

ÉCOLE DOCTORALE
ENERGIE, MATERIAUX, SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS

Laboratoire de Physique et Chimie de l'Environnement et de l'Espace
Laboratoire de Mathématiques - Analyse, Probabilités, Modélisation - Orléans

Thèse présentée par
Patxi RITTER

Soutenue le **22 novembre 2013**

pour obtenir le grade de **Docteur de l'université d'Orléans**

Spécialité : **Astrophysique et techniques spatiales**

**Ondes gravitationnelles et calcul de la
force propre pour un astre compact en
mouvement autour d'un trou noir
super-massif**

THÈSE DIRIGÉE PAR :

Alessandro Spallicci, Professeur des Universités, Université d'Orléans

Stéphane Cordier, Professeur des Universités, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Luc Blanchet, Directeur de recherche CNRS, Institut d'Astrophysique de Paris

Carlos Sopena, Senior Investigador, Institut d'Estudis Espacials de Catalunya

JURY :

Sofiane Aoudia, Forscher, Max Planck Institut für Gravitationsphysik, A. Einstein, Golm

Gérard Auger, Directeur de recherche CNRS, Astroparticule et Cosmologie, Paris

Sylvain Jubertie, Maître de conférences, Université d'Orléans

Jean-Louis Rouet, Professeur des Universités, Université d'Orléans

nire amari...

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Physique et Chimie de l'Environnement et de l'Espace (LPC2E) à Orléans sous la direction d'A. Spallicci et au laboratoire de Mathématiques - Analyse, Probabilités, Modélisation - Orléans (MAPMO) sous la Co-direction de S. Cordier.

Ces lignes seront les seules où j'utiliserai "je" pour remercier toutes les personnes avec lesquelles j'ai pu interagir et qui ont été impliquées de près ou de loin dans ces travaux. Ces trois années ont constitué une période importante où j'ai beaucoup appris, pas seulement scientifiquement mais également d'un point de vue personnel. Je commencerai bien évidemment par remercier mes deux directeurs de thèse A. Spallicci et S. Cordier complémentaires dans leur nature et leurs compétences. Je remercie chaleureusement les membres du jury L. Blanchet, C. Sopuerta, S. Aoudia, G. Auger, S. Jubertie, J-L Rouet d'avoir accepté d'évaluer cette thèse. Mes remerciements s'adressent aussi aux membres du MAPMO, du LPC2E et à leur directeur respectif qui m'ont permis de travailler dans un environnement agréable.

Une thèse c'est aussi la possibilité de s'ouvrir à l'enseignement et à la diffusion de la connaissance scientifique, ce dont j'ai eu l'opportunité. Je remercie, P. Grillot, S. Cordier et Centre•Science à travers O. Morrand pour m'avoir intégré à l'équipe du Centre Galois qui s'attache à donner une nouvelle image des mathématiques auprès des jeunes, attrayante et pleine de perspectives. Ce fut un réel plaisir de travailler avec Philippe et de partager sa passion pour cette belle discipline.

Je remercie S. Jubertie et ses stagiaires (nombreux, presque une armée) pour leurs compétences qu'ils ont mis à ma disposition pour traiter certains aspects numériques de mon travail.

Merci à la communauté CAPRA pour m'avoir donné l'occasion de présenter mes travaux à l'université de Dublin. Je tiens d'ailleurs à remercier L. Barack pour m'avoir encadré durant ma semaine à l'université de Southampton et L. Burko pour sa visite instructive à Orléans.

Enfin, merci à mes amis, du Sud, du Nord, compagnons de fac, nouveaux docteurs ou presque-nouveaux docteurs. Merci à Dominique pour son aide et ses conseils bienveillants depuis plusieurs années. Un grand merci à ma Lysiane qui a su préserver l'équilibre parfois instable d'une vie avec un thésard. Je remercie de tout cœur ma famille et en particulier mon père, ma sœur pour leur soutien sans faille et ma mère qui a rejoint les étoiles avant d'avoir pu lire ces lignes.

Table des matières

Remerciements	iii
Liste des acronymes	ix
1 Introduction	1
1.1 Ondes gravitationnelles (OG)	5
1.1.1 Théorie linéarisée	5
1.1.2 Propagation des OG	6
1.1.3 Génération d'OG	8
1.2 Le problème à deux corps en relativité générale	11
1.2.1 Théorie post-newtonienne	11
1.2.2 Théorie perturbative	12
1.2.3 Effective One Body (EOB)	13
1.2.4 Relativité numérique	13
1.3 Organisation de la thèse	14
2 Force propre et réaction de radiation	15
2.1 Force propre électromagnétique	16
2.1.1 Force d'Abraham-Lorentz-Dirac	17
2.1.2 Mouvement d'une particule chargée dans un espace-temps plat	19
2.1.3 Mouvement d'une particule chargée dans un espace-temps courbe	23
2.2 Force propre gravitationnelle	27
2.2.1 Sens newtonien de la force propre	27
2.2.2 Mouvement d'une particule massive dans une métrique de fond	30
2.3 Régularisation de la force propre gravitationnelle	41
2.3.1 Régularisation Mode-Sum	42
2.3.2 Exemple simple	44
2.4 Aspect conservatif et dissipatif de la force propre	45
3 Trou noir de Schwarzschild perturbé	49
3.1 Espace-temps de Schwarzschild	49
3.2 Mouvement géodésique dans une métrique de Schwarzschild	51
3.2.1 Orbites planes	53
3.2.2 Orbites radiales	58
3.3 Equation d'Einstein linéarisée en jauge de Regge-Wheeler (RW)	59
3.3.1 Tenseur d'Einstein linéarisé	59
3.3.2 Harmoniques sphériques tensoriels	60

3.3.3	Décomposition multipolaire du tenseur de perturbation	63
3.3.4	Décomposition multipolaire du tenseur énergie-impulsion	65
3.3.5	Equations du champ linéarisées en jauge de RW	67
3.3.6	Modes non radiatifs	69
3.3.7	Transformation de jauge depuis la jauge de RW	71
3.4	Equation d'onde	73
3.4.1	Equation de Regge-Wheeler-Zerilli (RWZ)	73
3.4.2	Flux d'énergie et de moment angulaire	76
4	Résolution de l'équation de RWZ	79
4.1	Point sur les distributions	79
4.2	Conditions de saut	82
4.3	Implémentation numérique	87
4.3.1	Domaine numérique et notations	89
4.3.2	Algorithme	91
4.4	Résultats : Cas homogène	99
4.4.1	Modes quasi-normaux	99
4.4.2	Convergence numérique	102
4.5	Résultats : Orbites radiales	103
4.5.1	Conditions initiales	105
4.5.2	Formes d'ondes	106
4.6	Résultats : Orbites planes	109
4.6.1	Conditions initiales	110
4.6.2	Orbites circulaires	111
4.6.3	Orbites elliptiques	114
4.6.4	Orbites paraboliques et zoom-whirl	115
4.6.5	Convergence numérique	117
4.7	Discussion	117
5	Force propre gravitationnelle : cas de la chute radiale	121
5.1	Force propre gravitationnelle en jauge de RW : Particularité du cas radial	122
5.2	Paramètres de régularisation	124
5.2.1	Calcul des paramètres de régularisation en jauge de RW	124
5.2.2	Mode $\ell = 0$	148
5.2.3	Modes $\ell \gg 0$	150
5.3	Résultats	151
5.3.1	Fonction d'onde à la position de la particule	152
5.3.2	Calcul des perturbations	153
5.3.3	Calcul de la force propre gravitationnelle	157
5.4	Résultats : Equation du mouvement	160
5.4.1	Approche pragmatique	161
5.4.2	Approche osculatrice de l'évolution orbitale	170
5.4.3	Formes d'ondes perturbées	176
5.5	Validation du code	178
5.5.1	Conditions initiales	178
5.5.2	Sensibilité à $\ell_{\max}$	179
5.5.3	Sensibilité à h	181

5.5.4 Comportement asymptotique en ℓ	181
Conclusions	182
A Conditions de sauts : Orbites planes	187
B Conditions de sauts : Orbites radiales	191
Liste des figures	194
Liste des tableaux	203
Liste des publications	205
Bibliographie	207

Liste des acronymes

AL	Abraham Lorentz
ALD	Abraham Lorentz Dirac
CPU	Central Processing Unit
EDP	Equation aux Dérivées Partielles
EDO	Equations aux Dérivées Ordinaires
EMRI	Extreme Mass Ratio Inspiral
EOB	Effective One Body
FP	Force Propre
GPU	Graphics Processing Unit
HSS	Harmonique Sphérique Scalaire
HST	Harmonique Sphérique Tensoriel
IMRI	Intermediate Mass Ratio Inspiral
MNQ	Modes Quasi Normaux
OG	Onde Gravitationnelle
RH	Riemann-Hurwitz
RW	Regge Wheeler
RWZ	Regge Wheeler Zerilli
SF	Self Force
SSE	Streaming SIMD Extensions
SIMD	Single Instruction on Multiple Data
TN	Trou Noir
TNSM	Trou Noir Super Massif

Ces acronymes sont utilisés pour les formes singulières et plurielles.

Chapitre 1

Introduction

DEPUIS sa formulation et son perfectionnement mathématique, la relativité générale a prophétisé l'existence d'objets énigmatiques comme les *trous noirs* (TN) aujourd'hui avérés d'un point de vue astrophysique mais dont la structure analytique reste encore à déterminer précisément. La vision relativiste de la gravitation comme une manifestation de la géométrie de l'espace-temps a montré que l'espace-temps est un support dynamique qui permet la propagation d'ondes de déformation que l'on appelle *ondes gravitationnelles* (OG). Ces ondes sont produites dès lors que de la matière est en mouvement accéléré et se propagent quasiment sans être affectées par l'environnement entre la source et l'observateur. Les OG apparaissent donc comme un moyen efficace de sonder les événements les plus violents de l'univers comme la coalescence de deux trous noirs ou les supernovæ et un moyen de décrire fidèlement les phénomènes relativistes en champ fort comme l'interaction de deux objets compacts, systèmes binaires d'étoiles à neutrons, systèmes binaires de deux trous noirs et autres.

L'étude du pulsar binaire PSR1913+16, depuis sa découverte en 1974 [1][2][3], a produit la première preuve indirecte de l'existence des OG mais la communauté relativiste n'en est pas encore à extraire du contenu physique directement d'un signal gravitationnel. En effet l'amplitude d'une OG atteignant la Terre est extrêmement faible, de l'ordre¹ de 1 pour 10^{21} , c'est pourquoi une mesure directe n'a pas encore été possible à ce jour et reste un grand défi scientifique et technologique. Les interféromètres géants comme le VIRGO [4] en Italie ou le LIGO [5] (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) aux Etats-Unis sont en fonction depuis plusieurs années maintenant et leur perfectionnement constant rend optimiste la communauté sur une première détection durant la prochaine décennie. Ces instruments sont principalement dédiés à l'observation d'événements produisant des OG dans une gamme de fréquence comprise entre 1 Hz et 10 kHz. En dessous de 1Hz, le signal est noyé dans le bruit sismique auquel on ne peut se soustraire sauf si l'on envoie l'interféromètre dans l'espace. C'est pourquoi une nouvelle

¹Au passage d'une OG, la longueur d'un bras d'un interféromètre de type LIGO (4km) subirait une variation de l'ordre de 10^{-18} m ce qui est 1000 fois plus faible que le diamètre d'un proton.

génération de détecteurs d'OG et de nouvelles méthodes de détection² sont sur le point de voir le jour. eLISA (evolving Laser Interferometer Space Antenna) [7] est un projet considéré par l'Agence Spatiale Européenne visant à positionner un interféromètre géant sur l'orbite terrestre dédié à l'étude basse fréquence des OG. La sensibilité de cet instrument est optimale dans la gamme 0.1 mHz - 1 Hz ce qui complète la partie du spectre observable par LIGO et VIRGO et correspond à l'étude de sources très massives dont la masse peut être comprise entre $10^5 M_\odot$ et $10^6 M_\odot$. Les EMRI (Extreme Mass Ratio Inspiral) sont ainsi de très bons candidats détectables par eLISA.

Les EMRI sont des systèmes binaires asymétriques constitués par un trou noir super massif (TNSM) dont la masse peut être comprise entre $10^5 M_\odot$ et $10^7 M_\odot$ et autour duquel gravite un objet de faible masse. L'étude de la source radio compacte SgrA* a mis en évidence la présence d'un objet massif au centre du bulbe galactique [8–13]. Les orbites képlériennes décrites par les étoiles jeunes autour du point attracteur semblent indiquer que l'objet central possède une masse de $4.31 \pm 0.38 \times 10^6 M_\odot$ [12] et serait bien de type TNSM. Cette configuration n'est pas propre à la Voie Lactée et la plupart des galaxies sont maintenant supposées abriter un TNSM en leur cœur [14]. Le compagnon de faible masse, qui est le deuxième ingrédient d'un système EMRI, est capturé sur une orbite bornée autour du TNSM. Cette orbite va progressivement décliner en perdant de l'énergie et du moment angulaire sous la forme de bouffées d'ondes gravitationnelles émises lors du passage au périastre. Initialement, les paquets d'ondes sont très espacés dans le temps mais dans les dernières années précédant le plongeon, la source rayonne continuellement dans une bande fréquentielle visible par les interféromètres de type eLISA. Des étoiles de la séquence principale de faible masse mais de grande taille, si elles étaient capturées par un TNSM seraient en fait déchirées par les effets de marée avant même qu'elles atteignent la dernière orbite stable [15]. Par conséquent, le petit objet compagnon du TNSM dans un système EMRI, n'est pas seulement de faible masse mais est aussi un objet compact probablement de type naine blanche ($m \approx 0.6 M_\odot$), étoile à neutrons ($m \approx 1.4 M_\odot$) ou TN de masse stellaire ($m \approx 10 M_\odot$), voir de masse intermédiaire ($m \approx 100 M_\odot$). Plusieurs mécanismes peuvent conduire à la formation d'un système EMRI. Par exemple ils peuvent être générés lors de la séparation d'un système binaire qui serait passé à proximité d'un TNSM. Une deuxième hypothèse serait d'envisager un disque de matière autour du TNSM où des étoiles peuvent se former puis se faire capturer après leur effondrement en trou noir. Enfin, par différenciation

²L'idée selon laquelle, la durée du trajet optique entre deux masses libres ou partiellement contraintes varie sous l'influence d'une OG n'est pas seulement utilisée dans les interféromètres. Cette approche peut utiliser les impulsions radio d'une étoile à neutron en rotation rapide comme une référence temporelle très stable et chercher de petites variations dans les temps d'arrivée comme la signature du passage d'une OG. On peut montrer en fait que les systèmes binaires composés de TNSM de masses $10^7 M_\odot$ à $10^9 M_\odot$, d'une période de l'ordre de l'année, impactent des variations périodiques dans les temps d'arrivée des impulsions radio de l'ordre de la nanoseconde. Selon Hobbs et al. [6], en utilisant une grande collection de pulsars millisecondes déjà référencés, ce niveau de variation pourrait être détectable dans la prochaine décennie.

de la population stellaire dans le bulbe par des effets de diffusion, les étoiles les plus massives migrent vers le centre galactique et sont happées par le TNSM. Même s'il est difficile d'estimer le taux de création de tels systèmes il y a en gros deux ingrédients qui interviennent dans l'évaluation du nombre d'événements de type EMRIs dans l'univers : le premier est l'estimation de la densité spatiale de TNSM (qui est une contrainte observationnelle) dans la gamme des masses considérées ($10^5 M_\odot - 10^7 M_\odot$) et le second est une estimation de la "gourmandise" de chaque TNSM, c'est-à-dire le taux avec lequel chaque TNSM consomme des objets compacts. Ainsi, selon les estimations [16][17] le nombre d'événements ne dépasse pas quelques EMRIs par milliards d'années par TNSM. Heureusement dans le cas de eLISA, l'instrument devrait être sensible jusqu'à un redshift de 0.7 avec un rapport signal sur bruit de 20 [18] ce qui définit un volume d'espace suffisamment large pour englober un grand nombre de galaxies. Durant un temps de mission, d'à priori de deux ans, eLISA pourrait alors observer entre 10s et 1000s de signal EMRI, le nombre total de détection dépendant de la bande de fréquence considérée et du niveau de bruit du détecteur [18].

La fenêtre fréquentielle ouverte sur les EMRIs est d'un grand intérêt en physique fondamentale. En effet quand la source entrera dans le régime fréquentiel observable par eLISA, l'objet compact va effectuer plusieurs milliers d'orbites tout en cartographiant l'espace-temps sur son passage. Les ondes gravitationnelles émises seront par conséquent représentatives de la géométrie de l'espace-temps dans ce système et l'analyse du signal permettra, non seulement de tester la relativité générale en champ intense avec une précision jamais égalée, mais aussi de dire des choses sur la structure exacte de l'espace-temps. Ces informations permettront de vérifier les hypothèses liées au théorème d'unicité des trous noirs à savoir que tous les trous noirs stationnaires en rotation et non chargés électriquement sont décrits par la métrique de Kerr [19] confirmant ainsi la conjecture dite d'*absence de chevelure* [20][21]. Dans ce cas les précessions de périhélie et de Lense-Thirring [22] seraient clairement visibles et permettraient la mesure des paramètres orbitaux, de la masse M et du spin avec une précision extrême. La relativité générale serait ainsi questionnée à un niveau jamais atteint et pourrait éventuellement discriminer certaines théories alternatives à la gravitation ou nous éclairer sur la nature même de l'objet central. Si le TN central était autre chose qu'un TN (par exemple une étoile à bosons selon certains modèles) cela serait indubitablement visible dans les formes d'ondes.

Cette thèse fait intervenir les deux acteurs relativistes que l'on vient d'évoquer et qui ont un lien étroit, le trou noir et l'onde gravitationnelle. On se propose d'étudier les systèmes EMRI où le TNSM sera considéré non rotatif. Les trois premières lettres de l'acronyme EMRI indique que nous considérons un grand rapport de masse entre les deux objets et que ce paramètre peut être utilisé dans une approche perturbative pour formuler le problème. Ainsi, dans le cadre de la théorie perturbative des TN au sens de

Regge, Wheeler [23] et Zerilli [24–26], on proposera une technique numérique pour le calcul efficace des formes d’ondes générées par un système EMRI pour tous types d’orbites dans le cas où le TNSM est un TN de Schwarzschild. Le dernier mot de l’acronyme EMRI sous-tend la nature spiralante du mouvement suivi par l’objet de faible masse qui va perdre progressivement de l’énergie sous forme d’ondes gravitationnelles. C’est ce phénomène de dégradation de l’orbite imputée à la réaction de radiation qui sera aussi un aspect important de ce travail de thèse. On étudiera la notion de force propre (FP) qui est, on le verra un concept plus large que la réaction de radiation mais qui est un outil très puissant pour comprendre l’interaction du champ produit par l’objet en mouvement avec la métrique ambiante façonnée par le TNSM central. Le formalisme de la force propre permet de décrire, au premier ordre perturbatif, la dynamique du corps en mouvement comme celle d’une particule ponctuelle c’est-à-dire que le mouvement ne dépendra pas de la structure interne du compagnon mobile. Cette condition simplificatrice rend cependant impossible l’évaluation du champ à la position de la particule car celui-ci y est précisément divergent. Afin de pallier à ce problème on présentera la première procédure de régularisation du champ identifiée par Mino, Sasaki, Tanaka [27] et Quinn, Wald [28]. Cette solution analytique proposée n’est cependant pas adaptée au traitement numérique. On préférera, dans nos applications, manipuler la technique de régularisation Mode-Sum introduite par Barack et Ori [29]. On proposera un exemple de calcul de la FP dans le cas particulier de la chute radiale d’un objet ponctuel sur le TNSM et son action sur l’évolution du mouvement au cours de la chute. Même si la chute radiale n’est pas une configuration orbitale très pertinente en astrophysique, la chute d’un objet a été pendant longtemps un sujet d’étude et un cas de figure éclairant en science de la gravitation. Depuis la chute des boulets de Galilei jusqu’à l’expérience de pensée d’Einstein qui met en évidence le principe d’équivalence, il peut être intéressant d’envisager la chute radiale d’un objet massif dans un environnement très relativiste, ce que le formalisme de la FP permet de faire.

Ces travaux s’insèrent modestement dans le programme de recherche CAPRA qui regroupe de nombreuses équipes de travail internationales sur la modélisation des EMRI. Modélisation d’une grande importance pour l’exploitation des données future de eLISA. En effet pour les méthodes de type *filtre-adapté* utilisées pour l’extraction du signal astrophysique, la connaissance à priori de la forme d’onde du signal recherché est déterminante et plus elle sera connue avec exactitude et plus il sera facile d’extraire le signal intéressant des données instrumentales bruitées. La mention ”avec exactitude” sous-entend qu’il est impératif de comprendre les phénomènes locaux intervenant sur l’objet compact, comme la force propre, et qui ont un impact direct sur les formes d’ondes que l’on collecte à l’infini.

1.1 Ondes gravitationnelles (OG)

Cette section propose une brève introduction au formalisme qui décrit les ondes gravitationnelles en relativité générale et peut être écartée pour le lecteur déjà averti.

1.1.1 Théorie linéarisée

L'action d'Einstein-Hilbert [30] qui décrit la dynamique du champ gravitationnel s'écrit

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x , \quad (1.1)$$

où $g = \det(g_{\alpha\beta})$ est le déterminant de la métrique quadri-dimensionnelle $g_{\alpha\beta}$ et R est obtenu à partir du tenseur de Ricci [31] $R_{\alpha\beta}$

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} , \quad R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} , \quad (1.2)$$

où le tenseur de Riemann [32] est donné par

$$R^\mu_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} . \quad (1.3)$$

Les termes $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ sont les connexions affines reliées à la métrique par

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \right) . \quad (1.4)$$

On définit le tenseur énergie impulsion $T_{\alpha\beta}$ à partir de la variation de l'action de matière dans un changement infinitésimal de la métrique $g_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$ tel que

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} d^4x . \quad (1.5)$$

Ce terme décrit comment le champ de matière est couplé à la gravitation. La variation de l'action totale $S = S_g + S_m$ par rapport à $g_{\alpha\beta}$ donne l'équation du champ d'Einstein [33]

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} , \quad (1.6)$$

qui est un système d'équations non linéaires aux conditions initiales bien posées c'est-à-dire qu'elles déterminent les valeurs futures de $g_{\alpha\beta}$ à partir de valeurs initiales données. La formulation de (1.6) reste invariante sous une transformation de coordonnées $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha(x)$ de type difféomorphisme c'est-à-dire une transformation réversible, différentiable et de réciproque différentiable. En théorie linéarisée, on suppose qu'il existe un espace

de référence $\eta_{\alpha\beta}$ tel qu'au voisinage du point x on puisse écrire

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} , \quad |h_{\alpha\beta}| \ll |\eta_{\alpha\beta}| , \quad (1.7)$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ est l'espace-temps de Minkowski [34] de signature $(-, +, +, +)$ et $h_{\alpha\beta}$ une perturbation de faible amplitude. En choisissant cet espace de référence, on brise l'invariance de la relativité générale mais on peut montrer que la théorie linéarisée reste invariante sous le groupe de Poincaré [35]. Ainsi en introduisant la notation

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \quad \text{où} \quad h = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} , \quad (1.8)$$

à l'ordre 1, dans la jauge harmonique $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ (aussi dénotée jauge de Lorenz [36] ou jauge de de Donder [37][38] dans la littérature), l'équation (1.6) prend la forme d'une équation d'onde.

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} , \quad (1.9)$$

où seule la contrainte de champ faible $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ est invoquée ici. Le D'Alembertien donné par $\square := \eta_{\alpha\beta} \partial^\alpha \partial^\beta$.

1.1.2 Propagation des OG

Si l'on considère la propagation d'une OG $h_{\alpha\beta}$ déjà générée, on peut imposer $T_{\alpha\beta} = 0$ dans l'équation (1.9) et on obtient une équation d'onde homogène

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 , \quad (1.10)$$

à laquelle on peut chercher une solution sous la forme d'une superposition d'ondes planes monochromatiques (les 3-vecteurs seront notés en gras dans tout le manuscrit)

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = \int A^{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \exp(ik_\sigma x^\sigma) d^3\mathbf{k} , \quad (1.11)$$

où k^α est le quadri-vecteur d'onde $(k^0, \mathbf{k})$ et $A^{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ est l'amplitude de l'onde associée à k^α . En injectant cette décomposition dans l'équation d'onde homogène on obtient rapidement $k_\alpha x^\alpha = \eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = k^2 = 0$ qui traduit le fait que le vecteur d'onde est du genre lumière et que les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière. De même la condition de jauge harmonique nous donne $A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$ c'est-à-dire que k_α est orthogonal à l'amplitude de l'onde et donc que la propagation des ondes gravitationnelles est transverse. En imposant un choix de jauge particulier, la *jauge transverse et sans trace* (jauge TT), qui tire profit du caractère transverse des OG, on peut réduire les dix degrés de liberté de l'onde à seulement 2. Ces deux degrés de liberté sont les deux

modes de polarisation h_+ et $h_\times$ qui suffisent à caractériser cette OG dans la jauge TT. Sans perte de généralité, on peut supposer que le plan d'onde se propage le long de l'axe z et on a alors

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{\text{TT}} = h_{\alpha\beta}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t - z/c) & h_\times(t - z/c) & 0 \\ 0 & h_\times(t - z/c) & -h_+(t - z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

La dénomination "+" et "×" est liée à la topologie que prend un anneau de matière déformé au passage d'une OG (voir les Figs. 1.1 et 1.2). De façon plus générale, on peut trouver un opérateur de projection qui ramène la partie spatiale du champ $h_{\alpha\beta}$ dans le plan orthogonal au vecteur unitaire $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ et qui donne au final le champ TT pour une direction de propagation $\mathbf{n}$ quelconque. On montre que ce champ est simplement décrit par deux modes de polarisation, ou une matrice 2×2 dans la jauge TT et que si on effectue une rotation d'angle θ autour de l'axe de propagation associé à $\mathbf{n}$, on obtient

$$h_\times \pm ih_+ \rightarrow e^{\mp 2i\theta} (h_\times \pm ih_+). \quad (1.13)$$

En physique des particules, on appelle *hélicité*, la projection du moment angulaire total le long de la direction de propagation tel que $H = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ où $\mathbf{S}$ est le spin de la particule. Sous une rotation d'angle θ sur la direction de propagation, les états d'hélicité se transforment comme $h \rightarrow e^{iH\theta}h$. Donc la relation (1.13) indique que $h_\times - ih_+$ sont les états d'hélicité et que le graviton est une particule de spin 2.

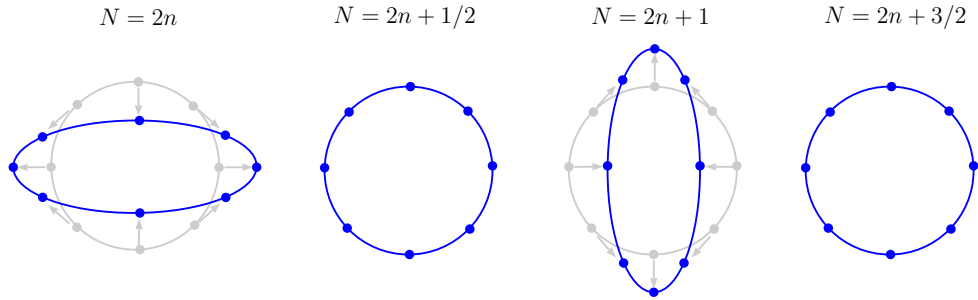


FIGURE 1.1: La position des points bleus représente l'effet d'une OG plane décrite par $h_+ \cos[\omega(t - z)]$ sur un cercle contenu dans le plan transverse à la propagation. La configuration initiale de chaque cliché est donnée par les points gris. De gauche à droite, $\omega(t - z)$ prend les valeurs $N\pi$.

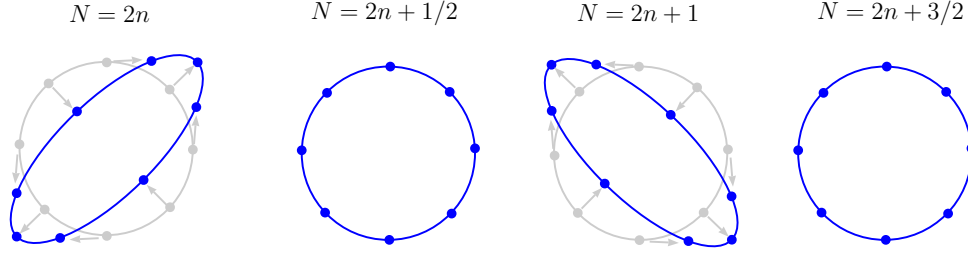


FIGURE 1.2: La position des points bleus représente l'effet d'une OG plane décrite par $h_{\times} \cos[\omega(t-z)]$ sur un cercle contenu dans le plan transverse à la propagation. La configuration initiale de chaque cliché est donnée par les points gris. De gauche à droite, $\omega(t-z)$ prend les valeurs $N\pi$.

1.1.3 Génération d'OG

En reprenant l'équation non homogène (1.9), on peut trouver une solution retardée au champ dont la partie spatiale s'écrit comme [39]

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{ij} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}; \mathbf{x}' \right) d^3 \mathbf{x}' , \quad (1.14)$$

Il est souvent difficile d'obtenir une solution analytique à cette expression, c'est pourquoi on introduit généralement un développement multipolaire de cette solution qui nous permet d'en calculer les approximations successives.

Formules du quadrupôle

Considérons une distribution de matière localisée autour de l'origine du système de coordonnées avec R la taille typique de la source, et r la distance séparant la source de l'observateur supposée grande devant R (approximation de source compacte), c'est-à-dire $r \gg R$. Dans ce cas il est suffisant de ne considérer que le premier terme du développement multipolaire et si l'on contraint les vitesses typiques à l'intérieur de la source comme étant bien plus faible que la vitesse de la lumière c on peut écrire

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{4G}{c^4 r} \int_{|\mathbf{x}'| < d} T_{ij} \left(t - \frac{r}{c}; \mathbf{x}' \right) d^3 \mathbf{x}' , \quad (1.15)$$

Pour de faibles vitesses, la densité de matière de la source ρ est reliée à $T^{00} \approx \rho c^2$. Dans la jauge TT on obtient à l'ordre dominant

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^2 r} \frac{d^2 Q_{ij}^{\text{TT}}}{dt^2} , \quad (1.16)$$

où Q_{ij}^{TT} est le moment quadrupolaire de la source projeté dans la jauge TT. Dans l'approximation des faibles vitesses ce moment est associé au moment quadrupolaire

newtonien Q_{ij} qui s'écrit comme

$$Q_{ij}(t) = \int \rho(t, \mathbf{x}) \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 \delta_{ij} \right) d^3 \mathbf{x} . \quad (1.17)$$

Q_{ij} est une quantité observationnellement accessible car elle apparaît dans le développement multipolaire du potentiel gravitationnel newtonien

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{GM}{r} + \frac{3GQ_{ij}(t)n^i n^j}{2r^3} + \dots \quad (1.18)$$

où les n^i sont les composantes du vecteur unitaire donnant la direction de propagation de l'onde.

Luminosité gravitationnelle

Les OG transportent de l'énergie et du moment que l'on peut associer³ à un tenseur énergie-impulsion qui est le tenseur d'Isaacson [40][41] donné par

$$T_{\alpha\beta}^{\text{OG}} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial x^\beta} \right\rangle , \quad (1.19)$$

où les symboles $\langle \dots \rangle$ désignent une moyenne sur une petite région de l'espace-temps. Cette expression n'est valable que loin de la source, à une position où l'espace-temps peut être assimilé à un espace plat. En intégrant (1.19) sur une sphère entourant la source et en utilisant la formule du quadrupôle (1.16) on obtient la *luminosité gravitationnelle* L de la source c'est-à-dire l'énergie totale rayonnée sous la forme d'OG par unité de temps

$$L = \frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right\rangle , \quad (1.20)$$

qui est la deuxième formule du quadrupôle et qui est associée à l'énergie perdue par le système sous forme d'OG via la relation

$$dE/dt = -L , \quad (1.21)$$

où E est l'énergie orbitale du système. Bien évidemment, l'expression de L donnée dans (1.20) est valide uniquement en champ faible $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$, dans l'approximation de source compacte $R \ll r$ pour des objets en mouvement lent et où les effets de rétroaction du champ de type réaction de radiation sont négligeables. Cependant, pour une description plus fine, qui prendrait en compte les effets dominants de la force de réaction de radiation, on suppose que l'équation de *balance d'énergie* (1.21) est toujours valable.

