Allemagne		Canada		France	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0028 (0.0006)	-0.0520 (0.0021)	0.0006 (0.0010)	0.0017 (0.0007)	0.0017 (0.0006)	0.0003 (0.0018)
ϕ_1^i	-0.3403 (0.0444)	-0.4214 (0.0862)	-0.0715 (0.0716)	-0.0534 (0.0698)	-0.4833 (0.0525)	-0.2295 (0.0912)
ϕ_2^i	-0.1082 (0.0398)	0.3517 (0.4820)	0.1928 (0.0713)	0.0579 (0.0633)	-0.1563 (0.0565)	0.2580 (0.0915)
ϕ_3^i	—	—	0.3181 (0.0754)	0.2436 (0.0708)	0.01777 (0.0525)	0.3294 (0.0927)
p_{ii}	0.9900 (0.0400)	0.4600 (0.2000)	0.9700 (0.0500)	0.9800 (0.0400)	0.9900 (0.0400)	0.9800 (0.0300)
σ_i	0.0139 (0.0003)	0.0159 (0.0068)	0.0133 (0.0007)	0.0081 (0.0005)	0.0103 (0.0004)	0.0176 (0.0011)
	Grande-Bretagne		Japon		Etats-Unis	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0009 (0.0005)	-0.0022 (0.0059)	-0.0153 (0.0139)	0.0011 (0.0006)	-0.0001 (0.0052)	0.0011 (0.0003)
ϕ_1^i	-0.0898 (0.0586)	-0.2768 (0.1776)	0.2264 (0.2151)	-0.2485 (0.0478)	0.4537 (0.1285)	0.1085 (0.0509)
ϕ_2^i	—	—	0.0065 (0.1825)	0.1927 (0.0460)	-0.0844 (0.1216)	0.2546 (0.0468)
ϕ_3^i	—	—	-0.2238 (0.2258)	0.3245 (0.0443)	0.1789 (0.1468)	0.1687 (0.0477)
ϕ_4^i	—	—	-0.0914 (0.2504)	0.1561 (0.0481)	—	—
p_{ii}	0.9700 (0.0400)	0.6300 (0.0600)	0.9400 (0.3000)	1.0000 (0.0500)	0.7700 (0.0500)	0.9600 (0.0400)
σ_i	0.0095 (0.0003)	0.0355 (0.0031)	0.0511 (0.0088)	0.0120 (0.0004)	0.0125 (0.0009)	0.0048 (0.0002)

Note : Estimation des paramètres du modèle MS-AR (4.5) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.15 – Paramètres estimés des modèles MS-AR - Taux de chômage

	Allemagne		Canada		France	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	-0.0013 (0.0006)	0.0058 (0.0001)	0.0135 (0.0007)	-0.0041 (0.0010)	-0.0002 (0.0008)	0.0025 (0.0034)
ϕ_1^i	0.3513 (0.0692)	0.4928 (0.0131)	1.0082 (0.0287)	-0.1323 (0.0577)	0.8048 (0.0730)	0.2585 (0.0017)
ϕ_2^i	0.5041 (0.0657)	-0.0183 (0.0179)	0.0182 (0.0222)	-0.0789 (0.0631)	–	–
p_{ii}	0.8700 (0.1000)	0.4900 (0.1200)	0.2400 (0.1500)	0.9300 (0.0600)	0.6200 (0.0700)	0.5600 (0.0800)
σ_i	0.0073 (0.0004)	0.0005 (0.0001)	0.0022 (0.0004)	0.0211 (0.0010)	0.0088 (0.0007)	0.0048 (0.0043)
	Grande-Bretagne		Japon		Etats-Unis	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0375 (0.0060)	-0.0027 (0.0009)	0.0123 (0.0031)	-0.0032 (0.0021)	0.0320 (0.0028)	-0.0060 (0.0014)
ϕ_1^i	-0.1332 (0.1656)	0.0926 (0.0681)	-0.1712 (0.0960)	-0.1043 (0.0968)	-0.0605 (0.1525)	-0.2595 (0.0669)
p_{ii}	0.8600 (0.2500)	0.9900 (0.0700)	0.9800 (0.0500)	0.9800 (0.0600)	0.9300 (0.0600)	0.9900 (0.0600)
σ_i	0.0117 (0.0024)	0.0134 (0.0018)	0.0300 (0.0022)	0.0226 (0.0016)	0.0283 (0.0034)	0.0217 (0.0011)

Note : Estimation des paramètres du modèle MS-AR (4.5) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

TABLE 4.16 – Paramètres estimés des modèles MS-AR - Indices boursiers

	Francfort		Toronto		Paris	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0009 (0.0005)	-0.0018 (0.0021)	0.0007 (0.0004)	-0.0010 (0.0011)	0.0004 (0.0006)	-0.0022 (0.0020)
ϕ_1^i	0.0437 (0.0570)	0.1338 (0.0867)	0.0359 (0.0568)	0.0500 (0.0782)	0.1002 (0.0558)	0.0209 (0.0842)
p_{ii}	0.9900 (0.0400)	0.9800 (0.0100)	0.9900 (0.0100)	0.9900 (0.0300)	0.9900 (0.0400)	0.9800 (0.0200)
σ_i	0.0100 (0.0007)	0.0240 (0.0015)	0.0071 (0.0013)	0.0141 (0.0003)	0.0113 (0.0004)	0.0245 (0.0012)
	Londres		Tokyo		New York	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0007 (0.0005)	-0.0012 (0.0016)	-0.0114 (0.0245)	-0.0003 (0.0006)	0.0012 (0.0005)	-0.0010 (0.0013)
ϕ_1^i	0.0202 (0.0560)	0.1119 (0.0885)	0.0223 (0.5360)	-0.0184 (0.0461)	-0.0596 (0.0600)	-0.1121 (0.0702)
p_{ii}	0.9900 (0.0400)	0.9700 (0.0200)	0.8000 (0.5400)	1.0000 (0.0500)	0.9900 (0.0400)	0.9800 (0.0300)
σ_i	0.0090 (0.0004)	0.0184 (0.0010)	0.0532 (0.0187)	0.0125 (0.0004)	0.0078 (0.0003)	0.0181 (0.0008)

Note : Estimation des paramètres du modèle MS-AR (4.5) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

4.4.4 Comparaison et évaluation des prévisions

A l'issue de l'étape précédente et après la comparaison des prévisions *out of sample* aux réalisations, on se retrouve, pour chaque modèle, pour chaque horizon de prévision h et pour chaque série de données, avec une série $\hat{\epsilon}_{t|t-h} = y_t - \hat{y}_{t|t-h}$ d'erreurs de prévision, une série I_t de violations de l'intervalle de prévision, une série z_t de transformées de Rosenblatt (1952) (ou *p.i.t*) et une série z_t^* de transformées de Berkowitz (2001) ($t = 1, 2, \dots, 100$) qui serviront à la comparaison et à l'évaluation des prévisions. Nous considérons un seuil de risque de 5% dans l'ensemble des tests qui suivent.

TABLE 4.17 – Paramètres estimés des modèles MS-AR - Taux de change

	EUR/CAD		EUR/GBP		EUR/JPY	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	-0.0008 (0.0007)	0.0032 (0.0041)	0.0008 (0.0006)	-0.0071 (0.0000)	-0.0107 (0.0061)	-0.0005 (0.0009)
ϕ_1^i	0.3600 (0.0657)	0.2446 (0.1860)	0.5314 (0.0624)	-0.3681 (0.0006)	0.1905 (0.2085)	0.2839 (0.0628)
ϕ_2^i	—	—	-0.3008 (0.0640)	0.0407 (0.0017)	—	—
ϕ_3^i	—	—	0.2564 (0.0601)	-0.9092 (0.0017)	—	—
p_{ii}	0.9900 (0.0600)	0.8900 (0.0800)	0.9900 (0.0600)	0.5100 (0.3000)	0.9400 (0.0500)	0.9900 (0.0600)
σ_i	0.0102 (0.0005)	0.0202 (0.0025)	0.0086 (0.0004)	0.00245 (0.0036)	0.0294 (0.0040)	0.0126 (0.0006)
	USD/EUR		USD/GBP		USD/JPY	
	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
ϕ_0^i	0.0026 (0.0035)	-0.0003 (0.0007)	0.0000 (0.0005)	0.0050 (0.0024)	-0.0020 (0.0020)	-0.0009 (0.0007)
ϕ_1^i	0.3577 (0.1581)	0.3834 (0.0652)	0.3395 (0.658)	0.1839 (0.1376)	0.2939 (0.1297)	0.3129 (0.0754)
p_{ii}	0.9600 (0.0500)	0.9900 (0.0600)	0.9900 (0.0600)	0.9700 (0.0500)	0.9600 (0.0800)	0.9900 (0.0600)
σ_i	0.0199 (0.0021)	0.0100 (0.0005)	0.0086 (0.0004)	0.0206 (0.0022)	0.0143 (0.0014)	0.0091 (0.0005)

Note : Estimation des paramètres du modèle MS-AR (4.5) à deux régimes (R₁ et R₂) pour chaque série de données. Les nombres entre parenthèses représentent les écart-types des estimations. Les erreurs sont supposées normales.

Comparaison des prévisions ponctuelles : Nous comparons les $m = 100$ prévisions ponctuelles à l'horizon h issues, pour chaque série de données, de chacun des modèles considérés jusqu'à présent, à l'aide du test DM_1^* d'Harvey *et al.* (1997) suivant :

$$DM_1^* \approx DM_1 \sqrt{\frac{m+1-2h}{m} + \frac{h(h-1)}{m^2}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} N(0,1) \quad (4.10)$$

avec DM_1 la statistique du test de Diebold and Mariano (1995) donnée par :

$$DM_1 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{V}_{as}(\bar{d})}} \quad (4.11)$$

où $\bar{d} = (1/m) \sum_{t=1}^m d_t$ et où $d_t = g(\hat{\epsilon}_{t|t-h}^i) - g(\hat{\epsilon}_{t|t-h}^j)$ désigne le différentiel de pertes entre le modèle i et le modèle j (nous utilisons une fonction de pertes quadratique $g(x) = x^2$) avec $\hat{V}_{as}(\bar{d})$ l'estimation de la variance asymptotique du différentiel moyen de pertes $\bar{d}$.

Nous comparons les modèles mutuellement et nous comptons le nombre de fois où le test a conclu à l'égalité de leur qualité prédictive. En cas de rejet de cette égalité, les modèles sont classés dans l'ordre croissant de leurs erreurs quadratiques moyennes de prévision (MSFE), le meilleur modèle étant celui qui engendre le moins de pertes (*i.e.* MSFE minimale).

Evaluation des intervalles de prévision : La confrontation des intervalles de prévision *out of sample* et des réalisations donne lieu à une série I_t de violations de l'intervalle de prévision ($I_t = 1$ en cas de violation et $I_t = 0$ dans le cas contraire). Cette série de violations permet d'évaluer la qualité des intervalles de prévisions associés à chaque modèle. Nous testons pour cela l'hypothèse de couverture conditionnelle à l'aide du test LR_{cc} (1.61) de Christoffersen (1998), du test DQ_{cc} (1.108) d'Engle and Manganelli (2004) et aussi à l'aide de notre test $J_{cc}(2)$ (2.15) (nous utilisons une taille de bloc égale à 10). Nous classerons les modèles en fonction du nombre d'intervalles de prévision valides délivrés (*i.e.* le nombre de fois où l'hypothèse de couverture conditionnelle n'a pas été rejetée par les tests).

Evaluation des densités de prévision : Enfin, pour évaluer les densités de prévision associées à chaque modèle, nous transformons les réalisations de chacune des séries sur la partie *out of sample* par le procédé de Rosenblatt (1952) et ensuite par celui de Berkowitz (2001) comme expliqué dans le chapitre 3. Pour la première transformation, ne connaissant pas la vraie fonction de répartition théorique, nous utilisons la fonction

de répartition empirique. Les transformées z_t de Rosenblatt (1952) sont alors calculées comme suit :

$$z_t = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^t \mathbb{I}(y_{(n)} < y_t) , \quad \forall t = 1, 2, \dots, m \quad (4.12)$$

avec $\mathbb{I}(\cdot)$ la fonction indicatrice qui vaut 1 si son argument est vrai et 0 sinon et $y_{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, m$ est la statistique d'ordre associée à aux réalisations y_t , $t = 1, 2, \dots, m$. La deuxième transformation est ensuite obtenue par :

$$z_t^* = \Phi^{-1}(z_t) , \quad \forall t = 1, 2, \dots, m \quad (4.13)$$

avec $\Phi^{-1}(\cdot)$ la fonction quantile associée à la loi normale centrée et réduite. Si la densité de prévision est correctement spécifiée, cette transformation z_t^* de Berkowitz (2001) est normalement et indépendamment distribuée (*n.i.d*(0,1)). Nous testons donc cette hypothèse sur la série z_t^* , $t = 1, 2, \dots, m$ à l'aide du test LR (1.135) de Berkowitz (2001) et de notre test J_{norm} (3.10) et nous comptons le nombre de fois où cette hypothèse n'a pas été rejetée par ces tests, le meilleur modèle étant celui ayant réalisé le meilleur score.

4.5 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats de la comparaison et de l'évaluation des prévisions ponctuelles, par intervalles et par densités, obtenues à partir des modèles ajustés dans la section 4.4.2 pour différentes séries de données.

Comparaison des prévisions ponctuelles : La table 4.18 présente le résultat de la comparaison mutuelle des prévisions ponctuelles issues des modèles linéaires (marche aléatoire RW et modèle AR) et des modèles non-linéaires (SETAR et MS-AR). La colonne « Egalité » représente le nombre de fois où le test de Harvey *et al.* (1997) a conclu à l'égalité de la qualité prédictive des modèles en colonne et celle des modèles en ligne. La colonne « Supérieure » représente le nombre de fois où les modèles en colonne sont de qualité supérieure à celle des modèles en ligne. La colonne « Inférieure » représente le nombre de fois où les modèles en colonne sont de qualité inférieure à celle des modèles en ligne.

A la lecture des résultats, on remarque que :

- L'égalité de la qualité prédictive des modèles linéaires (RW *vs* AR) est acceptée 104 fois sur 120, soit 86.67% des cas.
- L'égalité de la qualité prédictive des modèles non-linéaires (SETAR *vs* MS-AR) est

TABLE 4.18 – Comparaison des prévisions ponctuelles

	Egalité			Supérieure			Inférieure		
P. industrielle	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR
RW	26	19	28	3	10	2	1	1	0
AR	–	23	25	–	4	3	–	3	2
SETAR	–	–	27	–	–	2	–	–	1
T. chômage	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR
RW	27	22	23	0	6	4	3	2	3
AR	–	16	17	–	8	3	–	6	10
SETAR	–	–	26	–	–	4	–	–	0
I. boursiers	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR
RW	29	22	15	0	7	13	1	1	2
AR	–	20	19	–	9	9	–	1	2
SETAR	–	–	19	–	–	5	–	–	6
T. change	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR
RW	22	23	19	6	5	7	2	2	4
AR	–	24	22	–	3	6	–	3	2
SETAR	–	–	26	–	–	0	–	–	4
Total	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR	AR	SETAR	MS-AR
RW	104	86	85	9	28	26	7	6	9
AR	–	83	83	–	24	21	–	13	16
SETAR	–	–	118	–	–	11	–	–	11

Note : La colonne « Egalité » représente le nombre de fois où le test de Harvey *et al.* (1997) a conclu à l'égalité de la qualité prédictive des modèles en colonne et celle des modèles en ligne. La colonne « Supérieure » représente le nombre de fois où les modèles en colonne sont de qualité supérieure à celle des modèles en ligne. La colonne « Inférieure » représente le nombre de fois où les modèles en colonne sont de qualité inférieure à celle des modèles en ligne.

acceptée 118 fois sur 120, soit 98.33% des cas.

- L'égalité de la qualité prédictive des modèles linéaires (RW et AR) et celle des modèles non-linéaires (SETAR et MS-AR) est acceptée dans des pourcentages allant de 69.17% à 71.67% des cas.

Dans les cas où cette égalité est rejetée, on note que :

- Pour les modèles linéaires : la marche aléatoire est préférable au modèle AR 9 fois sur 16, soit 56.25% des cas de rejet de l'égalité.