³dans le cas où la longueur d'onde caractéristique des OG est petite devant l'échelle de variation de la courbure de l'espace-temps.

Les deux formules (1.16) et (1.20) ont été obtenues pour la première fois par Einstein [42] en 1918. Le rayonnement gravitationnel est quadrupolaire à l'ordre newtonien et son amplitude est modulée par le facteur G/c^5 extrêmement petit dont l'inverse vaut $c^5/G = 3.6 \times 10^{52} \text{W}$. Ce facteur limite notre capacité à produire des OG détectables en laboratoire mais pour des sources astrophysiques on peut atteindre des luminosités gigantesques. Si M est la masse de la source, R son extension spatiale, la norme Q du moment quadrupolaire est de l'ordre de $Q \approx \sigma MR^2$ où σ est un facteur d'asymétrie tel que $\sigma = 0$ pour un objet à symétrie sphérique. La formule (1.20) donnerait

$$L \approx \frac{c^5}{G} \sigma^2 \Xi^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6, \quad (1.22)$$

où la formule est construite de façon à faire apparaître l'inverse du facteur G/c^5 . Le terme $\Xi = 2GM/c^2 R$ est le facteur de compacité et v est la vitesse caractéristique de la dynamique de la source. Pour une source dont l'écart à la sphéricité peut être grand ($\sigma \approx 1$ dans les binaires), faisant intervenir des astres compacts ($\Xi \approx 1$) en mouvement rapide ($v \approx c$) on peut atteindre une puissance rayonnée de l'ordre du rapport c^5/G soit 10^{26} fois la luminosité du Soleil dans le domaine électromagnétique ! D'après (1.22) on voit clairement que des systèmes comme des binaires de TN font partie des sources susceptibles de produire un puissant rayonnement sous la forme d'OG.

En gardant les mêmes notations, la première formule du quadrupole (1.16) permet d'estimer l'ordre de grandeur de l'amplitude h d'une OG générée à une distance r de l'observateur

$$h \approx 4\Xi \left(\frac{R}{r} \right) \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (1.23)$$

L'amplitude des OG est alors d'autant plus importante que la source est compacte (ou massive) et son mouvement relativiste ($v \approx c$). Par exemple la valeur de $h \approx 10^{-21}$ mentionnée dans l'introduction peut être obtenue en considérant une source astrophysique de masse $M \approx 10M_\odot$, dont la dynamique est relativiste $v \approx c$ et située dans l'univers proche ($r \approx 200 \text{ Mpc}$).

La formule du quadrupôle est très simple puisqu'elle ne fait intervenir au final que le quadrupôle newtonien de la distribution de masse (important dans les systèmes binaires) et s'est avérée très efficace pour prédire l'évolution de la période orbitale du pulsar binaire PSR1913+16 déjà mentionné. Le cas relativiste d'un problème à deux corps dans une configuration plus générale sort de ce cadre approximatif notamment en ce qui concerne la vitesse des objets qui peut devenir importante et sur les effets de réaction de radiation qui deviennent cruciaux dans le cas de sources très compactes.

1.2 Le problème à deux corps en relativité générale

1.2.1 Théorie post-newtonienne

Déjà très tôt dans le développement de la relativité générale, une méthode d'approximation qualifiée de *post-newtonienne* fut introduite par Einstein [43], Droste [44] et de Sitter [45][46]. Cette méthode a permis aux théoriciens du début du 20ème siècle de rapidement envisager les conséquences observationnelles de la relativité générale. C'est pourquoi en à peine un an cette méthode put prédire l'avance relativiste du périhélie des planètes, le redshift gravitationnel et la déflexion lumineuse. Le formalisme post-newtonien fait intervenir un développement autour de la limite newtonienne en gardant les termes d'ordres supérieurs dans un petit paramètre

$$\epsilon \sim \frac{v^2}{c^2} \sim |h_{\alpha\beta}| \sim \left| \frac{\partial_0 h}{\partial_i h} \right|^2 \sim \left| \frac{T^{0i}}{T^{00}} \right| \sim \left| \frac{T^{ij}}{T^{00}} \right|. \quad (1.24)$$

L'équation du mouvement de deux corps (de masses m_1 et m_2) en interaction gravitationnelle peut par exemple être développée à l'ordre 3.5PN (c'est-à-dire à l'ordre $\epsilon^{7/2}$)

$$\frac{d^2 x_{1,2}^i}{dt^2} = \mathcal{A}_{1,2}^{i,\text{cons}} + \mathcal{A}_{1,2}^{i,\text{diss}} + \mathcal{O}(\epsilon^{8/2}), \quad (1.25)$$

où

$$\mathcal{A}^{\text{cons}} = \mathcal{A}_{\text{Newton}} + \epsilon^1 \mathcal{A}_{1\text{PN}} + \epsilon^2 \mathcal{A}_{2\text{PN}} + \epsilon^3 \mathcal{A}_{3\text{PN}} \quad (1.26)$$

est relié aux effets conservatifs et

$$\mathcal{A}^{\text{diss}} = \epsilon^{5/2} \mathcal{A}_{2.5\text{PN}} + \epsilon^{7/2} \mathcal{A}_{3.5\text{PN}} \quad (1.27)$$

est lié aux effets dominants de la réaction de radiation et correspond donc aux effets dissipatifs. Ce formalisme est essentiellement valide en champ faible (grande séparation spatiale) et pour des systèmes binaires dont la vitesse orbitale est relativement faible devant c . Afin de pouvoir déterminer la dynamique d'un système binaire avec une précision acceptable pour une détection instrumentale il est nécessaire de calculer la trajectoire des deux corps et l'amplitude des OG avec une précision qui va au delà de la formule du quadrupôle (1.16). Dans le cas d'un système d'étoiles à neutrons, les techniques optimales de filtres-adaptés pour les données de LIGO ou VIRGO ont besoin d'au moins une approximation à l'ordre 3PN (en v^6/c^6) [47] au delà de l'approximation du moment quadrupolaire. Ceci est possible aujourd'hui, le développement à l'ordre 3PN [48][49] étant connus (on pourra se référer à Blanchet [50][51] pour une introduction au calcul post-newtonien appliqué aux sources binaires d'OG et les nombreuses références

qui ont contribué aux calculs des termes du développement PN). La recherche post-newtonienne est très présente dans la modélisation des EMRIs et est une approche complémentaire de la théorie perturbative à laquelle on peut confronter les résultats (voir section suivante).

1.2.2 Théorie perturbative

Lorsque l'un des deux corps est de masse bien plus importante que le second, le champ gravitationnel du petit corps peut être considéré comme une perturbation du champ du corps le plus massif. Dans un tel contexte on peut utiliser une théorie perturbative. Cette approche a été introduite par Regge et Wheeler [23] pour décrire les perturbations d'un trou noir de Schwarzschild. Ils ont montré que, dans une jauge appropriée, la jauge de Regge-Wheeler (RW), l'évolution du champ perturbé peut être ramenée à une équation de type équation d'onde classique. Ce formalisme a ensuite été complété par les travaux de Zerilli [26] et de Moncrief [52] proposant un cadre théorique pour traiter un trou noir de Schwarzschild de masse M perturbé par le champ d'une particule ponctuelle de masse $m \ll M$.

Dans le contexte des EMRI, on a déjà indiqué que le calcul de la force propre gravitationnelle était un outil puissant pour prendre en compte la rétroaction du champ de perturbation généré par la particule ponctuelle sur son propre mouvement orbital. Comme on l'a signalé dans l'introduction, le calcul de la FP n'est pas une tâche facile car le champ de perturbation est divergent à la position de la particule, il est donc nécessaire d'utiliser une procédure de régularisation appropriée. Dans la jauge de RW la singularité présente dans la métrique perturbée à la position de la particule prend une forme compliquée qui ne permet pas de trouver un schéma de régularisation adéquate pour extraire la FP. Seule la singularité portée par une orbite purement radiale est régularisable en jauge de RW [53][54] comme cela sera étudié dans le dernier chapitre. Le calcul de la force propre gravitationnelle est donc en pratique souvent effectué en jauge harmonique où l'évolution des perturbations de la métrique est moins simple à formuler que dans la jauge de RW mais où la procédure de régularisation est bien identifiée. Les premiers calculs de FP gravitationnelle ont été effectués dans la jauge harmonique pour des orbites circulaires par Barack et Sago [55], Berndtson [56], Akcay [57] puis pour des orbites génériques excentriques par Barack et Sago [58].

Même si la théorie post-newtonienne et les calculs de FP en théorie perturbative font intervenir des jauges différentes et des schémas de régularisation différents, il est pourtant possible de comparer leurs résultats via des quantités invariantes de jauges appropriées [59][60] qui sont bien définis en PN et en FP. Ainsi des comparaisons réussies ont été effectuées pour des orbites circulaires autour d'un TN de Schwarzschild en utilisant le

décalage de la position de la dernière orbite stable [61] et le redshift observable [60] ou encore en utilisant l'avance du périastre pour des orbites excentriques [62][63].

1.2.3 Effective One Body (EOB)

Le développement post-newtonien donne une bonne description du mouvement et du rayonnement d'un système binaire (de deux TN par exemple) mais ce, seulement durant la première phase de la spirale c'est-à-dire tant que le paramètre $\Xi = GM/c^2 R$ (où R est la distance entre les deux TN) reste significativement plus petit que $1/6$. Au delà, le mouvement orbital est dynamiquement instable et on entame la dernière phase de spirale avant le plongeon, qui elle est bien décrite par la relativité numérique. Une méthode a été proposée en 1999 par Buonanno et Damour [64] qui permet de couvrir toutes les étapes (spirale, plongeon, coalescence et désexcitation par modes quasi-normaux). Cette technique qualifiée de *Effective One Body* (EOB) n'est pas sans rappeler l'approche classique du problème à deux corps newtonien puisqu'il s'agit de réduire ce problème à la dynamique d'un seul corps dans une géométrie effective. Le but est de trouver un espace-temps effectif pour lequel le mouvement géodésique d'une particule test de masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, dans cet espace-temps effectif, serait équivalent à la dynamique originale donnée par les équations hamiltoniennes (développées en termes post-newtoniens) du problème à deux corps. Cette théorie utilise massivement certaines techniques de resommation [64][65] des résultats post-newtoniens et ajuste les formes d'ondes produites sur certains résultats déjà connus en relativité numérique lors la dernière phase de coalescence. On pourra se référer au cours de Damour et Nagar [66]. En utilisant cette méthode, des formes d'ondes complètes ont pu être calculées dans le cas de systèmes binaires de deux TN [67].

1.2.4 Relativité numérique

Ce champ d'activité s'est développé avec le perfectionnement des moyens technologiques et l'optimisation des algorithmes de calcul. En relativité numérique (RN) on cherche à modéliser la dynamique de l'espace-temps complet d'un système à deux corps en résolvant numériquement les équations du champ d'Einstein. De nombreux travaux issus de groupes indépendants ont vu le jour depuis plusieurs dizaines d'années en produisant des résultats intéressants pour comprendre la physique des TN qui coalescent pour des rapports de masse variés (on pourra se référer à Pretorius [68] pour une revue des principaux résultats récents en RN). La comparaison des formes d'ondes produites par la RN servent très souvent comme références aux modèles. Notamment, la confrontation aux calculs de FP gravitationnel, EOB ou post-newtoniens ont été envisagés [63][69]. D'une façon assez surprenante, il a été montré que la FP gravitationnelle d'un système EMRI pouvait être raisonnablement comparée à des résultats de RN pour des rapports de

masse entre 1 : 1 à 1 : 8 laissant penser que la théorie perturbative pourrait être valide non seulement dans le régime EMRI mais aussi pour des rapports de masse intermédiaires (système IMRI pour Intermediate Mass Ratio Inspiral) d'environ 1 : 100 (eLISA pourrait mettre en évidence ces trous noirs de masse intermédiaire s'ils existent [70][71]).

1.3 Organisation de la thèse

Cette thèse s'organise de la façon suivante :

Au chapitre 2 on donnera tout le matériel nécessaire à la compréhension de la force propre en détaillant la façon dont elle a été mise en évidence depuis les travaux de Dirac [72] en 1938 puis calculée dans un espace-temps plat par Dewitt et Brehme [73] puis dans un espace-temps courbe par Mino Sasaki, Tanaka [27] Quinn et Wald [28]. On montrera également comment numériquement la force propre est accessible par la régularisation Mode-Sum introduite par Barack et Ori [29].

Dans le chapitre 3, qui peut être abordé indépendamment du chapitre 2, on détaillera dans un premier temps la structure d'un TN de Schwarzschild et dans un deuxième temps comment cette structure est modifiée par une particule dont le champ interagit avec la métrique de fond. On présentera alors le formalisme de Regge, Wheeler [23] et Zerilli [26] nécessaire pour traiter le cas d'un TN de Schwarzschild perturbé.

Le chapitre 4 sera consacré à la présentation de l'algorithme numérique que nous avons construit pour résoudre les équations de Regge-Wheeler-Zerilli introduites dans le chapitre 2 et qui donnent les formes d'ondes à l'infini pour un système de type EMRI où le TNSM est un TN de Schwarzschild et l'objet compact une particule ponctuelle. Les résultats de l'implémentation numérique seront donnés pour tous les types d'orbites.

Enfin le chapitre 5 est dédié au calcul de la force propre gravitationnelle dans la jauge de RW pour une orbite radiale. On considère un système où la particule chute radialement sur le TNSM depuis une position finie avec une vitesse initiale nulle. La FP est calculée le long de cette géodésique en utilisant le formalisme de RW et l'algorithme présenté au chapitre 4. Dans le cadre de la régularisation Mode-Sum on détaillera d'abord le calcul des paramètres de régularisation nécessaire pour le calcul de la FP puis on présentera les résultats obtenus. Ensuite l'évolution orbitale sera étudiée, c'est-à-dire que l'on calculera les effets de la FP sur l'équation du mouvement et on présentera une méthode pour prendre en compte ces effets au cours du mouvement de façon auto-consistante.

Tout au long de ce travail nous utiliserons les conventions suivantes : la signature de la métrique sera $(-, +, +, +)$ et nous travaillerons dans le système d'unités pour lequel la constante de gravitation G et la vitesse de la lumière c prennent la valeur unité ($G = c = 1$).

Chapitre 2

Force propre et réaction de radiation

GRÂCE aux travaux d'Abraham [74] et Lorentz [75], la notion de réaction de radiation fut d'abord introduite dans le cadre de la physique classique de l'électromagnétisme. L'idée est de prétendre que par conservation d'énergie et de moment angulaire, toute charge produisant un rayonnement devrait subir une force de recul ou force de réaction au rayonnement produit.

Imaginons une charge en mouvement dans un champ magnétique uniforme et donnons à cette charge une impulsion initiale qui lui assure un mouvement plan perpendiculaire au champ magnétique. Dans ce cas de figure, la charge a un mouvement circulaire de vitesse v et subit une accélération v^2/r où r est la distance à l'origine du repère. De plus la charge émet un rayonnement synchrotron qui transporte une partie de son énergie loin du système. L'énergie cinétique de la particule et le champ magnétique uniforme sont les deux seules sources d'énergie du système. Or le champ magnétique ne travaille pas sur les charges, donc la seule source d'énergie est l'énergie cinétique de la particule chargée. Par conséquent la radiation diminue l'énergie cinétique, effet connu sous le nom de *réaction de radiation*. Cette diminution d'énergie cinétique peut être caractérisée par un travail et peut donc être exprimée en terme de force. Cette force de réaction de radiation qui agit sur la particule est calculée à partir de l'état même du champ qui décrit la particule. C'est pourquoi ce phénomène est souvent vu comme l'interaction du champ de la particule avec lui-même. De façon générale l'insertion d'une auto-interaction dans une théorie physique conduit à des problèmes de renormalisation souvent complexes (et parfois inextricables). C'est ce que Dirac [72] montre lorsqu'il donne la version relativiste de l'équation d'Abraham-Lorentz.

Dans le chapitre 1, on a vu que de l'énergie et du moment cinétique pouvaient être transportés sous la forme d'un rayonnement gravitationnel. On peut donc envisager d'associer une force de réaction de radiation au rayonnement gravitationnel.

Concrètement, l'approche gravitationnelle et relativiste du problème conduit à considérer une particule massive en accélération dans le champ gravitationnel ambiant (d'un deuxième objet par exemple). Cette fois-ci, le champ de perturbation créée par la particule modifie la géométrie de l'espace-temps lui même et sera couplé au mouvement de la particule. Si le champ de perturbation est de faible amplitude, on peut, dans le cadre de la théorie perturbative, utiliser le formalisme de la force propre pour décrire cette interaction. Dans ce cadre formel on peut montrer que le champ de perturbation peut non seulement rayonner de manière irréversible de l'énergie et du moment (sous la forme d'ondes gravitationnelles) mais peut également transférer de l'énergie et du moment de façon réversible à la matière. La force propre n'est donc pas qu'une force de réaction de radiation mais décrit également des effets conservatifs entre le champ de perturbation et la source. On verra que le calcul de la force propre gravitationnelle est un sujet épineux notamment à cause de la nature singulière du champ de perturbation qui rend difficile son évaluation sur la ligne d'univers.

Le but de cette section est de fournir le formalisme à la base du concept de force propre. Dans un premier temps on introduira la force propre électromagnétique en définissant d'abord la force classique d'Abraham-Lorentz puis sa version relativiste donnée par Dirac dans le cas d'un électron en mouvement dans un espace temps plat. On présentera ensuite la généralisation de la FP électromagnétique par Dewitt et Brehme [73] au cas d'un espace-temps courbe. Dans un second temps, nous étendrons cette étude au cas gravitationnel pour lequel Mino, Sasaki, Tanaka [27], Quinn et Wald [28] ont fournis une technique de régularisation du champ pour extraire la force propre gravitationnelle. Cette formulation fait seulement intervenir la partie non singulière du champ de perturbation pour laquelle Detweiler et Whiting [76] ont donné un sens physique. On verra enfin qu'il est nécessaire de reformuler le cadre laissé par ces auteurs dans le but d'exploiter la FP gravitationnelle numériquement. On détaillera alors comment régulariser la force propre gravitationnelle par la méthode Mode-Sum introduite par Barack et Ori [29]. On terminera par distinguer les deux aspects conservatif et dissipatif de la force propre. Dans la majeure partie de ce chapitre on suivra les notations utilisées par Poisson [77].

2.1 Force propre électromagnétique

Dans cette partie on se propose d'introduire la notion de force propre électromagnétique en examinant l'équation du mouvement d'une particule chargée. La force de réaction de radiation ressentie par la particule sera d'abord introduite dans le cadre de la théorie classique d'Abraham et Lorentz. Ensuite le terme de force propre relativiste et l'équation du mouvement seront ensuite calculés dans le cas d'un espace-temps plat puis dans le cas d'un espace-temps courbe.

2.1.1 Force d'Abraham-Lorentz-Dirac

Historiquement le concept de force de réaction de radiation apparaît d'abord dans les travaux d'Abraham [74] et Lorentz [75]. Notre point de départ est la loi fondamentale de la dynamique pour laquelle on considère une particule test de vitesse $\mathbf{v}$, de masse m_0 et de charge q accélérée par une force externe donnée $\mathbf{F}_{\text{ext}}$

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (2.1)$$

Puisque la particule accélère (car sollicitée par la force externe) elle émet un rayonnement dont la puissance est donnée par la formule de Larmor [78][79]

$$P(t) = \frac{2}{3} q^2 \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 . \quad (2.2)$$

De plus, selon la loi de conservation sur l'énergie, le travail W_{ext} effectué par la force externe doit être égale à la variation d'énergie cinétique ΔE_c plus l'énergie ΔE_r déposée dans le champ du rayonnement. Formellement on a

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_c + \Delta E_r . \quad (2.3)$$

Du point de vu de la charge, si l'on réarrange (2.3) comme $W_{\text{ext}} - \Delta E_r = \Delta E_c$, on peut envisager l'existence d'une autre force agissant sur la particule telle que le travail total de cette force diminue l'énergie cinétique de la charge et place cette énergie dans le champ rayonné. On nommera cette force, la *force de réaction de radiation*. L'équation (2.1) se réécrit alors comme

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{RR}} = m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} , \quad (2.4)$$

où $\mathbf{F}_{\text{RR}} = m_0 d\mathbf{v}/dt - \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la force de réaction de radiation. De plus, en vertu de la conservation de l'énergie, le travail produit par la force de réaction de radiation doit égalier la quantité d'énergie rayonnée par la charge. Donc en supposant que le mouvement est périodique de période T on a

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{F}_{\text{RR}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_0}^{t_0+T} P dt \quad (2.5)$$

$$= - \frac{2}{3} q^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt , \quad (2.6)$$

où le signe moins indique que l'énergie est enlevée au système. En intégrant par partie le terme de droite on trouve

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{F}_{\text{RR}} \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{2}{3}q^2 \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right]_{t_0}^{t_0+T} + \frac{2}{3}q^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \cdot \mathbf{v} dt . \quad (2.7)$$

Enfin, si le mouvement est périodique (on aurait également pu considérer un mouvement pour lequel les points aux bornes de l'intégrale sont tels que $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 0$) on a

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left(\mathbf{F}_{\text{RR}} - \frac{2}{3}q^2 \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0 . \quad (2.8)$$

Une condition *suffisante* (mais pas nécessaire) pour satisfaire (2.8) est de prendre

$$\mathbf{F}_{\text{RR}} = \frac{2}{3}q^2 \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} . \quad (2.9)$$

On aurait pu choisir une autre condition que (2.9) pour satisfaire la contrainte intégrale (2.8). Par exemple en demandant à ce que la différence $\mathbf{F}_{\text{RR}} - \frac{2}{3}q^2 d^2\mathbf{v}/dt^2$ soit orthogonale à $\mathbf{v}$ même si cela peut paraître très spécifique. Quoi qu'il en soit, la seule condition nécessaire est que l'intégrale (2.8) soit nulle et il ne semble pas que l'on puisse imposer une condition nécessaire (et suffisante) sur $\mathbf{F}_{\text{RR}}$. En terme d'accélération $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, l'équation (2.1) devient

$$m_0 \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{2}{3}q^2 \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (2.10)$$

qui est appelée *équation d'Abraham-Lorentz* dans laquelle $\mathbf{F}_{\text{RR}}$ est la *force d'Abraham-Lorentz*. Dirac [72] en donnera une version relativiste totalement covariante que l'on nommera *équation d'Abraham-Lorentz-Dirac* (ALD)

$$m_0 a^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + \frac{2}{3}q^2 (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) \frac{da^\beta}{d\tau} \quad (2.11)$$

où τ est le temps propre de la particule qui paramétrise la ligne d'univers γ formée par l'ensemble des points $x^\alpha = x'^\alpha(\tau)$. On définit la quadri-vitesse de la particule par $u^\alpha(\tau) = dx'^\alpha/d\tau$ et sa quadri-accélération par $a^\alpha(\tau) = du^\alpha/d\tau$. Le deuxième terme du membre de droite de (2.11) est la force d'ALD dans sa forme originale. C'est ce terme en q^2 qui traduit, via la dérivée temporelle de son accélération, l'action du champ de la particule sur son propre mouvement. L'équation d'ALD (2.11) nous indique bien que l'accélération dépend mathématiquement de sa propre variation mais elle ne nous renseigne pas clairement sur l'origine de cette auto-accélération. Pour comprendre ce mécanisme il est nécessaire de faire une étude détaillée de l'équation qui régit la dynamique du champ de la particule.

2.1.2 Mouvement d'une particule chargée dans un espace-temps plat

Considérons le quadri-potentiel A^α de la charge q dans une métrique de Minkowski $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ notée $\eta_{\alpha\beta}$ et d'inverse $\eta^{\alpha\beta}$. A^α suit les équations de Maxwell [80] et satisfait, sous la condition de Lorenz [36] $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, l'équation d'onde suivante

$$\eta^{\beta\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma A^\alpha = -4\pi j^\alpha, \quad (2.12)$$

où j^α est la densité de courant associée à la charge ponctuelle

$$j^\alpha = q \int u^\alpha \delta^{(4)}(x - x'(\tau)) d\tau. \quad (2.13)$$

En toute généralité, l'équation d'onde (2.12) peut être résolue à l'aide d'une fonction de Green [81] $G(x, x')$ solution de

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta G = -4\pi \delta(x - x') \quad (2.14)$$

telle que la solution générale soit

$$A^\alpha(x) = \int G(x, x') j^\alpha(x') d^4 x' + \text{solution homogène de (2.12)}. \quad (2.15)$$

On désigne par $x = (t, \mathbf{x})$ un point d'évaluation au voisinage de la ligne d'univers γ et par $x' = (t', \mathbf{x}')$ un point de γ . Examinons deux solutions admissibles à (2.12) souvent utilisées : l'une correspond au champ retardé A_{ret}^α que l'on peut écrire à partir de la fonction de Green retardée $G_{\text{ret},\beta'}^\alpha(x, x')$

$$A_{\text{ret}}^\alpha(x) = \int G_{\text{ret},\beta'}^\alpha(x, x') j^{\beta'} d^4 x'. \quad (2.16)$$

L'autre solution particulière étant la solution avancée A_{adv}^α que l'on peut écrire à partir de la fonction de Green avancée $G_{\text{adv},\beta'}^\alpha(x, x')$

$$A_{\text{adv}}^\alpha(x) = \int G_{\text{adv},\beta'}^\alpha(x, x') j^{\beta'} d^4 x'. \quad (2.17)$$

Les tenseurs évalués en x sont donnés par des indices non primés et les tenseurs en x' par des indices primés. L'expression explicite de $G_{\text{ret},\beta'}^\alpha(x, x')$

$$G_{\text{ret},\beta'}^\alpha(x, x') = \delta_{\beta'}^\alpha \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.18)$$

$$G_{\text{adv},\beta'}^\alpha(x, x') = \delta_{\beta'}^\alpha \frac{\delta(t - t' + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.19)$$

montre clairement le support de ces fonctions de Green qui correspond aux contributions transmises directement à x via le cône de lumière futur de x' (voir Fig. 2.1). Dit autrement, dans un espace-temps plat,

- (i) la seule contribution au champ retardé A_{ret}^α provient du point d'intersection x' de la ligne d'univers avec l'hypersurface du cône de lumière passé du point x
- (ii) la seule contribution au champ avancé A_{adv}^α vient du point d'intersection x' de la ligne d'univers avec l'hypersurface du cône de lumière futur du point x .

Physiquement, cela indique que le principe de Huygens [82] est respecté dans un espace-temps plat à 4 dimensions¹ puisque toute perturbation contribuant à A^α se propage à la vitesse caractéristique. Imaginons que notre particule suive un mouvement circulaire autour d'un centre attracteur (une éventuelle seconde charge). Dans ce cas, la solution retardée, apparaît comme une situation fidèle au phénomène de réaction de radiation, c'est à dire une radiation sortant du système et une particule dont le rayon de l'orbite diminue sous l'effet de la force propre. De façon intuitive on peut voir la solution avancée comme la situation inverse dans laquelle la particule absorbe un rayonnement venant de l'infini et le rayon de son orbite augmente.

Compte tenu de la nature singulière de j^α il est clair que la valeur du champ A_{ret}^α devient infinie lorsqu'il est évalué au voisinage de la ligne d'univers ($x \rightarrow x'$). Ce comportement, lié au fait que l'on considère notre particule comme ponctuelle, rend difficile l'examen du champ sur la ligne d'univers et il est par conséquent difficile de voir comment le champ est supposé agir sur la particule. Pour remédier à cette complication on introduit deux nouveaux champs A_S^α et A_R^α tels que

$$A_S^\alpha = \frac{1}{2} (A_{\text{ret}}^\alpha + A_{\text{adv}}^\alpha). \quad (2.20)$$

A_S^α est une superposition des deux solutions avancée et retardée et pourrait être vu comme une particule suivant une orbite fixe pour laquelle la quantité de rayonnement émis et absorbé est en juste proportion, il n'y a donc ni perte ni gain d'énergie². La particule ne subit donc aucune force de la part de A_S^α . L'indice "S" est pour "Symétrique" en référence à la façon dont il est construit mais aussi pour "Singulier" car A_S^α est une combinaison linéaire de solutions singulières et reste donc singulier. On a donc une solution qui est singulière au voisinage de la particule et qui n'exerce aucune force sur cette

¹De façon générale le principe de Huygens est respecté dans tout espace-temps plat dont la dimension est un nombre pair. Toute information se propage à la vitesse caractéristique. Une source produisant un flash sera vu par un observateur comme un flash identique. En revanche dans un espace-temps plat à 3 ou 5 dimensions, une fraction finie de l'énergie peut se propager à une vitesse plus lente que la vitesse caractéristique. L'observateur voit un flash suivi d'une rémanence dont l'intensité s'atténue. Dans le cas de la réaction de radiation cela se manifeste par un terme diffusé (tail) dans l'équation du mouvement équivalent au terme de même nature que l'on obtiendrait dans le cas d'un espace-temps courbe.

²Cette superposition de champ retardé et avancé fut également utilisée en mécanique quantique dans ce qu'on appelle *l'interprétation transactionnelle* de la mécanique quantique proposée par Cramer en 1986 [83]. Il décrit de cette façon toute interaction quantique par des ondes stationnaires formées par l'association d'une onde avancée et retardée.

dernière. On peut noter que ce raisonnement, présent dans l'article de Dirac [72], ne fait pas d'hypothèse préalable sur la géométrie de l'espace-temps, donc quelle que soit la métrique, A_S^α ne sera jamais responsable de la réaction de radiation.

La singularité de A_S^α et de A_{ret}^α partageant la même structure, retrancher A_{ret}^α à A_S^α devrait constituer une solution qui reste bien définie au voisinage de la particule. On construit le potentiel régulier A_R^α tel que

$$A_R^\alpha = A_{\text{ret}}^\alpha - A_S^\alpha = \frac{1}{2} (A_{\text{ret}}^\alpha - A_{\text{adv}}^\alpha). \quad (2.21)$$

A_S^α ne produit aucune force sur la particule chargée, c'est donc A_R^α qui explique à lui seul la force de réaction de radiation. L'indice "R" désigne "Régulier" car ce champ n'est pas singulier au voisinage de la particule. Le comportement régulier de A_R^α suggère qu'il est solution de l'équation du champ (2.12) dans sa version homogène. Par conséquent, puisque $\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta A_R^\alpha = 0$, on peut naturellement interpréter A_R^α comme un champ de rayonnement indépendant de toute source, c'est la solution pour une particule libre qui voit un rayonnement incident donc "R" peut aussi désigner "Radiatif".

La notation covariante des équations de Maxwell [80] se fait pas l'intermédiaire du tenseur électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ relié au potentiel par

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta, \quad (2.22)$$

et qui permet de définir le tenseur énergie impulsion électromagnétique d'une particule chargée dans une métrique de Minkowski par

$$T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\gamma} F_\gamma^\beta + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right). \quad (2.23)$$

La particule est également massive donc on peut lui associer

$$T_m^{\alpha\beta} = m_0 \int u^\alpha u^\beta \delta^4(x - x'(\tau)) d\tau \quad (2.24)$$

qui est le tenseur énergie-impulsion d'une particule ponctuelle de masse m_0 en mouvement dans une métrique de Minkowski. La conservation du tenseur énergie-impulsion $\partial_\beta (T_{em}^{\alpha\beta} + T_m^{\alpha\beta}) = 0$ conduit à l'équation du mouvement [72]

$$m_0 a^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + q F_\beta^\alpha u^\beta, \quad (2.25)$$

où $F_{\alpha\beta}$ doit être évalué au point $x = x'(\tau)$. D'après le raisonnement précédent on a vu que $F_{\alpha\beta}$ est singulier en $x = x'(\tau)$ mais on a vu également que seul A_R^α est responsable du mouvement. Donc l'équation du mouvement correcte serait (et c'est ce que postule

Dirac)

$$m_0 a^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + q F_{R\beta}^\alpha u^\beta, \quad (2.26)$$

où on a défini le tenseur électromagnétique régulier $F_{\alpha\beta}^R$ tel que

$$F_{\alpha\beta}^R = \partial_\beta A_\alpha^R - \partial_\alpha A_\beta^R. \quad (2.27)$$

Dirac donne un calcul explicite de A_R^α en établissant un bilan détaillé de l'énergie le long d'un tube (d'univers) entourant une partie de la ligne d'univers dont il fait tendre le rayon vers 0. Sommairement il s'agit d'associer au flux d'énergie-impulsion sortant du tube la variation d'énergie et de moment de la particule entre les deux sections du tube. L'équation du mouvement devient [72]

$$m_0 a^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + \frac{2}{3} q^2 (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) \frac{a^\beta}{d\tau}. \quad (2.28)$$

On retrouve l'équation d'ALD (2.11). Cette version de l'équation d'ALD est en fait pathologique puisqu'elle peut engendrer des solutions physiquement non acceptables comme des solutions exponentiellement accélérée ou pré-accelérée³. Ces problèmes sont bien connus dans la littérature [84][85][86] et plusieurs techniques ont été proposées pour palier à ces complications. La technique de *réduction d'ordre* consiste à considérer que l'échelle de temps t_a durant laquelle varie l'accélération est très grande devant le paramètre $t_q = q^2/m_0$ (qui a aussi une dimension d'un temps). Cet argument n'autorisera plus, en définitive, des solutions exponentiellement accélérées. La réduction d'ordre permet de réécrire l'équation du mouvement sous la forme d'une équation qui reste équivalente à (2.28) dans le sens où elle n'en diffère que par des termes d'ordre $\mathcal{O}(t_q^2/t_a^2)$. Techniquement on différencie (2.28) et on injecte le résultat lui même dans (2.28) en ne conservant que les termes plus grands que $\mathcal{O}(t_q^2/t_a^2)$. On obtient

$$m_0 a^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0} (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) \frac{dF_{\text{ext}}^\beta}{d\tau} + \mathcal{O}(t_q^2/t_a^2). \quad (2.29)$$

Cette dernière équation (2.29) est l'équation du mouvement d'une particule chargée dans un espace-temps plat où la force propre, deuxième terme du membre de droite, s'interprète bien comme l'interaction de la charge avec le champ externe. La force propre émerge ainsi lorsque la particule interagit avec son rayonnement par l'intermédiaire d'un champ externe.

³L'accélération à un temps t dépend de la valeur de la force externe à un temps postérieur. La particule accélère avant de subir la force.

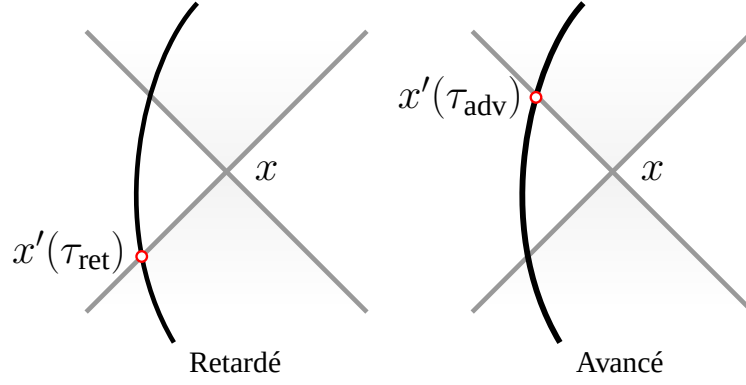


FIGURE 2.1: Support des fonctions de Green retardé (à gauche) et avancé (à droite) dans un espace-temps plat. On a représenté le cône de lumière en x dont le point d'intersection avec la ligne d'univers (courbe en noir) en x' . Le support des fonctions de Green se réduit à ce seul point d'intersection (point cerclé de rouge). Le temps retardé τ_{ret} et le temps avancé τ_{adv} correspondent aux dates pour lesquelles le cône de lumière de x coupe la ligne d'univers.

DeWitt et Brehme [73] puis Hobbs [87] ont étendu le problème au cas d'un espace-temps courbe et ont montré qu'il fallait rajouter dans ce cas deux termes supplémentaire dans (2.29) liés aux effets de diffusion des ondes par la courbure.

2.1.3 Mouvement d'une particule chargée dans un espace-temps courbe

L'équation qui régit la dynamique du quadri-potentiel vecteur A^α dans une métrique $g_{\alpha\beta}$ quelconque sous la condition de jauge de Lorenz $\nabla_\alpha A^\alpha = 0$ est

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta A^\alpha - R^\alpha_\beta A^\beta = -4\pi j^\alpha \quad (2.30)$$

où R^α_β et ∇_α sont respectivement le tenseur de Ricci et la dérivée covariante calculés dans la métrique $g_{\alpha\beta}$. Tout comme dans la section précédente, il est possible de trouver des solutions particulières de l'équation (2.30) en terme d'intégrales des fonctions de Green retardée et avancée

$$A^\alpha_{\text{ret}}(x) = \int_\gamma G^\alpha_{\text{ret}\beta'}(x, x') j^{\beta'} \sqrt{-g} d^4 x' \quad (2.31)$$

$$A^\alpha_{\text{adv}}(x) = \int_\gamma G^\alpha_{\text{adv}\beta'}(x, x') j^{\beta'} \sqrt{-g} d^4 x'. \quad (2.32)$$

Comme on peut s'en douter, à cause du terme de courbure présent dans (2.30), les fonctions de Green $G^\alpha_{\text{ret,adv}\beta'}(x, x')$ n'auront pas le même support que dans les équations (2.18) et (2.19) :

- $G_{\text{ret}\beta'}^\alpha(x, x')$ est supportée par le cône et l'intérieur du cône de lumière futur de x' . Ainsi les contributions affiliées au potentiel A_{ret}^α en un point x proviennent de tous les point x' situés dans le passé chronologique de x .
- $G_{\text{adv}\beta'}^\alpha(x, x')$ est supportée par le cône et l'intérieur du cône de lumière passé de x' . Donc les contributions affiliées au potentiel A_{adv}^α en un point x proviennent de tous les point x' situés dans le futur chronologique de x (voir le Tab.2.1).

Dans le cas d'un espace-temps plat on a construit un champ singulier A_S^α dont la singularité au voisinage de la particule possède la même structure que celle du champ retardé A_{ret}^α . A_S^α nous a permis de construire la partie radiative $A_R^\alpha = A_{\text{ret}}^\alpha - A_S^\alpha$ seule responsable de la force propre qui s'exerce sur la particule. Cependant si l'on applique la même définition (2.21) dans le cas d'un espace-temps courbe, le bi-tenseur associé à A_R^α serait donné par $G_{R\beta'}^\alpha(x, x') = 1/2 [G_{\text{ret}\beta'}^\alpha(x, x') - G_{\text{adv}\beta'}^\alpha(x, x')]$. Cette formulation implique que le champ régulier en un point x dépend d'événements x' qui se déroulent dans le futur de x , ce qui est causalement peu exploitable. Detweiler et Whiting [76] montrent que l'on peut utiliser une autre version du champ singulier qui reproduit correctement le comportement singulier de la solution retardée et qui assure que le bi-tenseur régulier $G_{R\beta'}^\alpha$ n'implique pas le futur chronologique de x . Il définissent alors

$$G_{S\beta'}^\alpha(x, x') = \frac{1}{2} [G_{\text{ret}\beta'}^\alpha(x, x') + G_{\text{adv}\beta'}^\alpha(x, x') - H_{\beta'}^\alpha(x, x')] , \quad (2.33)$$

où le bi-tenseur $H_{\beta'}^\alpha(x, x')$, supporté par la ligne d'univers est choisit de tel sorte à supprimer les caractéristiques causales gênantes dans l'approche naïve mentionnée plus haut⁴ (voir le Tab.2.1 pour les propriétés de H). Ainsi la fonction de Green

$$\begin{aligned} G_{R\beta'}^\alpha(x, x') &= G_{\text{ret}\beta'}^\alpha(x, x') - G_{S\beta'}^\alpha(x, x') \\ &= \frac{1}{2} [G_{\text{ret}\beta'}^\alpha(x, x') - G_{\text{adv}\beta'}^\alpha(x, x') + H_{\beta'}^\alpha(x, x')] \end{aligned} \quad (2.34)$$

reste finie dans la limite $x \rightarrow x'$ et assure que le champ régulier correspondant dépendra uniquement de l'histoire passée de la particule et reste par la même occasion lui aussi bien défini au voisinage de la particule. De la sorte, on peut montrer, comme dans le cas plat, que A_S^α n'exerce aucune force sur la particule et que le potentiel régulier A_R^α , solution de l'équation d'onde homogène, est lui seul responsable de la force propre.

⁴On pourra se référer à [76] pour une définition plus précise de H à partir de la décomposition de Hadamard.

Maintenant que le champ régulier a bien été identifié, la force propre peut être calculée. La généralisation de l'équation (2.29) à un espace-temps courbe donne⁵

$$m_0 a^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + q F_{R\beta}^\alpha u^\beta \quad (2.35)$$

où $a^\alpha = Du^\alpha/d\tau = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha$ est maintenant l'accélération covariante et où le tenseur électromagnétique régulier est donné par $F_{\alpha\beta}^R = \nabla_\beta A_\alpha^R - \nabla_\alpha A_\beta^R$. Dans sa forme explicite, l'équation du mouvement est [73][87]

$$\begin{aligned} m_0 a^\alpha = & F_{\text{ext}}^\alpha + \frac{2}{3} q^2 (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) \frac{D F_{\text{ext}}^\beta}{d\tau} \\ & + \frac{1}{3} q^2 (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) R_\gamma^\beta u^\gamma \\ & + 2 q^2 u_\beta \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau-\epsilon} \left[\nabla^\alpha G_{\text{ret}\gamma'}^\beta - \nabla^\beta G_{\text{ret}\gamma'}^\alpha \right] u^{\gamma'} d\tau' \end{aligned} \quad (2.36)$$

dans laquelle tous les tenseurs sont évalués à la position de la particule. Les deux premiers termes du membre de droite sont identiques à ceux présent dans l'équation d'ALD (2.29). Le troisième est un terme de courbure lié au tenseur de Ricci non présent dans un espace-temps plat puisque $R_{\alpha\beta} = 0$ dans ce cas. Le quatrième terme est une intégrale qui exprime la nature non locale en temps de la force propre en espace-temps courbe. En effet ce dernier terme, non présent dans un espace-temps plat (puisque $G_{\text{ret}\beta}^\alpha = 0$ sur le domaine d'intégration considéré) représente la contribution des radiations émises dans le passé de la particule et qui viennent interagir avec cette dernière après avoir été diffusées par la courbure de l'espace-temps (voir Fig. 2.2). Par conséquent, en espace-temps courbe, les ondes électromagnétiques se propagent non seulement à la vitesse de la lumière mais également à toutes les vitesses inférieures à la vitesse de la lumière, le délai étant causé par cette interaction entre le champ et la courbure. Ce comportement est intimement lié au fait que la structure causale de la fonction de Green est plus riche dans un espace-temps courbe que dans le cas plat comme on l'a vu précédemment.

L'équation du mouvement (2.36) fut calculée pour la première fois par Dewitt et Brehme [73] et corrigé par Hobbs [87] qui ajouta le terme de courbure non présent dans la formulation originale. En fait Dewitt et Brehme ont suivi une approche un peu différente de celle exposée ici. Ils découpent le potentiel retardé en deux contributions : une contribution "directe" et une contribution "diffusée" (tail). La contribution directe associée au vecteur potentiel en un point x est la partie qui se propage le long du cône de lumière passé de x depuis le point d'intersection entre le cône de lumière passé de x et la ligne d'univers. La contribution diffusée, en revanche, est la partie des radiations

⁵En réalité la partie singulière du champ n'est pas impliquée dans le mouvement de la particule mais contribue à son inertie. Par conséquent la masse de la particule doit être renormalisée et le terme de masse m_0 intervenant dans 2.35 et 2.36 n'est pas la masse nue de la particule mais sa masse renormalisée après une moyenne de l'équation du mouvement sur toutes les directions [77].

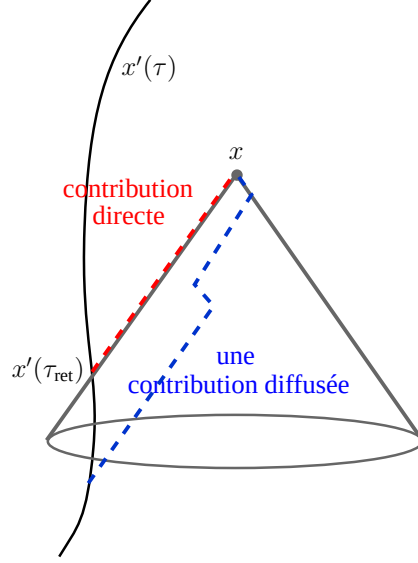


FIGURE 2.2: La contribution directe au vecteur potentiel en un point x est la partie qui se propage le long du cône de lumière passé de x depuis le point d'intersection entre le cône de lumière passé de x et la ligne d'univers. La contribution diffusée, en revanche, est la partie des radiations qui se propagent à l'intérieur du cône de lumière passé de x et qui proviennent de tous les points occupés par la particule dans le passé jusqu'au point (exclu) qu'elle occupe au temps retardé τ_{ret} .

qui se propagent à l'intérieur du cône de lumière passé de x et provient de tous les points occupés par la particule dans le passé jusqu'au point (exclu) qu'elle occupe au temps τ . Par analogie à A_S^α et A_R^α Dewitt et Brehme construisent A_{dir}^α et A_{tail}^α et montrent que c'est la partie directe du potentiel retardé qui diverge quand $x \rightarrow x'$ et que seule la contribution diffusée est responsable de la force propre. La connaissance de A_{tail}^α permet ainsi le calcul de l'auto-accélération

$$m_0 a^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + q F_{\text{tail}\beta}^\alpha u^\beta \quad (2.37)$$

où $F_{\alpha\beta}^{\text{tail}} = \nabla_\beta A_\alpha^{\text{tail}} - \nabla_\alpha A_\beta^{\text{tail}}$ est la force propre calculée à partir du champ diffusé A_α^{tail} . Cependant, comme le mentionnent Detweiler et Whiting [76], la décomposition "directe/diffusé" est utile pour le calcul de la force propre mais ne permet pas d'expliquer physiquement la force propre en terme d'interaction de charge avec un champ électromagnétique externe, comme cela est fait avec la décomposition "R/S". Par ailleurs, A_{tail}^α n'est pas solution homogène de (2.30).

Le résultat important à retenir ici est donc que la force propre électromagnétique ressenti par la particule chargée à un temps τ donné dépend de l'histoire passée de la particule dans sa totalité. Ce comportement n'est pas propre à l'électromagnétisme, on trouvera une formulation équivalente à (2.36) dans les travaux de Mino, Sasaki et Tanaka [27] puis Quinn et Wald [28] qui étendent cette étude au cas gravitationnel pour une particule massive en mouvement dans une métrique de fond quelconque. Nous verrons

que, dans ce cas, c'est le champ de perturbation de la métrique elle-même qui interagira les contributions venant du passé de la particule par l'intermédiaire de la métrique de fond.

$G_{\text{ret/adv}}$	Satisfait l'équation in-homogène $G_{\beta'\alpha}^{\text{ret}} \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}^+(x')$ $G_{\beta'\alpha}^{\text{adv}} \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}^-(x')$ $G_{\beta'\alpha}^{\text{ret}} = G_{\alpha\beta'}^{\text{ret}}$	
H	Satisfait l'équation homogène $H_{\beta'}^{\alpha} = G_{\text{ret}\beta'}^{\alpha} \quad \forall x \in \mathcal{I}^+(x')$ $H_{\beta'}^{\alpha} = G_{\text{adv}\beta'}^{\alpha} \quad \forall x \in \mathcal{I}^-(x')$ $H_{\beta'\alpha} = H_{\alpha\beta'}$	
G_S	Satisfait l'équation in-homogène $G_{S\beta'}^{\alpha} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}^{\pm}(x')$ $G_{\beta'\alpha}^S = G_{\alpha\beta'}^S$	
G_R	Satisfait l'équation homogène $G_{R\beta'}^{\alpha} = G_{\text{ret}\beta'}^{\alpha} \quad \forall x \in \mathcal{I}^+(x')$ $G_{R\beta'}^{\alpha} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}^-(x')$	

TABLE 2.1: Tableau récapitulatif des propriétés des différentes fonctions de Green et fonctions introduites pour le calcul du potentiel retardé dans le cas d'un espace-temps courbe. Dans chaque cas, les potentiels vecteurs associés dépendent de l'histoire de la particule durant l'intervalle données par les courbes rouges. Le temps retardé τ_{ret} et le temps avancé τ_{adv} correspondent aux dates pour lesquelles le cône de lumière de x coupe la ligne d'univers (courbe noire). $\mathcal{I}^+(x')$ correspond à l'ensemble des événements situés dans le passé chronologique de x' . De même $\mathcal{I}^-(x')$ est l'ensemble des événements appartenant au futur chronologique de x' .

2.2 Force propre gravitationnelle

2.2.1 Sens newtonien de la force propre

Considérons deux corps massifs en interaction gravitationnelle. Le premier corps est de masse M positionné par le vecteur $\mathbf{R}$ de norme $||\mathbf{R}||$. Le second corps est de masse

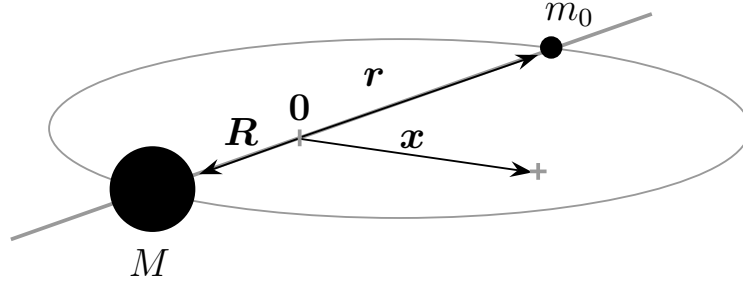


FIGURE 2.3: On considère ici deux corps en interaction gravitationnelle. Le système est asymétrique tel que $M \gg m_0$. L'origine du repère est pris au centre de masse des deux corps. Les vecteurs $\mathbf{R}$ et $\mathbf{r}$ indiquent la position respective du corps de masse M et du corps de masse m_0 ; $\mathbf{x}$ de norme $\|\mathbf{x}\|$ est le vecteur position d'un point quelconque de l'espace.

$m_0 \ll M$ et de position $\mathbf{r}$ dont la norme est notée $\|\mathbf{r}\|$. L'origine du système de coordonnées est pris au centre de masse tel que $M\mathbf{R} + m_0\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Si le corps de masse M est seul, son centre de gravité se confond avec l'origine du repère. Le potentiel newtonien et le champ gravitationnel en un point $\mathbf{x}$ sont alors

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = -\frac{M}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi_0(\mathbf{x}) = -\frac{M}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}. \quad (2.38)$$

Dans ces conditions, un objet de faible masse m_0 suit la loi fondamentale de la dynamique de Newton

$$m_0 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m_0 \mathbf{g}_0(\mathbf{r}). \quad (2.39)$$

Pour un mouvement circulaire, m_0 possède une vitesse angulaire Ω_0 constante donnée par

$$\Omega_0^2 = \frac{M}{\|\mathbf{r}\|^3}. \quad (2.40)$$

Maintenant si l'on considère le système complet (grosse masse plus petite masse), le centre de masse se décale et le potentiel total peut s'écrire

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{M}{\|\mathbf{x} - \mathbf{R}\|} - \frac{m_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|}. \quad (2.41)$$

L'idée est de traiter le potentiel créé par la petite masse comme une perturbation du potentiel Φ_0 tel que $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \delta\Phi(\mathbf{x})$ avec

$$\delta\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{M}{\|\mathbf{x} - \mathbf{R}\|} + \frac{M}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{m_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|}. \quad (2.42)$$

La perturbation du champ $\delta \mathbf{g}$ associée à $\delta \Phi$ exerce ainsi une force sur la masse m_0 et peut donc être vu, dans la limite $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}$, comme l'auto-accélération de la particule. Par analogie avec la section précédente, on va chercher à identifier la partie singulière et régulière du potentiel $\delta \Phi$ et montrer que la partie seulement responsable de l'écart au mouvement géodésique (2.39) est la partie régulière. D'après (2.42) il apparaît clairement que c'est le troisième terme du membre de droite qui est responsable de la divergence lorsque $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}$. Mais puisque que le champ gravitationnel produit par ce terme est isotrope autour de $\mathbf{r}$ [77], il ne produit aucune force sur la particule de masse m_0 et peut donc être associé au potentiel singulier

$$\delta \Phi_S(\mathbf{x}) = -\frac{m_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} . \quad (2.43)$$

Les autres termes restent finis et peuvent être associés au potentiel régulier qui lui seul affectera le mouvement de m_0

$$\delta \Phi_R(\mathbf{x}) = -\frac{M}{\|\mathbf{x} - \mathbf{R}\|} + \frac{M}{\|\mathbf{x}\|} . \quad (2.44)$$

Ainsi la perturbation du potentiel $\delta \Phi$ s'écrit $\delta \Phi = \delta \Phi_S + \delta \Phi_R$ et l'équation du mouvement sera donnée par

$$m_0 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m_0 \left[\mathbf{g}_0(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{g}_R(\mathbf{r}) \right] , \quad (2.45)$$

où $\delta \mathbf{g}_R$ est la variation du champ associée à $\delta \Phi_R$. Dans un développement au premier ordre en m_0/M on peut montrer assez simplement que

$$\delta \Phi_R(\mathbf{x}) = -\frac{m_0 \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{x}\|^3} + \mathcal{O} \left(\frac{m_0^2}{M^2} \right) , \quad (2.46)$$

et donc que

$$\delta \mathbf{g}_R(\mathbf{x}) = m_0 \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r})\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{r}}{\|\mathbf{x}\|^5} + \mathcal{O} \left(\frac{m_0^2}{M^2} \right) . \quad (2.47)$$

L'équation (2.45) devient

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{M - 2m_0}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \\ &= -\frac{M}{\|\mathbf{r}\|^3} \left(1 - \frac{2m_0}{M} \right) \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

qui est la même expression que (2.39) dans le sens où l'accélération reste radiale en $1/\|\mathbf{r}\|^2$ mais avec un facteur de masse $(M - 2m_0)$. La vitesse angulaire se réduit quant

à elle à

$$\Omega^2 = (M - 2m_0)/||\mathbf{r}||^3, \quad (2.49)$$

qui peut s'écrire au premier ordre en m_0/M en faisant apparaître la distance totale entre les deux corps $d = ||\mathbf{r}|| + ||\mathbf{R}|| = (1 + m_0/M)||\mathbf{r}||$ comme

$$\Omega^2 = \frac{M + m_0}{d^3}, \quad (2.50)$$

qui est la troisième loi de Kepler. La partie régulière du champ est donc responsable de la correction à apporter à la vitesse angulaire due à la petite masse et le facteur $-2m_0/M$ dans (2.48), qui peut être interprété dans notre système de coordonnées comme un déplacement du centre de masse, est une conséquence de la force propre gravitationnelle vue dans un cadre newtonien [88]. C'est à dire que la petite masse m_0 influence le mouvement de M qui influence le champ gravitationnel dans le lequel m_0 se déplace. Cette rétro-action de m_0 sur son propre mouvement est bien la signature de la force propre. L'interprétation de ce phénomène, dans le cas de la chute radiale, est intéressant car si l'on considère un référentiel dont l'origine est en co-mouvement avec le centre de masse de M , on retrouve la loi bien connu sur l'unicité de la chute des corps

$$m_0 \frac{d^2 D}{dt^2} = \frac{m_0 M}{D^2}, \quad (2.51)$$

où D est la distance entre les deux corps. Ainsi tout effet de rétroaction de m_0 sur son mouvement disparaît. Cependant il n'est pas possible de trouver un référentiel universel pour lequel le centre de masse de M se déplace de façon identique pour différentes valeurs m_0 . Par conséquent on voit bien que l'unicité de la chute des corps conduit à une approximation qui néglige la force propre et qui résulte d'un choix de jauge. Bien-entendu cette approximation est justifiée dans le sens ou il s'agirait de considérer une rétroaction de l'ordre de $10^{-24} \text{m/s}^2/\text{kg}$ pour un objet chutant du haut de la tour de Pisa [89].

2.2.2 Mouvement d'une particule massive dans une métrique de fond

On vient de voir que même en théorie newtonienne, le concept de force propre peut apparaître. Cependant l'extension relativiste n'est pas aussi évidente, et le parallèle avec le cas électromagnétique est plus subtile. En effet, il est clair que dans le cas électromagnétique le champ calculé est une perturbation électromagnétique qui se propage dans un espace-temps dont la géométrie est fixée. Mais dans le cas gravitationnel, le champ considéré est une déformation de la géométrie de l'espace-temps lui même, donc la distinction entre champ de perturbation et géométrie de fond est plus délicate.

Notion de force gravitationnelle

Parler de force gravitationnelle en relativité générale peut être un peu étrange puisque par définition l'aspect géométrique de la théorie nous permet de nous croire inertiel en chaque point de l'espace par changement de référentiel. L'idée ici est simplement de montrer comment une perturbation de la géométrie de fond, d'origine externe, se manifeste sous l'effet d'une force fictive lorsque l'on décrit le mouvement d'une particule dans la métrique de fond. Nous appellerons cette force, *force gravitationnelle*.

Considérons un champ de perturbation $h_{\alpha\beta}$ de la métrique de fond $g_{\alpha\beta}$. le champ $h_{\alpha\beta}$ est de faible amplitude et été produit par une éventuelle source non locale (il s'agit par exemple d'une onde gravitationnelle incidente). Une particule d'épreuve de masse m_0 baigne dans cet espace temps perturbé dont la métrique est donnée par $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$. Cette particule suit une géodésique $\bar{\gamma}$ de l'espace-temps total tel que

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\bar{\tau}^2} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\gamma}{d\bar{\tau}} = 0, \quad (2.52)$$

où $\bar{\tau}$ est le paramètre affine, qui peut être le temps propre le long de $\bar{\gamma}$ et $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\sigma}(\partial_\gamma \bar{g}_{\sigma\beta} + \partial_\beta \bar{g}_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma \bar{g}_{\beta\gamma})$ est le symbole de Christoffel calculé dans la métrique totale. Ce même mouvement, décrit dans la métrique de fond, n'est plus un mouvement géodésique à cause de l'effet du champ de perturbation $h_{\alpha\beta}$ sur la particule. Le champ de perturbation se manifeste, dans la géométrie de fond $g_{\alpha\beta}$, à la manière d'un terme de force F^α dans l'équation du mouvement tel que

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{F^\alpha}{m_0}, \quad (2.53)$$

où τ est le temps propre qui paramétrise la ligne d'univers γ inscrite dans la métrique de fond et $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma})$ est le symbole de Christoffel calculé dans la métrique de fond. On identifie ici chaque événement de $g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ à un événement de $g_{\alpha\beta}$ de même coordonnées x^α . C'est à dire que l'on suppose que les deux métriques, totale et fond, sont couvertes par deux systèmes de coordonnées similaires dans le sens où dans la limite $h \rightarrow 0$, tout événement est étiqueté par les mêmes valeurs de coordonnées dans les deux espaces-temps. Cette liberté dans la projection de la ligne d'univers de $g + h$ sur g est un exemple typique de la liberté dans le choix de jauge en relativité générale, c'est-à-dire la liberté dans le choix du système de coordonnées sur lequel on reviendra. Puisque F^α est une conséquence de la présence de $h_{\alpha\beta}$, on peut chercher à exprimer F^α à partir du champ de perturbation. Pour cela notons $\Delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ et utilisons les

relations

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\bar{\tau}} &= \left(\frac{d\tau}{d\bar{\tau}}\right) \frac{d}{d\tau} , \\ \frac{d^2}{d\bar{\tau}^2} &= \left(\frac{d^2\tau}{d\bar{\tau}^2}\right) \frac{d}{d\tau} + \left(\frac{d\tau}{d\bar{\tau}}\right)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} ,\end{aligned}\tag{2.54}$$

dans l'équation (2.53). On obtient

$$F^\alpha = -m_0 \Delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma - m_0 \left(\frac{d\bar{\tau}}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d^2\tau}{d\bar{\tau}^2}\right) u^\alpha .\tag{2.55}$$

Sachant que F^α est orthogonale à la quadri-vitesse u^α , le fait de projeter (2.53) de façon orthogonale à u^α , en utilisant l'opérateur $\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta$, ne change rien pour le terme de gauche. On a ainsi

$$F^\alpha = -m_0 (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) \Delta \Gamma_{\gamma\delta}^\beta u^\gamma u^\delta .\tag{2.56}$$

En explicitant $\Delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ au premier ordre en h

$$\Delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (\nabla_\delta h_{\beta\gamma} + \nabla_\beta h_{\delta\gamma} - \nabla_\gamma h_{\beta\delta}) + \mathcal{O}(h^2)\tag{2.57}$$

on obtient

$$F^\alpha = F^\alpha[h_{\alpha\beta}] = -\frac{1}{2} m_0 \left(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta\right) (2\nabla_\delta h_{\beta\gamma} - \nabla_\alpha h_{\gamma\delta}) u^\gamma u^\delta .\tag{2.58}$$

Par la suite $F^\alpha[\dots]$ désignera la force (propre, retardée, avancée) en spécifiant le champ qui lui est associé entre crochets. En utilisant le champ de perturbation opposé de trace défini par rapport à la métrique de fond $g_{\alpha\beta}$ et défini par

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} h ,\tag{2.59}$$

avec $h = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -\bar{h} = -g^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}$, on peut écrire (2.58) de façon plus compacte

$$F^\alpha = m_0 k^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta \bar{h}_{\beta\gamma} ,\tag{2.60}$$

avec

$$k^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} u^\beta u^\gamma - g^{\alpha\beta} u^\gamma u^\delta - \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta + \frac{1}{4} u^\alpha g^{\beta\gamma} u^\delta + \frac{1}{4} g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} .\tag{2.61}$$

Comme on l'a déjà dit, il n'y a pas qu'une seule manière de spécifier le système de coordonnées de chaque espace-temps $g + h$ et g ce qui conduit à une ambiguïté sur la projection de la trajectoire dans g . Donc en général, des choix différents sur le

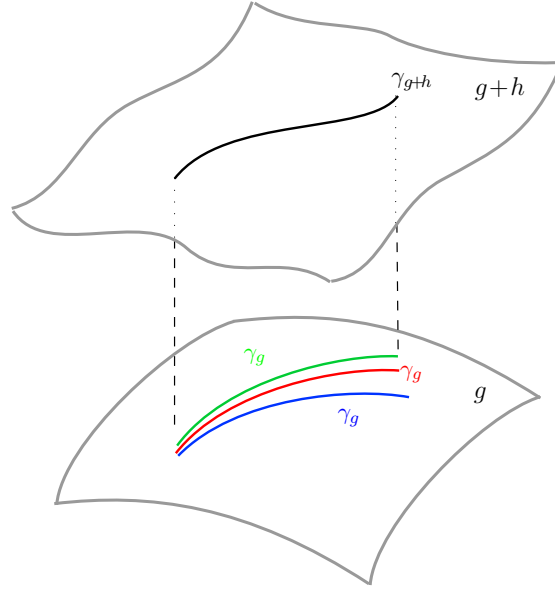


FIGURE 2.4: Illustration de l'ambiguïté de jauge. La projection de la ligne d'univers γ_{g+h} d'une particule inertielle dans un espace-temps de métrique $g + h$ dans l'espace-temps de fond g n'est pas unique. La ligne d'univers γ_g dépend de la jauge, c'est-à-dire du choix du système de coordonnées x^α sachant que tout changement infinitésimal $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha$ conduit à un changement de jauge.

système de coordonnées donneront lieu à des trajectoires projetées différentes dans g (voir Fig. (2.4)). Par conséquent la particule semblera subir une accélération différente et donc l'action d'une force en apparence différente. La force F^α définie dans (2.60), tout comme la métrique $h_{\alpha\beta}$, sont dépendantes de jauge dans le sens où une transformation infinitésimale de coordonnée

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha - \xi^\alpha, \quad (2.62)$$

appelée aussi transformation de jauge (où ξ^α est le vecteur de jauge) conduit à une transformation sur la métrique

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha \quad (2.63)$$

et donc sur l'expression de la force

$$F^\alpha \rightarrow F^\alpha - m_0 \left[\left(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta \right) \frac{d^2 \xi_\beta}{d\tau^2} + R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta u^\delta \xi^\gamma \right] \quad (2.64)$$

Tenseur d'Einstein linéarisé

L'analyse perturbative fournit le cadre de travail pour comprendre l'effet d'une particule de faible masse en mouvement dans un espace-temps de fond donné. La métrique $g_{\alpha\beta}$

de l'espace-temps de fond est souvent une solution du vide des équations d'Einstein $G_{\alpha\beta}[g] = 0$. Un petit objet de masse m_0 en mouvement perturbe la géométrie d'une quantité $h_{\alpha\beta}$ que l'on appellera tenseur de perturbation. La terminologie "petit objet" désignera de manière générale un objet dont la masse m_0 est en valeur bien plus faible que l'échelle de longueur $\mathcal{R}$ caractéristique de la géométrie de fond tel que $\varepsilon = m_0/\mathcal{R} \ll 1$. Par exemple dans une métrique de Schwarzschild on prendra très souvent la masse M comme paramètre représentatif tel que $\varepsilon = m_0/M \ll 1$ et l'amplitude des petites fluctuations sera ainsi considérée de l'ordre du rapport de masse $h_{\alpha\beta} \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Supposons pour le moment que l'équation d'Einstein exacte pour la métrique totale $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ ai un sens pour un objet/particule considérée ponctuelle sur sa ligne d'univers γ et décrit par un tenseur énergie impulsion $T_{\alpha\beta}[g + h; \gamma]$ tel que

$$G_{\alpha\beta}[g + h] = 8\pi T_{\alpha\beta}[g + h; \gamma] . \quad (2.65)$$

Le mouvement de la particule est contraint par l'identité de Bianchi [90][91] $\bar{\nabla}_\beta G^{\alpha\beta}[\bar{g}] = 0$ qui implique la conservation locale du tenseur énergie-impulsion $\bar{\nabla}_\beta T^{\alpha\beta}[\bar{g}] = 0$ où $\bar{\nabla}_\alpha$ est la dérivée covariante dans la métrique totale. L'équation de conservation conduit elle même à l'équation du mouvement $u^\beta \bar{\nabla}_\beta u^\alpha = 0$ qui traduit le fait que la ligne d'univers est une géodésique de l'espace-temps de métrique $\bar{g}_{\alpha\beta}$.