- Pour les modèles non-linéaires : le modèle MS-AR est préférable au modèle SETAR 11 fois sur 22, soit 50% des cas de rejet de l'égalité.
- Pour l'ensemble des modèles : les modèles linéaires (RW et AR), et en particulier la marche aléatoire, sont préférables aux modèles non-linéaires (SETAR et MS-AR) dans les pourcentages des cas de rejet de l'égalité suivants :
 - La marche aléatoire est préférable au modèle SETAR 28 fois sur 34, soit un pourcentage de 82.35%.
 - La marche aléatoire est préférable au modèle MS-AR 26 fois sur 35, soit un pourcentage de 74.29%.
 - Le modèle AR est préférable au modèle SETAR 24 fois sur 37, soit un pourcentage de 64.86%.
 - Le modèle AR est préférable au modèle MS-AR 21 fois sur 37, soit un pourcentage de 56.76%.

On conclut donc qu'en matière de prévisions ponctuelles et dans le cadre de cette étude empirique, les modèles linéaires et les modèles non-linéaires, présentent des qualités prédictives très proches avec un léger avantage en faveur des modèles linéaires et plus particulièrement en faveur de la marche aléatoire.

Evaluation des intervalles de prévision : La table 4.19 présente le nombre de fois où les intervalles de prévision issus des modèles RW (marche aléatoire), AR, SETAR et MS-AR ont été validés par le test LR_{cc} de Christoffersen (1998), le test DQ_{cc} d'Engle and Manganelli (2004) ainsi que par notre test $J_{cc}(2)$ fondé sur la méthode des moments généralisée.

A la lumière de ces résultats, il est clair qu'au total les modèles non-linéaires sont nettement en avance, quel que soit le test statistique utilisé, par rapport à leurs homologues linéaires, même si au niveau des séries individuelles, le contraire peut se produire. Par exemple, au niveau de la production industrielle et des indices boursiers, notre test $J_{cc}(2)$ et le test DQ_{cc} d'Engle and Manganelli (2004) classent, respectivement, les modèles linéaires en premiers. On conclut donc qu'en termes d'intervalles de prévision et dans le cadre de cette étude, les modèles non-linéaires sont meilleurs que les modèles linéaires.

Evaluation des densités de prévision : Les résultats de l'évaluation des densités de prévision sont donnés dans la table 4.20. Les nombres représentent le nombre de fois où les densités de prévision issues des modèles RW (marche aléatoire), AR, SETAR et MS-AR ont été validées par le test LR de Berkowitz (2001) ainsi que par notre test $J_{norm}(1)$ fondé sur la méthode des moments généralisée.

TABLE 4.19 – Evaluation des intervalles de prévision

Prod. industrielle	RW	AR	SETAR	MS-AR
LR _{cc}	18	17	28	21
DQ _{cc}	20	24	29	21
J _{cc} (2)	24	24	23	23
Taux de chômage				
LR _{cc}	21	23	19	24
DQ _{cc}	21	17	21	19
J _{cc} (2)	18	19	22	21
Indices boursiers				
LR _{cc}	20	19	25	27
DQ _{cc}	21	22	21	18
J _{cc} (2)	22	18	25	29
Taux de change				
LR _{cc}	20	22	26	26
DQ _{cc}	19	17	20	23
J _{cc} (2)	24	22	19	24
Total				
LR _{cc}	79	81	98	98
DQ _{cc}	81	80	91	81
J _{cc} (2)	88	83	89	97

Note : Les nombres représentent le nombre de fois où les intervalles de prévision issus des modèles RW (marche aléatoire), AR, SETAR et MS-AR ont été validés par le test LR_{cc} de Christoffersen (1998), le test DQ_{cc} d'Engle and Manganelli (2004) ainsi que par notre test J_{cc}(2) fondé sur la méthode des moments généralisée.

A la lecture de ces résultats, on note que le modèle MS-AR est classé en premier et le modèle AR en dernier, les modèles RW et SETAR occupent des places intermédiaires selon le test statistique. En effet, le test LR de Berkowitz (2001) favorise le modèle SETAR tandis que notre test J_{norm}(1) est plutôt en faveur de la marche aléatoire. Dans tous les cas, ces résultats corroborent les résultats précédents de l'évaluation des intervalles de prévision et confortent ainsi l'idée que les modèles non-linéaires sont le plus adaptés à la prévision de l'incertitude autour des prévisions ponctuelles.

TABLE 4.20 – Evaluation des densités de prévision

Prod. industrielle	RW	AR	SETAR	MS-AR
LR	23	21	22	28
$J_{norm}(1)$	20	17	18	29
Taux de chômage				
LR	18	18	20	23
$J_{norm}(1)$	20	19	19	23
Indices boursiers				
LR	17	23	20	22
$J_{norm}(1)$	18	17	20	28
Taux de change				
LR	24	17	23	22
$J_{norm}(1)$	24	18	18	19
Total				
LR	82	79	85	95
$J_{norm}(1)$	82	71	75	99

Note : Les nombres représentent le nombre de fois où les densités de prévision issues des modèles RW (marche aléatoire), AR, SETAR et MS-AR ont été validées par le test LR de Berkowitz (2001) ainsi que par notre test $J_{norm}(1)$ fondé sur la méthode des moments généralisée.

4.6 Conclusion

Nous avons, dans ce dernier chapitre, étudié les performances des modèles non-linéaires à changement de régimes (SETAR et MS-AR) en matière de prévision économique et nous les avons comparé à celles d'un simple modèle linéaire AR et d'une marche aléatoire RW. L'étude s'est basée sur des données économiques et financières réelles (Indices de production industrielle, taux de chômage, indices boursiers et taux de change) de six pays de l'OCDE (Allemagne, Canada, France, Grande-Bretagne, Japon et Etats-Unis d'Amérique). Après la sélection et l'ajustement des modèles sur la première partie de l'échantillon, nous avons calculé des prévisions ponctuelles, par intervalles et par densités à des horizons allant de 1 à 5 sur la dernière partie et nous les avons évalué et comparé à l'aide de tests statistiques de la littérature et de nos tests d'évaluation des intervalles et des densités de prévision fondés sur la méthode des moments généralisée.

Les résultats ont montré qu'en termes de prévisions ponctuelles, les modèles linéaires et les modèles non-linéaires présentent des qualités prédictives similaires avec un léger avantage en faveur des modèles linéaires, notamment la marche aléatoire. En revanche, en termes d'intervalles et de densités de prévision, les modèles non-linéaires arrivent nettement en tête du classement. Ils sont donc les mieux adaptés à prévoir l'incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle.

Conclusion générale

Le premier chapitre de cette thèse qui porte sur les modèles non-linéaires et la prévision était une revue des différents modèles à changement de régimes les plus rencontrés dans la pratique. Plus précisément, les différentes représentations ont été présentées et classées selon la nature de la transition entre les régimes et selon l'observabilité de la variable de transition. Ces modèles sont de plus en plus utilisés dans les applications empiriques notamment à des fins de prévision. La construction et l'évaluation de celle-ci ont également été revues. Avec cette nouvelle forme de modélisation, les intervalles et les densités de prévision ont du sens et sont exploitables dans la prise de décision. En effet, contrairement au cadre linéaire où elles sont symétriques et continues (respectivement, unimodales), ces formes de prévision fournissent une information supplémentaire sur le niveau d'incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle. Les tests d'évaluation correspondants ont également été présentés. A l'issue de cette revue de littérature, on s'est aperçu que malgré l'utilisation croissante des modèles à changement de régimes, leur apport en termes de prévision relativement à la modélisation linéaire standard ne fait pas l'unanimité des chercheurs car si l'on se réfère à la simple prévision ponctuelle, les modèles linéaires sont assez satisfaisants. Par contre, si le critère de comparaison est l'intervalle ou la densité de prévision, les modèles non-linéaires peuvent s'avérer très utiles dans la mesure où ces dernières formes de prévision sortent du cadre habituel (intervalles de prévision symétriques et continus et densités de prévision symétriques et unimodales) et fournissent au décideur économique plus d'information. Cependant, les tests d'évaluation des prévisions, notamment par intervalle et par densité ne sont pas assez nombreux et souffrent parfois de problèmes de taille et/ou de puissance.

Ensuite, dans le chapitre 2, nous avons proposé une nouvelle approche d'évaluation des intervalles de prévision basée sur la méthode des moments généralisée. L'idée est que si le modèle ayant servi au calcul des intervalles de prévision est correctement spécifié, alors la somme des violations doit être distribuée selon une loi Binomiale. Nous avons donc adapté le cadre GMM proposé par Bontemps and Meddahi (2012) afin de tester cette

hypothèse de distribution qui correspond à l'hypothèse nulle de validité des intervalles de prévision. Plus précisément, nous avons transformé la série des violations en une série de sommes de violations définie pour H blocs, chacun de taille N . Sous l'hypothèse nulle de validité, de telles sommes sont distribuées selon une loi Binomiale $B(N, \alpha)$, α étant le taux de couverture considéré. Des simulations Monte Carlo ont montré que cette nouvelle approche présente de bonnes propriétés en termes de puissance, surtout pour des petits échantillons et pour un taux de couverture 0.95. L'application de nos tests, ainsi que ceux de Christoffersen (1998), à l'évaluation des intervalles de prévision des rendements journaliers des indices boursiers SP 500 et Nikkei 225 a confirmé la bonne performance de nos tests.

Puis, comme dans le chapitre 2, nous avons proposé dans le chapitre 3 une nouvelle approche d'évaluation des densités de prévision basée également sur la méthode des moments généralisée. Les tests d'évaluation des densités de prévision correctement spécifiées reposent sur la notion de p.i.t (Probability Integral Transform) qui remonte à Rosenblatt (1952). En effet, le modèle ayant servi au calcul des densités de prévision est correctement spécifié si les p.i.t associés sont distribués selon une loi uniforme discrète sur l'intervalle $[0, 1]$ (Diebold *et al.*, 1998). Une façon alternative de tester la validité de ce modèle est de considérer les transformées de Berkowitz (2001). Sous l'hypothèse nulle que le modèle ayant servi au calcul de la densité de prévision est correctement spécifié, ces nouvelles transformées suivent une loi normale centrée et réduite (Berkowitz, 2001). Nous avons donc adapté le cadre GMM proposé par Bontemps and Meddahi (2012) afin de tester ces deux hypothèses de distributions qui correspondent à l'hypothèse nulle de validité des densités de prévision. Plus précisément, nous avons construit des J-statistiques à partir des polynômes orthonormaux associés aux deux lois en question, à savoir, les polynômes de Legendre et les polynômes d'Hermite respectivement. Ces polynômes étant d'espérances nulles et de matrices de variance-covariance identiques à la matrice identité sont, en effet, pratiques dans l'écriture des conditions de moment sur lesquelles reposent les J-statistiques de la méthode des moments généralisée. Des exercices Monte Carlo ont mis en évidence les bonnes propriétés à distance finie de cette nouvelle approche et son application à l'évaluation des densités de prévision des rendements du taux de change de l'euro contre certaines devises a montré que les résultats de nos tests peuvent être nettement différents des conclusions du test LR de Berkowitz (2001).

Enfin, dans le chapitre 4, nous avons étudié les performances des modèles non-linéaires à changement de régimes (SETAR et MS-AR) en matière de prévision économique et nous les avons comparé à celles d'un simple modèle linéaire AR et d'une marche aléatoire RW. L'étude s'est basée sur des données économiques et financières réelles (Indices

de production industrielle, taux de chômage, indices boursiers et taux de change) de six pays de l'OCDE (Allemagne, Canada, France, Grande-Bretagne, Japon et Etats-Unis d'Amérique). Après la sélection et l'ajustement des modèles sur la première partie de l'échantillon, nous avons calculé des prévisions ponctuelles, par intervalles et par densités à des horizons allant de 1 à 5 sur la dernière partie et nous les avons évalué et comparé à l'aide de tests statistiques de la littérature et de nos tests d'évaluation des intervalles et des densités de prévision fondés sur la méthode des moments généralisée. Les résultats ont montré qu'en termes de prévisions ponctuelles, les modèles linéaires et les modèles non-linéaires présentent des qualités prédictives similaires avec un léger avantage en faveur des modèles linéaires, notamment la marche aléatoire. En revanche, en termes d'intervalles et de densités de prévision, les modèles non-linéaires arrivent nettement en tête du classement. Ils sont donc les mieux adaptés à prévoir l'incertitude qui accompagne la prévision ponctuelle.

Ainsi, la contribution de cette thèse à la recherche sur les modèles non-linéaires et la prévision est double : méthodologique et empirique. Méthodologique, car l'utilisation de polynômes orthonormaux dans la construction de tests d'évaluation des prévisions par intervalle et par densité nous a montré à quel point il est possible d'améliorer la puissance des tests sur des échantillons de petite taille en variant simplement le nombre de polynômes. De plus, leur propriété d'orthonormalité évite l'estimation de la matrice des poids optimaux ce qui rend les tests faciles à manipuler et réduit en même temps l'effet de l'incertitude des paramètres. Empirique, car l'utilisation simultanée de données relatives à différents pays et à différentes variables économiques avec différentes fréquences d'observation permet d'éliminer les effets « pays » et les effets « variables économiques » par exemple pour ne garder que l'effet de la non-linéarité sur la qualité de la prévision économique.

Bibliographie

- ABRAHAM, B. and LEDOLTER, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*. Wiley series in probability and mathematical statistics : Applied probability and statistics, Wiley.
- AKAIKE, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **19**, 716–723.
- ANDREWS, D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, **59** (3), 817–58.
- BAI, J. (2003). Testing parametric conditional distributions of dynamic models. *The Review of Economics and Statistics*, **85** (3), 531–549.
- BAILLIE, R. T. and BOLLERSLEV, T. (1992). Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. *Journal of Econometrics*, **52**, 91–113.
- BAO, Y. and LEE, T.-H. (2004). A test for density forecast comparison with applications to risk management. *Society*, **1** (909), 1–44.
- BERKOWITZ, J. (2001). Testing density forecasts, with applications to risk management. *Journal of Business and Economic Statistics*, **19** (4), 465–474.
- , CHRISTOFFERSEN, P. and PELLETIER, D. (2011). Evaluating value-at-risk models with desk-level data. *Management Science*, **57** (12), 2213–2227.
- BOERO, G. and MARROCU, E. (2002). The performance of non-linear exchange rate models : A forecasting comparison. *Journal of Forecasting*, **21** (7), 513–542.
- BONTEMPS, C. and MEDDAHI, N. (2005). Testing normality : A gmm approach. *Journal of Econometrics*, **124** (1), 149–186.

- and — (2012). Testing distributional assumptions : A gmm approach. *Journal of Applied Econometrics*, **27** (6), 978–1012.
- BOWERMAN, B. and O’CONNELL, R. (1987). *Time Series Forecasting : Unified Concepts and Computer Implementation*. Duxbury Press.
- BOX, G. E. P. and JENKINS, G. M. (1970). *Time Series Analysis ; Forecasting and Control*. Holden-Day San Francisco,.
- CAMPBELL, J. Y., LO, A. W., MACKINLAY, A. C. and LO, A. Y. (1996). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- CAMPBELL, S. D. (2005). *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures*. Finance and Economics Discussion Series 2005-21, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
- CANDELON, B., COLLETAZ, G., HURLIN, C. and TOKPAVI, S. (2011). Backtesting value-at-risk : A gmm duration-based test. *Journal of Financial Econometrics*, **9** (2), 314–343.
- CHAN, K. S. and TONG, H. (1986). On estimating thresholds in autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **7** (3), 179–190.
- CHAPPELL, D., PADMORE, J., MISTRY, P. and ELLIS, C. (1996). A threshold model for the french franc/deutschmark exchange rate. *Journal of Forecasting*, **15**, 155–164.
- CHATFIELD, C. (1993). Calculating interval forecasts. *Journal of Business and Economics Statistics*, **11**, 121–135.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, **39** (4), 841–862.
- and DIEBOLD, F. X. (2000). How relevant is volatility forecasting for financial risk management ? *The Review of Economics and Statistics*, **82** (1), 12–22.
- and PELLETIER, D. (2004). Backtesting value-at-risk : A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, **2** (1), 84–108.
- CLEMENTS, M. P., FRANCES, P. H. and SWANSON, N. R. (2004). Forecasting economic and financial time-series with non-linear models. *International Journal of Forecasting*, **20** (2), 169–183.