Maintenant supposons que l'on souhaite trouver une approximation de $\bar{g}_{\alpha\beta}$ et de γ dans la limite $\varepsilon \ll 1$. Dans cette limite, on peut développer le tenseur d'Einstein $G_{\alpha\beta}[g + h]$ autour de la solution du vide pour $h_{\alpha\beta} \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$

$$G_{\alpha\beta}[g + h] = G_{\alpha\beta}[g] + G_{\alpha\beta}^{(1)}[g, h] + G_{\alpha\beta}^{(2)}[g, h] + \dots , \quad (2.66)$$

où $G_{\alpha\beta}^{(n)}[g_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta}] \sim \mathcal{O}(\varepsilon^n)$. Le terme d'ordre 0 est nul car $g_{\alpha\beta}$ est une solution du vide. Le terme du premier ordre est un opérateur linéaire sur $h_{\alpha\beta}$, les termes d'ordres supérieur sont eux des opérateurs non linéaires. Ainsi, au premier ordre perturbatif $T_{\alpha\beta}[g; \gamma] \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $h_{\alpha\beta}$ est gouverné par les équations d'Einstein perturbées

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}[g, h] = 8\pi T_{\alpha\beta}[g; \gamma] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \quad (2.67)$$

$T_{\alpha\beta}[g; \gamma]$ est le tenseur énergie-impulsion dans la métrique de fond de la particule en mouvement dont l'expression est

$$T_{\alpha\beta}[g; \gamma] = m_0 \int_\gamma (-g)^{-1/2} u_\alpha u_\beta \delta^{(4)}(x - x'(\tau)) d\tau , \quad (2.68)$$

où la particule est repérée sur sa ligne d'univers γ par les coordonnées $x'^\alpha(\tau)$; u^α est la quadri-vitesse et τ le temps propre associé à la particule dans la métrique de fond $g_{\alpha\beta}$;

$\delta^{(4)}(x - x'(\tau)) = \delta(x^0 - x'^0)\delta(x^1 - x'^1)\delta(x^2 - x'^2)\delta(x^3 - x'^3)$ est la distribution de Dirac quadridimensionnelle et g le déterminant de la métrique $g_{\alpha\beta}$.

L'opérateur linéaire du tenseur d'Einstein perturbé s'écrit formellement comme suit

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(1)}[g, h] = & -\frac{1}{2}\nabla^\gamma\nabla_\gamma h_{\alpha\beta} + \nabla_\beta\nabla^\gamma h_{\alpha\gamma} + \nabla_\alpha\nabla^\gamma h_{\beta\gamma} - R_{\gamma\alpha\delta\beta}h^{\gamma\delta} - \frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha h \\ & + R^\gamma_\alpha h_{\beta\gamma} + R^\gamma_\beta h_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\nabla^\delta\nabla^\gamma h_{\delta\gamma} - \nabla^\gamma\nabla_\gamma h\right) - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}R + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}R^{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

où $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ est le tenseur de Riemann, $R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ le tenseur de Ricci et $R = R^\alpha_\alpha$ le scalaire de Ricci calculés dans la métrique de fond $g_{\alpha\beta}$. De même la dérivée covariante ∇_α est exprimée dans la métrique $g_{\alpha\beta}$. L'expression (2.69) se simplifie dans la mesure où $g_{\alpha\beta}$ est une solution du vide ($R_{\alpha\beta} = 0$) et donne

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(1)}[g, h] = & -\frac{1}{2}\nabla^\gamma\nabla_\gamma h_{\alpha\beta} + \nabla_\beta\nabla^\gamma h_{\alpha\gamma} + \nabla_\alpha\nabla^\gamma h_{\beta\gamma} - R_{\gamma\alpha\delta\beta}h^{\gamma\delta} - \frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha h \\ & - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\nabla^\delta\nabla^\gamma h_{\delta\gamma} - \nabla^\gamma\nabla_\gamma h\right), \end{aligned} \quad (2.70)$$

qui peut encore se simplifier par une éventuelle transformation de jauge. Si l'on impose par exemple la jauge harmonique sous la condition de Lorenz $\nabla_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$, l'équation (2.67) devient

$$g^{\gamma\delta}\nabla_\gamma\nabla_\delta\bar{h}^{\alpha\beta} + 2R^\alpha_{\gamma\delta}{}^\beta\bar{h}^{\gamma\delta} = -16\pi\delta T^{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.71)$$

où $\bar{h}_{\alpha\beta}$ est toujours le champ de perturbation opposé de trace défini par rapport à la métrique de fond $g_{\alpha\beta}$.

De manière générale, on peut montrer que l'identité de Bianchi est également vérifiée pour $G_{\alpha\beta}^{(1)}$ (voir [92]-appendix A), c'est-à-dire que

$$\nabla^\alpha G_{\alpha\beta}^{(1)}[g, h] = 0. \quad (2.72)$$

Par conséquent, une condition pour garder la validité de (2.67) est que le tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$ doit être conservé dans la métrique de fond

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta}[g; \gamma] \sim \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.73)$$

Donc pour que (2.73) soit valide, γ doit approximativement être une géodésique de l'espace-temps de fond g c'est-à-dire que l'équation du mouvement reste de la forme

$$u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta \sim \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.74)$$

et c'est ce que suggère l'équation (2.81) lorsque le champ $h_{\alpha\beta}$ est associé au champ qui génère la force propre.

Si l'on voulait pousser l'étude perturbative au second ordre, la condition de validité pour les équations du second ordre serait que le tenseur $T_{\alpha\beta}$ soit conservé non pas dans la métrique de fond mais dans la métrique perturbée au premier ordre. Donc avant de résoudre les équations du champ au second ordre, il est nécessaire de changer le tenseur énergie impulsion de telle manière à ce qu'il dépende de la métrique perturbée au premier ordre⁶. Cette modification de $T_{\alpha\beta}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ car $T_{\alpha\beta}$ lui-même est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ et résulte des effets dissipatifs de la force propre agissant sur l'objet souvent associés à la réaction de radiation [92].

Construction de la force propre gravitationnelle

Comme dans le cas électromagnétique, la résolution de l'équation du champ (2.71) conduit à une solution retardée singulière au voisinage de la particule. Le travail consistera là encore, à identifier la partie de la solution retardée qui est responsable de la divergence et celle liée au mouvement utile pour le calcul de la force propre. Comme dans la section précédente, nous appellerons $h_{\alpha\beta}$ le champ de perturbation produit par la particule durant son mouvement. La particule de masse m_0 , considérée ponctuelle, suit la ligne d'univers γ formée par $x^\alpha = x'^\alpha(\tau)$ et est décrite par son tenseur énergie-impulsion donné en (2.68) et que nous rappelons ici

$$T^{\alpha\beta} = m_0 \int_{\gamma} (-g)^{-1/2} u^\alpha u^\beta \delta^{(4)}(x - x'(\tau)) d\tau . \quad (2.75)$$

La solution retardée de (2.71) pour un terme source de la forme (2.75) est

$$\bar{h}_{\text{ret}}^{\alpha\beta}(x) = 4m_0 \int_{\gamma} G_{\text{ret}\gamma\delta}^{\alpha\beta}(x, x') u^\gamma u^\delta d\tau . \quad (2.76)$$

$G_{\text{ret}\gamma\delta}^{\alpha\beta}(x, x')$ est la fonction de Green retardée dont le support est l'ensemble des points $x' \in \gamma$ appartenant au passé chronologique de x . On reconstruit $h_{\text{ret}}^{\alpha\beta}$ en inversant la relation (2.59). Il serait alors tentant d'insérer directement la solution retardée $h_{\text{ret}}^{\alpha\beta}$ dans (2.58) et d'identifier le résultat (dans la limite $x \rightarrow x'$) à la force propre. Or comme on l'a déjà mentionné plusieurs fois dans les sections précédentes, $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ diverge au voisinage de la particule et il en serait de même pour $F^\alpha[h_{\text{ret}}^{\alpha\beta}]$. Par conséquent $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ n'est pas un bon candidat pour construire la force propre.

L'hypothèse de particule ponctuelle, même si elle offre une simplification technique évidente dans le traitement des calculs, n'a pas un sens bien défini en relativité générale.

⁶Detweiler [92] donne une description générale d'une perturbation à l'ordre n et montre que son implémentation alterne entre (i) résoudre les équations du mouvement provenant d'un tenseur énergie-impulsion conservé dans une métrique perturbée à l'ordre $n-1$ et (ii) résoudre les équations d'Einstein perturbées pour trouver le tenseur de perturbation de la métrique d'ordre n .

Schématiquement, un objet de masse finie et de volume nul conduit à la formation d'un trou noir, et décrire le mouvement d'un point à l'intérieur d'un horizon n'est pas quelque chose de pertinent. En fait on sait que la particule ponctuelle, dont le tenseur énergie-impulsion est modélisé par une distribution de Dirac comme dans (2.75), est incompatible avec la non linéarité des équations d'Einstein [93]. Il n'y a pas de solution pour des tenseurs énergie-impulsion de ce type⁷. Donc même si la version linéarisée des équations d'Einstein permettent d'obtenir une solution retardée $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$, dire que la particule suit une géodésique de l'espace-temps dont la métrique est $g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ n'est pas correct et n'a pas vraiment de sens. Extraire la partie non divergente du champ retardé est un problème de *régularisation*.

En 1997, deux groupes indépendants Mino, Sasaki, Tanaka [27] et Quinn, Wald [28] ont proposé trois méthodes différentes conduisant à la régularisation du champ et permettant la formulation de la force propre gravitationnelle.

Mino, Sasaki et Tanaka développent deux techniques distinctes qui conduisent à la même expression de la force propre gravitationnelle. La première utilise des arguments liés à la conservation locale de l'énergie et du moment et est essentiellement basée sur le formalisme introduit par Dewitt et Brehme [73] mais appliqué au cas gravitationnel. Leur deuxième approche utilise une technique de *développement asymptotique raccordé* dans laquelle ils traitent la particule comme étant un trou noir non-rotatif dont l'horizon trace un tube d'univers dans l'espace-temps. L'idée est d'identifier deux échelles spatiales, l'une associée à la masse m_0 de la particule, l'autre bien plus grande associée au rayon de courbure caractéristique de la géométrie dans laquelle la particule se déplace. Dans le cas d'un système de type EMRI, cette dernière échelle spatiale est liée à la masse $M \gg m_0$ du trou noir super-massif. Ainsi en fonction de la distance typique r au petit trou noir, on associe chaque échelle de distance à une région :

- la *zone interne* pour laquelle $r \ll M$ et où la géométrie est approximativement celle du petit trou noir de Schwarzschild à laquelle il faut rajouter des petites corrections liées aux effets de marée de l'univers externe

$$\bar{g} = g^{\text{petit trou noir}} + \mathcal{O}(r/M) + \dots ; \quad (2.77)$$

- la *zone externe* pour laquelle $m_0 \ll r$ et où la géométrie ressemble à la géométrie de l'univers externe plus, cette fois-ci, quelques corrections liées aux effets de marée du petit trou noir.

$$\bar{g} = g^{\text{géométrie externe}} + \mathcal{O}(m_0/r) + \dots . \quad (2.78)$$

⁷Un modèle réaliste devrait prendre en compte l'extension spatiale, voir la structure interne de la particule qui ne trace plus une ligne d'univers mais un tube dans l'espace temps, ainsi il serait plus satisfaisant de voir la notion de particule ponctuelle émerger d'une technique qui traite la taille de l'objet comme une limite vers zéro plutôt qu'une hypothèse ponctuelle de départ.

Ces effets s'estompent d'autant plus que l'on s'éloigne du petit trou noir dont la structure apparente devient de moins en moins importante et peut être assimilée à un objet quasi-ponctuel. C'est en fait dans cette limite que l'approximation de particule ponctuelle peut être valide.

- Lorsque $m_0 \ll r \ll M$, cela correspond à une *zone de recouvrement* ou sorte de zone tampon dans laquelle les deux descriptions géométriques précédentes sont valides.

Ce qu'ont montré Mino, Sasaki et Tanaka dans leur deuxième approche est qu'imposer la connexion entre les deux géométries dans la zone de recouvrement, c'est-à-dire lier les deux développements asymptotiques, contraint le mouvement du petit trou noir dans une équations du mouvement qui fait intervenir l'expression de la force propre.

Gralla et Wald [94] reprendront une approche de type développement asymptotique raccordé mais dans l'esprit des travaux de Ehlers et Geroch [95] où ils considèrent une seule famille de tenseurs métriques $g_{\alpha\beta}(\lambda)$ pour lesquelles un corps massif spatialement étendu tracera une ligne d'univers dans la limite $\lambda \rightarrow 0$. Cette approche aura l'avantage de ne pas restreindre le problème à des trous noirs non-rotatifs comme cela est supposé chez Mino, Sasaki et Tanaka mais généralise le résultat à tout corps compact de structure interne arbitraire.

Quinn et Wald choisissent, quant à eux, une approche axiomatique pour dériver l'expression de la force propre. L'idée est que le calcul de la différences des forces gravitationnelles de deux particules proches partageant la même accélération annule les singularités et donne la différence des force propres. Si l'on est capable de donner la force propre le long de la ligne d'univers d'une des deux particules pour un espace-temps très simple (par exemple de type Minkowski) alors on peut donner la force propre pour la deuxième particule dans un espace-temps plus compliqué. Les deux règles se résument à

- Axiome de comparaison : Soient le point $P1$ de la métrique linéarisée $g_{\alpha\beta}^{(1)} + h_{\alpha\beta}^{(1)}$ et le point $P2$ de la métrique linéarisée $g_{\alpha\beta}^{(2)} + h_{\alpha\beta}^{(2)}$. En utilisant les coordonnées normales de Riemann [28], si on peut identifier le voisinage de $P1$ et $P2$ de tel sorte que la vitesse et l'accélération d'une particule passant par $P1$ soient identifiés à la vitesse et l'accélération d'une deuxième particule passant par $P2$ alors la différence des force propres en $P1$ et $P2$ est donnée par la différence des forces gravitationnelles moyennées sur une sphère lorsque la distance géodésique r séparant les deux points tend vers zéro,

$$F_{\text{self}}^{\alpha(1)} - F_{\text{self}}^{\alpha(2)} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\langle \left(\frac{1}{2} \nabla_{(1)}^{\alpha} h_{\beta\gamma}^{(1)} - \nabla_{\beta}^{(1)} h_{\gamma}^{(1)\alpha} \right) - \left(\frac{1}{2} \nabla_{(2)}^{\alpha} h_{\beta\gamma}^{(2)} - \nabla_{\beta}^{(2)} h_{\gamma}^{(2)\alpha} \right) \right\rangle \quad (2.79)$$

- Axiome d'espace-temps plat : si $g_{\alpha\beta}^{(1)} = \eta_{\alpha\beta}$ est l'espace temps de Minkowski, la métrique perturbée est donnée par la somme de la solution retardée et avancée divisée par deux et la force dans ce cas est nulle [28]

$$h_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(1)} + h_{\alpha\beta}^{\text{adv}(1)} \right) \quad \text{et} \quad F_{\text{self}}^{\alpha(1)} = m_0 u^\beta \nabla_\beta^{(1)} u^\alpha = 0 . \quad (2.80)$$

Ainsi plutôt que de calculer la force sur une seule particule qui s'avère compliqué à cause de la singularité du champ, on considère plutôt deux objets de même composition évoluant sur deux géodésiques différentes (possiblement de deux espace-temps différents) mais d'accélération identique et dont la différence des forces gravitationnelles reste régulière quand on contracte la distance les séparant. Il suffit de connaître l'une des deux forces pour connaître la deuxième.

A la fin, tous arrivent à la même conclusion et trouvent une expression de la force propre gravitationnelle qui dépend du champ de perturbation diffusé $h_{\alpha\beta}^{\text{tail}}$ (voir Fig. 2.2), c'est-à-dire la partie des perturbations qui se propagent à l'intérieur du cône de lumière passé du point d'évaluation

$$F_{\text{self}}^\alpha = -\frac{1}{2} \left(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta \right) \left(2\nabla_\delta h_{\beta\gamma}^{\text{tail}} - \nabla_\alpha h_{\gamma\delta}^{\text{tail}} \right) u^\gamma u^\delta , \quad (2.81)$$

$$h_{\alpha\beta}^{\text{tail}} = 4m_0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau-\epsilon} \left(G_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{\text{ret}} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} G_{\delta\alpha'\beta'}^{\text{ret}\delta} \right) (x, x') u^{\alpha'} u^{\beta'} d\tau' . \quad (2.82)$$

L'équation (2.81) est appelée équation de MiSaTaQuWa en référence aux 5 auteurs qui en ont trouvé l'expression. Comme pour les cas traités précédemment l'équation (2.81) a subi la technique de réduction d'ordre, à la différence près que dans la formulation finale, le terme lié à la dérivée de l'accélération a disparu. La force propre ne dépend donc plus que du terme lié aux ondes diffusées par la courbure et qui agissent sur la particule avec un retard, ce qui renvoie à sa nature non locale dans le temps.

Detweiler et Whiting [76][92] vont retrouver ce résultat mais sous un autre angle. L'approche de MiSaTaQuWa est très efficace pour le calcul de la FP gravitationnelle mais il reste difficile d'interpréter physiquement le champ $h_{\alpha\beta}^{\text{tail}}$ en terme d'espace-temps. Ils proposent une formulation alternative à la décomposition *tail/dir*. L'idée est de décomposer le champ retardé en deux contributions

$$h_{\alpha\beta}^{\text{ret}} = h_{\alpha\beta}^{\text{R}} + h_{\alpha\beta}^{\text{S}} , \quad (2.83)$$

où $h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ est un champ régulier solution de l'équation du champ homogène contrairement à $h_{\alpha\beta}^{\text{tail}}$. Il est responsable du mouvement accéléré de la particule dans la métrique de

fond et conduit à la même force propre

$$\frac{Du^\alpha}{d\tau} = F_{\text{self}}^\alpha, \quad (2.84)$$

$$F_{\text{self}}^\alpha = -\frac{1}{2} \left(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta \right) \left(2\nabla_\delta h_{\beta\gamma}^R - \nabla_\alpha h_{\gamma\delta}^R \right) u^\gamma u^\delta. \quad (2.85)$$

L'aspect intéressant de cette décomposition est qu'elle permet de réinterpréter l'effet de la force propre et le mouvement de la particule. La particule peut être vue comme suivant une géodésique inscrite dans un espace-temps régulier de métrique $g + h^R$ ce qui, d'une certaine manière peut être vue comme une extension au principe d'équivalence [96]. Le champ de perturbation h^R ne doit pas pour autant être considéré comme le champ de perturbation physique (formellement à cause de ses propriétés causales [77]) mais doit plutôt être vu comme un outil de calcul pour la force propre.

Une fois projeté dans la métrique de fond, le mouvement accéléré de la particule peut être décrit par la force propre calculée à partir du champ $h_{\alpha\beta}^R$ qui est identique à la force propre calculée à partir du champ $h_{\alpha\beta}^{\text{tail}}$. La partie $h_{\alpha\beta}^S$, dont la singularité a la même structure que celle de $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$, est solution de l'équation du champ linéarisée non homogène et n'influence pas le mouvement de la masse au même titre que $h_{\alpha\beta}^{\text{dir}}$. Plus précisément on peut montrer en fait que $h_{\alpha\beta}^{\text{dir}}$ et $h_{\alpha\beta}^S$ possèdent la même structure singulière au premier ordre [97][98][99].

La description (2.85) est mathématiquement équivalente à (2.81) et on peut montrer [77] que

$$\nabla_\gamma h_{\alpha\beta}^R = -4m_0 \left(u_\alpha R_{\beta\delta\gamma\xi} - u_\beta R_{\alpha\delta\gamma\xi} + u_\gamma R_{\alpha\delta\beta\xi} \right) u^\delta u^\xi + \nabla_\gamma h_{\alpha\beta}^{\text{tail}}. \quad (2.86)$$

Une fois que l'on introduit (2.86) dans (2.85), les termes qui font intervenir le tenseur de Riemann disparaissent et il reste l'équation (2.81).

Un aspect important à noter est que l'équation de MiSaTaQuWa renvoie à un choix de jauge spécifique. En effet l'expression (2.81) n'est valide que dans la jauge harmonique et selon (2.64), sa forme n'est pas préservée sous une transformation de coordonnées de type (2.62). Si l'on voulait pousser la remarque au delà, on pourrait constater qu'il est possible de trouver en chaque point, un vecteur de jauge qui annule idéalement la force propre...Ainsi la connaissance de la force propre gravitationnelle est complète que si l'on a également connaissance de la jauge dans laquelle elle est calculée. Ceci a un impact direct sur l'interprétation physique des phénomènes liés à la force propre. Il est nécessaire de combiner l'équation du mouvement et la perturbation de la métrique pour former des quantités invariantes de jauge associées à des observables qui permettront de conclure sur l'effet de la force propre [59].

En résumé, on peut considérer deux démarches mathématiquement équivalentes pour construire la force propre mais dont l'interprétation physique est différente. La première est celle qui conduit à l'équation de MiSaTaQuWa (2.81) pour laquelle on opère la décomposition directe/diffusée $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}} = h_{\alpha\beta}^{\text{tail}} + h_{\alpha\beta}^{\text{dir}}$ et qui décrit le mouvement perturbé comme un mouvement auto-accélééré dans une métrique de fond $g_{\alpha\beta}$. La seconde conduit à la même force propre mais pour laquelle on opère la décomposition R/S $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}} = h_{\alpha\beta}^{\text{R}} + h_{\alpha\beta}^{\text{S}}$ et qui décrit le mouvement perturbé comme un mouvement géodésique dans une métrique perturbée $g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ partout bien définie. Sago et al. [100] ont démontré par l'intermédiaire de quantités invariantes de jauge que les deux approches étaient équivalentes.

Le dernier aspect à retenir est celui de la dépendance de jauge. La force propre, n'est pas une quantité invariante de jauge et doit être associée au tenseur de perturbation si l'on souhaite décrire son action physique dans la jauge considérée. Son interprétation est cependant possible sans ambiguïté si l'on parle de son action sur des quantités observables qui sont, elles, invariantes de jauge [59].

2.3 Régularisation de la force propre gravitationnelle

Les auteurs cités précédemment [27][28][94] ont laissé une formulation satisfaisante de la force propre gravitationnelle mais non convenable pour son traitement numérique. On rappelle que la régularisation du champ $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ consiste à le décomposer tel que

$$h_{\alpha\beta}^{\text{ret}} = h_{\alpha\beta}^{\text{R/tail}} + h_{\alpha\beta}^{\text{S/dir}} , \quad (2.87)$$

mais comme le calcul directe de $F_{\text{self}}^{\alpha} = F^{\alpha}[h^{\text{R/tail}}]$ est difficile numériquement, on calcule $F^{\alpha}[h^{\text{ret}}]$ d'une part et $F^{\alpha}[h^{\text{S/dir}}]$ d'autre part puis en suivant les équations (2.58), (2.85) et (2.81) on réécrit la force propre évaluée sur la ligne d'univers γ sous la forme suivante

$$F_{\text{self}}^{\alpha}(x') = \lim_{x \rightarrow x'} \left[F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}](x) - F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}^{\text{sing}}](x) \right] , \quad (2.88)$$

où $F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}^{\text{sing}}](x) \equiv F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}^{\text{S/dir}}](x)$. On rappelle également que l'on note $F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}]$ la force calculée dans (2.58) à partir du champ de perturbation $h_{\alpha\beta}$. L'expression (2.88) définit la procédure standard pour le calcul de la force propre gravitationnelle. La singularité de $F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}]$ et la singularité de $F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}^{\text{sing}}]$ partagent la même structure donc on retranche à la force retardée sa partie divergente pour en faire une quantité purement régulière dans la limite de coïncidence $x \rightarrow x'$. En utilisant l'équation (2.60) on a également

$$F_{\text{self}}^{\alpha}(x') = m_0 \lim_{x \rightarrow x'} \left[\kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) \nabla_{\delta} \bar{h}_{\beta\gamma}^{\text{ret}}(x) - \kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) \nabla_{\delta} \bar{h}_{\beta\gamma}^{\text{sing}}(x) \right] . \quad (2.89)$$

On a introduit le tenseur $\kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ qui est une extension hors de γ du tenseur $k^{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui est, lui, défini uniquement sur la ligne d'univers γ (car il fait intervenir la quadri-vitesse u^α). Voir l'équation (2.61)). Formellement on a la relation suivante

$$k^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lim_{x \rightarrow x'} \kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) . \quad (2.90)$$

On a une liberté sur le choix de l'extension $\kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ mais elle doit rester régulière pour atteindre $k^{\alpha\beta\gamma\delta}$ dans la limite $x \rightarrow x'$ [101][98]. Naturellement on pourrait choisir une extension du type

$$u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha(x), \quad g^{\alpha\beta} \rightarrow g^{\alpha\beta}(x) \quad (2.91)$$

qui translate la quadri-vitesse u^α par transport parallèle d'un point x'^α à un point x^α et associe à $g^{\alpha\beta}(x)$ la valeur de la métrique $g^{\alpha\beta}$ au point x . Dans tous les cas, la valeur de la force propre ne dépend pas de l'extension choisie [101][98]. On fera le choix d'utiliser l'extension adoptée dans [98] qui consiste à fixer la valeur des composantes contravariantes $\kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}$ à la valeur de $k^{\alpha\beta\gamma\delta}$ pour tout $x \rightarrow x'$. Dans tout ce qui suit on considérera l'extension suivante

$$\kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) \equiv k^{\alpha\beta\gamma\delta} . \quad (2.92)$$

Un point crucial à respecter est de prendre le même choix d'extension aussi bien pour le calcul de $F^\alpha[h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}]$ que pour le calcul de $F^\alpha[h_{\alpha\beta}^{\text{sing}}]$.

2.3.1 Régularisation Mode-Sum

Une des méthodes les plus efficaces pour évaluer la force propre est sans conteste la méthode Mode-Sum basée sur un développement de coordonnées locales d'abord proposé par Mino et al. [27] et l'utilisation de paramètres de régularisations introduits par Barack et Ori [29][98][102]. On se propose ici de revoir brièvement les idées clés de ce calcul de régularisation dans le cas où l'espace-temps de fond est un trou noir de Schwarzschild. En partant de l'équation (2.88) on rappelle que

$$F_{\text{self}}^\alpha(x') = \lim_{x \rightarrow x'} \left[F_{\text{ret}}^\alpha(x) - F_{\text{sing}}^\alpha(x) \right] , \quad (2.93)$$

où on a noté $F_{\text{ret}}^\alpha \equiv F^\alpha[h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}]$ et $F_{\text{sing}}^\alpha \equiv F^\alpha[h_{\alpha\beta}^{\text{sing}}]$. Comme on l'a vu précédemment, $F_{\text{ret}}^\alpha(x)$ et $F_{\text{sing}}^\alpha(x)$ divergent en $x \rightarrow x'$. La première étape consiste à effectuer un développement multipolaire des quantités qui nous intéressent

$$F_{\text{self,ret,sing}}^\alpha = \sum_{\ell=0}^{\infty} F_{\text{self,ret,sing}}^{\alpha\ell} , \quad (2.94)$$

où chaque multipôle ℓ est donné par

$$F_{\text{self,ret,sing}}^{\alpha\ell} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} F_{\text{self,ret,sing}}^{\alpha\ell m} . \quad (2.95)$$

Cette décomposition a l'avantage de nous faire manipuler, pour chaque mode ℓ , des quantités individuellement finies :

- Les $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell}$ restent en effet finis mais leur somme ne converge pas car la force retardée, construite à partir du champ retardé $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$, est formellement divergente en $x \rightarrow x'$. C'est pourquoi la continuité de $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell}$ n'est pas garantie en $x \rightarrow x'$ et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\text{ret}}^{\alpha\ell}(x' - \varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\text{ret}}^{\alpha\ell}(x' + \varepsilon) . \quad (2.96)$$

- Les $F_{\text{sing}}^{\ell\alpha}$ sont également finis et discontinus à la position de la particule et leur somme diverge aussi.
- Les multipôles de la force propre, que l'on pourrait noter

$$F_{\text{self}}^{\alpha\ell} := F_{\text{ret}}^{\alpha\ell} - F_{\text{sing}}^{\alpha\ell} , \quad (2.97)$$

sont finis et continus en $x \rightarrow x'$ et leur somme converge par définition.

Ces remarques étant faites, l'équation (2.93) devrait ainsi s'écrire

$$F_{\text{self}}^{\alpha}(x') = \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell}(x) - F_{\text{sing}\pm}^{\alpha\ell}(x) \right] , \quad (2.98)$$

le signe " $\pm$ " étant là pour indiquer que la limite quand $x \rightarrow x'$ conduit à deux valeurs distinctes.

En pratique, connaissant les équations du champ linéarisées qui régissent les composantes du champ retardé pour chaque mode (voir chapitre 3), les modes $F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell}$ sont calculés numériquement. La partie singulière $F_{\text{sing}}^{\alpha\ell}$ est quant à elle approchée à un ordre donné par traitement analytique (voir chapitre 5). La structure générale de $F_{\text{sing}}^{\alpha\ell}$ a été très étudiée [97][98][99] et conduit à la formule de régularisation Mode-Sum

$$F_{\text{self}}^{\alpha} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x'} F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell}(x) - A_{\pm}^{\alpha} L - B^{\alpha} - C^{\alpha} L^{-1} \right] - D^{\alpha} = \sum_{\ell=0}^{\infty} F_{\text{self}}^{\alpha\ell} , \quad (2.99)$$

où $L = \ell + 1/2$ et

$$D^{\alpha} := \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x'} F_{\text{S}}^{\alpha\ell} - A^{\alpha} L - B^{\alpha} - C^{\alpha} L^{-1} \right] . \quad (2.100)$$

Les coefficients A^α , B^α , C^α , D^α que l'on appelle *paramètres de régularisation*, ne dépendent pas de ℓ mais dépendent de la géométrie de l'espace-temps de fond et de quantités liées à la particule en mouvement (position, quadri-vitesse). Ils ont déjà été calculés pour des orbites génériques en jauge harmonique pour un trou noir de Schwarzschild [29][98] et de Kerr [102] (on proposera au chapitre 5 un calcul des paramètres de régularisation, mais cette fois, en jauge de Regge-Wheeler [23] pour le cas de la chute radiale sur un trou noir de Schwarzschild). La partie singulière de la force retardée est donc décomposée en puissances de $1/L$ telles que le terme faisant intervenir A^α dans la série (2.99) diverge quadratiquement, le terme faisant intervenir B^α diverge linéairement et le terme lié à C^α diverge logarithmiquement. Le paramètre D^α (souvent de valeur nulle) est un terme résiduel lié au fait que la série est tronquée ici en $\mathcal{O}(L^{-2})$. Par conséquent les multipôles de la force propre se comportent comme ℓ^{-2} par rapport pour de grandes valeurs de ℓ (voir chapitre 5). Il est possible d'étendre ce développement en puissances de $1/L$ pour atteindre un ordre plus élevé et donc améliorer la vitesse de convergence de la série (2.99). Ces termes d'ordres supérieurs sont convergents et sont connus pour prendre la forme [103]

$$\frac{D_{(2)}^\alpha}{(2\ell-1)(2\ell+3)} + \frac{D_{(4)}^\alpha}{(2\ell-3)(2\ell-1)(2\ell+3)(2\ell+5)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} D_{(2n)}^\alpha \left[\prod_{k=1}^n (2L-2k)(2L+2k) \right]^{-1} \quad (2.101)$$

où les coefficients $D_{(n)}^\alpha$ n'ont pas de lien explicite avec D^α .

2.3.2 Exemple simple

En reprenant le système newtonien considéré à la section 2.2.1, il est assez facile de retrouver la structure de la partie singulière du champ comme elle est définie dans (2.99). On rappelle que le champ singulier était donné par

$$\delta\Phi_S(\mathbf{x}) = -\frac{m_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|}, \quad (2.102)$$

dont on fait un développement multipolaire classique

$$\delta\Phi_S(\mathbf{x}) = -\frac{m_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} = -m_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x_{<}^\ell}{x_{>^{\ell+1}}} P_\ell(\cos \vartheta) \quad (2.103)$$

avec $x_{<} = \min(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{r}\|)$, $x_{>} = \max(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{r}\|)$ et $\cos \vartheta = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$. Les P_ℓ sont les polynômes de Legendre. En prenant le gradient de (2.103) on obtient dans la limite

$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}$

$$\mathbf{g}_S(\mathbf{r}) = - \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}} \nabla \delta \Phi_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} m_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \|\mathbf{r}\|^{-2}, & \text{si } \|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{r}\| \\ m_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} -(\ell+1) \|\mathbf{r}\|^{-2}, & \text{si } \|\mathbf{x}\| > \|\mathbf{r}\| \end{cases} \quad (2.104)$$

que l'on peut résumer en considérant la composante radiale du champ singulier (les composantes angulaires étant nulles)

$$g_S^r = \frac{m_0}{r^2} \sum_{\ell} \left[\mp \left(\ell + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.105)$$

Par identification à la série (2.99), on montre que $A^r = \mp m_0/r^2$, $B^\alpha = -m_0/(2r^2)$ et $C^r = 0$. Le choix du signe intervenant dans A^r dépend de la façon dont on prend la limite $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}$. Ce calcul newtonien reproduit en fait l'expression des paramètres de régularisation relativiste au premier ordre de leur développement post-newtonien [86].

2.4 Aspect conservatif et dissipatif de la force propre

La force propre n'étant pas que la réaction de radiation, deux aspects intéressants peuvent être distingués séparément. La force propre peut être décomposée en une partie conservative (symétrique en temps) et une partie dissipative (anti-symétrique en temps). Cette décomposition est un outil conceptuel important pour comprendre la signification physique de la force propre. De même ces deux parties distinctes sont souvent utiles dans le calcul numérique. Leur formulation font intervenir les champs de perturbation retardé et avancé que l'on note $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ et $h_{\alpha\beta}^{\text{adv}}$. On associe à $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ et $h_{\alpha\beta}^{\text{adv}}$ deux quantités $\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha$ et $\mathcal{F}_{\text{adv}}^\alpha$ régularisées définies par

$$\mathcal{F}_{\text{ret/adv}}^\alpha = \lim_{x \rightarrow x'} \left[F^\alpha[h_{\alpha\beta}^{\text{ret/adv}}](x) - F^\alpha[h_{\alpha\beta}^{\text{sing}}](x) \right]. \quad (2.106)$$

où $\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha$ est exactement la force propre calculée dans l'équation (2.89) à partir du champ retardé c'est-à-dire que $\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha = F_{\text{self}}^\alpha$. L'autre quantité $\mathcal{F}_{\text{adv}}^\alpha$ est calculée en remplaçant le champ retardé dans (2.89) par le champ avancé. La partie conservative de la force propre $\mathcal{F}_{\text{cons}}^\alpha$ et la partie dissipative $\mathcal{F}_{\text{diss}}^\alpha$ sont calculées par

$$\mathcal{F}_{\text{cons}}^\alpha = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha + \mathcal{F}_{\text{adv}}^\alpha), \quad (2.107)$$

$$\mathcal{F}_{\text{diss}}^\alpha = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha - \mathcal{F}_{\text{adv}}^\alpha). \quad (2.108)$$

La force propre retardée est bien la somme des deux parties

$$F_{\text{self}}^\alpha = \mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha = \mathcal{F}_{\text{cons}}^\alpha + \mathcal{F}_{\text{diss}}^\alpha . \quad (2.109)$$

D'un point de vue plus concret, la force dissipative F_{diss}^α est responsable des variations sur le long-terme des "constantes" du mouvement [104] associées aux orbites comme l'énergie $\mathcal{E}$, le moment angulaire $\mathcal{L}$ (ou la constante de Carter $\mathcal{C}$ [105] si la géométrie de fond est une métrique de Kerr). On entendra par "long terme" ici une durée temporelle bien plus grande que la durée caractéristique d'une période orbitale. La force conservative F_{cons}^α quant à elle induira principalement des effets quasi-périodiques dans les paramètres orbitaux (liés bien évidemment à $\mathcal{E}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$) mais n'aura pas d'effet séculaire sur les orbites. Donc à priori seule la partie dissipative est à utilisée pour calculer l'évolution sur le long terme d'une orbite d'un système de type EMRI [106–110]. Ceci est assez remarquable puisque $\mathcal{F}_{\text{diss}}^\alpha$ pourrait être calculée sans régularisation. En effet, $F^\alpha[h_{\text{ret}}^{\alpha\beta}]$ et $F^\alpha[h_{\text{adv}}^{\alpha\beta}]$ ont la même structure singulière au voisinage de γ donc la différence de $\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha - \mathcal{F}_{\text{adv}}^\alpha$ dans (2.108) fait disparaître la singularité. Ainsi, le calcul de la partie dissipative par Mode-Sum converge exponentiellement par rapport à ℓ et non linéairement pour la force propre elle même (ou la partie conservative seulement). Drasco et Hughes [111] et Pound et Poisson [112][113] ont, cela dit, montré que la partie conservative de la force propre pouvait induire également un effet séculaire sur le mouvement orbital. Cet effet, estimé à un déphasage de ~ 20 radians [114] sur les formes d'ondes d'un système EMRI dans sa dernière année de spirale, devient non négligeable dans le cadre d'une détection d'ondes gravitationnelles (en comparaison, la partie dissipative serait responsable d'un déphasage de $\sim 10^6$ radians pour le même cas de figure [114]). Un détecteur de type eLISA pourrait en théorie distinguer des différences de phase de l'ordre de $\sim 10^{-2}$ radians [115], donc l'effet cumulatif de la force conservative doit être pris en compte dans les modèles EMRIs.

D'un point de vue technique, calculer $\mathcal{F}_{\text{adv}}^\alpha$ en plus de $\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha$ peut devenir très lourd numériquement dans le domaine temporel puisqu'il s'agirait de doubler le temps de résolution des équations⁸. Cependant, lorsque le contexte s'y prête une autre approche est envisageable. Dans le cas d'orbites équatoriales (toujours le cas en métrique de Schwarzschild) ou circulaires, ou plus généralement pour une particule dont l'orbite est périodique avec une seule fréquence orbitale⁹, en considérant la symétrie des géodésiques, il est possible de construire la force propre conservative et dissipative seulement en

⁸Dans le domaine fréquentiel, obtenir la force propre à partir du champ avancé est assez simple puisqu'il suffirait d'inverser les conditions aux bords de sorte à avoir un rayonnement entrant à l'infini et sortant à l'horizon.

⁹On rappelle qu'en métrique de Kerr, trois fréquences orbitales peuvent être définies.

connaissant la force propre retardée [116][104] via l'expression suivante

$$\mathcal{F}_{\text{adv}}^\alpha(\tau) = \varepsilon_{(\alpha)} \mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha(-\tau) , \quad (2.110)$$

dans laquelle on n'effectue pas de somme sur α et où $\varepsilon_{(\alpha)} = (-1, 1, 1, -1)$. On considère ici, sans perte de généralité, que $\tau = 0$ est la date à laquelle la particule occupe le péri-astre ou l'apo-astre. Il est facile de réécrire les expressions (2.107) et (2.108)

$$\mathcal{F}_{\text{cons}}^\alpha(\tau) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha(\tau) + \varepsilon_{(\alpha)} \mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha(-\tau) \right] , \quad (2.111)$$

$$\mathcal{F}_{\text{diss}}^\alpha(\tau) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha(\tau) - \varepsilon_{(\alpha)} \mathcal{F}_{\text{ret}}^\alpha(-\tau) \right] . \quad (2.112)$$

Le calcul de la force propre (retardée) doit être fait au moins sur une période (les calculs sont généralement fait sur plusieurs périodes orbitales) pour tirer partie de cette méthode et éviter le calcul direct de la force propre avec le champ avancé. On peut noter que pour des orbites circulaire, (2.111) et (2.112) conduisent à $\mathcal{F}_{\text{cons}}^t = \mathcal{F}_{\text{cons}}^\phi = 0$ et $\mathcal{F}_{\text{diss}}^r = \mathcal{F}_{\text{diss}}^\theta = 0$ donc seules les composante t et ϕ de la force propre sont dissipatives. De même les composantes r et θ sont purement conservatives.

Chapitre 3

Trou noir de Schwarzschild perturbé

L'ESPACE-TEMPS d'un trou noir est décrit par les équations d'Einstein dans le vide dont l'une des premières solutions fut proposée par Schwarzschild [117] et Droste [118]. Un trou noir non rotatif de masse M peut être ainsi décrit par une métrique de Schwarzschild dont les propriétés de sphéricité et de stationnarité sont d'une grande aide simplificatrice. Une particule test de masse m_0 dans un espace-temps de Schwarzschild suit un mouvement géodésique (dicté par l'identité de Bianchi). Cette particule est elle-même source de gravité et provoque une perturbation de la métrique qui se propage sous la forme d'OG. Dans le régime $m_0 \ll M$, l'approche perturbative permet de sonder un espace-temps fortement courbé (à cause du TNSM) dans lequel les objets se déplacent à des vitesses relativistes. On caractérise les fluctuations de la métrique en linéarisant les équations d'Einstein autour de la solution du vide. À travers un développement multi-modal, chaque mode du tenseur de perturbation ainsi obtenu permet de spécifier l'écart à la sphéricité de la métrique de fond et de calculer les formes d'ondes à l'infini.

Dans ce chapitre on détaillera dans un premier temps la structure d'un TN de Schwarzschild et dans un deuxième temps comment cette structure est modifiée par la présence d'une particule de faible masse. On présentera alors le formalisme de Regge, Wheeler [23] et Zerilli [26] nécessaire pour traiter ce problème et on introduira la jauge de Regge-Wheeler et l'équation de Regge-Wheeler-Zerilli qui permet de calculer concrètement les formes d'ondes gravitationnelles et les perturbations de la métrique.

3.1 Espace-temps de Schwarzschild

L'espace-temps de Schwarzschild $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ décrit un trou noir statique à symétrie sphérique. La métrique $g_{\alpha\beta}$ associée à la variété $\mathcal{M}$ de l'espace-temps de Schwarzschild est une solution aux équations d'Einstein dans le vide trouvée dans les premières années

qui suivirent la formulation de la relativité générale. Elle s'écrit habituellement dans les coordonnées standard de Schwarzschild $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \end{aligned} \quad (3.1)$$

pour

$$t \in \mathbb{R} , \quad r \in]0, 2M[\cup]2M, \infty[, \quad \theta \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (3.2)$$

Cette solution présente deux singularités, la première en $r = 0$ est une singularité "vraie" au sens où aucun changement de coordonnées ne permet de la neutraliser. Pour le vérifier on peut par exemple, à partir du tenseur de courbure $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, définir l'invariant scalaire de Kretschmann [119][120] $R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 48M^2/r^6$ qui diverge lorsque r est nul. La deuxième singularité localisée en $r = 2M$ est une singularité de coordonnée dont on peut se débarrasser par extension maximale au sens de Kruskal [121] et caractérise l'horizon des événements.

Comme le suggère la partie angulaire, la métrique est bien à symétrie sphérique et est également statique¹ puisque les coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de t . De plus, le paramètre M intervenant dans l'expression des coefficients de la métrique, apparaît pour un observateur lointain, comme la masse newtonienne d'un objet central produisant un champ de gravitation à symétrie sphérique, donc il s'agit bien de la masse du trou noir que l'on considère.

Strictement parlant, la formulation de l'élément de longueur tel qu'il est donné dans (3.1) n'est pas l'expression originale que donne Schwarzschild dans son travail publié en janvier 1916 [117]. Ce que l'on nomme communément "solution de Schwarzschild" est en fait la solution proposée indépendamment par Droste [118], étudiant de Lorentz, trois mois après Schwarzschild puis retrouvée par Weyl [122] dans l'année suivante en 1917. La solution trouvée par Droste diffère de celle de Schwarzschild dans sa formulation mais semble physiquement équivalente dans le sens où elle est asymptotiquement plate et décrit le champ gravitationnel d'une distribution sphérique de matière. Concrètement, Schwarzschild et Droste n'utilisent pas le même système de coordonnées. Schwarzschild écrira l'élément de longueur ds^2 en terme d'une fonction $\mathcal{R}(r) = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$ telle que

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{\mathcal{R}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{\mathcal{R}}\right)^{-1} d\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (3.3)$$

¹En réalité, d'après le théorème de Birkhoff, imposer la sphéricité de la métrique conduit naturellement à la stationnarité des coefficients de la métrique. Donc même si la source est en mouvement mais qu'elle préserve la symétrie sphérique, la métrique de Schwarzschild est une bonne solution pour décrire le système. Typiquement une étoile en cours d'effondrement ou une supernova à symétrie sphérique ne devrait pas générer d'ondes gravitationnelles.

valide pour $\mathcal{R}(r) \geq \alpha$ avec $\alpha = 2M$. Dans cette formulation, la métrique est seulement singulière en $r = 0$ et il n'apparaît aucune particularité à l'horizon. En effet dans son texte original, Schwarzschild [117] construit sa solution de telle façon que la singularité de coordonnée se présente à l'origine de son système de coordonnées et de surcroît, le concept de trou noir ne semble même pas apparaître. Pourtant sous l'influence d'une remarque formulée dans un article de Hilbert [123] parue quelques mois après celui de Schwarzschild et dans lequel il reproduit la solution de Droste, la solution de Schwarzschild est abandonnée et le nom de Droste oublié dans la foulée. Connue désormais sous le nom de Schwarzschild, la solution de Droste a fait couler beaucoup d'encre en raison de la discontinuité qu'elle présente en $r = 2M$ et est à l'origine du concept de trou noir².

3.2 Mouvement géodésique dans une métrique de Schwarzschild

Le mouvement d'une particule test de masse m_0 est un mouvement géodésique dont l'équation est donnée par

$$m_0 u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0, \quad (3.4)$$

où ∇_β est la dérivée covariante associée à la métrique $g_{\alpha\beta}$. La particule suit donc une géodésique γ du genre temps paramétrée par le temps propre τ et repérée sur la variété par les coordonnées $x^\alpha = x_p^\alpha(\tau)$ (dans ce chapitre on n'utilisera pas la notation x' du chapitre 1 pour désigner les points appartenant à γ . On réservera le prime ' pour désigner une dérivation par rapport à r). La quadri-vitesse, tangente à γ , est donnée par $u^\alpha = dx_p^\alpha/d\tau$. Ecrire les équations du mouvement dans la métrique de Schwarzschild $g_{\alpha\beta}$ consiste à expliciter la dérivée covariante ∇_β appliquée au quadri-vecteur vitesse u^α , c'est-à-dire concrètement donner les coefficients non nuls de la connexion $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ liées à la métrique $g_{\alpha\beta}$ dans l'équation (3.4).

Un autre stratégie pour trouver les équations du mouvement est d'utiliser le haut degré de symétrie de la métrique de Schwarzschild et les invariants associés aux vecteurs de Killing [124]. En relativité générale les symétries d'une métrique sont caractérisées par l'existence de champs de vecteurs de Killing et dans notre cas il y a quatre vecteurs de Killing, trois pour la symétrie sphérique et un pour les translations dans le temps.

²On peut quand même noter qu'à l'époque où la relativité générale est formulée par Einstein, la géométrie différentielle n'est pas encore bien échafaudée si bien que tout était déterminé par système de coordonnées locales sans faire mention de variété sous-jacente. Il était même préférable de chercher une extension maximale à une solution connue plutôt que de fixer la variété à priori. Dans ce sens il n'est pas surprenant, que la solution originale de Schwarzschild et l'extension de Kruskal de la solution de Droste définissent deux espace-temps dont la topologie est différente et ne sont donc pas exactement les mêmes solutions de l'équation d'Einstein.

Chacun d'eux correspond à une constante du mouvement pour une particule libre. Si ξ est un vecteur de Killing nous avons alors

$$\xi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \text{constante} . \quad (3.5)$$

Ou en d'autres termes, le produit scalaire d'un vecteur de Killing avec le quadri-vecteur vitesse est conservé le long d'une géodésique. L'invariance dans le temps conduit à la conservation de l'énergie, tandis que les trois invariances par rotation autour des trois axes du repère cartésien conduisent à la conservation des trois composantes du moment cinétique. Si l'on considère les vecteurs $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$ de la base naturelle associée aux coordonnées de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) ,

- les deux vecteurs de Killing qui conduisent à la conservation de la direction du moment cinétique sont

$$\xi_{(x)} = -\sin\theta\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi \quad (3.6)$$

$$\xi_{(y)} = -\cos\theta\partial_\theta + \cot\theta\sin\phi\partial_\phi . \quad (3.7)$$

Ces deux vecteurs confinent le mouvement dans un plan que nous pouvons choisir équatorial en imposant $\theta = \pi/2$.

- Le vecteur de Killing qui assure la conservation de l'amplitude du moment cinétique (ou son invariance par rotation autour de l'axe z du repère cartésien) est donné par

$$\xi_{(z)} = \partial_\phi = (0, 0, 0, 1) \quad (3.8)$$

tel que

$$g_{\alpha\beta}\xi_{(z)}^\beta u^\alpha = g_{\phi\phi}u^\phi = r^2\sin^2\theta u^\phi = \mathcal{L} . \quad (3.9)$$

- Le dernier vecteur de Killing qui confère la stationnarité de la métrique et assure la conservation de l'énergie est

$$\xi_{(t)} = \partial_t = (1, 0, 0, 0) \quad (3.10)$$

tel que

$$g_{\alpha\beta}\xi_{(t)}^\beta u^\alpha = g_{tt}u^t = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)u^t = u_t = -\mathcal{E} . \quad (3.11)$$

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ sont interprétés pour des particules massives de masse m_0 comme l'énergie et le moment cinétique par unité de masse m_0 . Les quatre invariances ont été définies, il reste à utiliser l'invariant métrique qui assure que

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1 \quad (3.12)$$

Ainsi, en utilisant les relations (3.9), (3.11) et (3.12) on obtient l'équation du mouvement d'une particule massive m_0 qui se déplace le long d'une géodésique dans l'espace-temps de Schwarzschild³

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr_p}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[f(r_p) \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{r_p^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - 1) . \quad (3.13)$$

où $f(r) := 1 - 2M/r$. Le deuxième terme du membre de gauche est souvent associé en mécanique à un potentiel effectif $\mathcal{V}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left[f(r_p) \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{r_p^2} \right) - 1 \right] = -\frac{M}{r_p} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r_p^2} - \frac{M\mathcal{L}^2}{r_p^3}$ dans lequel les deux premiers termes correspondent exactement au potentiel effectif newtonien $\mathcal{V}_{\text{Newt}} = -\frac{M}{r_p} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r_p^2}$ et où le troisième terme est la correction relativiste qui a une importance majeure pour de faibles valeurs de r_p (voir Fig. 3.1).

3.2.1 Orbites planes

On peut résumer les équations du mouvement sous le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \frac{dt_p}{d\tau} &= \frac{\mathcal{E}}{f(r_p)} \\ \frac{d\phi_p}{d\tau} &= \frac{\mathcal{L}}{r_p^2} \\ \left(\frac{dr_p}{d\tau} \right)^2 + \mathcal{V}(\mathcal{L}, r_p) &= \mathcal{E}^2 . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pour des raisons de symétrie, sans perte de généralité on a fixé $\theta_p = \pi/2$. On a vu que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ étaient les deux constantes du mouvement correspondant respectivement à l'énergie de la particule par unité de masse m_0 et au moment angulaire par unité de masse m_0 . $\mathcal{V}(\mathcal{L}, r_p) = f(r_p) \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{r_p^2} \right)$ est un potentiel effectif dont le comportement qualitatif permet de classer les orbites pour un couple $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ donné (voir Fig. 3.1). Ainsi, les orbites d'une particule en mouvement dans une métrique de Schwarzschild peuvent entièrement être caractérisées par leur énergie et leur moment angulaire.

Il est généralement utile de relier les deux quantités $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ aux paramètres képlériens e et p traditionnellement employés pour décrire les orbites en mécanique classique. Pour

³On aurait pu retrouver les résultats (3.9) et (3.11) en remarquant que le Lagrangien associé à la métrique (3.1) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$ ne dépend pas des variables ϕ et t . ϕ et t sont donc deux variables cycliques chacune associée à une quantité conservée donnée par les équations de Lagrange $\frac{d}{d\tau} \left[r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right] = 0$ et $\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \right] = 0$.

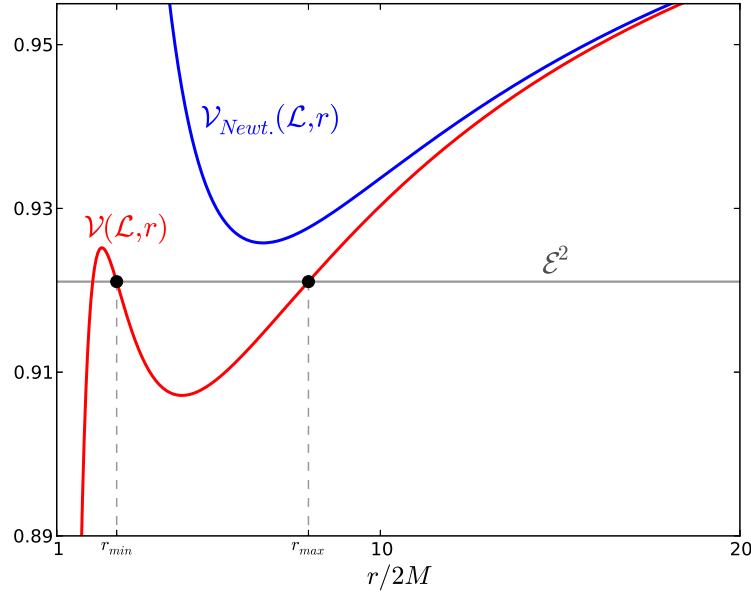


FIGURE 3.1: Exemple de la forme du potentiel effectif $\mathcal{V}(\mathcal{L}, r_p)$ tracé en rouge pour une orbite d'énergie $\mathcal{E}$ et de moment angulaire $\mathcal{L}$. Dans le cas choisi, la valeur du couple $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ contraint l'orbite à suivre un mouvement lié entre $r = r_{\min}$ et $r = r_{\max}$. Le maximum et minimum local du potentiel défini un état instable et stable que peut atteindre une orbite en faisant varier les valeurs de $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ (voir la description des différents types d'orbites). En bleu on a tracé le potentiel newtonien dont le comportement est très différent dans la zone de champ fort, proche de l'horizon.

cela on supposera que r_p peut prendre la forme képlérienne suivante [125]

$$r_p(\chi) = \frac{pM}{1 + e \cos(\chi - \chi_0)}, \quad (3.15)$$

où $\chi(\tau)$ est une nouvelle variable angulaire monovaluée sur l'orbite qui facilite l'intégration du système (3.14) et qui joue le rôle de l'anomalie (relativiste). En ces termes on définit aisément $r_{\min}$ la valeur minimale prise par r_p sur l'orbite et $r_{\max}$ la valeur maximale prise par r_p sur l'orbite; $r_{\min}$ et $r_{\max}$ correspondent respectivement au périastre et apoastre donnés par

$$r_{\min} = \frac{pM}{1 + e}, \quad r_{\max} = \frac{pM}{1 - e}. \quad (3.16)$$

χ_0 est un terme de phase initiale qui oriente l'orbite sur le plan équatorial, c'est-à-dire que pour $\chi = \chi_0$ la particule se trouve au peri-astre. L'excentricité e et le semi-latus rectum p sont alors définis en inversant les relations précédentes

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}, \quad p = \frac{2}{M} \frac{r_{\max} r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}. \quad (3.17)$$

Générer une orbite consistera à fournir un couple (e, p) dont les valeurs sont reliées au couple $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ par les relations

$$\mathcal{E}^2 = \frac{(p-2)^2 - 4e^2}{p(p-3-e^2)}, \quad \mathcal{L}^2 = \frac{M^2 p^2}{p-3-e^2}. \quad (3.18)$$

En pratique, le système (3.14) n'est pas bien défini au point de rebroussement du vecteur vitesse, on préférera donc utiliser une version différente du système en terme de χ [126]

$$\begin{aligned} r_p(\chi) &= \frac{pM}{1 + e \cos(\chi - \chi_0)}, \\ \frac{dt_p}{d\chi} &= \frac{Mp^2}{(p-2-2e \cos \chi)(1 + e \cos \chi)^2} \sqrt{\frac{(p-2)^2 - 4e^2}{p-6-2e \cos \chi}}, \\ \frac{d\phi_p}{d\chi} &= \sqrt{\frac{p}{p-6-2e \cos \chi}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

que l'on peut inverser pour se rapporter à un système sur t (afin d'alléger les écritures on n'écrira pas l'indice p de la variable temporelle t_p)

$$\begin{aligned} r_p(\chi) &= \frac{pM}{1 + e \cos(\chi - \chi_0)}, \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{(p-2-2e \cos \chi)(1 + e \cos \chi)^2}{Mp^2} \sqrt{\frac{p-6-2e \cos \chi}{(p-2)^2 - 4e^2}}, \\ \frac{d\phi_p}{dt} &= \frac{(p-2-2e \cos \chi)(1 + e \cos \chi)^2}{p^{3/2} M \sqrt{(p-2)^2 - 4e^2}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ainsi, obtenir $r_p(\chi)$ et $\phi_p(\chi)$ est analogue à connaître $r_p(t)$ et $\phi_p(t)$. La particule sera initialement positionnée au périastre, tel que $\phi_p(t=0) = 0$ et $\chi(t=0) = \chi_0 = 0$.

En suivant Cutler et al. [126] il est possible de définir deux fréquences orbitales Ω_r et Ω_ϕ caractéristiques du mouvement. D'après (3.15), pour $0 < r_p < 1$, r_p est manifestement une fonction périodique du temps de période

$$T_r = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\chi} d\chi. \quad (3.21)$$

Ω_r est appelée fréquence radiale dans le sens où toute fonction $A(t)$ de $r_p(t)$ est aussi périodique et peut être décomposée en série de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-in\Omega_r t)$ où les coefficients de Fourier A_n s'écrivent $A_n = T_r^{-1} \int_0^{T_r} A(t) \exp(in\Omega_r t) dt$ et tel que

$$\Omega_r = \frac{2\pi}{T_r}. \quad (3.22)$$

En particulier si l'on pose $A(t) = d\phi/dt$, l'intégration du développement en série de Fourier de $A(t)$ donne $\phi(t) = A_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} i A_n / (n\Omega_r) \exp(in\Omega_r t)$ donc $\phi(t) - A_0 t$ est une

fonction périodique car elle s'écrit comme une série de Fourier. On posera $\Omega_\phi := A_0$ dont l'expression est donnée par

$$\Omega_\phi = \frac{\Delta\phi}{T_r}, \quad (3.23)$$

avec

$$\Delta\phi = \int_0^{T_r} \frac{d\phi_p}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_p}{d\chi} d\chi = 4\sqrt{\frac{p}{p-6+2e}} \mathcal{K}\left[\frac{4e}{p-6+2e}\right]. \quad (3.24)$$

La quantité $\mathcal{K}[n] = \int_0^{\pi/2} (1 - n \sin^2 \vartheta)^{-1/2} d\vartheta$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce. Au regard de (3.24), il y a peu de chance que $\Delta\phi$ soit un multiple de 2π . En effet en relativité générale les orbites liées ne sont pas fermées à cause de la précession orbitale, par conséquent le mouvement de la particule, vu par un observateur fixe à l'infini, n'est pas périodique en t . La fréquence azimutale Ω_ϕ est quand même une fréquence caractéristique du système dans le sens où, dans le nouveau repère $\phi(t) \rightarrow \phi(t) - \Omega_\phi t$, le mouvement azimutal est périodique en t et de période T_r . Concrètement $\phi - \Omega_\phi t$ correspondrait à la position angulaire de la particule vue par un observateur qui serait en rotation uniforme, de fréquence Ω_ϕ , autour d'un point fixe situé à l'infini. Ou vu autrement, dans le repère $\phi(t) \rightarrow \phi(t) - \Omega_\phi t$, la particule suit une trajectoire circulaire de période T_r autour du trou noir.

En résumé, deux fréquences Ω_r et Ω_ϕ peuvent être déterminées pour une orbite donnée, cependant elles ne constituent pas un couple de paramètres orbitaux qui permettent de qualifier une orbite de manière univoque à la manière des couples $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ et (e, p) . Effectivement, dans une métrique de Schwarzschild, on peut montrer que deux orbites distinctes peuvent partager les mêmes fréquences orbitales. On parle d'iso-fréquences [127].

Orbites elliptiques

D'après (3.16), si $e = 0$ alors $r_p(\tau) = r_{\min} = r_{\max} \forall \tau$ et si $r_{\max} \rightarrow \infty$ alors $e \rightarrow 1$. De plus, pour une orbite liée, $p > 6 + 2e$. Ainsi les orbites liées sont définies par l'ensemble des points du plan (e, p) qui satisfont les inégalités $0 \leq e < 1$ et $p > 6 + 2e$. Ce domaine détermine la région des orbites stables séparée de la région des orbites instables par la droite d'équation $e_{\text{sep}}(p) = 1/2(p - 6)$ que l'on appelle la *separatrix*.