- and KROLZIG, H.-M. (1998). A comparison of the forecast performance of markov-switching and threshold autoregressive models of us gnp. *Econometrics Journal*, **1**, C47–C75.
- and SMITH, J. (2000). Evaluating the forecast densities of linear and nonlinear models : Applications to output growth and unemployment. *Journal of Forecasting*, **19**, 255–276.
- and — (2001). Evaluating forecasts from setar models of exchange rates. *Journal of International Money and Finance*, **20** (1), 133–148.
- and TAYLOR, N. (2003). Evaluating interval forecasts of high-frequency financial data. *Journal of Applied Econometrics*, **18** (4), 445–456.
- DAVID, F. N. (1947). A power function for tests of randomness in a sequence of alternatives. *Biometrika*, **34** (3/4), 335–339.
- DIEBOLD, F. X., GUNTHER, T. A. and TAY, A. S. (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review*, **39** (4), 863–83.
- and MARIANO, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, **13** (3), 253–63.
- DUFOUR, J.-M. (2006). Monte carlo tests with nuisance parameters : A general approach to finite-sample inference and nonstandard asymptotics. *Journal of Econometrics*, **133** (2), 443–477.
- DUMITRESCU, E.-I., HURLIN, C. and MADKOUR, J. (2011). Testing interval forecasts : A gmm-based approach. *Journal of Forecasting*.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, **50** (4), 987–1007.
- and MANGANELLI, S. (2004). Caviar : Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, **22** (4), 367–381.
- FRANSES, P. and DIJK, D. (2002). *Nonlinear time series models in empirical finance*. Cambridge [u.a.] : Cambridge Univ. Press.
- GALLANT, A. R. and NYCHKA, D. W. (1987). Semi-nonparametric maximum likelihood estimation. *Econometrica*, **55** (2), 363–90.

- GRANGER, C. W. J. (1996). Can we improve the perceived quality of economic forecasts? *Journal of Applied Econometrics*, **11** (5), 455–473.
- and NEWBOLD, P. (1986). *Forecasting Economic Time Series*. Economic theory, econometrics, and mathematical economics, Academic Press.
- and TERÄSVIRTA, T. (1993). *Modelling Non-Linear Economic Relationships*. Oxford University Press.
- , WHITE, H. and KAMSTRA, M. (1989). Interval forecasting : An analysis based upon arch-quantile estimators. *Journal of Econometrics*, **40** (1), 87–96.
- HAAS, M. (2005). Improved duration-based backtesting of value-at-risk. *Journal of Risk*, **8** (2), 17–38.
- HAMILTON, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, **57** (2), 357–84.
- (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics*, **45** (1-2), 39–70.
- (1994). *Time Series Analysis*. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- HANSEN, B. E. (1997). Inference in tar models. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, **2** (1), 1.
- (2000). Sample splitting and threshold estimation. *Econometrica*, **68** (3), 575–604.
- HANSEN, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, **50** (4), 1029–54.
- HARVEY, A. (1991). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press.
- HARVEY, D., LEYBOURNE, S. and NEWBOLD, P. (1997). Testing the equality of prediction mean squared errors. *International Journal of Forecasting*, **13** (2), 281–291.
- HARVEY, D. I. and LEYBOURNE, S. J. (2007). Testing for time series linearity. *Econometrics Journal*, **10** (1), 149–165.
- HOEL, P. G. (1954). A test for markoff chains. *Biometrika*, **41** (3/4), 430–433.

- HYNDMAN, R. J. (1995). Highest-density forecast regions for nonlinear and non-normal time series models. *Journal of Forecasting*, **14** (5), 431–441.
- KHMALADZE, E. V. (1981). Martingale approach in the theory of goodness-of-fit tests. *Theory of Probability and Its Applications*, **26**, 240–257.
- KIEFER, N. M. (1988). Economic duration data and hazard functions. *Journal of Economic Literature*, **26** (2), 646–679.
- KIM, C.-J. (1993). Unobserved-component time series models with markov-switching heteroscedasticity : Changes in regime and the link between inflation rates and inflation uncertainty. *Journal of Business & Economic Statistics*, **11** (3), 341–49.
- KRÄGER, H. and KUGLER, P. (1993). Non-linearities in foreign exchange markets : A different perspective. *Journal of International Money and Finance*, **12** (2), 195–208.
- KULLBACK, S. and LEIBLER, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, **22** (1), 79–86.
- KUPIEC, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives*, **3**, 73–84.
- LJUNG, G. M. and BOX, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, **65** (2), 297–303.
- LOPEZ, J. A. (1999). Regulatory evaluation of value-at-risk models. *Journal of Risk*, **1**, 37–64.
- MANGANELLI, S. and ENGLE, R. F. (2001). *Value at Risk Models in Finance*. Working Paper Series 075, European Central Bank.
- MARCELLINO, M. (2002). *Forecasting EMU Macroeconomic Variables*. CEPR Discussion Papers 3529, C.E.P.R. Discussion Papers.
- MCNEES, S. (1995). *Forecast Uncertainty : Can it be Measured?* Discussion paper, Federal Reserve Bank of New York.
- MEESE, R. A. and ROGOFF, K. (1983). Empirical exchange rate models of the seventies : Do they fit out of sample ? *Journal of International Economics*, **14** (1-2), 3–24.
- NAKAGAWA, T. and OSAKI, S. (1975). The discrete weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **24**, 300–301.

- NEWKEY, W. K. and WEST, K. D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, **55** (3), 703–08.
- PATTON, A. (2002). *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*. University of California, San Diego.
- PEEL, D. and SPEIGHT, A. (1994). Testing for nonlinear dependence in inter-war exchange rates. *Review of World Economics (Weltwirtschaftliches Archiv)*, **130** (2), 391–417.
- PEMBERTON, J. (1987). Exact least squares multi-step prediction from nonlinear autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **8** (4), 443–448.
- ROSENBLATT, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, **23** (3), 470–472.
- SMITH, A., NAIK, P. A. and TSAI, C.-L. (2006). Markov-switching model selection using kullback-leibler divergence. *Journal of Econometrics*, **134** (2), 553–577.
- STOCK, J. and WATSON, M. (1999). *A Comparison of Linear and Nonlinear Univariate Models for Forecasting Macroeconomic Time Series*, in Engle, R.F., White, H. (Eds.), Cointegration, Causality and Forecasting. A Festschrift in Honour of Clive W.J. Granger, Oxford University Press, Oxford, pp. 1–44.
- TAY, A. S. and WALLIS, K. F. (2000). Density forecasting : A survey. *Journal of Forecasting*, **19** (4), 235–254.
- TERÄSVIRTA, T. (1994). Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models. *Journal of the American Statistical Association*, **89** (425), 208–218.
- TERÄSVIRTA, T. (1996). *Modelling Economic Relationships with Smooth Transition Regressions*. Working paper series in economics and finance, Stockholm School of Economics.
- TJØSTHEIM, D. (1986). Some doubly stochastic time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **7** (1), 51–72.
- TONG, H. (1978). *On a Threshold Model*. C. H. Chen (ed.), Pattern recognition and Signal Processing, Sijhoff & Noordhoff, Amsterdam.

- (1993). *Non-Linear Time Series : A Dynamical System Approach (Oxford Statistical Science Series, 6)*. Oxford University Press (UK).
- and LIM, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **42** (3), 245–292.
- VAN DIJK, D., FRANCES, P. H., CLEMENTS, M. P. and SMITH, J. (2003). On setar non-linearity and forecasting. *Journal of Forecasting*, **22** (5), 359–375.
- WALD, A. and WOLFOWITZ, J. (1940). On a test whether two samples are from the same population. *The Annals of Mathematical Statistics*, **11** (2), 147–162.
- WALLIS, K. (2003). Chi-squared tests of interval and density forecasts, and the bank of england’s fan charts. *International Journal of Forecasting*, **19** (2), 165–175.
- WOLD, H. (1954). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Stockholm, Sweden : Almqvist and Wiksell, 2nd edn.
- WONG, C. S. and LI, W. K. (1998). A note on the corrected akaike information criterion for threshold autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **19** (1), 113–124.
- YATES, F. (1984). Tests of significance for 2×2 contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, **147** (3), 426–463.

Annexes

Annexe A

Nous noterons $\phi_j = (\phi_0^j, \phi_1^j, \dots, \phi_p^j)'$ le vecteur des paramètres autorégressifs et $Z_t = (1, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})'$ le vecteur des variables explicatives et nous supposons que les termes d'erreur ϵ_t^j sont homoscédastiques, *i.e.* $\sigma_j = \sigma$ (avec $j \in \{1, 2\}$), et nous les désignerons simplement par ϵ_t . Pour simplifier les notations, on supposera que les régimes ont le même ordre auto-régressif, *i.e.* $p = p_1 = p_2$.

A.1 Estimation des paramètres des modèles TAR et SETAR

Ecrivons le modèle TAR(2; p, p) sous une forme vectorielle :

$$y_t = \phi_1' Z_t I(x_t \leq c) + \phi_2' Z_t I(x_t > c) + \epsilon_t, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.1})$$

Notons que lorsque le seuil c est fixé, ce modèle devient linéaire et peut être estimé, conditionnellement à la valeur de c , par la méthode des moindres carrés ordinaires. L'expression de l'estimateur est donnée par :

$$\hat{\phi}(c) = \left(\sum_{t=1}^T Z_t(c) Z_t(c)' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T Z_t(c) y_t \right), \quad \forall c \in C \quad (\text{A.2})$$

La variance des résidus $\hat{\epsilon}_t(c) = y_t - \hat{\phi}(c)' Z_t(c)$ est estimée par :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}}^2(c) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t(c)^2, \quad \forall c \in C \quad (\text{A.3})$$

Enfin, l'estimation par moindres carrés du seuil c est donnée par la minimisation de cette variance sur un ensemble C de seuils¹ choisis de telle sorte que chaque régime contienne suffisamment d'observations pour pouvoir estimer les paramètres autorégressifs de façon convergente :

$$\hat{c} = \arg \min_{c \in C} \hat{\sigma}_\epsilon^2(c) \quad (\text{A.5})$$

L'estimation finale de ϕ et σ_ϵ^2 est obtenue en substituant c par son estimation $\hat{c}$ dans leurs expressions respectives (A.2) et (A.3). Cette méthode d'estimation est une dérivée des moindres carrés ordinaires, elle est connue sous l'appellation *moindres carrés ordinaires séquentiels conditionnels* du fait qu'il faut effectuer une série d'estimations, une pour chaque valeur du seuil c , et ne garder que celle qui minimise la variance des résidus². Dans le cas d'un modèle SETAR(2; p, p), il faut également estimer la valeur du retard d de la variable de transition y_{t-d} . La démarche est similaire à celle du choix du seuil c ; il suffit de se donner un ensemble $D = \{1, 2, \dots, d_{\max}\}$ de valeurs plausibles de d , et de minimiser la variance des résidus sur une grille de couples (c, d) :

$$(\hat{c}, \hat{d}) = \arg \min_{c, d} \hat{\sigma}_\epsilon^2(c, d), \quad \forall c \in C, \quad \forall d \in D \quad (\text{A.6})$$

A.2 Estimation des paramètres du modèle STAR

Comme précédemment, écrivons le modèle STAR(2; p, p) sous une forme vectorielle :

$$y_t = \phi_1' Z_t [1 - G(q_t; \gamma, c)] + \phi_2' Z_t [G(q_t; \gamma, c)] + \epsilon_t, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.7})$$

où $G(\cdot)$ est la fonction de transition et γ son paramètre de lissage. Notons $\theta \equiv (\phi_1', \phi_2', \gamma, c)'$ le vecteur composé de l'ensemble des paramètres à estimer et $F(\cdot)$ le *skeleton* du modèle :

$$F(Z_t; \theta) \equiv \phi_1' Z_t [1 - G(q_t; \gamma, c)] + \phi_2' Z_t [G(q_t; \gamma, c)], \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.8})$$

1. Chaque régime doit contenir une proportion prédéfinie δ des observations. Ainsi, l'ensemble C peut s'écrire :

$$C = \{c | x_{([\delta T]) } \leq c \leq x_{([(1-\delta) T]) } \} \quad (\text{A.4})$$

avec $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_T$ sont les statistiques d'ordre de la variable de transition x_t et $[.]$ est le symbole de la partie entière.

2. Pour plus de détails sur l'ajustement des modèles à seuil, consulter Tong (1993) et Hansen (2000).

Les paramètres du modèle (A.7) sont estimés³ par moindres carrés non-linéaires comme suit :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^T [y_t - F(Z_t; \theta)]^2 \quad (\text{A.9})$$

L'estimation du vecteur de paramètres θ s'obtient aisément par des algorithmes d'optimisation non-linéaire qui, pour converger et éviter les optima locaux, doivent partir d'une valeur initiale optimale. Pour choisir une condition initiale raisonnable, notons que pour des valeurs données du paramètre de lissage γ et du seuil c , le modèle STAR est linéaire par rapport aux paramètres autorégressifs qu'ils peuvent être estimés, dans ce cas, par moindres carrés ordinaires conditionnellement aux valeurs de γ et c :

$$\hat{\phi}(\gamma, c) = \left(\sum_{t=1}^T Z_t(\gamma, c) Z_t(\gamma, c)' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T Z_t(\gamma, c) y_t \right), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall c \in C \quad (\text{A.10})$$

Comme dans le cas des modèles TAR et SETAR, sur toute une grille de valeurs, seul le couple (γ, c) minimisant la variance des résidus sera maintenu. C'est cette dernière estimation qui sera retenue comme valeur initiale de l'optimisation.

A.3 Estimation des paramètres du modèle MS-AR

Rappelons l'écriture analytique d'un modèle à changement de régimes markovien MS-AR(2; p, p) :

$$y_t = \phi_0^j + \phi_1^j y_{t-1} + \phi_2^j y_{t-2} + \dots + \phi_p^j y_{t-p} + \epsilon_t \quad (\text{A.11})$$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(S_t = j | S_{t-1} = i), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T, \quad j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.12})$$

Notons le vecteur des paramètres à estimer $\theta \equiv [\phi^{1'}, \phi^{2'}, p_{11}, p_{22}, \sigma_\epsilon^2]'$ avec $\phi^j \equiv (\phi_0^j, \phi_1^j, \dots, \phi_p^j)$ et $j \in \{1, 2\}$. Sous l'hypothèse de normalité des innovations $N(0, \sigma_\epsilon^2)$, la fonction de densité de y_t conditionnellement à l'état de la nature $S_t = j, j \in \{1, 2\}$, à l'ensemble d'informations Ω_{t-1} et au vecteur de paramètres θ s'écrit :

$$f(y_t | S_t = j, \Omega_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sigma_\epsilon \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \phi_j' Z_t)^2}{2\sigma_\epsilon^2} \right\}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T, \quad j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.13})$$

La particularité des modèles à changement de régimes à variable de transition inobservable est que l'état de la nature S_t n'est pas connu. Il en résulte que la contribution à log-

3. Pour une lecture plus détaillée sur l'estimation des modèles STAR, se reporter à Teräsvirta (1994, 1996).

vraisemblance conditionnelle de l'observation y_t , notée $l_t(\theta) \equiv \log f(y_t|\Omega_{t-1}, S_t = j; \theta)$, se calcule à partir de la densité de y_t conditionnellement à l'ensemble d'informations Ω_{t-1} et au vecteur de paramètres θ uniquement, *i.e.* :

$$f(y_t|\Omega_{t-1}; \theta) = \sum_{j=1}^2 f(y_t|S_t = j, \Omega_{t-1}; \theta) \cdot \mathbb{P}(S_t = j|\Omega_{t-1}; \theta), \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.14})$$

L'estimation de θ par maximum de vraisemblance requiert l'estimation de $\mathbb{P}(S_t = j|\Omega_{t-1}; \theta)$, *i.e.* la probabilité d'occurrence de chaque état de la nature à tout instant étant donné leurs réalisations passées et le vecteur de paramètres θ . Ceci fait appel à trois sortes de probabilités conditionnelles suivant le contenu de l'ensemble d'informations disponible en t , à savoir : la probabilité prévue, la probabilité filtrée et la probabilité lissée.

A.3.1 La probabilité prévue

C'est la probabilité que l'état de la nature $S_t = j$ (avec $j \in \{1, 2\}$) se réalise étant donné un ensemble d'informations, noté Ω_{t-1} , disponible à l'instant t à l'exception de celle en t , elle est notée $\hat{p}_{t|t-1}$. Dans ce cas, la prévision optimale de la probabilité de l'état qui se réalisera en t est simplement la probabilité de transition de la chaîne de Markov, formellement :

$$\hat{p}_{t|t-1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbb{P}(S_t = 1|\Omega_{t-1}; \theta) \\ \mathbb{P}(S_t = 2|\Omega_{t-1}; \theta) \end{bmatrix} = \mathbb{P} \cdot p_{t-1}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.15})$$

où la matrice de transition $\mathbb{P}$ est définie comme dans (1.11) et

$$p_{t-1} = \begin{cases} (1, 0)' & \text{si } S_{t-1} = 1 \\ (0, 1)' & \text{si } S_{t-1} = 2 \end{cases}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.16})$$

Comme l'état de la nature est inobservable, la probabilité p_{t-1} est inconnue et sera remplacée par son estimation dite *probabilité filtrée*.

A.3.2 La probabilité filtrée

C'est la probabilité que l'état de la nature $S_t = j$ (avec $j \in \{1, 2\}$) se réalise étant donné un ensemble d'informations Ω_t disponible à l'instant t , y compris celle en t , elle est notée $\hat{p}_{t|t}$. La probabilité prévue et la probabilité filtrée optimales sont calculées en itérant les deux équations suivantes en se donnant une condition initiale $\hat{p}_{1|0}$ et des valeurs des

paramètres⁴ θ :

$$\hat{p}_{t|t} = \frac{\hat{p}_{t|t-1} \odot \int_t}{e'(\hat{p}_{t|t-1} \odot \int_t)}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{p}_{t+1|t} = \mathbb{P} \cdot \hat{p}_{t|t}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.18})$$

avec $\odot$ le symbole de la multiplication élément-par-élément, $\int_t$ le vecteur des densités conditionnelles (A.13) et e un vecteur de 1.

A.3.3 La probabilité lissée

C'est la probabilité que l'état de la nature $S_t = j$ (avec $j \in \{1, 2\}$) se réalise étant donné un ensemble d'informations noté Ω_T disponible à l'instant t et contenant des informations sur l'ensemble de l'échantillon jusqu'à l'instant T , elle est notée $\hat{p}_{t|T}$. La probabilité lissée en t est calculée à partir de $\hat{p}_{t|t}$ et $\hat{p}_{t+1|t}$ comme suit :

$$\hat{p}_{t|T} = \hat{p}_{t|t} \odot \left[\mathbb{P}'(\hat{p}_{t+1|T} \div \hat{p}_{t+1|t}) \right], \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{A.19})$$

avec $\div$ la division matricielle élément-par-élément. Cet algorithme développé par Kim (1993) s'exécute à rebours en partant de $\hat{p}_{T|T}$ de l'expression (A.17) et en appliquant (A.19) pour $t = T-1, T-2, \dots, 1$.

Retournons à présent à l'estimation des paramètres proprement dite. Hamilton (1990) montre que l'estimation par maximum de vraisemblance des probabilités de transition est donnée par :

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^T \mathbb{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \Omega_T; \hat{\theta})}{\sum_{t=2}^T \mathbb{P}(S_{t-1} = i | \Omega_T; \hat{\theta})}, \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.20})$$

avec $\hat{\theta}$ l'estimateur par maximum de vraisemblance de θ . Cette estimation vérifie les conditions du premier ordre suivantes :

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\phi}'_j Z_t) Z_t \mathbb{P}(S_t = j | \Omega_T; \hat{\theta}) = 0, \quad j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.21})$$

et

$$\hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^2 (y_t - \hat{\phi}'_j Z_t)^2 \mathbb{P}(S_t = j | \Omega_T; \hat{\theta}) \quad (\text{A.22})$$

4. Pour bien comprendre le fonctionnement de cet algorithme, se reporter à Hamilton (1994).

Notons que (A.21) implique que $\hat{\phi}_j'$ correspond à l'estimation par moindres carrés pondérés des paramètres de la régression de y_t sur Z_t où les poids sont déterminés par la racine carrée des probabilités lissées du régime j . Cette estimation est donnée par :

$$\hat{\phi}_j = \left(\sum_{t=1}^T Z_t(j) Z_t(j)' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T Z_t(j) y_t(j) \right), \quad j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.23})$$

avec

$$y_t(j) = y_t \sqrt{\mathbb{P}(S_t = j | \Omega_T; \hat{\theta})}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.24})$$

$$Z_t(j) = Z_t \sqrt{\mathbb{P}(S_t = j | \Omega_T; \hat{\theta})}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.25})$$

L'estimation par maximum de vraisemblance de la variance des résidus $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ est donnée par (A.22) comme la moyenne des carrés des résidus issus des deux régressions pondérées.

Enfin, notons que si l'on suppose que les erreurs ϵ_t sont gaussiennes, l'estimation des paramètres des modèles à variable de transition observable est équivalente à une estimation par maximum de vraisemblance. Cette hypothèse étant déjà faite pour les modèles à variable de transition inobservable, Franses and Dijk (2002) notent que la procédure d'estimation conduit quand même à une estimation par maximum de vraisemblance puisque la log-vraisemblance augmente à chaque itération.

Annexe B

B.1 J-statistiques

Soit $K^{(N,\alpha)} = (K_1^{(N,\alpha)}, K_2^{(N,\alpha)}, \dots, K_m^{(N,\alpha)})$ le m -vecteur des polynômes orthonormaux de Krawtchouk associés à la loi Binomiale $B(N, \alpha)$. Sous l'hypothèse de couverture conditionnelle, la J-statistique est définie par :

$$J_{cc}(m) = \left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{h=1}^H K^{(N,\alpha)}(y_h) \right)' \Sigma^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{h=1}^H K^{(N,\alpha)}(y_h) \right) \quad (\text{B.1})$$

où Σ désigne la matrice de variance-covariance de long terme du m -vecteur $K^{(N,\alpha)}$. Comme cette matrice est par définition égale à la matrice identité, nous avons :

$$J_{cc}(m) = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{h=1}^H K_j^{(N,\alpha)}(y_h) \right)^2 \quad (\text{B.2})$$

Par conséquent, la J-statistique associée à l'hypothèse de couverture non conditionnelle, obtenue en ne considérant que le premier polynôme orthonormal $K_1^{(N,\alpha)}$, est simplement :

$$J_{uc}(m) = J_{cc}(1) = \frac{1}{H} \left(\sum_{h=1}^H K_1^{(N,\alpha)}(y_h) \right)^2 \quad (\text{B.3})$$

Enfin, la J-statistique associée à l'hypothèse d'indépendance correspond simplement à celle associée à l'hypothèse de couverture conditionnelle dans laquelle la probabilité de succès n'est pas nécessairement fixée au taux α :

$$J_{ind}(m) = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{h=1}^H K_j^{(N,\beta)}(y_h) \right)^2, \quad \forall \beta \in [0, 1] \quad (\text{B.4})$$

B.2 Procédure Monte Carlo de Dufour (2006)

La procédure de Dufour (2006), dans le cas d'une statistique de test T continue, se déroule en deux étapes :

1. Générer N réalisations indépendantes de la statistique de test T_i , $i = 1, 2, \dots, N$. La statistique de test obtenue avec l'échantillon d'origine est notée T_0 .
2. Ordonner les statistiques de test T_i , $i = 0, 1, \dots, N$ dans un ordre non-décroissant et calculer la *p-value* Monte Carlo $\hat{p}_N(T_0)$ comme suit :

$$\hat{p}_N(T_0) = \frac{N\hat{G}_N(T_0) + 1}{N + 1} \quad (\text{B.5})$$

avec

$$\hat{G}_N(T_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}(T_i > T_0) \quad (\text{B.6})$$

et $\mathbb{I}(\cdot)$ est la fonction indicatrice valant 1 si son argument est vrai et 0 sinon.

Dans le cas d'une statistique de test discrète, il y a une probabilité non-nulle d'obtenir des valeurs simulées T_i , $i = 1, 2, \dots, N$ égales à la valeur d'origine T_0 . Dans ce cas, on associe à toutes les valeurs T_i , $i = 0, 1, \dots, N$ des poids indépendants U_i , $i = 0, 1, \dots, N$ tirés dans une loi uniforme $U[0, 1]$. On obtient la *p-value* Monte Carlo en remplaçant $\hat{G}_N(T_0)$ dans (B.5) par l'expression suivante :

$$\tilde{G}_N(T_0) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}(T_i \leq T_0) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}(T_i = T_0) \mathbb{I}(U_i \geq U_0) \quad (\text{B.7})$$

avec $\mathbb{I}(\cdot)$ la fonction indicatrice valant 1 si son argument est vrai et 0 dans le cas contraire. On rejette l'hypothèse nulle si la *p-value* Monte Carlo $\hat{p}_N(T_0)$ est inférieure ou égale au niveau de significativité nominal.

Annexe C

C.1 Distribution des transformées de Rosenblatt (1952)

Soit y_t une variable aléatoire de fonction de densité conditionnelle $f_t(y_t|\Omega_{t-1})$ et $p_t(y_t|\Omega_{t-1})$ une autre fonction de densité conditionnelle¹ associée à la variable aléatoire y_t , avec $\Omega_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$. Définissons la transformation probabiliste de Rosenblatt (1952) z_t de la variable aléatoire y_t par rapport à la densité conditionnelle $p_t(y_t|\cdot)$ comme suit :

$$\begin{aligned} z_t &= \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u|\cdot) du, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \\ &= P_t(y_t|\cdot) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Soit $q_t(z_t)$ la fonction de densité de la transformation probabiliste z_t . Supposons que $\partial P_t^{-1}(z_t|\cdot)/\partial z_t$ est continue et non nulle sur le support de y_t . Comme $p_t(y_t|\cdot) = \partial P_t(y_t|\cdot)/\partial y_t$ et $y_t = P_t^{-1}(z_t|\cdot)$, alors le support de z_t est l'intervalle unité $[0, 1]$ et sa fonction de densité est :

$$q_t(z_t) = \left| \frac{\partial P_t^{-1}(z_t|\cdot)}{\partial z_t} \right| f_t(P_t^{-1}(z_t|\cdot)|\cdot) = \frac{f_t(P_t^{-1}(z_t|\cdot)|\cdot)}{p_t(P_t^{-1}(z_t|\cdot)|\cdot)} \quad (\text{C.2})$$

Notons que si $p_t(y_t|\cdot) = f_t(y_t|\cdot)$, alors $q_t(z_t)$ est simplement la densité de la loi uniforme $U_{[0,1]}$.

Considérons à présent l'ensemble de la série $\{z_t\}_{t=1}^T$ quand $p_t(y_t|\cdot) = f_t(y_t|\cdot)$, $\forall t = 1, 2, \dots, T$. La densité jointe de $\{y_t\}_{t=1}^T$ peut être décomposée de la façon suivante :

$$f(y_T, y_{T-1}, \dots, y_1) = f_T(y_T|\Omega_T) f_{T-1}(y_{T-1}|\Omega_{T-1}) \cdots f_1(y_1|\Omega_1) \quad (\text{C.3})$$

1. Afin d'alléger les notations, les fonctions $f_t(y_t|\Omega_{t-1})$ et $p_t(y_t|\Omega_{t-1})$ seront respectivement notées $f_t(y_t|\cdot)$ et $p_t(y_t|\cdot)$.

La densité jointe de $\{z_t\}_{t=1}^T$ s'obtient par changement de variables :

$$q(z_1, z_2, \dots, z_T) = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial z_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_T}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial y_T}{\partial z_T} \end{array} \right| f_T(P_T^{-1}(z_T|\cdot)|\cdot) f_{T-1}(P_{T-1}^{-1}(z_{T-1}|\cdot)|\cdot) \dots f_1(P_1^{-1}(z_1|\cdot)|\cdot) \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \dots \frac{\partial y_T}{\partial z_T} f_T(P_T^{-1}(z_T|\cdot)|\cdot) f_{T-1}(P_{T-1}^{-1}(z_{T-1}|\cdot)|\cdot) \dots f_1(P_1^{-1}(z_1|\cdot)|\cdot) \quad (\text{C.5})$$

Comme la jacobienne de cette transformation est triangulaire inférieure, on a :

$$q(z_1, z_2, \dots, z_T) = \frac{f_T(P_T^{-1}(z_T|\cdot)|\cdot)}{p_T(P_T^{-1}(z_T|\cdot)|\cdot)} \cdot \frac{f_{T-1}(P_{T-1}^{-1}(z_{T-1}|\cdot)|\cdot)}{p_{T-1}(P_{T-1}^{-1}(z_{T-1}|\cdot)|\cdot)} \dots \frac{f_1(P_1^{-1}(z_1|\cdot)|\cdot)}{p_1(P_1^{-1}(z_1|\cdot)|\cdot)} \quad (\text{C.6})$$

Sous l'hypothèse qu'à chaque instant t , l'égalité $p_t(y_t|\cdot) = f_t(y_t|\cdot)$ est vérifiée, chacun des ratios est la densité d'une loi uniforme $U[0, 1]$. Par conséquent, leur produit est la densité la loi uniforme $U[0, 1]$ du vecteur $(z_1, z_2, \dots, z_T)'$.

C.2 Distribution des transformées de Berkowitz (2001)

Comme z_t est la réalisation d'une loi uniforme $U[0, 1]$ (Cf. Annexe C.1), alors sa densité de probabilité est :

$$q_t(z_t) = 1, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{C.7})$$

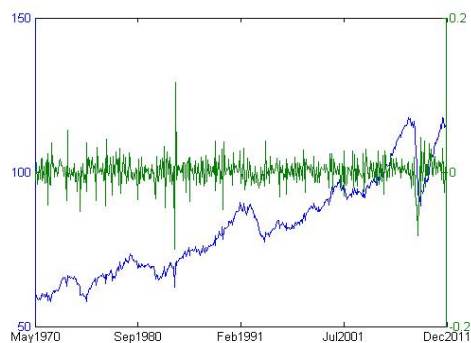
La fonction de répartition de la transformée de Berkowitz (2001) $z_t^* = \Phi^{-1}(z_t)$ est donnée par :

$$\left| \frac{\partial \Phi(z_t^*)}{\partial z_t^*} \right| = \frac{\partial}{\partial z_t^*} \left(\int_{-\infty}^{z_t^*} \phi(u) du \right) = \phi(z_t^*) \quad (\text{C.8})$$

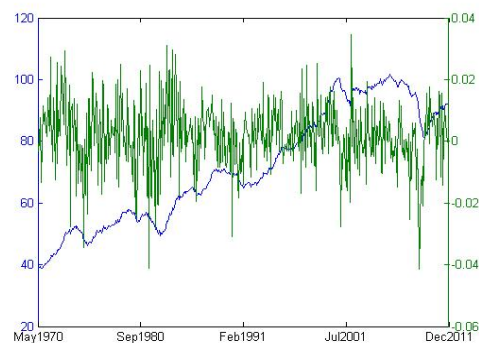
où $\Phi(\cdot)$ et $\phi(\cdot)$ désignent respectivement la fonction de répartition et de densité de la loi normale centrée et réduite $N(0, 1)$.