Zoom-whirl

Les orbites de la separatrix pour lesquelles $p \rightarrow 6 + 2e$ spécifient des mouvements de type *zoomwhirl* pour lesquelles le nombre de périodes orbitales $N = \Delta\phi/2\pi \rightarrow \infty$. La

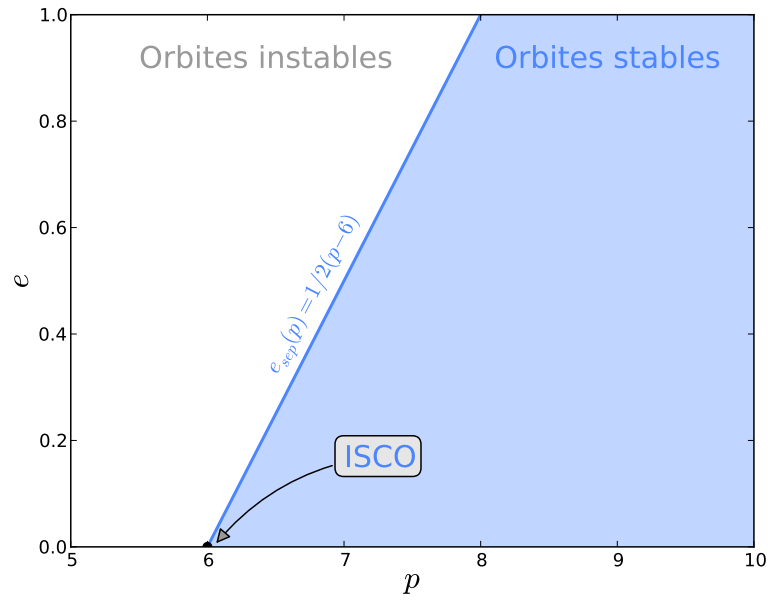


FIGURE 3.2: On a représenté ici l'espace des paramètres orbitaux (e, p) pour les orbites liées d'un espace-temps de Schwarzschild. La région $p > 6 + 2e$ où les orbites stables sont possibles est colorée en bleu. Dans la région non colorée ($p < 6 + 2e$) il n'y a pas d'orbites stables possibles, seulement des trajectoires instables conduisant au plongeon. La droite d'équation $e_{\text{sep}} = 1/2(p - 6)$ est nommée separatrix et marque l'interface entre les deux régions. Des orbites stables dans le voisinage de la separatrix conduisent à des orbites de type zoom-whirl. Le point $(e, p) = (0, 6)$ correspond à la dernière orbite circulaire stable ou ISCO.

particule venant de l'apoastre effectue un nombre important de révolutions au périastre puis retourne à l'apoastre et ainsi de suite.

Orbites circulaires

Dans le cas circulaire, $e = 0$ et $p = R/M$ et l'expression des fréquences orbitales se simplifie $\Omega_r = \sqrt{(R - 6M)M/R^4}$, $\Omega_\phi = \sqrt{M/R^3}$. Ces deux quantités peuvent être vues comme l'ordre 0 d'un mouvement quasi-circulaire $\Omega_r = \sqrt{(R - 6M)M/R^4} (1 + \mathcal{O}(e^2))$, $\Omega_\phi = \sqrt{M/R^3} (1 + \mathcal{O}(e^2))$ où les termes de perturbation $\mathcal{O}(e^2)$ donnent des critères de stabilité sur le mouvement. En effet on peut montrer [126] qu'une orbite circulaire de rayon $R \geq 6M$ est stable sous une perturbation infinitésimale de son excentricité alors que les orbites contenues dans le domaine $3M < R < 6M$ sont instables c'est-à-dire qu'une faible variation de leur excentricité entraîne le plongeon de la particule sur le trou noir. Ainsi la dernière orbite circulaire stable, ou ISCO, dont l'existence est une particularité propre à la gravitation relativiste, se localise en $R = 6M$ (point $(0, 6)$ du plan (e, p) (voir Fig. 3.2)). En dessous de $6M$ (ou dit autrement pour $p < 6$) aucune particule massive ne peut avoir un mouvement circulaire stable autour du trou noir. On peut noter que l'orbite de rayon $R = 3M$ est souvent nommée *l'anneau de lumière*

puisque seules les particules sans masses peuvent y conserver un mouvement circulaire. En dessous de $3M$ là encore, aucune géodésique circulaire de genre temps ou de genre lumière, stable ou instable n'est possible.

Orbites paraboliques

Le cas intéressant $e \rightarrow 1$ détermine une orbite parabolique ou de diffusion où la particule provenant de l'infini peut y être renvoyée dans la mesure où $p > 8$.

3.2.2 Orbites radiales

La chute libre d'un corps d'épreuve sur un trou noir est très simplement décrite dans une métrique de Schwarzschild. La particule suit une géodésique de l'espace-temps pour laquelle le moment cinétique est nul ($\mathcal{L} = 0$) et le système (3.4) se réduit, sous le choix non restrictif $\theta = 0$, à

$$\begin{aligned} \frac{dt_p}{d\tau} &= \frac{\mathcal{E}}{f(r_p)} \\ \left(\frac{dr_p}{d\tau} \right)^2 &= \mathcal{E}^2 - f(r_p) , \end{aligned} \quad (3.25)$$

qui se résume en temps coordonnée à

$$\frac{d^2 r_p}{dt_p^2} = -\frac{1}{2} f(r_p) f'(r_p) \left[1 - \frac{3}{f(r_p)^2} \left(\frac{dr_p}{dt_p} \right)^2 \right] , \quad (3.26)$$

ou sous la forme équivalente à

$$\frac{d^2 r_p}{dt_p^2} = f(r_p) f'(r_p) \left[1 - \frac{3}{2} \frac{f(r_p)}{\mathcal{E}^2} \right] . \quad (3.27)$$

Dans un premier temps si l'on considère une particule initialement au repos chutant sur le trou noir depuis l'infini, $\mathcal{E} = 1$ et l'équation du mouvement devient

$$\frac{dr_p}{dt_p} = -f(r_p) \sqrt{\frac{2M}{r_p}} . \quad (3.28)$$

En intégrant on trouve

$$t_p(r_p) = -4M \left[\sqrt{\frac{r_p}{2M}} \left(1 + \frac{r_p}{6M} \right) - \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{r_p}{2M}} \right) \right] , \quad (3.29)$$

valide pour $r_p > 2M$. Dans un deuxième temps, le même calcul peut être fait mais cette fois pour une chute depuis une distance finie $r_0 = r_p(t_p = 0)$. Maintenant $\mathcal{E} = \sqrt{f(r_0)} <$

1 et la trajectoire s'écrit

$$t_p(r_p) = \mathcal{E} \left(\frac{r_0}{2M} \right) \sqrt{\frac{r_p}{2M}} \sqrt{1 - \frac{r_p}{r_0}} + \left(1 + \frac{4M}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{2M} \right)^{3/2} \mathcal{E} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{r_0}{r_p} - 1} \right) + 2 \tanh^{-1} \left(\mathcal{E}^{-1} \sqrt{\frac{2M}{r_p} - \frac{2M}{r_0}} \right), \quad (3.30)$$

valide pour $r_p > 2M$. Dans les deux cas cités ici, on retrouve le comportement bien connu $t_p \rightarrow \infty$ quand $r_p \rightarrow 2M$. Afin d'endiguer le comportement singulier de la trajectoire à l'horizon il sera utile de considérer la coordonnée que Misner, Thorne et Wheeler [128] appellent *coordonnée tortue* qui transporte la singularité à l'infini.

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (3.31)$$

3.3 Equation d'Einstein linéarisée en jauge de Regge-Wheeler (RW)

Les premiers travaux traitant de trou noir perturbé apparaissent dès 1957 dans l'étude de Regge et Wheeler [23] sur la stabilité de la métrique de Schwarzschild. L'idée était d'examiner le comportement de la métrique de Schwarzschild lorsqu'elle est soumise à une perturbation extérieure de faible amplitude. Certains modes de perturbation peuvent-ils croître indéfiniment ou au contraire la métrique garde-t-elle une certaine stabilité ? Ils montrent en effet que l'horizon perturbé se désexcite par rayonnement gravitationnel que l'on peut décomposer sous la forme de modes quasi-normaux qui garantissent la stabilité de la métrique. RW ne font aucune hypothèse sur l'origine des perturbations traitées comme un champ de perturbation externe. Les modes quasi-normaux obéissent à l'équation de RW homogène dont la solution est un champ scalaire construit à partir des coefficients de la métrique de perturbation calculés dans la jauge de RW. Plus tard, en 1970, Zerilli [24–26] reprendra l'étude, cette fois, en associant les perturbations aux OG produites par une masse ponctuelle $m_0 \ll M$ en chute libre dans une métrique de Schwarzschild. Zerilli donnera les équations du champ linéarisé au premier ordre en h dont le terme source est donné par le tenseur énergie-impulsion d'une particule ponctuelle de masse m_0 .

3.3.1 Tenseur d'Einstein linéarisé

Comme on l'a montré dans la section 2.2.2, l'effet d'une particule de faible masse m_0 en mouvement dans un espace-temps de fond est décrit par les équations d'Einstein

linéarisées au premier ordre (2.67)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\nabla^\gamma\nabla_\gamma h_{\alpha\beta} + \nabla_\beta\nabla^\gamma h_{\alpha\gamma} + \nabla_\alpha\nabla^\gamma h_{\beta\gamma} - R_{\gamma\alpha\delta\beta}h^{\gamma\delta} \\
& -\frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha h - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\nabla^\delta\nabla_\gamma h_{\delta\gamma} - \nabla^\gamma\nabla_\gamma h\right) = m_0 \int_\gamma \frac{u_\alpha u_\beta}{\sqrt{-g}}\delta^{(4)}(x - x_p(\tau)) d\tau .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ici l'espace-temps de fond est un trou noir de Schwarzschild de métrique $g_{\alpha\beta}$. Les fluctuations de la métrique de fond seront données par le tenseur de perturbation $h_{\alpha\beta}$ solution de (3.32) et dont l'amplitude est de l'ordre du rapport de masse $\varepsilon = m_0/M \ll 1$.

On verra dans les sections suivantes, que l'on peut tirer bénéfice de la symétrie de la géométrie de fond par une décomposition multipolaire de l'équation (3.32). De plus la liberté sur le choix de jauge nous conduira à simplifier le problème dans la jauge de Regge-Wheeler sous la forme de deux systèmes d'équations chacun lié à la nature paire ou impaire des perturbations.

3.3.2 Harmoniques sphériques tensoriels

Le développement multipolaire en harmoniques sphériques est très souvent d'une grande aide simplificatrice dans de nombreux problèmes de physique dès lors que les objets manipulés sont des champs. La complexité du développement dépend généralement de la nature du champ considéré. Par exemple lorsque l'on traite le champ (scalaire) gravitationnel newtonien produit par une distribution de matière quelconque, il est habituellement décomposé sur un ensemble de fonctions qui forment une base sur la sphère $\mathbb{S}^2$ et qui constitue l'ensemble des harmoniques sphériques scalaires (HSS)

$$\left\{ Y_{\ell m}(\theta, \phi) , \quad \ell \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}; |m| \leq \ell \right\} . \tag{3.33}$$

Les HSS sont définies comme l'ensemble des fonctions (de carré intégrable) appartenant à l'espace des fonctions propres du laplacien $\Delta_{\mathbb{S}^2} := \sin^{-1}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \sin^{-2}\theta \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ sur la 2-sphère $\mathbb{S}^2$. Plusieurs conventions existent pour la formulation explicite des HSS⁴, on prendra

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) := \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{\ell-m}{\ell+m}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi} , \tag{3.34}$$

pour $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ et où P_ℓ^m sont les polynômes de Legendre. Le facteur de normalisation est défini tel que la relation d'orthogonalité s'écrit

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} , \tag{3.35}$$

⁴Certains auteurs ajoutent le facteur de phase de Condon-Shortley $(-1)^m$ à l'expression (3.34) normalement inclus dans la définition des polynômes de Legendre. Inclure ce terme dans la définition des HSS est en particulier utile en mécanique quantique dans le traitement du moment angulaire.

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker et $\star$ indiquant le complexe conjugué. Les HSS forment ainsi une base orthonormale de l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2)$ des fonctions de carré intégrable dans le sens où toute fonction scalaire $a \in \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2)$ peut se décomposer sur $\mathbb{S}^2$ tel que

$$\begin{aligned} a(\theta, \phi) &= \sum_{\ell m} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ A_{\ell m} &= \int_{\mathbb{S}^2} a(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'évaluation des coefficients $A_{\ell m}$ est souvent simplifiée en utilisant les relations de symétrie des HSS

$$\begin{aligned} Y_{\ell m}(\theta, \phi + \pi) &= (-1)^m Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ Y_{\ell m}(\pi - \theta, \phi) &= (-1)^{\ell+m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ Y_{\ell m}(\pi - \theta, \phi + \pi) &= (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (3.37)$$

En relativité générale, le champ de gravitation est représenté par un tenseur symétrique de rang 2. La base sur laquelle on décompose les perturbations de la métrique ne peut plus être de nature scalaire mais de nature tensorielle. Même si l'usage des harmoniques sphériques tensoriels (HST) en relativité générale a été peu fréquent, la définition des HST est loin d'être standardisée. Différentes bases d'HST ont été introduites depuis les travaux d'Einstein [42] sur les ondes gravitationnelles, chaque base étant assortie au problème traité par leur auteur (on pourra se référer à Thorne [129] pour un recensement exhaustif des HST en relativité générale). On peut mentionner les travaux initiateurs de Regge et Wheeler [23] qui, en 1957, proposent une base nommée *base tensorielle multipolaire* qui leur permet de décrire les perturbations non sphériques de la métrique d'un trou noir de Schwarzschild. Plus tard, par un procédé différent, Matthews [130] puis Zerilli [25] fournissent une base orthogonale appelée *base tensorielle harmonique*, légèrement différente de celle de RW et mieux adaptée à la description du rayonnement gravitationnel dans la zone radiative [129]. On retiendra cette dernière base pour le traitement de nos calculs. Compte tenu de la symétrie sphérique, la variété de fond $\mathcal{M}$ peut être vue comme $\mathcal{M} = \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^2$ où $\mathbb{M}^2$ est une variété lorentzienne bi-dimensionnelle étiquetée par les coordonnées (t, r) . Cette distinction nous permet de traiter la partie spatio-temporelle des perturbations à part sur $\mathbb{M}^2$ et de confiner la partie angulaire des perturbations sur $\mathbb{S}^2$ dont la métrique est

$$\Omega_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \Omega^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

La base harmonique tensorielle peut s'obtenir à partir de 10 éléments construits à partir de 3 scalaires, 2 vecteurs et 3 tenseurs, chacun associé à un type de parité, sous la

transformation $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi)$.

- Les composantes scalaires des HST sont les HSS que l'on a déjà définis qui satisfont l'équation aux valeurs propres $\Omega^{ab}\nabla_a\nabla_b Y^{\ell m} = -\ell(\ell+1)Y^{\ell m}$ et obéissent aux relations d'orthogonalité (3.35) :

$$Y_{\ell m} \quad , \quad \text{de parité } (-1)^\ell \quad (3.39)$$

- Les composantes vectorielles des HST sont de deux types :

$$\begin{aligned} \nabla_a Y_{\ell m} \quad , \quad \text{de parité } (-1)^\ell \\ \varepsilon_a^b \nabla_b Y_{\ell m} \quad , \quad \text{de parité } (-1)^{\ell+1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

- Les composantes tensorielles des HST, qui sont en fait une combinaison linéaire de la base introduite par Regge-Wheeler [23], sont de deux types différents :

$$\begin{aligned} \Omega_{ab} Y_{\ell m} \quad \text{et} \quad \nabla_a \nabla_b Y_{\ell m} + \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \Omega_{ab} Y_{\ell m} \quad , \quad \text{de parité } (-1)^\ell \\ \frac{1}{2} \left(\varepsilon_b^c \nabla_a \nabla_c Y_{\ell m} + \varepsilon_a^c \nabla_b \nabla_c Y_{\ell m} \right) \quad , \quad \text{de parité } (-1)^{\ell+1} . \end{aligned} \quad (3.41)$$

On a employé le tenseur antisymétrique complètement covariant ε_{ab} défini par $\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \Omega_b^c$ et $\nabla_c \varepsilon_{ab} = 0$ où les lettres latines $a, b, c \dots$ parcourent les composantes θ, ϕ tel que $\varepsilon^{\theta\phi} = -\varepsilon^{\phi\theta} = 1/\sin\theta$. Les HST définies par Zerilli que l'on notera⁵

$$\left\{ Y_{ab}^{(i)\ell m}(\theta, \phi) \quad , \quad \ell \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}; |m| \leq \ell; i \in \{1 \dots 10\} \right\} \quad (3.42)$$

constituent une base orthogonale dans le sens où

$$\int_{\mathbb{S}^2} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \left(Y_{\gamma\delta}^{(i)\ell m} \right)^* Y_{\alpha\beta}^{(j)\ell' m'} d\Omega = \delta_{ij} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (3.43)$$

pour tout $i, j \in \{1 \dots 10\}$ où $\eta_{\alpha\beta}$ est donnée par⁶ $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Parmi les $Y_{ab}^{(i)\ell m}$, sept sont de parité $(-1)^\ell$ et constituent une base pour tout tenseur symétrique covariant de rang 2 de parité $(-1)^\ell$, les trois restant sont de parité $(-1)^{\ell+1}$ et constituent une base pour un tel tenseur de parité $(-1)^{\ell+1}$. Ainsi tout tenseur $t_{\alpha\beta}$ symétrique

⁵Nous choisissons une notation différente de celle de Zerilli dans le but d'alléger et d'uniformiser les expressions. Le tableau 3.1 permettra de faire le lien entre les deux notations.

⁶Zerilli [25] utilise une définition différente du produit scalaire en prenant la métrique de Minkowski pour faire monter et descendre les indices mais qui ne respecte pas exactement les conditions d'orthogonalité des HST. Sous ces conditions on a par exemple $(a_{\ell m}^{(1)}, a_{\ell m}^{(1)}) = -1$. On choisira, en suivant Nakano et Lousto [131][132] une autre définition de $\eta_{\alpha\beta}$ qui préserve l'orthogonalité des HST dans le calcul des coefficients du terme de source.

covariant de rang 2 peut être décomposé sous la forme

$$t_{\alpha\beta} = \sum_{\ell m} \sum_{i=1}^{10} t^{(i)\ell m}(t, r) Y_{\alpha\beta}^{(i)\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.44)$$

où les coefficients fonctions de t et r sont donnés par le produit scalaire

$$t^{(i)\ell m}(t, r) = \int_{\mathbb{S}^2} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} t_{\alpha\beta} \left(Y_{\gamma\delta}^{(i)\ell m} \right)^{\star} d\Omega . \quad (3.45)$$

avec $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

3.3.3 Décomposition multipolaire du tenseur de perturbation

Le tenseur de perturbation de la métrique est un tenseur symétrique de rang 2, donc nous pouvons utiliser la décomposition vu à l'équation (3.44). On découple ainsi la dépendance angulaire et spatio-temporelle des perturbations tel que le champ $h_{\alpha\beta}$ prenne la forme suivante

$$h_{\alpha\beta} = \sum_{\ell m} \sum_{i=1}^{10} h^{(i)\ell m}(t, r) Y_{\alpha\beta}^{(i)\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.46)$$

où les quantités $h^{(i)\ell m}$ sont des fonctions uniquement de t et r et s'expriment à partir des fonctions de perturbations de Regge-Wheeler [23] (voir Tab. 3.1). Les modes de perturbation qui se transforment comme $(-1)^\ell$ seront dit *pairs* (ou polaires), en revanche les modes se transformant comme $(-1)^{\ell+1}$ seront dit *impairs* (ou axiaux). Cette démarcation permet de découper notre champ de perturbation $h_{\alpha\beta}$ en deux quantités distinctes chacune associée à un type de parité. On notera $h_{\alpha\beta}^{(o)\ell m}$ les modes de perturbations impaires et $h_{\alpha\beta}^{(e)\ell m}$ les modes de perturbations paires si bien que le champ de perturbation s'écrit maintenant

$$h_{\alpha\beta} = \sum_{\ell m} \left[h_{\alpha\beta}^{(e)\ell m} + h_{\alpha\beta}^{(o)\ell m} \right] . \quad (3.47)$$

Les deux parties sont construites à partir des modes de même parité (voir Tab. 3.1) tel que pour la partie paire de $h_{\alpha\beta}$ nous avons

$$h_{\alpha\beta}^{(e)\ell m} = \sum_{i \in \{1,2,3,4,5,9,10\}} h^{(i)\ell m}(t, r) Y_{\alpha\beta}^{(i)\ell m} = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} f(r)H_0^{\ell m}Y^{\ell m} & H_1^{\ell m}Y^{\ell m} \\ H_1^{\ell m}Y^{\ell m} & f(r)^{-1}H_2^{\ell m}Y^{\ell m} \end{array} & \begin{array}{c} h_0^{(e)\ell m}\nabla_a Y^{\ell m} \\ h_1^{(e)\ell m}\nabla_a Y^{\ell m} \end{array} \\ \begin{array}{cc} h_0^{(e)\ell m}\nabla_a Y^{\ell m} & h_1^{(e)\ell m}\nabla_a Y^{\ell m} \end{array} & r^2 \left[K^{\ell m}\Omega_{ab} + G^{\ell m} \left(\nabla_b \nabla_a + \frac{\ell(\ell+1)}{2}\Omega_{ba} \right) \right] Y^{\ell m} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

De même pour la partie impaire nous avons

$$h_{\alpha\beta}^{(o)\ell m} = \sum_{i \in \{6,7,8\}} h^{(i)\ell m}(t, r) Y_{\alpha\beta}^{(i)\ell m} = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} h_0^{\ell m}\varepsilon_a^b \nabla_b Y^{\ell m} \\ h_1^{\ell m}\varepsilon_a^b \nabla_b Y^{\ell m} \end{array} \\ \begin{array}{cc} h_0^{\ell m}\varepsilon_a^b \nabla_b Y^{\ell m} & h_1^{\ell m}\varepsilon_a^b \nabla_b Y^{\ell m} \end{array} & \frac{1}{2}h_2^{\ell m} \left(\varepsilon_b^c \nabla_a \nabla_c + \varepsilon_a^c \nabla_b \nabla_c \right) Y_{\ell m} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Les fonctions $H_0^{\ell m}$, $H_1^{\ell m}$, $H_2^{\ell m}$, $h_0^{\ell m}$, $h_1^{\ell m}$, $h_0^{(e)\ell m}$, $h_1^{(e)\ell m}$, $h_2^{\ell m}$, $K^{\ell m}$ et $G^{\ell m}$ sont les fonctions de perturbation de Regge-Wheeler [23] dont la connaissance permet de reconstruire complètement le tenseur $h_{\alpha\beta}$. On peut noter cependant qu'on peut user d'une reparamétrage générée par un champ de vecteur ξ_α ,

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha \quad (3.50)$$

dans le but de simplifier les expressions (3.48) et (3.49). Par exemple dans (3.48), les termes contenant des dérivées du second ordre en θ et ϕ peuvent être neutralisés en utilisant un vecteur de jauge du type

$$\xi_\alpha^{(o)\ell m} = \Lambda(t, r) \left(0, 0, \varepsilon^{\phi\theta} \partial_\phi, \varepsilon_\phi^\theta \partial_\theta \right) Y^{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.51)$$

avec une fonction $\Lambda(t, r)$ judicieusement choisie de façon à annuler la fonction $h_2^{\ell m}$. De même pour (3.48) on peut trouver un champ de vecteur

$$\xi_\alpha^{(e)\ell m} = \left(M_0(t, r), M_1(t, r), M_2(t, r) \partial_\theta, M_2(t, r) \partial_\phi \right) Y^{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.52)$$

qui nous dispense des dérivées seconde en θ et ϕ et qui, pour un choix pertinent de M_0 , M_1 et M_2 annule les fonctions $h_0^{(e)\ell m}$, $h_1^{(e)\ell m}$ et $G^{\ell m}$. Ce choix de jauge

$$h_2^{\ell m} = 0 \quad \text{et} \quad h_0^{(e)\ell m} = h_1^{(e)\ell m} = G^{\ell m} = 0 \quad (3.53)$$

est appelée jauge de Regge-Wheeler (RW). Ainsi, dans la jauge de RW, (3.48) et (3.49) se réduisent à

$$h_{\alpha\beta}^{(e)\ell m} = \begin{pmatrix} f(r)H_0^{\ell m} & H_1^{\ell m} & 0 & 0 \\ H_1^{\ell m} & f(r)^{-1}H_2^{\ell m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K^{\ell m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K^{\ell m} \end{pmatrix} Y^{\ell m} \quad (3.54)$$

$$h_{\alpha\beta}^{(o)\ell m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0^{\ell m} \sin^{-1} \theta \partial_\theta & h_0^{\ell m} \sin \theta \partial_\phi \\ 0 & 0 & -h_1^{\ell m} \sin^{-1} \theta \partial_\theta & h_1^{\ell m} \sin \theta \partial_\phi \\ -h_0^{\ell m} \sin^{-1} \theta \partial_\theta & -h_1^{\ell m} \sin^{-1} \theta \partial_\theta & 0 & 0 \\ h_0^{\ell m} \sin \theta \partial_\phi & h_1^{\ell m} \sin \theta \partial_\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{\ell m} . \quad (3.55)$$

Cette manipulation concerne, en général, seulement les modes pour lesquels $\ell \geq 2$. En effet pour les modes $\ell = 0$ et $\ell = 1$ la situation se simplifie d'avantage puisqu'il y a moins d'harmoniques indépendants ce qui nous permettra d'obtenir une solution explicite des fonctions de perturbations pour le monopôle $\ell = 0$ et le dipôle $\ell = 1$.

3.3.4 Décomposition multipolaire du tenseur énergie-impulsion

D'après (2.68), le tenseur énergie-impulsion de la particule ponctuelle de masse m_0 en mouvement le long de la ligne d'univers γ s'écrit comme

$$T^{\alpha\beta} = m_0 \int_\gamma (-g)^{-1/2} u^\alpha u^\beta \delta^{(4)}(x^\alpha - x_p^\alpha(\tau)) d\tau \quad (3.56)$$

$$= m_0 r^{-2} (u^t)^{-1} \frac{dx_p^\alpha}{d\tau} \frac{dx_p^\beta}{d\tau} \delta(r - r_p(t)) (\Omega^{ab} \Omega_{ab})^{-1/2} \delta(\theta - \theta_p(t)) \delta(\phi - \phi_p(t)) \quad (3.57)$$

$$= m_0 \frac{u^\alpha u^\beta}{r^2 \sin \theta u^t} \delta(r - r_p(t)) \delta(\theta - \theta_p(t)) \delta(\phi - \phi_p(t)) , \quad (3.58)$$

qui est un tenseur symétrique de rang 2 développable à la manière de (3.44)

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\ell m} \sum_{i=1}^{10} T^{(i)\ell m}(t, r) Y_{\alpha\beta}^{(i)\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.59)$$

où les fonctions $T^{(i)\ell m}(t, r)$ sont donnés d'après (3.45) par

$$T^{(i)\ell m}(t, r) = \int_{\mathbb{S}^2} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} T_{\alpha\beta} \left(Y_{\gamma\delta}^{(i)\ell m} \right)^{\star} d\Omega . \quad (3.60)$$

où $T_{\alpha\beta}$ s'exprime à partir de (3.58). Le calcul explicite des $T^{(i)\ell m}$ est sans difficulté et donne

$$T^{(1)\ell m}(t, r) = m_0 u^t \left(\frac{dr_p}{dt} \right)^2 r^{-2} f(r)^{-2} \delta(r - r_p(t)) Y^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \quad (3.61a)$$

$$T^{(2)\ell m}(t, r) = \sqrt{2} i m_0 u^t \frac{dr_p}{dt} r^{-2} \delta(r - r_p(t)) Y^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \quad (3.61b)$$

$$T^{(3)\ell m}(t, r) = m_0 u^t r^{-2} f(r)^2 \delta(r - r_p(t)) Y^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \quad (3.61c)$$

$$T^{(4)\ell m}(t, r) = 2\mathbf{m}(\ell)^{-1} i m_0 u^t r^{-1} f(r) \delta(r - r_p(t)) \frac{d}{dt} Y^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \quad (3.61d)$$

$$T^{(5)\ell m}(t, r) = 2\mathbf{m}(\ell)^{-1} m_0 u^t \frac{dr_p}{dt} r^{-1} f(r)^{-1} \delta(r - r_p(t)) \frac{d}{dt} Y^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \quad (3.61e)$$

$$T^{(6)\ell m}(t, r) = -2\mathbf{m}(\ell)^{-1} m_0 u^t r^{-1} f(r) \delta(r - r_p(t)) \left[\frac{1}{\sin \theta_p} \frac{\partial Y^{\ell m\star}}{\partial \phi_p} \frac{d\theta_p}{dt} - \sin \theta_p \frac{\partial Y^{\ell m\star}}{\partial \theta_p} \frac{d\phi_p}{dt} \right] \quad (3.61f)$$

$$T^{(7)\ell m}(t, r) = -2\mathbf{m}(\ell)^{-1} i m_0 u^t \frac{dr_p}{dt} r^{-1} f(r)^{-1} \delta(r - r_p(t)) \left[\frac{1}{\sin \theta_p} \frac{\partial Y^{\ell m\star}}{\partial \phi_p} \frac{d\theta_p}{dt} - \sin \theta_p \frac{\partial Y^{\ell m\star}}{\partial \theta_p} \frac{d\phi_p}{dt} \right] \quad (3.61g)$$

$$T^{(8)\ell m}(t, r) = -\mathbf{n}(\ell)^{-1} i m_0 u^t \delta(r - r_p(t)) \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\theta_p}{dt} \right)^2 - \sin^2 \theta_p \left(\frac{d\phi_p}{dt} \right)^2 \right] \frac{X^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p)}{\sin \theta_p} - \sin \theta_p \frac{d\phi_p}{dt} \frac{d\theta_p}{dt} W^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \right\} \quad (3.61h)$$

$$T^{(9)\ell m}(t, r) = \mathbf{n}(\ell)^{-1} m_0 u^t \delta(r - r_p(t)) \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\theta_p}{dt} \right)^2 - \sin^2 \theta_p \left(\frac{d\phi_p}{dt} \right)^2 \right] W^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) + \frac{d\phi_p}{dt} \frac{d\theta_p}{dt} X^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \right\} \quad (3.61i)$$

$$T^{(10)\ell m}(t, r) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0 u^t \delta(r - r_p(t)) \left[\left(\frac{d\theta_p}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta_p \left(\frac{d\phi_p}{dt} \right)^2 \right] Y^{\ell m\star}(\theta_p, \phi_p) \quad (3.61j)$$

où on a introduit un certain nombre de quantités

$$X^{\ell m}(\theta, \phi) = 2\nabla_\theta \nabla_\phi Y^{\ell m} = 2(\partial_\theta \partial_\phi - \cot \theta \partial_\phi) Y^{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.62)$$

$$W^{\ell m}(\theta, \phi) = (\nabla_\theta \nabla_\theta - \sin^{-2} \theta \nabla_\phi \nabla_\phi) Y^{\ell m} = (\partial_\theta^2 - \cot \theta \partial_\theta - \sin^{-2} \theta \partial_\phi^2) Y^{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.63)$$

$$\mathbf{m}(\ell) = \sqrt{2\ell(\ell+1)} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{n}(\ell) = \sqrt{\frac{1}{2}\ell(\ell+1)(\ell-1)(\ell+2)} \quad (3.65)$$

i	1	2	3	4	5
$h^{(i)\ell m}$	$f(r)H_0^{\ell m}$	$-i\sqrt{2}H_1^{\ell m}$	$f(r)^{-1}H_2^{\ell m}$	$\frac{-i}{r}\mathbf{m}(\ell)h_0^{(e)\ell m}$	$r^{-1}\mathbf{m}(\ell)h_1^{(e)\ell m}$
$T^{(i)\ell m}$	$A^{(0)\ell m}$	$A^{(1)\ell m}$	$A^{\ell m}$	$B^{(0)\ell m}$	$B^{\ell m}$
$Y_{\alpha\beta}^{(i)\ell m}$	$a^{(0)\ell m}$	$a^{(1)\ell m}$	$a^{\ell m}$	$b^{(0)\ell m}$	$b^{\ell m}$
parité	pair	pair	pair	pair	pair
i	6	7	8	9	10
$h^{(i)\ell m}$	$-r^{-1}\mathbf{m}(\ell)h_0^{\ell m}$	$ir^{-1}\mathbf{m}(\ell)h_1^{\ell m}$	$r^{-2}\mathbf{m}(\ell)h_2^{\ell m}$	$\mathbf{n}(\ell)G^{\ell m}$	$\sqrt{2}K^{\ell m} - \frac{\mathbf{m}(\ell)^2}{2\sqrt{2}}G^{\ell m}$
$T^{(i)\ell m}$	$Q^{(0)\ell m}$	$Q^{\ell m}$	$D^{\ell m}$	$F^{\ell m}$	$G^{(s)\ell m}$
$Y_{\alpha\beta}^{(i)\ell m}$	$c^{(0)\ell m}$	$c^{\ell m}$	$d^{\ell m}$	$f^{\ell m}$	$g^{(s)\ell m}$
parité	impair	impair	impair	pair	pair

TABLE 3.1: Ce tableau indique la correspondance entre notre notation et celle de Zerilli utilisée dans [26]. L'indice i de la première ligne suit l'ordre dans lequel les HST sont définies dans [26]. La seconde ligne fait le lien entre nos multipôles et les fonctions de perturbations définies par Regge et Wheeler [23]. La troisième ligne fait le lien entre les notations sur les fonctions utilisées dans le développement du tenseur énergie-impulsion et la dernière ligne sur les HST.