Annexe D

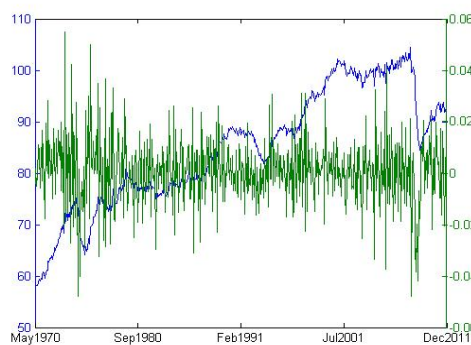
D.1 Evolution graphique des séries



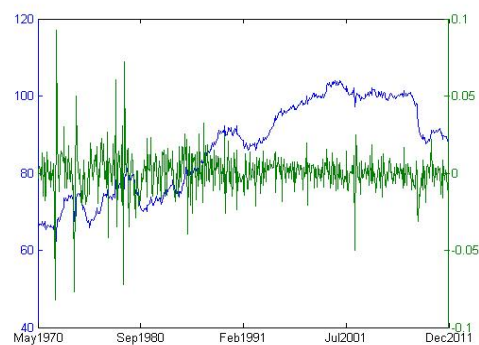
(a) Allemagne



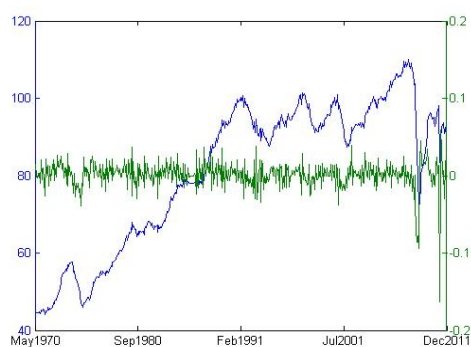
(b) Canada



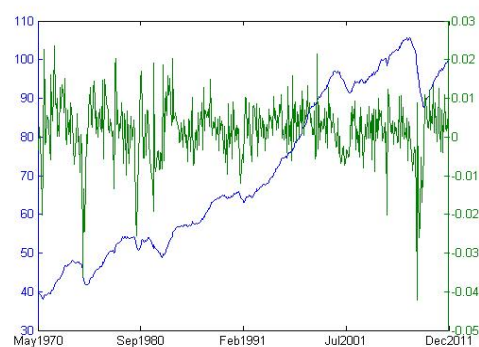
(c) France



(d) Grande-Bretagne

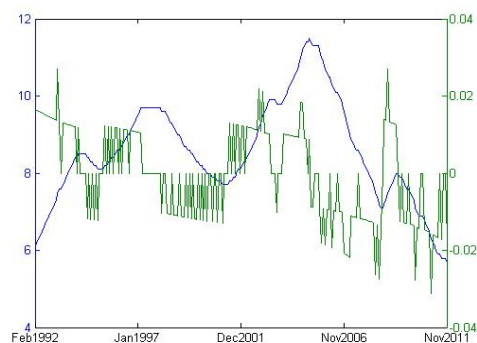


(e) Japon

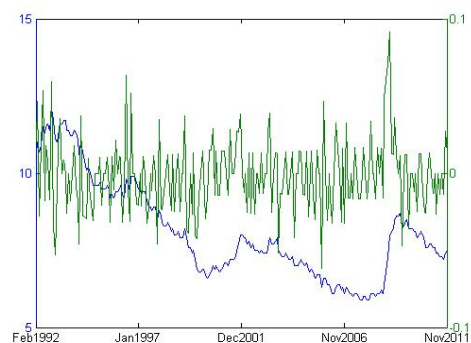


(f) États-Unis d'Amérique

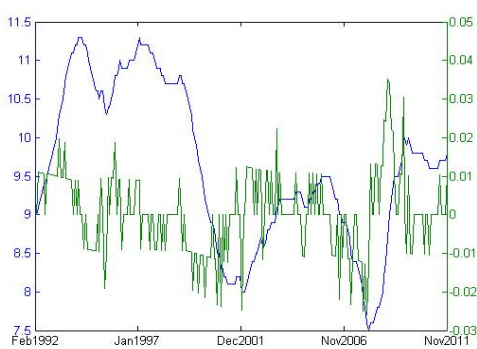
FIGURE D.1 – Indices de production industrielle



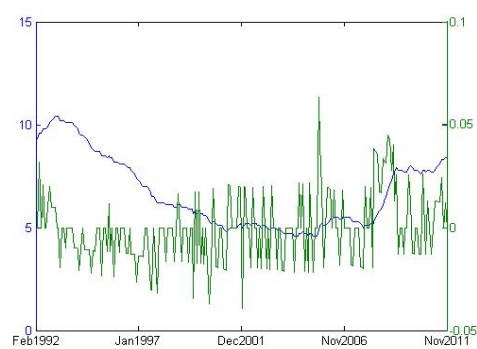
(a) Allemagne



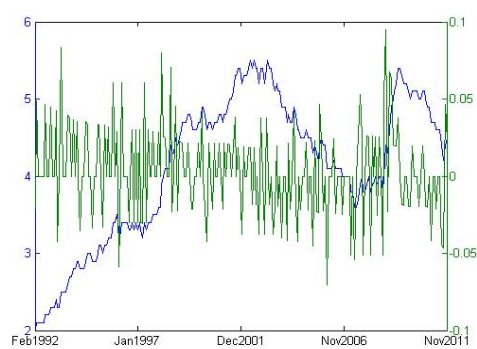
(b) Canada



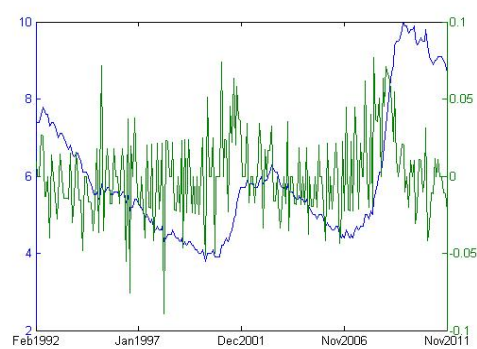
(c) France



(d) Grande-Bretagne

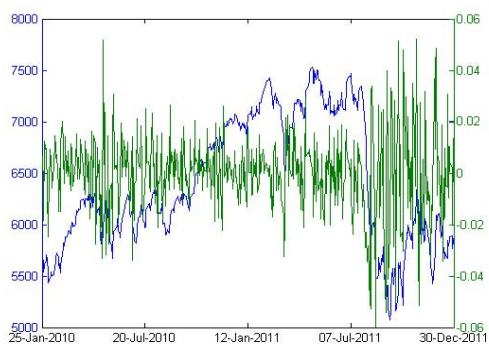


(e) Japon

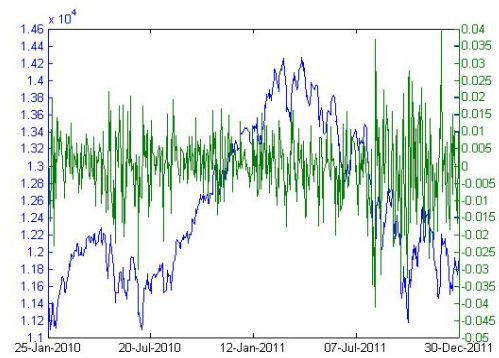


(f) États-Unis d'Amérique

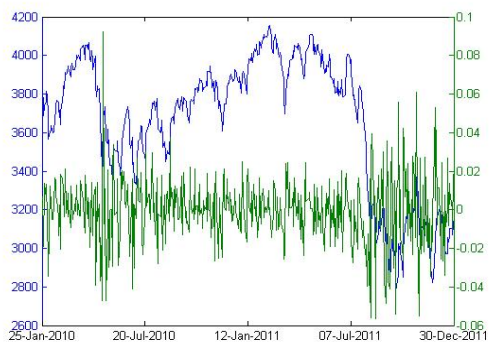
FIGURE D.2 – Taux de chômage



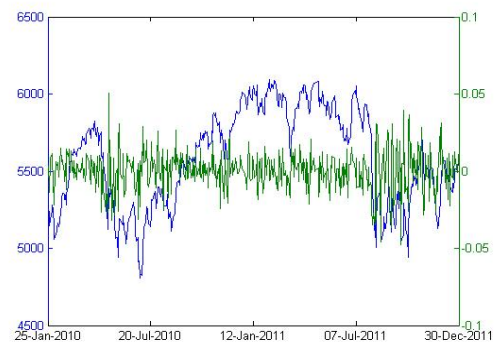
(a) Francfort



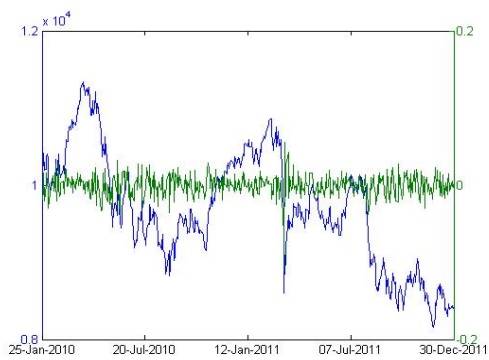
(b) Toronto



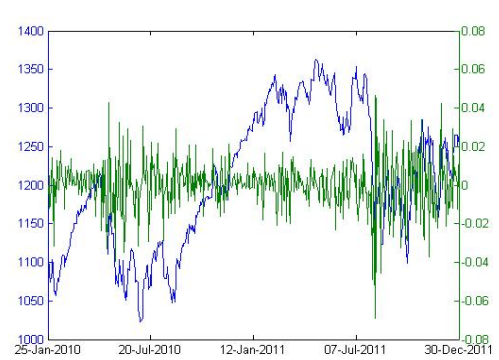
(c) Paris



(d) Londres

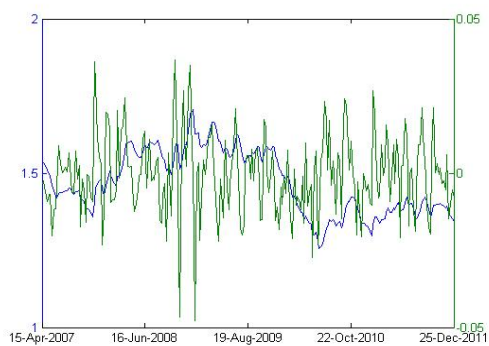


(e) Tokyo

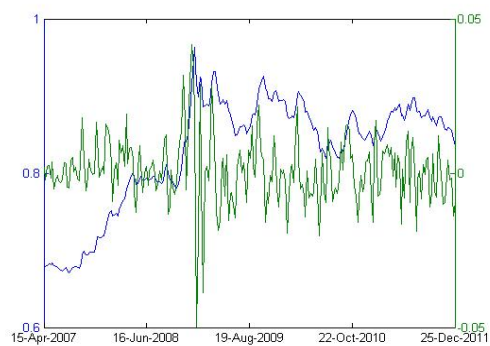


(f) New York

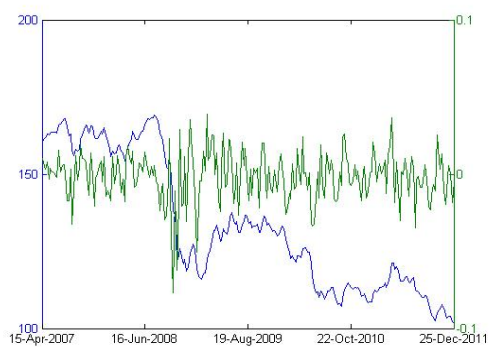
FIGURE D.3 – Indices boursiers



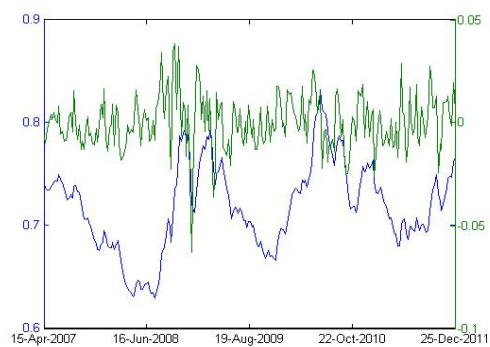
(a) EUR/CAD



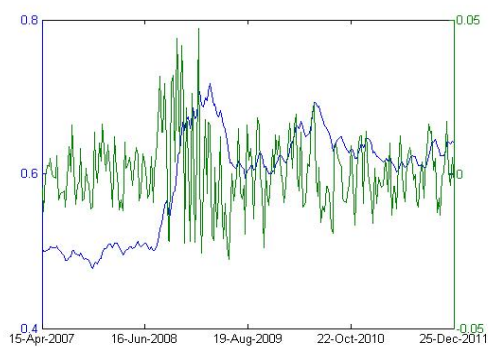
(b) EUR/GBP



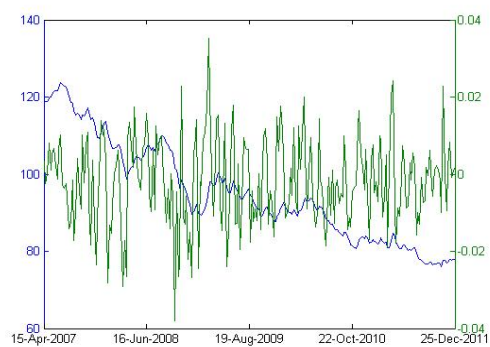
(c) EUR/JPY



(d) USD/EUR



(e) USD/GBP



(f) USD/JPY

FIGURE D.4 – Taux de change

D.2 Critères d'information AIC

TABLE D.1 – Critères d'information AIC - Modèles AR

<u>Production industrielle :</u>						
p	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
1	-8.1917	-8.9970	-8.6844	-8.5484	-8.0903	-9.8971
2	-8.1884	-9.0128	-8.6811	-8.5483	-8.1148	-9.9308
3	-8.2119	-9.0970	-8.7184	-8.5445	-8.1146	-9.9503
4	-8.2183	-9.0978	-8.7181	-8.5410	-8.1110	-9.9507
5	-8.2152	-9.1022	-8.7177	-8.5412	-8.1072	-9.9513
<u>Taux de chômage :</u>						
p	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
1	-9.6572	-7.5257	-9.4873	-8.3361	-7.1849	-7.2249
2	-9.9000	-7.5355	-9.6012	-8.3620	-7.1885	-7.2743
3	-9.9028	-7.5474	-9.6173	-8.3754	-7.2085	-7.3727
4	-9.8965	-7.5871	-9.6136	-8.4679	-7.2228	-7.3480
5	-9.8942	-7.5492	-9.6066	-8.4277	-7.2047	-7.3406
<u>Indices boursiers :</u>						
p	Francfort	Toronto	Paris	Londres	Tokyo	New York
1	-8.3759	-9.1811	-8.1938	-8.7892	-8.5045	-8.6589
2	-8.3776	-9.1771	-8.1946	-8.7882	-8.5065	-8.6587
3	-8.3755	-9.1784	-8.1950	-8.7871	-8.4957	-8.6638
4	-8.3756	-9.1757	-8.1953	-8.7876	-8.4934	-8.6429
5	-8.3739	-9.1754	-8.1928	-8.7848	-8.4926	-8.6353
<u>Taux de change :</u>						
p	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	USD/EUR	USD/GBP	USD/JPY
1	-8.8476	-9.2347	-8.3676	-8.8367	-8.8893	-9.0805
2	-8.8645	-9.2899	-8.3625	-8.8344	-8.8972	-9.0793
3	-8.8573	-9.3103	-8.4013	-8.8363	-8.9804	-9.0717
4	-8.8564	-9.3035	-8.4506	-8.8513	-8.9991	-9.0840
5	-8.8489	-9.2992	-8.4426	-8.8448	-8.9948	-9.0763

Note : Les nombres représentent les valeurs du critère d'information AIC associées au modèle AR(p), avec p l'ordre autorégressif.

TABLE D.2 – Critères d'information AIC - Modèles SETAR

<u>Production industrielle :</u>						
p	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
1	-2.8746	-3.9261	-3.1084	-1.5621	-2.2619	-1.3829
2	-2.8754	-3.9492	-3.1097	-1.5699	-2.2818	-1.3842
3	-2.8648	-3.9651	-3.1201	-1.5707	-2.2721	-1.3824
4	-2.8567	-3.9637	-3.1125	-1.5698	-2.2717	-1.3811
5	-2.8541	-3.9632	-3.1112	-1.5583	-2.2698	-1.3799
<u>Taux de chômage :</u>						
p	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
1	-1.9713	-3.2301	-2.1588	-3.9921	-1.8805	-2.6509
2	-1.9725	-3.2315	-2.1627	-3.9978	-1.8813	-2.6553
3	-1.9877	-3.2324	-2.1692	-4.0029	-1.8977	-2.6571
4	-1.9878	-3.2398	-2.1724	-3.9896	-1.8921	-2.6576
5	-1.9881	-3.2401	-2.1601	-3.9885	-1.9101	-2.6529
<u>Indices boursiers :</u>						
p	Francfort	Toronto	Paris	Londres	Tokyo	New York
1	-4.2439	-3.3098	-3.9324	-2.8655	-4.0013	-1.9779
2	-4.2450	-3.3127	-3.9316	-2.8791	-4.0157	-1.9781
3	-4.2421	-3.3333	-3.9288	-2.8798	-4.0199	-1.9788
4	-4.2397	-3.3221	-3.9276	-2.8831	-4.0202	-1.9802
5	-4.2288	-3.3217	-3.9261	-2.8698	-4.0183	-1.9763
<u>Taux de change :</u>						
p	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	USD/EUR	USD/GBP	USD/JPY
1	-4.9971	-4.5614	-4.2562	-3.4224	-5.3754	-4.2891
2	-4.9976	-4.4091	-4.1490	-3.4198	-5.3741	-4.2901
3	-4.9987	-4.3998	-4.1291	-3.3988	-5.3678	-4.2900
4	-4.9999	-4.3973	-4.1188	-3.3771	-5.3651	-4.2887
5	-5.1057	-4.3788	-4.0999	-3.3756	-5.3487	-4.2771

Note : Les nombres représentent les valeurs du critère d'information AIC (en 1000) associées au modèle SETAR(2; p,p), avec p l'ordre des parties autorégressives.

TABLE D.3 – Critères d'information AIC - Modèles MS-AR

<u>Production industrielle :</u>						
p	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
1	-2.7616	-3.1046	-2.9672	-3.0202	-2.8288	-3.6188
2	-2.7706	-3.0995	-2.9676	-3.0107	-2.8308	-3.6301
3	-2.7679	-3.1235	-2.9690	-3.0107	-2.8617	-3.6336
4	-2.7629	-3.1153	-2.9496	-2.9996	-2.8637	-3.6244
5	-2.7529	-3.0974	-2.9422	-2.9975	-2.8532	-3.6157
<u>Taux de chômage :</u>						
p	Allemagne	Canada	France	Grande-Bretagne	Japon	Etats-Unis
1	-1.6361	-1.1244	-3.9326	-1.3260	-1.0291	-1.0800
2	-1.7358	-1.1359	-1.5962	-1.3140	-1.0247	-1.0772
3	-1.6672	-1.1187	-1.9174	-1.3184	-1.0157	-1.0717
4	-1.6521	-1.1126	-1.9058	-1.3162	-1.0173	-1.0696
5	-1.6394	-1.1180	-1.5736	-1.3235	-1.0087	-1.0713
<u>Indices boursiers :</u>						
p	Francfort	Toronto	Paris	Londres	Tokyo	New York
1	-2.8902	-3.1199	-2.7776	-2.9742	-2.7561	-2.9701
2	-2.8854	-3.0601	-2.7724	-2.9657	-2.7533	-2.9618
3	-2.8756	-3.1009	-2.7648	-2.9567	-2.7422	-2.9548
4	-2.8686	-3.0905	-2.7039	-2.9304	-2.7551	-2.9460
5	-2.8589	-3.0630	-2.7484	-2.9391	-2.7504	-2.9344
<u>Taux de change :</u>						
p	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	USD/EUR	USD/GBP	USD/JPY
1	-1.4786	-1.6128	-1.3802	-1.4851	-1.5331	-1.5260
2	-1.4723	-1.6175	-1.3709	-1.4751	-1.5268	-1.5193
3	-1.4718	-1.6238	-1.3661	-1.4633	-1.5311	-1.5078
4	-1.4690	-1.6000	-1.3667	-1.4630	-1.5114	-1.5036
5	-1.4603	-1.5892	-1.3606	-1.4521	-1.4933	-1.4942

Note : Les nombres représentent les valeurs du critère d'information AIC (en 1000) associées au modèle à changement de régimes markovien MS(2)-AR(p), avec p l'ordre des parties autorégressives.

D.3 Estimation du seuil des modèles SETAR

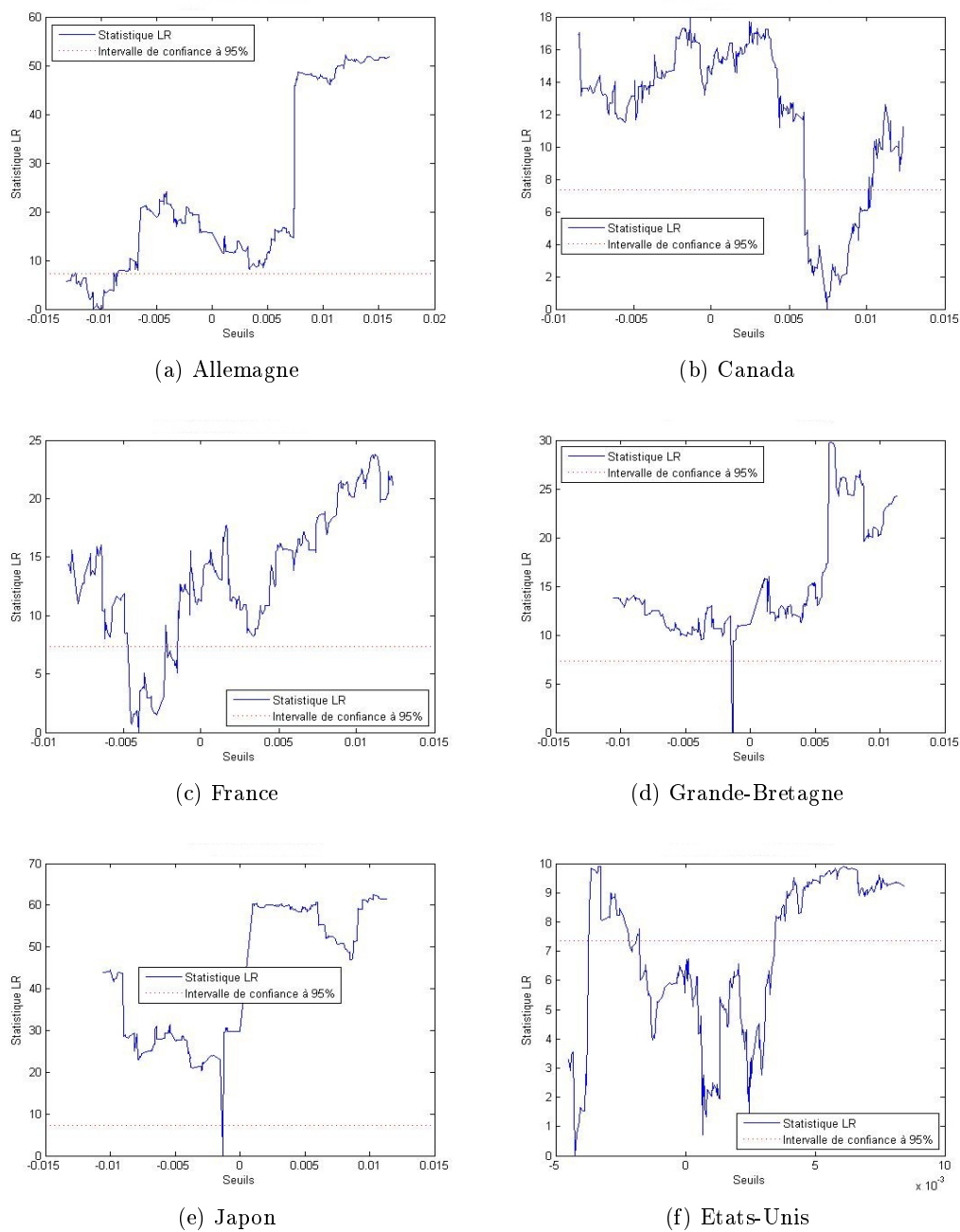
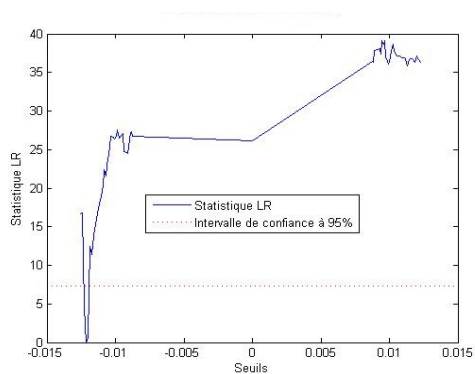
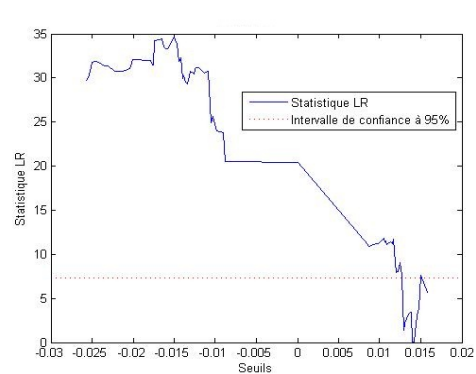


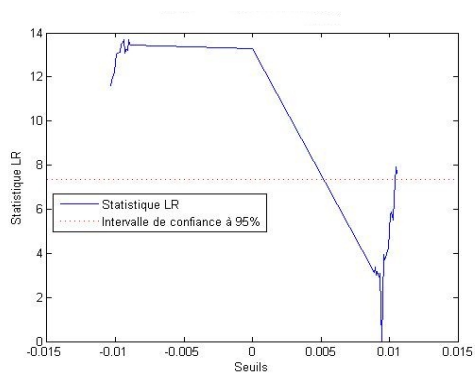
FIGURE D.5 – Seuils des modèles SETAR - Production industrielle



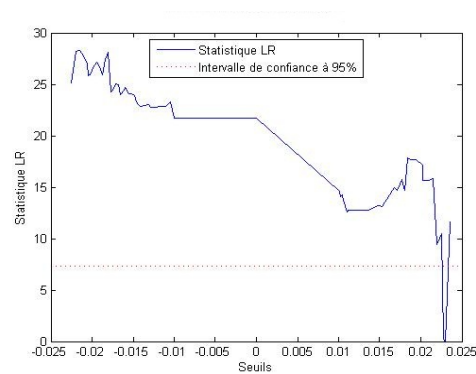
(a) Allemagne



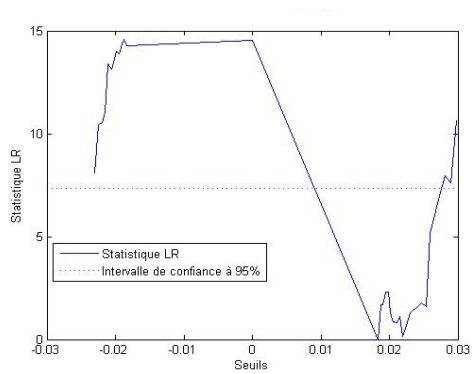
(b) Canada



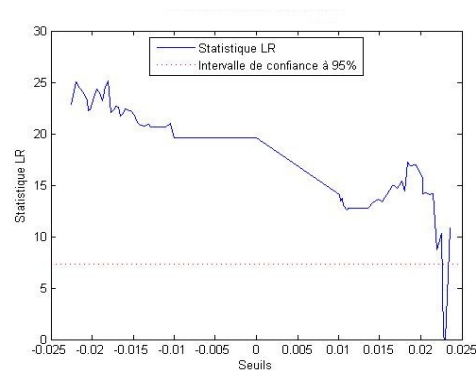
(c) France



(d) Grande-Bretagne

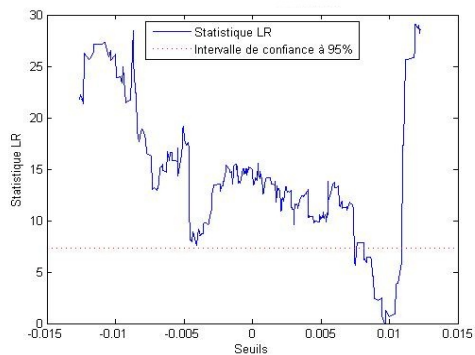


(e) Japon

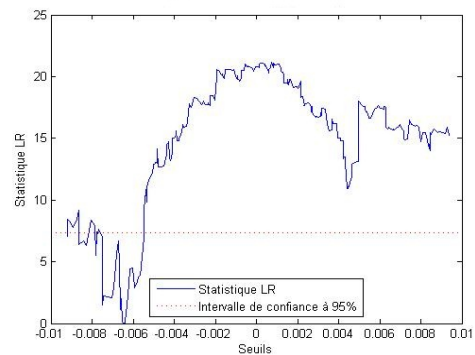


(f) Etats-Unis

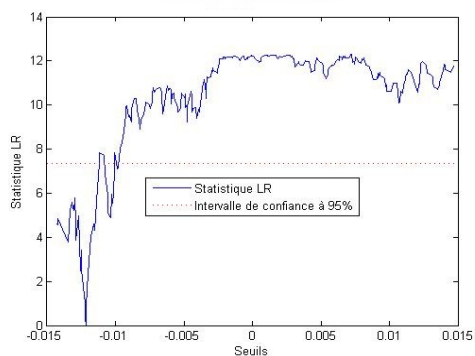
FIGURE D.6 – Seuils des modèles SETAR - Taux de chômage



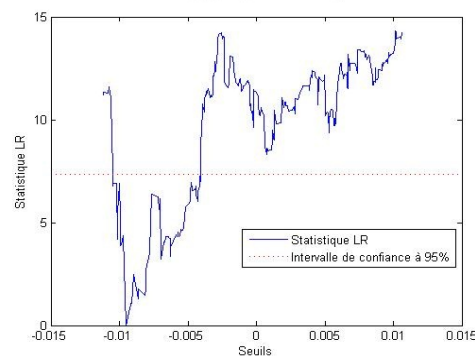
(a) Francfort



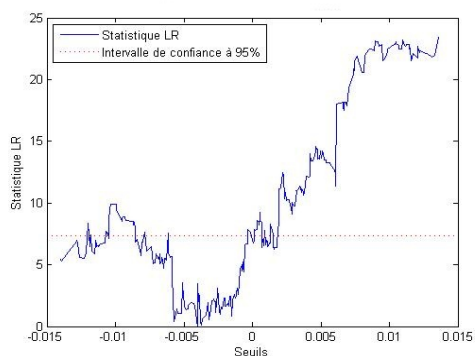
(b) Toronto



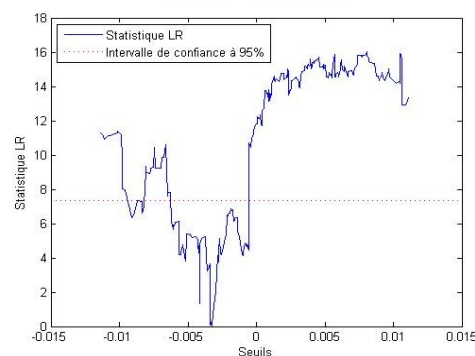
(c) Paris



(d) Londres

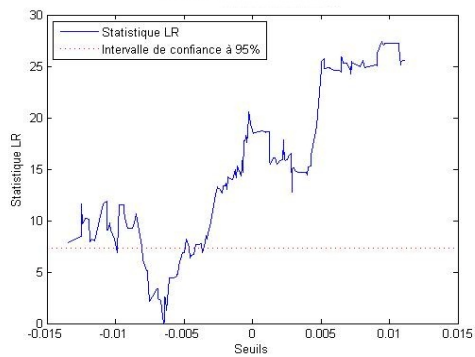


(e) Tokyo

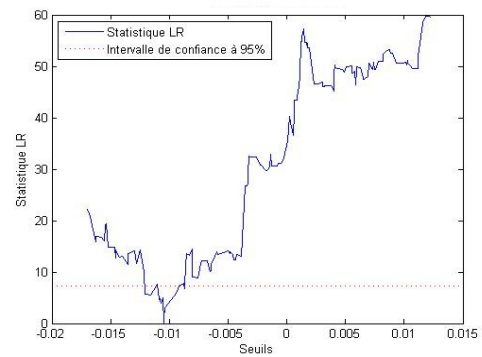


(f) New York

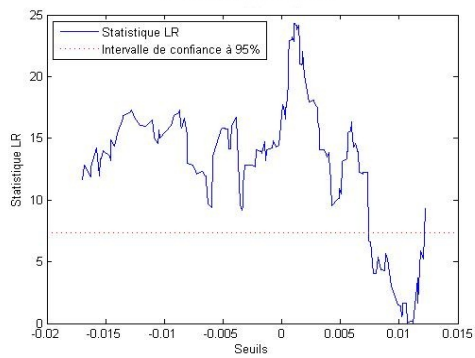
FIGURE D.7 – Seuils des modèles SETAR - Indices boursiers