3.3.5 Equations du champ linéarisées en jauge de RW

En injectant (3.46) et (3.59) dans (3.32) on obtient, pour chaque mode radiatif ($\ell \geq 2$), c'est-à-dire pour les modes non stationnaires et reliés à la dynamique des ondes, les équations du champ linéarisées dépendantes des fonctions de perturbations et des coefficients (3.61) du tenseur énergie-impulsion. Pour la partie paire pour laquelle la jauge de RW impose $h_0^{\ell m} = h_1^{\ell m} = G^{\ell m} = 0 \forall \ell \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} f(r)^2 \frac{\partial^2 K^{\ell m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} f(r) \left(3 - \frac{5M}{r} \right) \frac{\partial K^{\ell m}}{\partial r} - \frac{1}{r} f(r)^2 \frac{\partial H_2^{\ell m}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} f(r) (H_2^{\ell m} - K^{\ell m}) \\ - \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} f(r) (H_2^{\ell m} + K^{\ell m}) = -8\pi T^{(1)\ell m} \end{aligned} \quad (3.66a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial K^{\ell m}}{\partial r} + \frac{1}{r} (K^{\ell m} - H_2^{\ell m}) - \frac{M}{r^2 f(r)} K^{\ell m} \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} H_1^{\ell m} = -4\sqrt{2}\pi i T^{(2)\ell m} \quad (3.66b)$$

$$\begin{aligned}
& f(r)^{-2} \frac{\partial^2 K^{\ell m}}{\partial t^2} - \frac{r-M}{r^2 f(r)} \frac{\partial K^{\ell m}}{\partial r} - \frac{2}{r f(r)} \frac{\partial H_1^{\ell m}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_0^{\ell m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 f(r)} \left(H_2^{\ell m} - K^{\ell m} \right) \\
& + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2 f(r)} \left(K^{\ell m} - H_0^{\ell m} \right) = -8\pi T^{(3)\ell m}
\end{aligned} \tag{3.66c}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[f(r) H_1^{\ell m} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(H_2^{\ell m} + K^{\ell m} \right) = \frac{4\pi i}{\mathfrak{m}(\ell)} r T^{(4)\ell m} \tag{3.66d}$$

$$-\frac{\partial H_1^{\ell m}}{\partial t} + f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(H_0^{\ell m} - K^{\ell m} \right) + \frac{2M}{r^2} H_0^{\ell m} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{M}{r} \right) \left(H_2^{\ell m} - H_0^{\ell m} \right) = \frac{4\pi}{\mathfrak{m}(\ell)} r f(r) T^{(5)\ell m} \tag{3.66e}$$

$$\begin{aligned}
& -f(r)^{-1} \frac{\partial^2 K^{\ell m}}{\partial t^2} + f(r) \frac{\partial^2 K^{\ell m}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{M}{r} \right) \frac{\partial K^{\ell m}}{\partial r} - f(r)^{-1} \frac{\partial^2 H_2^{\ell m}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1^{\ell m}}{\partial t \partial r} \\
& - f(r) \frac{\partial^2 H_0^{\ell m}}{\partial r^2} + \frac{2(r-M)}{r^2 f(r)} \frac{\partial H_1^{\ell m}}{\partial t} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{M}{r} \right) \frac{\partial H_2^{\ell m}}{\partial r} - \frac{r+M}{r} \frac{\partial H_0^{\ell m}}{\partial r} \\
& + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} \left(H_0^{\ell m} - H_2^{\ell m} \right) = 8\sqrt{2}\pi T^{(10)\ell m}
\end{aligned} \tag{3.66f}$$

$$\frac{1}{2} \left(H_0^{\ell m} - H_2^{\ell m} \right) = \frac{8\pi}{\mathfrak{n}(\ell)} r^2 T^{(9)\ell m} \tag{3.66g}$$

ce qui correspond à sept équations couplées pour les quatre inconnues $H_0^{\ell m}$, $H_1^{\ell m}$, $H_2^{\ell m}$ et $K^{\ell m}$. Pour la partie impaire pour laquelle la jauge de RW impose $h_2^{\ell m} = 0 \forall \ell \geq 2$ on a

$$\frac{\partial^2 h_0^{\ell m}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 h_1^{\ell m}}{\partial t \partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial h_1^{\ell m}}{\partial t} + \left[\frac{4M}{r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r} \right] \frac{h_0^{\ell m}}{r f(r)} = \frac{4\pi}{\mathfrak{m}(\ell)} r^{-1} f(r)^{-1} T^{(6)\ell m} \tag{3.67a}$$

$$\frac{\partial^2 h_1^{\ell m}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_0^{\ell m}}{\partial t \partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial h_0^{\ell m}}{\partial t} + \frac{(\ell-1)(\ell+2)f(r)}{r^2} h_1^{\ell m} = -\frac{4\pi i}{\mathfrak{m}(\ell)} r f(r) T^{(7)\ell m} \tag{3.67b}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [f(r)h_1^{\ell m}] - f(r)^{-1} \frac{\partial h_0^{\ell m}}{\partial t} = -\frac{8\pi i}{n(\ell)} r^2 T^{(8)\ell m} \quad (3.67c)$$

qui correspond à trois équations couplées pour les deux fonctions inconnues $h_0^{\ell m}$ et $h_1^{\ell m}$.

3.3.6 Modes non radiatifs

Comme on l'a déjà mentionné, le formalisme décrit ci-dessus n'est applicable que pour les modes pour lesquels $\ell \geq 2$. Pour les modes non radiatifs $\ell = 0$ et $\ell = 1$ aucune équations d'ondes du type (3.85) ne peut être construite. On peut cependant s'en sortir en usant encore une fois de notre liberté de jauge pour créer un système d'équations suffisamment simple pour en trouver une solution analytique. Ce travail a par exemple été fait dans le cas radial par Zerilli [26] puis dans le cas circulaire par Detweiler et Poisson [88] et Nakano et al. [99].

Monopôle $\ell = 0$

Considérons tout d'abord $\ell = 0$. Le seul mode pour lequel $\ell = 0$ est paire et puisque $T_{\alpha\beta}^{(4)00} = T_{\alpha\beta}^{(5)00} = T_{\alpha\beta}^{(9)00} = 0$, les seules équations valables sont les équations (3.66a-3.66c) et (3.66g). On peut alors définir un vecteur de jauge de la forme suivante [26]

$$\xi_\alpha^{00} = (M_0(t, r), M_1(t, r), 0, 0) Y^{00}(\theta, \phi), \quad (3.68)$$

où les les fonctions M_0 et M_1 sont telles que $H_1^{00} = K^{00} = 0$. Cette jauge est appelée jauge de Zerilli. Dans cette jauge, les fonctions restantes sont solutions de

$$\frac{\partial}{\partial r} H_2^Z(t, r) + \frac{1}{rf(r)} H_2^Z(t, r) = \frac{8\pi}{f(r)^2} r T^{(1)00}, \quad (3.69a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} H_0^Z(t, r) + \frac{1}{rf(r)} H_2^Z(t, r) = -8\pi r T^{(3)00}. \quad (3.69b)$$

Dans le système (3.69) l'indice Z indique que l'on opère dans la jauge de Zerilli. Dans [26], Zerilli donne une signification au monopôle. Il montre que la perturbation de la métrique de fond par le mode $\ell = 0$ se traduit par une variation du paramètre de masse. C'est à dire que si l'on considère une particule de masse m_0 en chute libre sur un trou noir de Schwarzschild de masse M , la métrique perturbée, pour le mode $\ell = 0$ est toujours une métrique de Schwarzschild mais dont le paramètre de masse est $M + \mathcal{E}m_0$.

Dipôle $\ell = 1$ pair

Pour la partie paire du mode $\ell = 1$, si l'on choisit un générateur de transformation de jauge du type

$$\xi_\alpha^{(e)1m} = \left(M_0(t, r), M_1(t, r), M_2(t, r) \partial_\theta, M_2(t, r) \partial_\phi \right) Y^{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.70)$$

où les 3 fonctions M_0 , M_1 et M_2 sont choisies telles que $h_0^{(e)1m} = h_1^{(e)1m} = K^{1m} = 0$. Les équations du champ pour la partie paire du mode $\ell = 1$ dans la jauge de Zerilli deviennent

$$rf(r) \frac{\partial}{\partial r} H_2^{Z,1m} + 2H_2^{Z,1m} = 8\pi \frac{r^2}{f(r)} T^{(1)1m}, \quad (3.71a)$$

$$H_1^{Z,1m} + r \frac{\partial}{\partial t} H_2^{Z,1m} = 4\sqrt{2}\pi i r^2 T^{(2)1m}, \quad (3.71b)$$

$$rf(r) \frac{\partial}{\partial r} H_0^{Z,1m} - 2r \frac{\partial}{\partial t} H_1^{Z,1m} - H_0^{Z,1m} + H_2^{Z,1m} = 8\pi r^2 f(r) T^{(3)1m}, \quad (3.71c)$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} [f(r) H_1^{Z,1m}] + \frac{\partial}{\partial t} H_2^{Z,1m} = -8\pi i r T^{(4)1m}, \quad (3.71d)$$

$$2rf(r) \frac{\partial}{\partial r} H_0^{Z,1m} - 2r \frac{\partial}{\partial t} H_1^{Z,1m} + (1 - 3f(r)) H_0^{Z,1m} + (1 + f(r)) H_2^{Z,1m} = 16\pi r^2 f(r) T^{(4)1m}, \quad (3.71e)$$

$$\begin{aligned} & r^2 f(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} H_0^{Z,1m} + \frac{3r(1-f(r))}{2} \frac{\partial}{\partial r} H_0^{Z,1m} - H_0^{Z,1m} - 2r^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} H_1^{Z,1m} - \frac{r(1+f(r))}{f(r)} \frac{\partial}{\partial t} H_1^{Z,1m} \\ & + \frac{r^2}{f(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_2^{Z,1m} + \frac{r(1+f(r))}{2} \frac{\partial}{\partial r} H_2^{Z,1m} + H_2^{Z,1m} = -8\sqrt{2}\pi r^2 T^{(10)1m}. \end{aligned} \quad (3.71f)$$

Il apparaît en fait [26] que la partie paire du mode $\ell = 1$ est une perturbation purement liée à une transformation de jauge. C'est à dire qu'elle peut être annulée par transformation de jauge liée à un changement de système coordonnées dans le centre de masse du système à deux corps. Ceci n'est pas le cas pour la partie impaire du mode $\ell = 1$.

Dipôle $\ell = 1$ impair

La partie impaire du mode $\ell = 1$ est traitée en choisissant un générateur de transformation de jauge

$$\xi_{\alpha}^{(o)1m} = \Lambda^{1m}(t, r) \left(0, 0, -\sin^{-1} \theta \partial_{\phi}, \sin \theta \partial_{\theta} \right) Y^{\ell m}(\theta, \phi) , \quad (3.72)$$

où $\Lambda^{1m}(t, r)$ est pris tel que $h_0^{1m} = 0$. Les équations du champ linéarisées, dans la jauge de Zerilli, pour la partie impaire des perturbations, deviennent

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \left(r^2 h_1^{Z,1m} \right) = -8\pi \frac{r^3}{f(r)} T^{(6)1m} , \quad (3.73a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_1^{Z,1m} = -8\pi i r f(r) T^{(7)1m} . \quad (3.73b)$$

Cette perturbation ne s'efface pas par transformation de jauge comme pour le dipôle pair mais est en fait associée à un décalage de moment angulaire dans la métrique de Schwarzschild [26].

3.3.7 Transformation de jauge depuis la jauge de RW

Avant de voir comment le formalisme de RW peut être refondu pour construire les équations d'onde de Regge-Wheeler-Zerilli (RWZ), on souhaite faire quelques commentaires sur la "pertinence" de travailler en jauge de RW. En effet on pourrait considérer que ces calculs sont utilisables et pourvus de sens uniquement dans cette jauge particulière. En réalité on peut élargir ce point de vu.

On a vérifié dans les sections précédentes que pour une métrique de Schwarzschild perturbée au premier ordre dans la jauge de RW, le tenseur de perturbation $h_{\alpha\beta}$ prenait la forme (3.54) pour les perturbations paires et (3.55) pour les perturbations impaires. Considérons une transformation vers une jauge quelconque G pour la partie impaire uniquement (la seule à se manifester dans le cas radial)

$$h_{\alpha\beta}^{(RW)} \rightarrow h_{\alpha\beta}^{(G)} + \nabla_{\alpha} \xi_{\beta} + \nabla_{\beta} \xi_{\alpha} . \quad (3.74)$$

(on écrira pas l'exposant ℓm .) Cette transformation est générée par le vecteur de jauge ξ_α que l'on décompose sous une forme angulaire appropriée (déjà définie en (3.52))

$$\xi_\alpha = \left(M_0(t, r), M_1(t, r), M_2(t, r) \partial_\theta, M_2(t, r) \partial_\phi \right) Y^{\ell m}(\theta, \phi) . \quad (3.75)$$

De façon remarquable les trois fonctions M_0 , M_1 et M_2 sont déterminées de façon univoque par les équations suivantes [133]

$$M_0(t, r) = \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial G^{(G)}}{\partial t} - h_0^{(e)(G)} \right) , \quad (3.76)$$

$$M_1(t, r) = f(r) \left(-\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial G^{(G)}}{\partial r} + h_1^{(e)(G)} \right) , \quad (3.77)$$

$$M_2(t, r) = \frac{1}{2} G^{(G)} . \quad (3.78)$$

Par conséquent, les composantes de la métrique dans la jauge de RW peuvent être écrites en termes des composantes de la métrique de n'importe quelle jauge G

$$K^{(RW)} = K^{(G)} + r f(r) \left(\partial_r G^{(G)} - \frac{2}{r^2} h_1^{(e)(G)} \right) , \quad (3.79)$$

$$H_0^{(RW)} = H_0^{(G)} - M \left(\partial_r G^{(G)} - \frac{2}{r^2} h_1^{(e)(G)} \right) + 2f(r)^{-1} \partial_t h_0^{(e)(G)} + r^2 f(r)^{-1} \partial_t^2 G^{(G)} , \quad (3.80)$$

$$H_1^{(RW)} = H_1^{(G)} + r^2 \partial_{tr} G^{(G)} - \partial_t h_1^{(e)(G)} - \frac{2M}{r^2 f(r)} h_0^{(e)(G)} + \partial_r h_0^{(e)(G)} + \frac{r - 3M}{f(r)} \partial_t G^{(G)} , \quad (3.81)$$

$$H_2^{(RW)} = H_2^{(G)} + (2r - 3M) \left(\partial_r G^{(G)} - \frac{2}{r^2} h_1^{(e)(G)} \right) + r^2 f(r) \partial_r \left(\partial_r G - \frac{2}{r^2} h_1^{(e)(G)} \right) . \quad (3.82)$$

où les fonctions $G, h_0^{(e)(G)}, h_1^{(e)(G)}$ sont les fonctions intervenants dans les composantes de la métrique dans le formalisme de RW (voir équation (3.48)). Le résultat étonnant (3.82) apparaît car la jauge de RW est en quelque sorte "unique" [133]. Dès lors, toute quantité calculée dans une telle jauge peut être considérée d'une certaine manière comme "invariante de jauge" en elle même dans le sens où tout résultat peut être exprimé en substituant les quantités relatives à la jauge de RW en terme d'une autre jauge en utilisant les équations (3.82). Travailler dans la jauge de RW n'est donc pas quelque chose de restrictif comme on pourrait facilement le penser mais permet de confronter des résultats dans tout types de jauges.

3.4 Equation d'onde

Regge et Wheeler [23] et Zerilli [26], ont montrés que l'on peut traiter les équations de perturbations comme deux systèmes chacun lié à un type de parité. Pour aller plus loin on montrera en suivant Zerilli qu'il est possible de reformuler chacun de ces systèmes (3.66) et (3.67) sous la forme d'une équation scalaire invariante de jauge et c'est clairement par cette dernière caractéristique que cette reformulation tient tout son intérêt. En effet il est important de rappeler que même si le système de coordonnées de l'espace-temps de fond a été fixé, la liberté sur le choix du système de coordonnées en relativité générale conduit à un trouble lorsque l'on ajoute des perturbations linéaire à la métrique de fond. En particulier il n'est en principe pas possible de distinguer une perturbation physique (infinitésimale) d'une perturbation liée à une transformation (infinitésimale) de coordonnées. Deux solutions permettent de lever cette ambiguïté. La première consiste à choisir de travailler dans une jauge fixée, comme cela est fait dans les travaux déjà mentionnés. La deuxième solution est de choisir de travailler avec des perturbations invariantes de jauge et des quantités invariantes de jauge comme cela fut suggéré en premier par Moncrief [52]. On notera à ce propos les effort développés par plusieurs auteurs [134–141] pour ainsi traduire le traditionnel formalisme perturbatif où l'on travaille normalement avec les coordonnées standards de Schwarzschild dans la jauge de RW en un langage covariant et invariant de jauge (on pourra se référer à Martel et Poisson [142] pour une revue détaillée de ce formalisme).

3.4.1 Equation de Regge-Wheeler-Zerilli (RWZ)

Concrètement pour construire la fonction d'onde, on combine judicieusement les trois fonctions de perturbations liées aux HST paires et les sept fonctions de perturbations liées aux HST impaires pour former deux champs scalaires que l'on appellera le cas échéant fonction d'onde paire ou impaire. Différents choix de combinaisons ont été utilisés par différents auteurs au cours du temps Moncrief [52], Cunningham et al. [143], Zerilli [26] on pourra se référer à Nagar et Rezzolla [141] pour une revue plus exhaustive des conventions existantes sur la définition des fonctions d'onde. Pour notre part on choisira de travailler avec la définition prise par Lousto et Price [144] qui est une formulation approchée à un facteur de normalisation près de la convention Cunningham-Price-Moncrief (CPM) [143].

$$\psi_e^{\ell m}(t, r) = \frac{r}{\lambda + 1} \left[K^{\ell m} + \frac{r f(r)}{\lambda r + 3M} \left(H_2^{\ell m} - r \frac{\partial K^{\ell m}}{\partial r} \right) \right] + \frac{r f(r)}{\lambda r + 3M} \left[r^2 \frac{\partial G^{\ell m}}{\partial r} - 2h_1^{\ell m} \right], \quad (3.83)$$

$$\psi_o^{\ell m}(t, r) = \frac{r}{\lambda} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_0^{\ell m}}{r^2} \right) - \frac{\partial h_1^{\ell m}}{\partial t} \right], \quad (3.84)$$

où $\lambda = (\ell - 1)(\ell + 2)/2 = \mathbf{m}(\ell)^2/4$. La reformulation du problème (3.66) et (3.67), en terme de fonctions d'ondes $\psi_{e/o}^{\ell m}$, se fait via les deux équations d'ondes

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_{e/o}^\ell(r) \right] \psi_{e/o}^{\ell m}(t, r) = S_{e/o}^{\ell m}(t, r) , \quad (3.85)$$

où r^* est la coordonnée définie en (3.31). Compte tenu de la symétrie de la métrique de fond, la dynamique des ondes est la même pour les modes partageant le même ℓ , ainsi les deux potentiels V_e^ℓ et V_o^ℓ sont des fonctions de r indicées seulement par ℓ

$$V_e^\ell(r) = 2f(r) \frac{\lambda^2(\lambda + 1)r^3 + 3\lambda^2 M r^2 + 9\lambda M^2 r + 9M^3}{r^3(\lambda r + 3M)^2} , \quad (3.86)$$

$$V_o^\ell(r) = 2f(r) \left(\frac{\lambda + 1}{r^2} - \frac{3M}{r^3} \right) . \quad (3.87)$$

Le terme source de (3.85) est en fait une distribution dont la forme générale fait in-

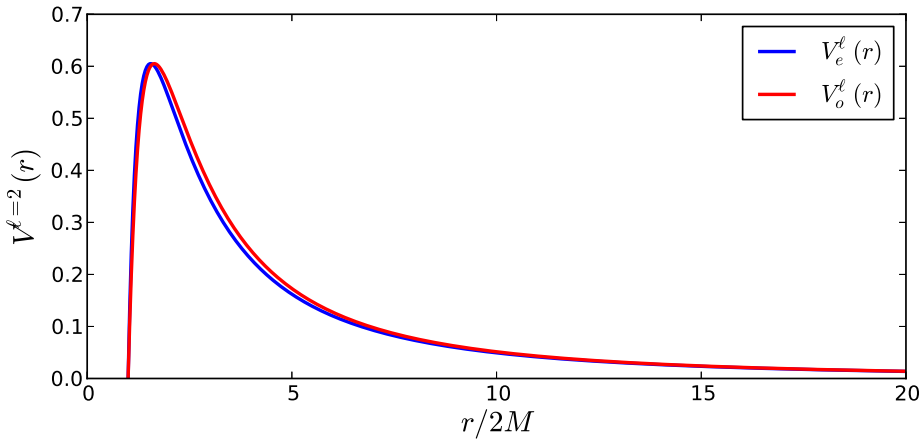


FIGURE 3.3: Potentiels V_e^ℓ en bleu et V_o^ℓ en rouge pour le mode $\ell = 2$. Le potentiel V_e^ℓ atteint son maximum autour de $r \approx 3.1M$ puis tend vers zéro à l'horizon. Le domaine où le potentiel tend vers son maximum ($r/2M \lesssim 4$) correspond à la zone de champ fort où les effets relativistes de perturbations de la métrique sont les plus significatifs. Loin de l'horizon ($r/2M > 10$) le potentiel est de faible amplitude.

tervenir un delta de Dirac δ et sa dérivée spatiale au sens des distributions $\delta' := d\delta/dr$ pondérés par deux fonctions du temps $\mathcal{F}_{e/o}^{\ell m}$ et $\mathcal{G}_{e/o}^{\ell m}$

$$S_{e/o}^{\ell m}(t, r) = \mathcal{G}_{e/o}^{\ell m}(t) \delta(r - r_p(t)) + \mathcal{F}_{e/o}^{\ell m}(t) \delta'(r - r_p(t)) , \quad (3.88)$$

où $\mathcal{F}_{e/o}^{\ell m}$ et $\mathcal{G}_{e/o}^{\ell m}$ sont explicitement donnés par

$$\mathcal{F}_e^{\ell m}(t) = -\frac{8\pi m_0}{\lambda + 1} u^t r_p f(r_p) \frac{r_p^2 - f(r_p)^2}{\lambda r_p + 3M} Y^{\ell m \star} , \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_e^{\ell m}(t) = & \frac{8\pi m_0}{\lambda+1} u^t \left[2 \frac{r_p \dot{r}_p f(r_p)}{\lambda r_p + 3M} \frac{d}{dt} Y^{\ell m \star} - \frac{r_p f(r_p)}{\lambda} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_p X^{\ell m \star} - \frac{r_p f(r_p)}{2\lambda} \left(\dot{\theta}_p^2 - \sin^2 \theta_p \dot{\phi}_p^2 \right) W^{\ell m \star} \right. \\
& + \frac{r_p^2 f(r_p)^2}{\lambda r_p + 3M} \left(\dot{\theta}_p^2 + \sin^2 \theta_p \dot{\phi}_p^2 \right) Y^{\ell m \star} + \frac{\dot{r}_p^2 [(\lambda+1)(6r_p M + \lambda r_p^2) + 3M^2]}{r_p (\lambda r_p + 3M)^2} Y^{\ell m \star} \\
& \left. - \frac{f(r_p)^2 [r_p^2 \lambda (\lambda+1) + 6\lambda r_p M + 15M^2]}{r_p (\lambda r_p + 3M)^2} Y^{\ell m \star} \right], \quad (3.90)
\end{aligned}$$

et par

$$\mathcal{F}_o^{\ell m}(t) = \frac{8\pi m_0}{\lambda(\lambda+1)} u^t r_p \left[\dot{r}_p^2 - f(r_p)^2 \right] \mathcal{A}^{\ell m \star}, \quad (3.91)$$

$$\mathcal{G}_o^{\ell m}(t) = -\frac{8\pi m_0}{\lambda(\lambda+1)} u^t r_p \left\{ \left[r_p \frac{d}{dt} (u^t \dot{r}_p) + u^t (\dot{r}_p^2 - f(r_p)^2) \right] \mathcal{A}^{\ell m \star} + \dot{r}_p \frac{d}{dt} \mathcal{A}^{\ell m \star} \right\}, \quad (3.92)$$

où "°" indique une dérivée totale par rapport à t et où les HSS sont pris à la position angulaire de la particule $(\theta_p(t), \phi_p(t))$ avec en plus

$$\mathcal{A}^{\ell m}(\theta_p, \phi_p) = \left(\frac{\dot{\theta}_p}{\sin \theta_p} \partial_\phi - \sin \theta_p \dot{\phi}_p \partial_\theta \right) Y^{\ell m}(\theta_p, \phi_p). \quad (3.93)$$

La nature hautement singulière du terme source (3.88), qui est un héritage de l'hypothèse que l'on a fait sur la nature ponctuelle de la particule, est responsable du comportement non-continu de la fonction d'onde en $r = r_p(t)$. Ce constat nous conduira à considérer mathématiquement $\psi_{(e/o)}^{\ell m}$ continue par morceau en distinguant son comportement à droite et à gauche de la particule et en caractérisant le point de discontinuité par ses conditions de saut (voir chapitre 4). Ce formalisme de forme d'onde n'empêche en aucun cas de reconstruire la métrique. En effet pour les perturbations paires, en considérant la définition de (3.83) dans la jauge de RW ($h_0^{\ell m} = h_1^{\ell m} = G^{\ell m} = 0$) et la contrainte hamiltonienne donnée par l'équation (3.66a) on peut déjà exprimer les deux fonctions de perturbations $K^{\ell m}$ et $H_2^{\ell m}$ en terme de $\psi_{(e)}^{\ell m}$ et des termes de source (3.61)

$$K^{\ell m}(t, r) = \frac{6M^2 + 3M\lambda r + \lambda(\lambda+1)r^2}{r^2(\lambda r + 3M)} \psi_e^{\ell m} + f(r) \frac{\partial}{\partial r} \psi_e^{\ell m} - \frac{8\pi r^3}{(\lambda+1)(\lambda r + 3M)} T^{(1)\ell m} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned}
H_2^{\ell m}(t, r) = & - \frac{9M^3 + 9\lambda M^2 r + 3\lambda^2 M r^2 + \lambda^2(\lambda + 1)r^3}{r^2(\lambda r + 3M)^2} \psi_e^{\ell m} + \frac{3M^2 - \lambda M r + \lambda r^2}{r(\lambda r + 3M)} \frac{\partial}{\partial r} \psi_e^{\ell m} \\
& + r f(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_e^{\ell m} + \frac{8\pi r^3 (\lambda^2 r^2 - 2\lambda r^2 + 10\lambda r M - 9r M + 27M^2)}{(\lambda + 1) r f(r) (\lambda r + 3M)^2} T^{(1)\ell m} \\
& - \frac{8\pi r^4}{(\lambda + 1)(\lambda r + 3M)} \frac{\partial}{\partial r} T^{(1)\ell m}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

De même, à partir de (3.66b) et de la dérivée partielle temporelle de (3.94) et (3.95) en terme de $\partial_t \psi_e^{\ell m}$ on obtient

$$\begin{aligned}
H_1^{\ell m}(t, r) = & r \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \psi_e^{\ell m} + \frac{\lambda r^2 - 3M\lambda r - 3M^2}{r f(r) (\lambda r + 3M)} \frac{\partial}{\partial t} \psi_e^{\ell m} - \frac{8\pi r^5}{(\lambda + 1) r f(r) (\lambda r + 3M)} \frac{\partial}{\partial t} T^{(1)\ell m} \\
& + \frac{4\sqrt{2}i\pi r^2}{(\lambda + 1)} T^{(2)\ell m} .
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Enfin (3.66g) donne

$$H_0^{\ell m}(t, r) = H_2^{\ell m}(t, r) + \frac{16\pi r^2}{n(\ell)} T^{(9)\ell m} . \tag{3.97}$$

Pour les perturbations impaires, les équations du champ (3.67a-3.67c) nous donnent

$$h_0^{\ell m}(t, r) = \frac{1}{2} f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \psi_o^{\ell m} \right) + \frac{4\pi r^3}{\lambda \sqrt{\lambda + 1}} T^{(6)\ell m} , \tag{3.98}$$

$$h_1^{\ell m}(t, r) = \frac{1}{2} r f(r)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \psi_o^{\ell m} + \frac{4\pi i r^3}{\lambda \sqrt{\lambda + 1}} T^{(7)\ell m} . \tag{3.99}$$

3.4.2 Flux d'énergie et de moment angulaire

Le flux d'énergie et de moment angulaire peuvent être obtenus par le tenseur énergie-impulsion d'Isaacson [40][41] (déjà utilisé au chapitre 1)

$$T_{\alpha\beta}^{OG} = \frac{1}{64\pi} \left\langle \nabla_\alpha h^{\gamma\delta} \nabla_\beta h_{\gamma\delta} \right\rangle \tag{3.100}$$

où $\langle \dots \rangle$ dénote une moyenne sur une région spatio-temporelle grande devant la longueur d'onde de la radiation gravitationnelle. Typiquement, $T_{\alpha\beta}^{OG}$ peut être défini quand la longueur d'onde λ_{OG} des radiations est petite comparée au rayon de courbure caractéristique $\mathcal{R}$. On appelle *zone de radiation* le domaine dans lequel cette condition est vraie et où le tenseur $T_{\alpha\beta}^{OG}$ est valable, on peut donc donner une notion de quantité d'énergie et de moment angulaire emportée à l'infini. Il existe une autre zone où la condition $\lambda_{OG} \ll \mathcal{R}$ est vérifiée; un observateur stationnaire proche de $r = 2M$ voit $\mathcal{R} \sim 2M$ mais les radiations, dans cette région, subissent un fort décalage spectral vers le bleu et $\lambda_{OG} \rightarrow 0$. Il est alors possible de donner une notion d'énergie et de moment

angulaire transféré au trou noir. Les deux vecteurs de Killing (3.10) et (3.8) peuvent être utilisés pour obtenir les expressions des flux d'énergie et de moment angulaire transmis à travers une hypersurface Σ à r constant

$$dE = - \int_{\Sigma} T_{\beta}^{\alpha} \xi_{(t)}^{\beta} d\Sigma_{\alpha} , \quad (3.101)$$

$$dL = \int_{\Sigma} T_{\beta}^{\alpha} \xi_{(z)}^{\beta} d\Sigma_{\alpha} . \quad (3.102)$$

où $d\Sigma_{\alpha}$ est un élément infinitésimal de la surface Σ orienté vers les r croissants. La stratégie consiste à développer la métrique des perturbations en puissances de r^{-1} dans une jauge appropriée dite *jauge de radiation* dans laquelle il est facile de relier les flux d'énergie dE/dt et de moment angulaire dL/dt aux fonctions d'ondes paire et impaire $\psi_{(e/o)}^{\ell m}$ [145][146]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{64\pi} \sum_{\ell \geq 2, m} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \left[\left| \frac{d\psi_e^{\ell m}}{dt} \right|^2 + \left| \frac{\psi_o^{\ell m}}{dt} \right|^2 \right] , \quad (3.103)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{im}{64\pi} \sum_{\ell \geq 2, m} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \left[\frac{\psi_e^{\ell m}}{dt} \psi_e^{\ell m*} + \frac{\psi_o^{\ell m}}{dt} \psi_o^{\ell m*} \right] , \quad (3.104)$$

où les deux premiers modes $\ell = 0$ et $\ell = 1$ n'ont bien entendu pas de contribution radiative. Les fonctions d'ondes peuvent aussi être reliées aux spectres en énergie via

$$\frac{dE_{\ell m}}{d\omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \omega^2 \left[|\psi_e^{\ell m}(\omega, r)|^2 + |\psi_o^{\ell m}(\omega, r)|^2 \right] \quad (3.105)$$

avec

$$\psi_{e/o}^{\ell m}(\omega, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \psi_{e/o}^{\ell m}(t, r) dt \quad (3.106)$$

où ω est relié à la fréquence f par $\omega = 2\pi f$. On peut également retrouver les deux polarisations fondamentales des ondes gravitationnelles h_+ et $h_{\times}$ en terme des fonctions d'onde

$$h_+ = \frac{1}{r} \sum_{\ell \geq 2, m} \left\{ \psi_e^{\ell m} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \right] Y^{\ell m} - \psi_o^{\ell m} \frac{im}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] Y^{\ell m} \right\} , \quad (3.107)$$

$$h_{\times} = \frac{1}{r} \sum_{\ell \geq 2, m} \left\{ \psi_e^{\ell m} \frac{im}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] Y^{\ell m} + \psi_o^{\ell m} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \right] Y^{\ell m} \right\} , \quad (3.108)$$

$$h_+ - ih_{\times} = \frac{1}{2r} \sum_{\ell \geq 2, m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left[\psi_e^{\ell m} + i\psi_o^{\ell m} \right] {}_{-2}Y^{\ell m} . \quad (3.109)$$

où les ${}_{-2}Y^{\ell m}$ sont les HSS pondérés par un spin -2 [147]. Parfois il peut être intéressant de reconstruire le scalaire de Weyl Ψ_4 solution de l'équation de Teukolsky et qui décrit

les radiations émisent par la source. Pour cela on pourra se référer aux équations 9 et 11 de [148] qui donnent Ψ_4 en termes des composantes du champ de perturbation dans la jauge de Regge-Wheeler.