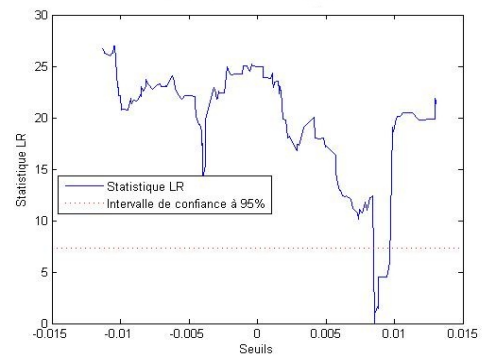
(a) EUR/CAD



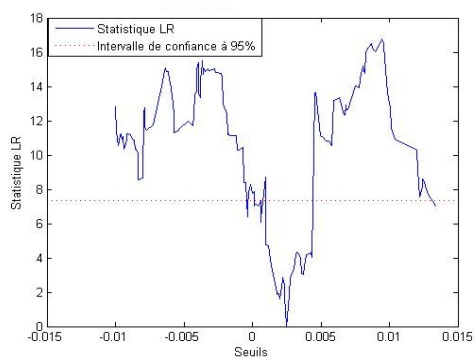
(b) EUR/GBP



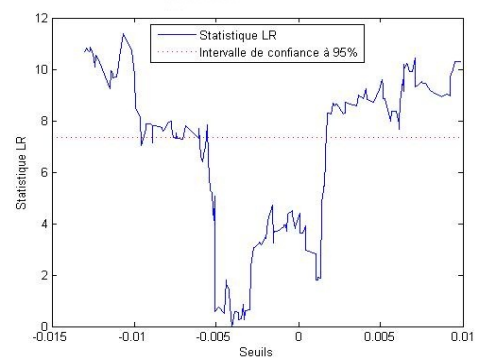
(c) EUR/JPY



(d) USD/EUR



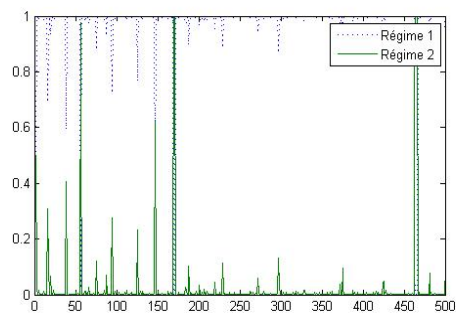
(e) USD/GBP



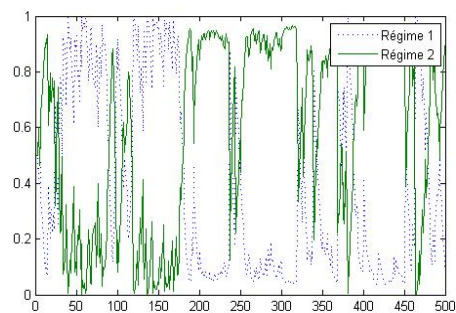
(f) USD/JPY

FIGURE D.8 – Seuils des modèles SETAR - Taux de change

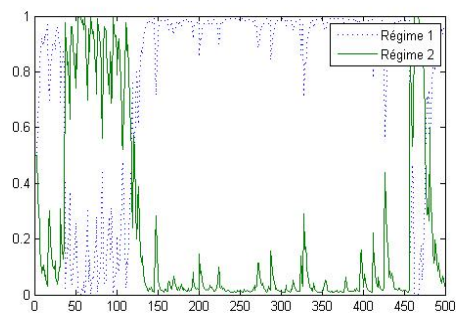
D.4 Probabilités filtrées et probabilités lissées associées aux modèles MS-AR



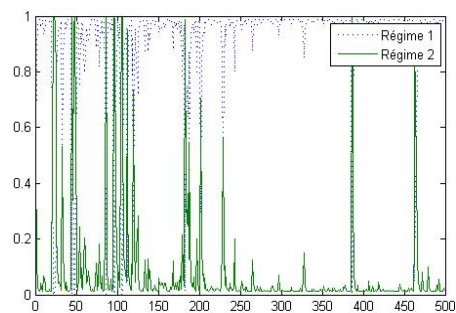
(a) Allemagne



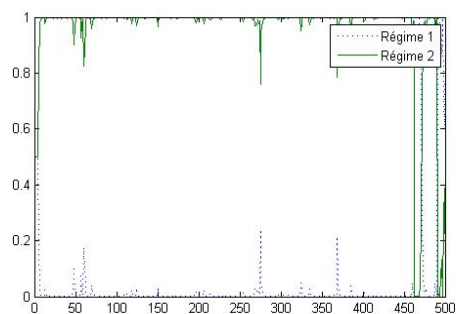
(b) Canada



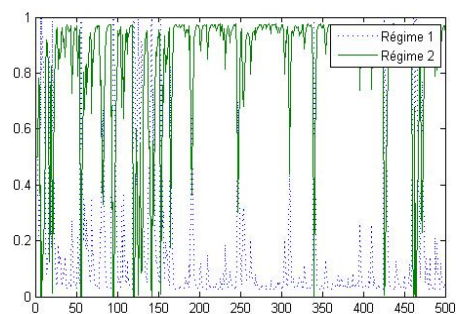
(c) France



(d) Grande-Bretagne

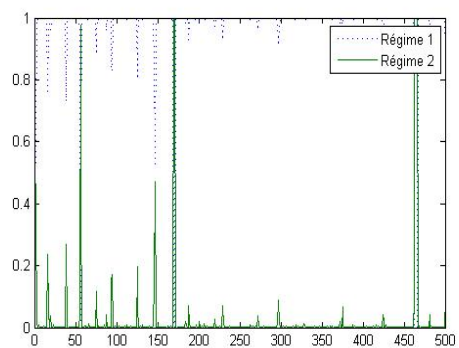


(e) Japon

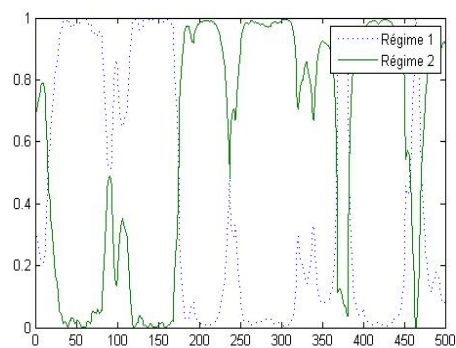


(f) Etats-Unis

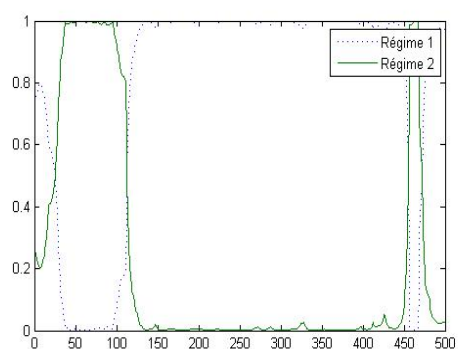
FIGURE D.9 – Probabilités filtrées - Production industrielle



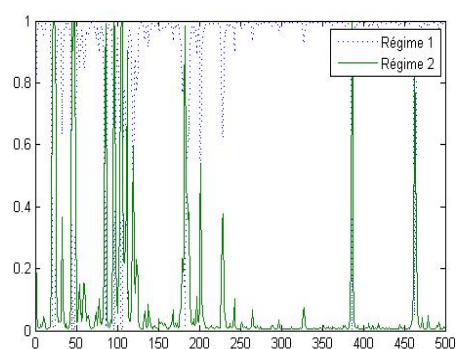
(a) Allemagne



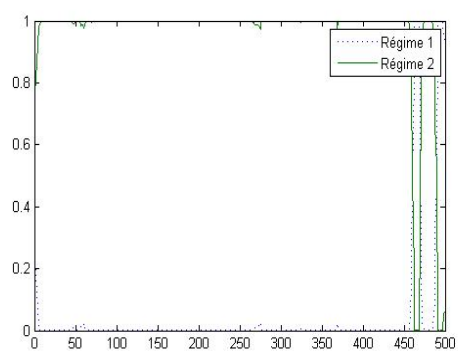
(b) Canada



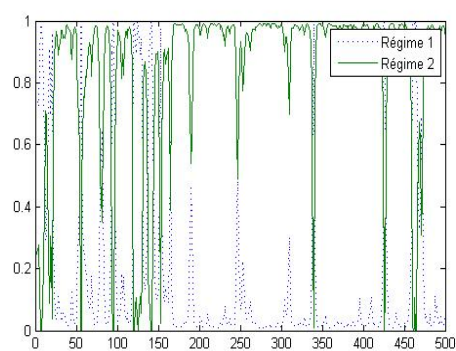
(c) France



(d) Grande-Bretagne

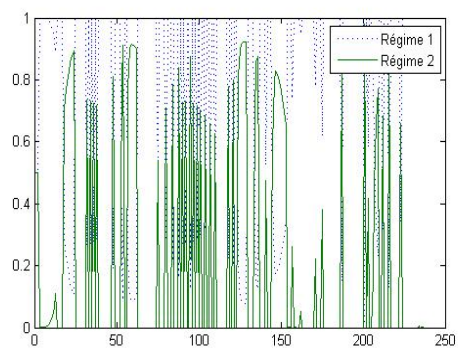


(e) Japon

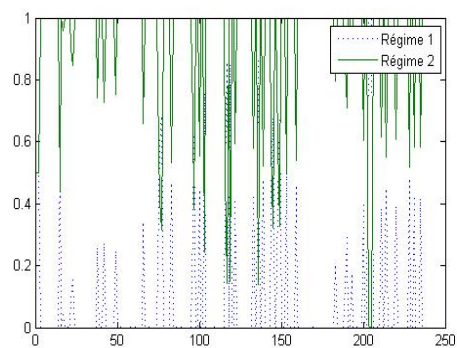


(f) Etats-Unis

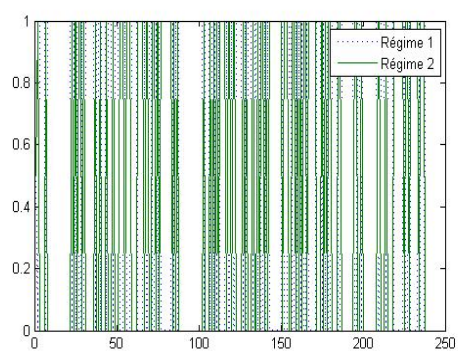
FIGURE D.10 – Probabilités lissées - Production industrielle



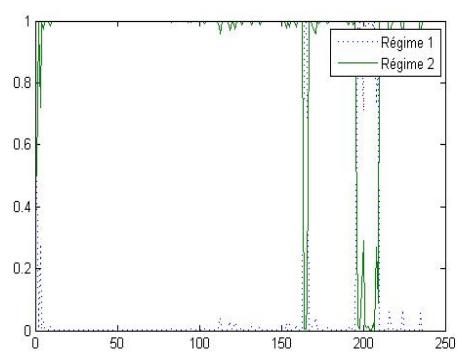
(a) Allemagne



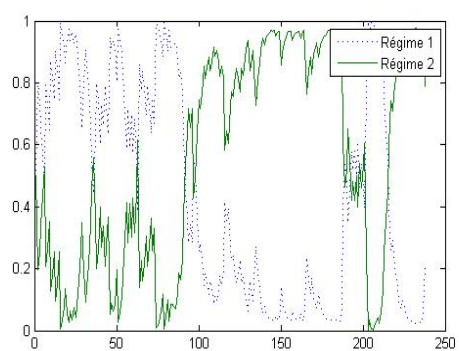
(b) Canada



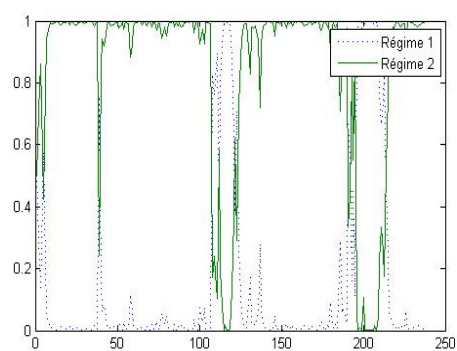
(c) France



(d) Grande-Bretagne

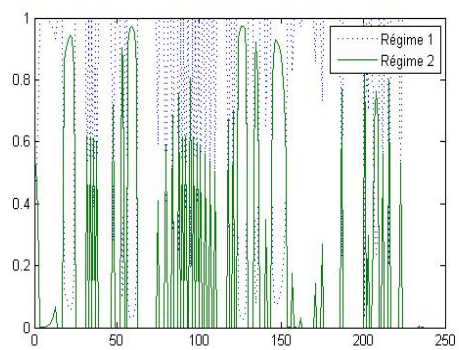


(e) Japon

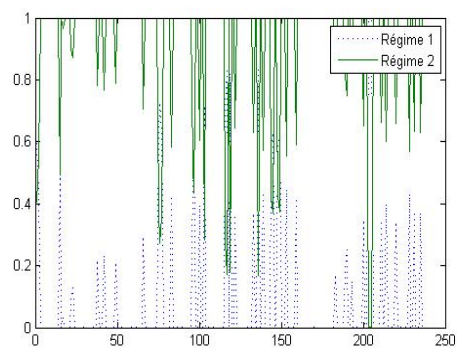


(f) Etats-Unis

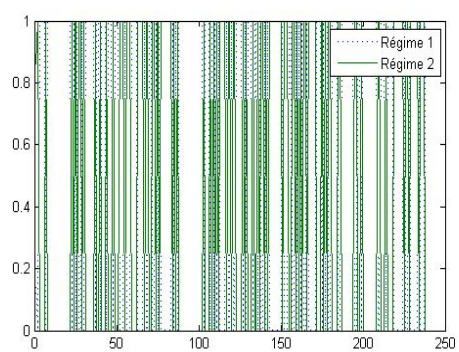
FIGURE D.11 – Probabilités filtrées - Taux de chômage



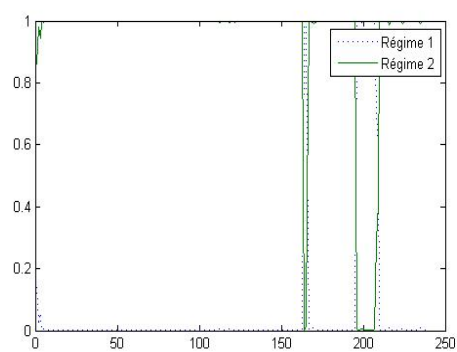
(a) Allemagne



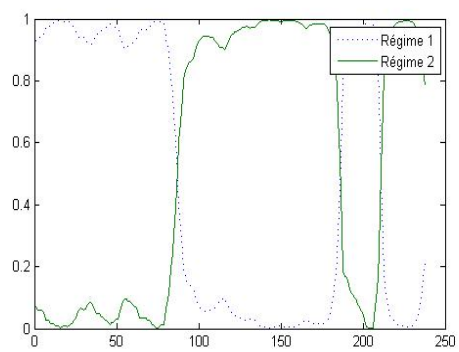
(b) Canada



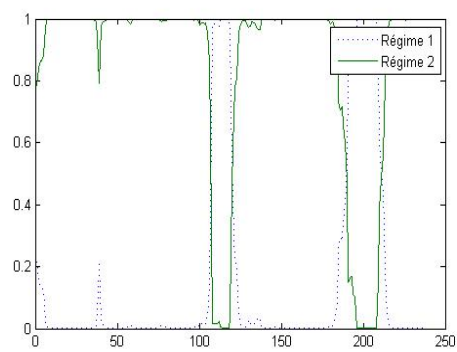
(c) France



(d) Grande-Bretagne

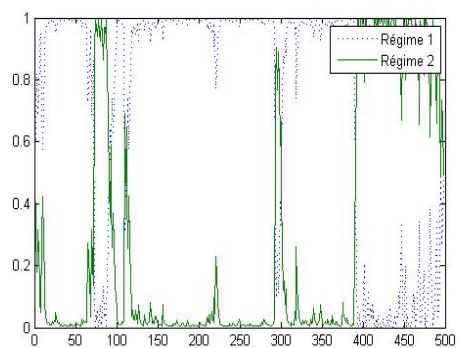


(e) Japon

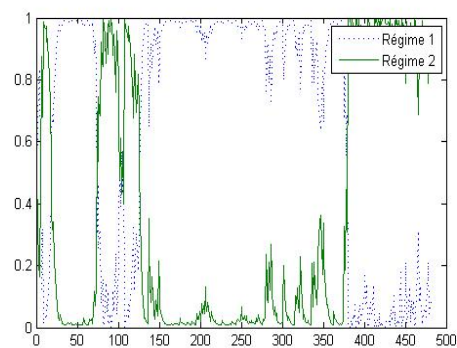


(f) Etats-Unis

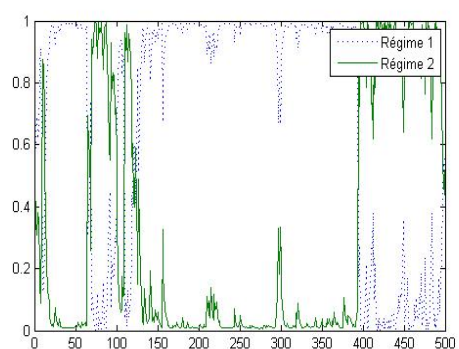
FIGURE D.12 – Probabilités lissées - Taux de chômage



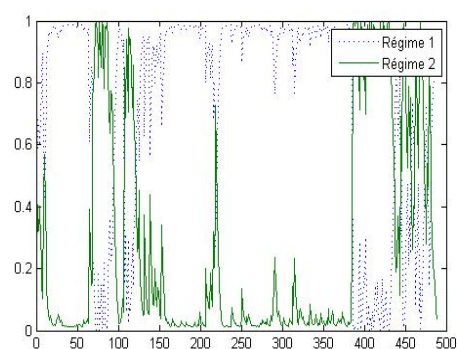
(a) Francfort



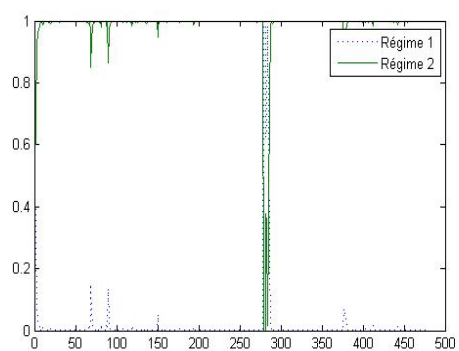
(b) Toronto



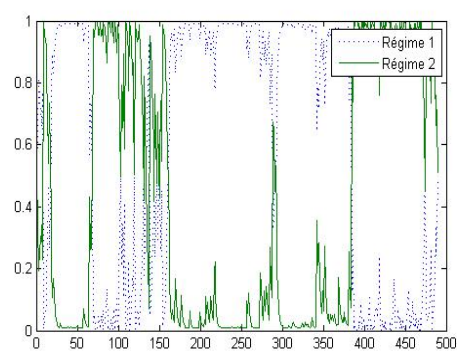
(c) Paris



(d) Londres

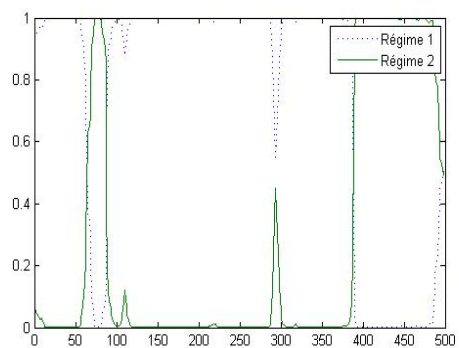


(e) Tokyo

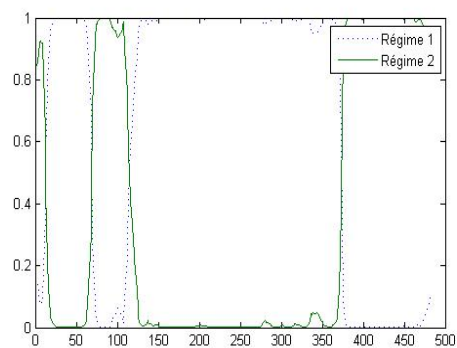


(f) New York

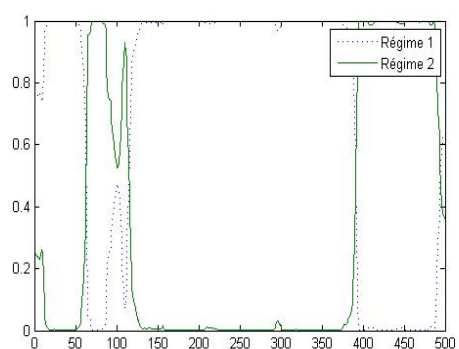
FIGURE D.13 – Probabilités filtrées - Indices boursiers



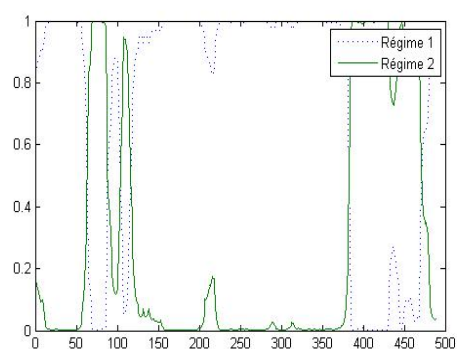
(a) Francfort



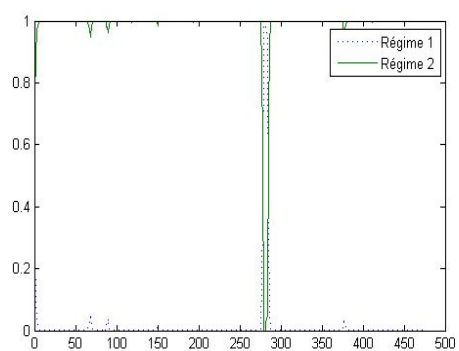
(b) Toronto



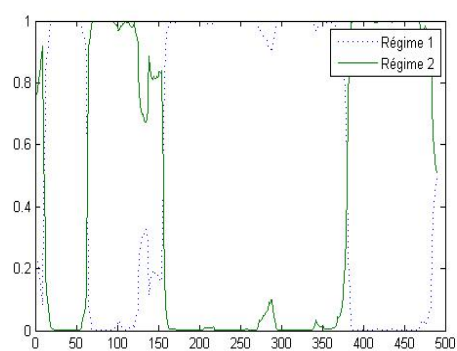
(c) Paris



(d) Londres

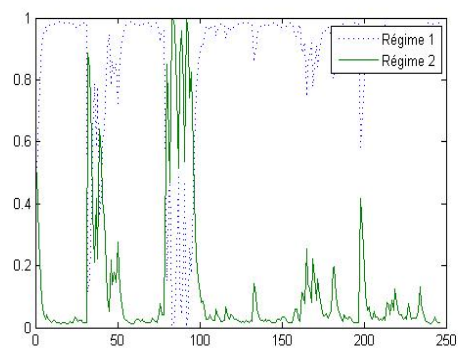


(e) Tokyo

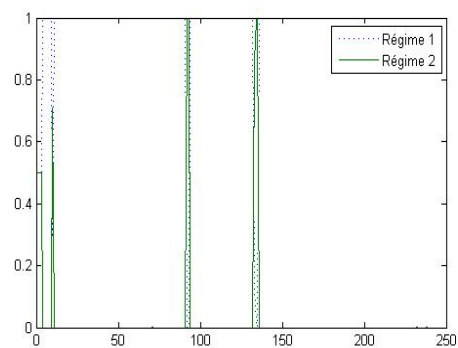


(f) New York

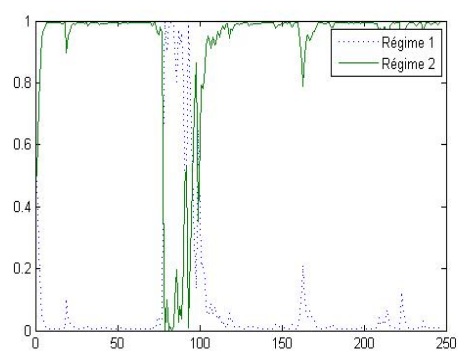
FIGURE D.14 – Probabilités lissées - Indices boursiers



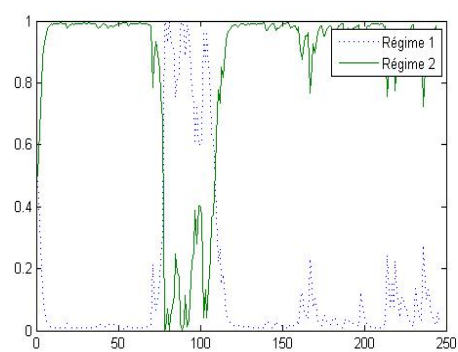
(a) EUR/CAD



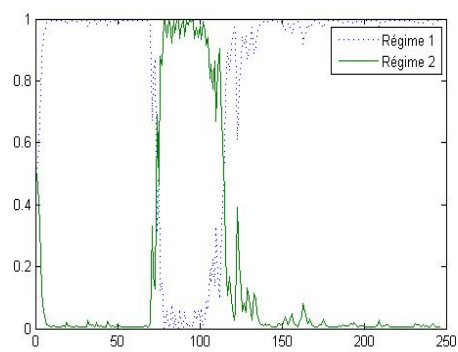
(b) EUR/GBP



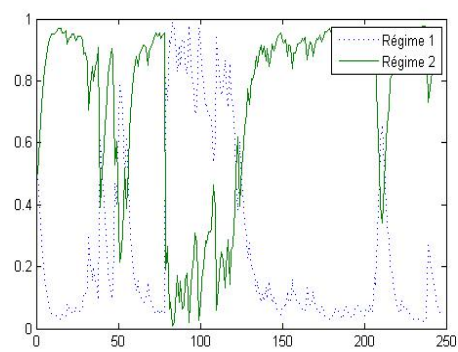
(c) EUR/JPY



(d) USD/EUR

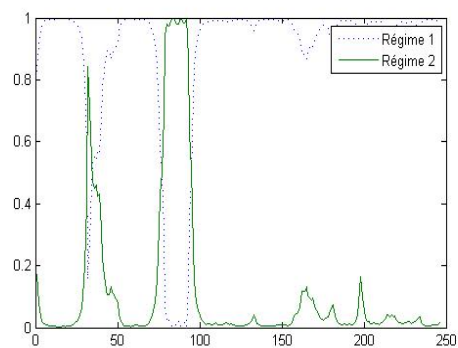


(e) USD/GBP

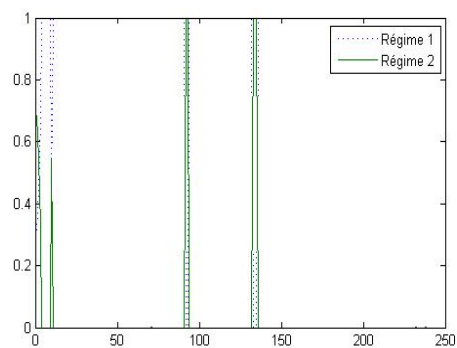


(f) USD/JPY

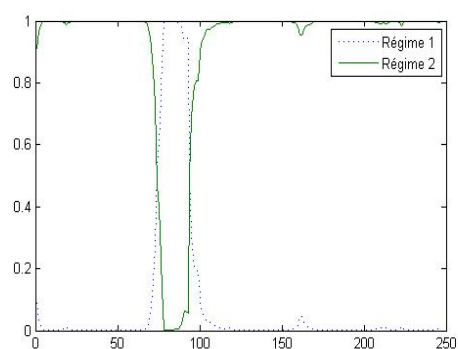
FIGURE D.15 – Probabilités filtrées - Taux de change



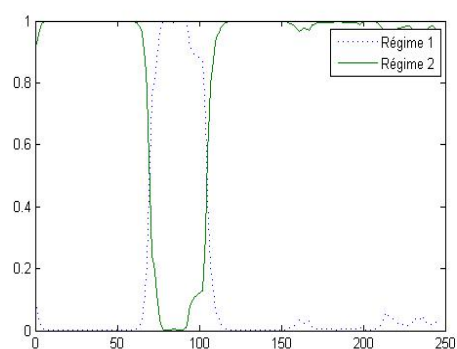
(a) EUR/CAD



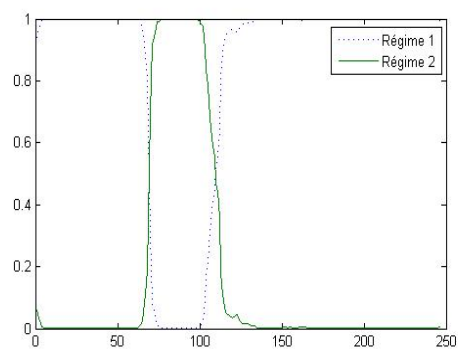
(b) EUR/GBP



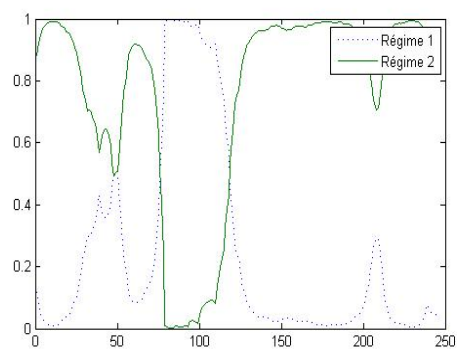
(c) EUR/JPY



(d) USD/EUR



(e) USD/GBP



(f) USD/JPY

FIGURE D.16 – Probabilités lissées - Taux de change

Résumé

L'intérêt des modèles non-linéaires réside, d'une part, dans une meilleure prise en compte des non-linéarités caractérisant les séries macroéconomiques et financières et, d'autre part, dans une prévision plus riche en information. A ce niveau, l'originalité des intervalles (asymétriques et/ou discontinus) et des densités de prévision (asymétriques et/ou multimodales) offerts par cette nouvelle forme de modélisation suggère qu'une amélioration de la prévision relativement aux modèles linéaires est alors possible et qu'il faut disposer de tests d'évaluation assez puissants pour vérifier cette éventuelle amélioration. Ces tests reviennent généralement à vérifier des hypothèses distributionnelles sur les processus des violations et des transformées probabilistes associés respectivement à chacune de ces formes de prévision. Dans cette thèse, nous avons adapté le cadre GMM fondé sur les polynômes orthonormaux conçu par Bontemps et Meddahi (2005, 2012) pour tester l'adéquation à certaines lois de probabilité, une approche déjà initiée par Candelon et al. (2011) dans le cadre de l'évaluation de la Value-at-Risk. Outre la simplicité et la robustesse de la méthode, les tests développés présentent de bonnes propriétés en termes de tailles et de puissances. L'utilisation de notre nouvelle approche dans la comparaison de modèles linéaires et de modèles non-linéaires lors d'une analyse empirique a confirmé l'idée selon laquelle les premiers sont préférés si l'objectif est le calcul de simples prévisions ponctuelles tandis que les derniers sont les plus appropriés pour rendre compte de l'incertitude autour de celles-ci.

Mots clés: Modèles à changement de régimes – Intervalles de prévision – Densités de prévision – Tests d'évaluation – GMM – Polynômes orthonormaux.

Non-linear models and forecasting

Abstract

The interest of non-linear models is, on the one hand, to better take into account non-linearities characterizing the macroeconomic and financial series and, on the other hand, to get richer information in forecast. At this level, originality intervals (asymmetric and / or discontinuous) and forecasts densities (asymmetric and / or multimodal) offered by this new modelling form suggests that improving forecasts according to linear models is possible and that we should have enough powerful tests of evaluation to check this possible improvement. Such tests usually mean checking distributional assumptions on violations and probability integral transform processes respectively associated to each of these forms of forecast. In this thesis, we have adapted the GMM framework based on orthonormal polynomials designed by Bontemps and Meddahi (2005, 2012) to test for some probability distributions, an approach already adopted by Candelon et al. (2011) in the context of backtesting Value-at-Risk. In addition to the simplicity and robustness of the method, the tests we have developed have good properties in terms of size and power. The use of our new approach in comparison of linear and non-linear models in an empirical analysis confirmed the idea according to which the former are preferred if the goal is the calculation of simple point forecasts while the latter are more appropriated to report the uncertainty around them.

Keywords: Regime switching models – Interval forecasts – Density forecasts – Backtesting – GMM – Orthonormal polynomials.