Chapitre 4

Résolution de l'équation de RWZ

ON présentera dans ce chapitre la méthode numérique que nous avons développée pour résoudre l'équation de RWZ et son application pour le calcul des formes d'ondes, de l'énergie et du moment angulaire captés par un observateur lointain. On exposera les résultats obtenus dans le cas homogène puis pour différentes orbites, radiale, elliptique, parabolique et de type "zoom-whirl". Ces résultats, en bon accord avec la littérature, permettent de valider la précision du code de calcul que l'on souhaite utiliser pour le calcul de la force propre gravitationnelle d'une particule en chute libre au chapitre 5.

4.1 Point sur les distributions

Au regard des informations déjà mentionnées sur la fonction d'onde dans la section 3.4 on rappelle quelques unes de ses propriétés (pour plus de commodité, dans cette section, on s'abstiendra d'écrire les indices e et o et les exposants ℓm). $\psi(t, r)$ est un champ scalaire régi par l'équation de RWZ (3.85) pour laquelle le terme source est une distribution dont le support est seulement donné par la ligne d'univers de genre temps $r = r_p(t)$. La nature du terme source (3.88) nous conduira à manipuler les distributions usuelles de Heaviside, Dirac et leurs dérivées. Afin de respecter une certaine rigueur mathématique dans le traitement de ces distributions (parfois mal menées), on se propose de justifier formellement quelques formules récurrentes et souvent admises dans la littérature.

La notion de distribution va de paire avec la notion de fonction test. L'ensemble des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact (c'est-à-dire identiquement nulles en dehors des bornes d'un certain intervalle). On définit toute distribution T sous sa forme intégrale par

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \varphi(x) dx , \quad (4.1)$$

où φ est une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Distribution δ de Dirac

On définit la distribution de Dirac $\delta_{x_0} := \delta(x - x_0)$ comme la distribution qui à une fonction test $\varphi(x)$ lui associe $\varphi(x_0)$. Elle est donnée par sa forme intégrale

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0) . \quad (4.2)$$

La multiplication d'un δ_{x_0} par une fonction infiniment dérivable est directe puisque pour toute fonction $p \in \mathcal{C}^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $p\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc

$$\langle \delta_{x_0} p, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, p\varphi \rangle = p(x_0) \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle . \quad (4.3)$$

Ainsi dans le cas plus général, si $P(t, r)$ est une fonction infiniment dérivable, et δ_{r_p} la distribution de Dirac dont le support est $r = r_p(t)$ on aura

$$\langle \delta_{r_p} P, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r - r_p(t)) P(t, r) \varphi(r) dr = P(t, r = r_p(t)) \langle \delta_{r_p}, \varphi \rangle , \quad (4.4)$$

et donc

$$P(t, r) \delta(r - r_p(t)) = \tilde{P}(t) \delta(r - r_p(t)) \quad (4.5)$$

où $\tilde{P}(t) := P(t, r = r_p(t))$ est une fonction uni-dimensionnelle infiniment dérivable qui provient de l'évaluation de $P(t, r)$ avec la distribution δ de Dirac. On aura besoin parfois de différencier cette fonction. La dérivée totale est reliée à la fonction d'origine par

$$\frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = \left[\partial_t P(t, r) + r_p \partial_r P(t, r) \right]_{r=r_p(t)} \quad (4.6)$$

où "°" indique une dérivée totale par rapport à t .

Distribution dérivée δ' de Dirac

En utilisant la propriété sur la dérivation au sens des distributions $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ on obtient directement la dérivée $\delta'_{x_0} := \partial_x \delta_{x_0}$ en remplaçant T par δ_{x_0}

$$\langle \delta'_{x_0}, \varphi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, \varphi' \rangle = -\varphi'(x_0) . \quad (4.7)$$

La multiplication de δ'_{x_0} par une fonction $p \in \mathcal{C}^\infty$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \langle \delta'_{x_0} p, \varphi \rangle &= \langle \delta'_{x_0}, p\varphi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, (p\varphi)' \rangle \\ &= -\langle \delta_{x_0}, p\varphi' \rangle - \langle \delta_{x_0}, p'\varphi \rangle \\ &= p(x_0) \langle \delta'_{x_0}, \varphi \rangle - p'(x_0) \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle , \end{aligned} \quad (4.8)$$

où on a utilisé le fait que, d'après (4.7), la dérivée d'une fonction test est encore une fonction test. Ainsi dans le cas plus général que l'on rencontrera, si $P(t, r)$ est une fonction infiniment dérivable et δ_{r_p} la distribution de Dirac dont le support est $r = r_p(t)$ on aura

$$\left\langle \delta'_{r_p} P, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(r - r_p(t)) P(t, r) \varphi(r) dr = P(t, r = r_p(t)) \left\langle \delta'_{r_p}, \varphi \right\rangle - \frac{\partial P(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=r_p(t)} \left\langle \delta_{r_p}, \varphi \right\rangle . \quad (4.9)$$

On écrira directement

$$P(t, r) \delta'(r - r_p(t)) = \tilde{P}(t) \delta'(r - r_p(t)) - \tilde{Q}(t) \delta(r - r_p(t)) \quad (4.10)$$

où $\tilde{Q}(t) := \partial_r P(t, r)|_{r=r_p(t)}$. On peut noter que l'on pourrait également évaluer la dérivée partielle de δ par rapport à t . Par un changement de variable on trouve simplement que

$$\partial_t \delta(r - r_p(t)) = -\dot{r}_p \partial_r \delta(r - r_p(t)) \quad (4.11)$$

Distribution $\mathcal{H}$ de Heaviside

Pour traiter certaines discontinuités on aura recours à la distribution de Heaviside $\mathcal{H}_{x_0} := \mathcal{H}(x - x_0)$ que l'on définit telle que

$$\mathcal{H}_{x_0} = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_0 \\ 1, & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

$\mathcal{H}_{x_0}$ est reliée à la distribution de Dirac par dérivation

$$\left\langle \mathcal{H}'_{x_0}, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta_{x_0}, \varphi \right\rangle . \quad (4.13)$$

Dans notre cas de figure, le support de $\mathcal{H}$ sera dépendant du temps, il sera donc nécessaire de donner un sens aux dérivées partielles $\partial_r \mathcal{H}(r - r_p(t))$ et $\partial_t \mathcal{H}(r - r_p(t))$ en terme de $\delta(r - r_p(t))$. Selon (4.13), il vient tout de suite que

$$\partial_r \mathcal{H}(r - r_p(t)) = \delta(r - r_p(t)) . \quad (4.14)$$

Pour la dérivée partielle par rapport à t on obtient par changement de variable $t \rightarrow r_p(t)$

$$\partial_t \mathcal{H}(r - r_p(t)) = -\dot{r}_p \partial_r \delta(r - r_p(t)) . \quad (4.15)$$

4.2 Conditions de saut

La dérivée de la distribution de Dirac dans le terme source (3.88) crée une discontinuité de $\psi(t, r)$ le long de la trajectoire de la particule. En analyse, comme la notion de continuité, celle de discontinuité est assez intuitive et la nature d'une discontinuité se définit selon le comportement de la fonction à droite et à gauche de la discontinuité. Dans notre cas, la discontinuité en $r = r_p$ est dite de *première espèce* car à t constant les valeurs de ψ à gauche et à droite de r_p ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t, r_p - \epsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t, r_p + \epsilon) , \quad (4.16)$$

sont différentes mais restent toutes deux finies. La fonction $\psi(t, r)$ est une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, r) \mid r = r_p(t)\}$. Afin de donner un sens à la dérivée de ψ en r_p (du moins d'un point de vue des distributions) on introduit deux fonctions $\psi^+(t, r)$ et $\psi^-(t, r)$ continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant les propriétés suivantes

$$\psi^-(t, r) = \psi(t, r) \quad \forall r \in]-\infty, r_p[, \quad (4.17)$$

$$\psi^-(t, r_p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t, r_p - \epsilon) , \quad (4.18)$$

et

$$\psi^+(t, r) = \psi(t, r) \quad \forall r \in]r_p, +\infty[, \quad (4.19)$$

$$\psi^+(t, r_p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t, r_p + \epsilon) , \quad (4.20)$$

Ces deux fonctions permettent d'écrire ψ comme une distribution formellement donnée par

$$\psi(t, r) = \psi^+ \mathcal{H}_+ + \psi^- \mathcal{H}_- , \quad (4.21)$$

où $\mathcal{H}_+ := \mathcal{H}(r - r_p(t))$ et $\mathcal{H}_- := \mathcal{H}(r_p(t) - r)$. En employant les propriétés (4.11), (4.14) et (4.15), on obtient l'expression des dérivées successives de (4.21)

$$\partial_r \psi(t, r) = \partial_r \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_r \psi^- \mathcal{H}_- + (\psi^+ - \psi^-) \delta , \quad (4.22)$$

$$\partial_t \psi(t, r) = \partial_t \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_t \psi^- \mathcal{H}_- - \dot{r}_p (\psi^+ - \psi^-) \delta , \quad (4.23)$$

$$\partial_r^2 \psi(t, r) = \partial_r^2 \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_r^2 \psi^- \mathcal{H}_- + 2 (\partial_r \psi^+ - \partial_r \psi^-) \delta + (\psi^+ - \psi^-) \delta' , \quad (4.24)$$

$$\partial_t^2 \psi(t, r) = \partial_t^2 \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_t^2 \psi^- \mathcal{H}_- - 2\mathring{r}_p (\partial_t \psi^+ - \partial_t \psi^-) \delta - \mathring{r}_p^{\circ} (\psi^+ - \psi^-) \delta + \mathring{r}_p^2 (\psi^+ - \psi^-) \delta', \quad (4.25)$$

où on note $\delta = \delta_{r_p} = \delta(r - r_p(t))$ et $\delta' = \delta'_{r_p} = \partial_r \delta(r - r_p(t))$. De plus on a vu que l'expression (4.16) définissait une discontinuité de première espèce, c'est-à-dire que l'on peut donner le saut de la fonction ψ comme la différence de sa limite à droite et à gauche de la trajectoire $r_p(t)$

$$\begin{aligned} [\psi] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\psi(t, r_p + \epsilon) - \psi(t, r_p - \epsilon)] \\ &= \psi^+(t, r_p) - \psi^-(t, r_p) \end{aligned} \quad (4.26)$$

qui est, au final, une fonction de t uniquement. D'après (4.22) on voit que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial_r \psi(t, r_p \pm \epsilon) = \partial_r^\pm \psi(t, r_p)$, on peut donc associer un saut aux dérivées partielles de ψ tel que

$$[\partial_r^n \partial_t^m \psi] = \partial_r^n \partial_t^m \psi^+(t, r_p) - \partial_r^n \partial_t^m \psi^-(t, r_p), \quad (4.27)$$

Les quantités $[\partial_r^n \partial_t^m \psi] \forall n, m \in \mathbb{N}$ sont ce qu'on appellera les *conditions de saut* de la fonction d'onde. Ainsi, en exploitant les propriétés (4.5), (4.10) et la définition (4.27) on réécrit les équations (4.22-4.25)

$$\partial_r \psi(t, r) = \partial_r \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_r \psi^- \mathcal{H}_- + [\psi] \delta, \quad (4.28)$$

$$\partial_t \psi(t, r) = \partial_t \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_t \psi^- \mathcal{H}_- - \mathring{r}_p [\psi] \delta, \quad (4.29)$$

$$\partial_r^2 \psi(t, r) = \partial_r^2 \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_r^2 \psi^- \mathcal{H}_- + [\partial_r \psi] \delta + [\psi] \delta', \quad (4.30)$$

$$\partial_t^2 \psi(t, r) = \partial_t^2 \psi^+ \mathcal{H}_+ + \partial_t^2 \psi^- \mathcal{H}_- + \left(\mathring{r}_p^2 [\partial_r \psi] - \mathring{r}_p^{\circ} [\psi] - 2\mathring{r}_p \frac{d}{dt} [\psi] \right) \delta + \mathring{r}_p^2 [\psi] \delta', \quad (4.31)$$

Les dérivées de la fonction d'onde sont singulières et l'amplitude de ces singularités est donnée par une combinaison des conditions de saut de la fonction d'onde. On rappelle l'équation de RWZ

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 - V(r) \right] \psi = \mathcal{G}(t) \delta + \mathcal{F}(t) \delta', \quad (4.32)$$

où $\partial_{r^*}^2$ peut également s'écrire $\partial_{r^*}^2 = f(r)^2 \partial_r^2 + f(r) f'(r) \partial_r$. En introduisant les équations (4.21), (4.28), (4.30) et (4.31) dans (4.32) on obtient une relation qui relie les conditions

de saut aux fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ du terme source

$$\left[\left(f(r_p)^2 - \overset{\circ}{r}_p^2 \right) [\partial_r \psi] + \left(\overset{\circ}{r}_p - f(r_p) f'(r_p) \right) [\psi] - 2 \overset{\circ}{r}_p \frac{d}{dt} [\psi] \right] \delta + \left(f(r_p)^2 - \overset{\circ}{r}_p^2 \right) \delta' = \mathcal{G}(t) \delta + \mathcal{F}(t) \delta' \quad (4.33)$$

On a utilisé ici le fait que, par définition, les fonctions $\psi^\pm$ sont solutions de l'équation homogène $\mathcal{Z}[\psi^\pm] = 0$ avec $\mathcal{Z} := -\partial_t^2 + \partial_r^2 - V(r)$. Par ailleurs on a pas oublié d'évaluer la quantité $f(r)^2 \delta' = f(r_p)^2 \delta' - 2f(r_p) f'(r_p) \delta$ qui intervient dans $f(r)^2 \partial_r^2 \psi$.

Saut d'ordre 0

La forme explicite de $[\psi]$ est donnée en identifiant l'amplitude des quantités qui font intervenir δ' à droite et à gauche de l'égalité (4.33)

$$[\psi] = \frac{\mathcal{F}(t)}{f(r_p)^2 - \overset{\circ}{r}_p^2} . \quad (4.34)$$

Sauts d'ordre 1

De la même manière, la forme explicite de $[\partial_r \psi]$ est donnée en identifiant l'amplitude des quantités qui font intervenir δ à droite et à gauche de l'égalité (4.33)

$$[\partial_r \psi] = \frac{1}{f(r_p)^2 - \overset{\circ}{r}_p^2} \left[\mathcal{G}(t) + \left(f(r_p) f'(r_p) - \overset{\circ}{r}_p \right) [\psi] - 2 \overset{\circ}{r}_p \frac{d}{dt} [\psi] \right] . \quad (4.35)$$

Le saut sur la dérivée partielle temporelle se trouve à l'aide de la relation sur la dérivée totale (4.6)

$$[\partial_t \psi] = \frac{d}{dt} [\psi] - \overset{\circ}{r}_p [\partial_r \psi] . \quad (4.36)$$

Sauts d'ordre 2

Pour obtenir maintenant les conditions de saut sur les dérivées seconde, on tient compte du fait que $\mathcal{Z}[\psi^\pm] = 0$ et donc que $\mathcal{Z}[\psi^+ - \psi^-] = 0$ qui reste vrai dans la limite $r \rightarrow r_p$ donc

$$- [\partial_t^2 \psi] + f(r_p)^2 [\partial_r^2 \psi] + f(r_p) f'(r_p) [\partial_r \psi] - V(r_p) [\psi] = 0 . \quad (4.37)$$

Les sauts $[\psi]$ et $[\partial_r \psi]$ sont donnés par (4.34) et (4.35) respectivement et $[\partial_r^2 \psi]$ et $[\partial_t^2 \psi]$ sont les deux quantités que l'on cherche à exprimer. Une deuxième relation peut être

trouvée entre $[\partial_r^2 \psi]$ et $[\partial_t^2 \psi]$ en travaillant sur les compositions de dérivées partielles

$$\begin{aligned} [\partial_t^2 \psi] &= \frac{d}{dt} [\psi] - \dot{r}_p [\partial_r \partial_t \psi] \\ &= \frac{d}{dt} [\psi] - \dot{r}_p [\partial_r \psi] + \dot{r}_p^2 [\partial_r^2 \psi] . \end{aligned} \quad (4.38)$$

En insérant (4.38) dans (4.37) on a directement

$$[\partial_r^2 \psi] = \frac{1}{f(r_p)^2 - \dot{r}_p^2} \left[\frac{d}{dt} [\partial_t \psi] - f(r_p) f'(r_p) [\partial_r \psi] - \dot{r}_p \frac{d}{dt} [\partial_r \psi] + V(r_p) [\psi] \right] . \quad (4.39)$$

Le saut sur la dérivée seconde temporelle et la dérivée mixte s'obtiennent respectivement par

$$[\partial_t^2 \psi] = [\partial_{r*}^2 \psi] - V(r_p) [\psi] , \quad (4.40)$$

$$[\partial_t \partial_r \psi] = [\partial_r \partial_t \psi] = \frac{d}{dt} [\partial_r \psi] - \dot{r}_p [\partial_r^2 \psi] , \quad (4.41)$$

avec $[\partial_{r*}^2 \psi] = f(r_p)^2 [\partial_r^2 \psi] + f(r_p) f'(r_p) [\partial_r \psi]$.

Sauts d'ordre 3

Pour accéder aux sauts sur les dérivées troisièmes de ψ on se propose de dériver la relation $\mathcal{Z}[\psi^+ - \psi^-] = 0$ par rapport à r puis de prendre la limite quand r tend vers r_p . On obtient

$$- [\partial_r \partial_t^2 \psi] + f^2 [\partial_r^3 \psi] + 3f f' [\partial_r^2 \psi] + (f'^2 + f f'' - V) [\partial_r \psi] - V' [\psi] = 0 . \quad (4.42)$$

où toutes les quantités sont évaluées en $r = r_p$. Les sauts $[\psi]$, $[\partial_r \psi]$ et $[\partial_r^2 \psi]$ sont donnés par (4.34), (4.35) et (4.39) respectivement et $[\partial_r^3 \psi]$ et $[\partial_r \partial_t^2 \psi]$ sont nos inconnues. Comme pour (4.38), on a la relation suivante

$$[\partial_r \partial_t^2 \psi] = \frac{d}{dt} [\partial_r \partial_t \psi] - \dot{r}_p \frac{d}{dt} [\partial_r^2 \psi] + \dot{r}_p^2 [\partial_r^3 \psi] . \quad (4.43)$$

En insérant (4.43) dans (4.42) on a directement

$$[\partial_r^3 \psi] = \frac{1}{f^2 - \dot{r}_p^2} \left[\frac{d}{dt} [\partial_r \partial_t \psi] - \dot{r}_p \frac{d}{dt} [\partial_r^2 \psi] - (f'^2 + f f'' - V) [\partial_r \psi] - 3f f' [\partial_r^2 \psi] - V' [\psi] \right] . \quad (4.44)$$

Les dérivées troisièmes mixtes s'acquièrent par un jeu d'écriture sur les dérivées partielles

$$[\partial_t \partial_r^2 \psi] = \frac{d}{dt} [\partial_r^2 \psi] - \dot{r}_p [\partial_r^3 \psi] . \quad (4.45)$$

$[\partial_r \partial_t^2 \psi]$ s'obtient en inversant (4.43) et de manière générale si l'on a trouvé une solution explicite pour $[\partial_r^{m+2n}]$, tout saut du type $[\partial_r^m \partial_t^{2n} \psi]$ est relié à l'équation d'onde homogène via l'opérateur $\mathcal{Z}$.

Sauts d'ordre 4

La stratégie reste la même que pour l'ordre 3. On dérive $\mathcal{Z}[\psi^+ - \psi^-] = 0$ deux fois par rapport à r puis on prend la limite quand r tend vers r_p . On obtient

$$\begin{aligned} -[\partial_r^2 \partial_t^2 \psi] + f^2 [\partial_r^4 \psi] + 2ff' [\partial_r^3 \psi] + [4(f'^2 + ff'') - V] [\partial_r^2 \psi] \\ + (3f'f'' + ff''' - 2V') [\partial_r \psi] - V' [\psi] = 0 . \end{aligned} \quad (4.46)$$

On ferme le système d'équations avec

$$[\partial_r^2 \partial_t^2 \psi] = \frac{d}{dt} [\partial_r^2 \partial_t \psi] - \dot{r}_p \frac{d}{dt} [\partial_r^3 \psi] + \dot{r}_p^2 [\partial_r^4 \psi] , \quad (4.47)$$

et on trouve le saut relatif à la dérivée quatrième de la fonction d'onde

$$\begin{aligned} [\partial_r^4 \psi] = \frac{1}{f^2 - \dot{r}_p^2} \left\{ \frac{d}{dt} [\partial_r^2 \partial_t \psi] - \dot{r}_p \frac{d}{dt} [\partial_r^3 \psi] 2ff' [\partial_r^3 \psi] - [4(f'^2 + ff'') - V] [\partial_r^2 \psi] \right. \\ \left. - (3f'f'' + ff''' - 2V') [\partial_r \psi] - V' [\psi] \right\} . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Le saut $[\partial_t \partial_r^3 \psi]$ est calculé par

$$[\partial_t \partial_r^3 \psi] = \frac{d}{dt} [\partial_r^3 \psi] - \dot{r}_p [\partial_r^4 \psi] . \quad (4.49)$$

Le saut $[\partial_t^2 \partial_r^2 \psi]$ est calculé en inversant (4.46). Le saut $[\partial_t^3 \partial_r \psi]$ est obtenu en différenciant $\mathcal{Z}[\psi^+ - \psi^-] = 0$ par rapport à r puis par rapport à t et en prenant la limite quand r tend vers r_p . Ainsi, $[\partial_t^3 \partial_r \psi]$ sera fonction de $[\partial_t \partial_r^3 \psi]$, $[\partial_t \partial_r^2 \psi]$, $[\partial_t \partial_r \psi]$ et $[\partial_t \psi]$ qui sont des quantités préalablement calculées.

Sauts d'ordre $N > 2$

De façon générale, il est nécessaire de connaître les sauts d'ordre $N - 1$ pour calculer les sauts d'ordre N . En pratique, la recette consiste à

- Dérivée $\mathcal{Z}[\psi^+ - \psi^-] = 0$ $N - 2$ fois par rapport à r puis prendre la limite quand r tend vers r_p . Cela donnera une relation du type

$$- [\partial_r^{N-2} \partial_t^2 \psi] + \sum_{k=0}^N D_{(N,k)}(r_p) [\partial_r^k \psi] = 0 , \quad (4.50)$$

où les $D_{(N,k)}$ sont des fonctions de r_p faisant intervenir $f(r_p)$, $V(r_p)$ et leurs dérivées.

- Exprimer $[\partial_r^{N-2}\partial_t^2\psi]$ à partir des sauts d'ordres inférieurs déjà calculés. On utilisera la relation suivante

$$[\partial_r^{N-2}\partial_t^2\psi] = \frac{d}{dt}[\partial_r^{N-2}\partial_t\psi] - \dot{r}_p \frac{d}{dt}[\partial_r^{N-1}\psi] + \dot{r}_p^2 [\partial_r^N\psi] . \quad (4.51)$$

- Injecter (4.51) dans (4.50) et écrire la forme explicite de $[\partial_r^N\psi]$

$$[\partial_r^N\psi] = \frac{1}{D_{(N,N)} - \dot{r}_p} \left[\frac{d}{dt}[\partial_r^{N-2}\partial_t\psi] - \dot{r}_p \frac{d}{dt}[\partial_r^{N-1}\psi] - \sum_{k=0}^{N-1} D_{(N,k)}(r_p) [\partial_r^k\psi] \right] . \quad (4.52)$$

- La forme explicite de $[\partial_r^{N-2}\partial_t^2\psi]$ est obtenue via (4.51) ou en inversant (4.50).
- Les dérivées mixtes de type $[\partial_r^m\partial_t^{2n}\psi]$ sont directement reliées aux sauts $[\partial_r^k\psi]$ pour $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $2n + m = N$ et pour $k \leq N$ car dans le cas homogène, l'opérateur ∂_t^{2n} peut être vu comme une composition ne faisant intervenir au final que des dérivées spatiales

$$\partial_t^{2n} = \underbrace{(\partial_{r^*}^2 - V) \circ (\partial_{r^*}^2 - V) \circ \cdots \circ (\partial_{r^*}^2 - V)}_{n \text{ fois}} \quad (4.53)$$

- Les dérivées mixtes de type $[\partial_r^m\partial_t^{2n+1}\psi]$, pour $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $2n + m + 1 = N$, sont directement reliées aux sauts $[\partial_r^k\partial_t\psi]$ pour $k \leq N - 1$ et $[\partial_r^k\psi]$ pour $k \leq N$

4.3 Implémentation numérique

De nombreuses techniques de résolution de l'équation de RWZ ont été utilisées dans la littérature. Généralement ces techniques sont classées en deux groupes : les techniques employées dans le domaine fréquentiel et celles appliquées dans le domaine temporel. Les premières sont des méthodes produisant des résultats très précis et mettant en jeu des ODE souvent simples à résoudre numériquement. Elles souffrent cependant de difficultés lorsque l'on cherche à obtenir les formes d'ondes provenant de systèmes à grande excentricité puisqu'il devient nécessaire d'effectuer des sommes sur un grand nombre de modes. De même, à cause de la nature singulière de la source, ces méthodes sont généralement confrontées au phénomène de Gibbs (apparition d'oscillations non physiques autour de la discontinuité) qu'il faut gérer proprement lors de la reconstruction des formes d'ondes dans le domaine temporel [149][58]. Parfois des calculs directement dans le domaine temporel s'avèrent plus efficaces pour obtenir des formes d'ondes précises. Néanmoins cette

deuxième classe de méthodes numériques a elle aussi son lot d'inconvénients puisqu'il s'agit normalement d'implémenter des EDP sur plusieurs échelles physiques (spatiale et temporelle) très différentes. En effet nous sommes supposés décrire non seulement les grandes longueurs d'ondes comparées au trou noir central mais aussi les phénomènes locaux au voisinage de la particule où les effets de la réaction de radiation ont un rôle crucial.

On choisira dans notre étude de développer une méthode dans le domaine temporel, plus adaptée au calcul de la force propre que nous traiterons dans le cas radial et facilement transposable à des problèmes de physique différents qui demandent la résolution d'une équation hyperbolique à terme source singulier. La méthode que nous proposons ne nécessitera pas d'utiliser de fonctions d'approximations de δ mais permettra de traiter la particule comme une vraie particule ponctuelle.

Cette partie est dédiée à la description du schéma numérique que nous avons mis en place pour résoudre l'équation de RWZ (3.85) dans le cas homogène et non-homogène pour des orbites génériques. Cette méthode s'appuie sur le bagage analytique présenté dans la section précédente sur les conditions de saut de la fonction d'onde et de ses dérivées. Le support du terme source étant localisé uniquement sur la ligne d'univers, une fois le domaine spatio-temporel discrétisé, on discrimine deux sortes de cellules numériques (voir Fig. 4.1) : (i) les cellules vides, qui ne sont pas coupées par la trajectoire et où l'on résout l'équation de RWZ homogène et (ii) les cellules coupées par la trajectoire où la solution est discontinue et où le terme source doit être pris en compte. C'est au niveau des cellules de type (ii) que nous utiliserons les conditions de saut, dans une formule d'extrapolation, afin de lier proprement les deux domaines à l'interface des deux domaines situés à droite et à gauche de la discontinuité.

Les conditions de saut ont souvent été utilisées dans divers travaux de manières différentes. Canizares et Sopuerta [150][151][152] imposent les conditions de saut vérifiées par les champs caractéristiques qui interviennent dans une méthode numérique pseudo-spectrale. Haas [153] et Barack et Sago [55][58] les utilisent dans un schéma prédicteur-correcteur pour définir les coefficients du polynôme d'interpolation de la quantité $V\psi$. Hopper et Evans [154][155] se servent des conditions de saut comme un moyen de valider la précision de leur code en comparant leurs valeurs à celles qu'ils obtiennent numériquement par une méthode du genre "extended homogeneous solution". Field et al. [156] usent des conditions de saut comme outils dans l'implémentation de la méthode Galerkin adaptée au traitement de l'équation de RWZ. Aoudia et Spallicci [157] résolvent l'équation de RWZ à l'aide d'un schéma numérique utilisant les conditions de saut à l'ordre 1.

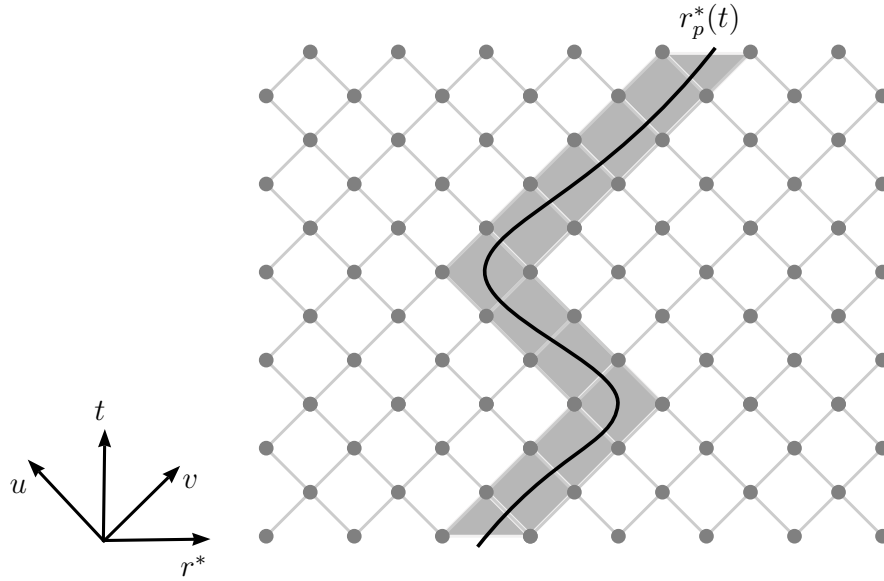


FIGURE 4.1: L'espace-temps discrétisé est une grille numérique à pas décalés où deux nœuds sont spatialement séparés par $2\Delta r^*$ et deux tranches de temps espacées par Δt (bien entendu, le maillage utilisé en pratique est bien plus fin que celui tracé dans la figure ci-dessus). La ligne d'univers passe à travers certaines cellules où la solution ψ n'est pas continue. Deux types de cellules sont à discriminer, les cellules vides qui ne rencontrent jamais la particule et pour lesquelles on peut envisager un schéma numérique classique aux différences finies et les cellules coupées par la trajectoire où les différences finies sont inopérantes à cause de la discontinuité.

4.3.1 Domaine numérique et notations

Domaine numérique

Le champ $\psi^{\ell m}(t, r)$, solution de l'équation de RWZ, prendra pour chaque mode une valeur finie en chacun des nœuds de notre domaine bi-dimensionnel discrétisé. Les radiations seront enregistrées par un observateur lointain localisé en $r^* = r_{\text{obs}}^*$. En suivant les précédents travaux de Lousto et Price [144][158][159], Martel et Poisson [160] on considérera une grille numérique à pas décalé où deux nœuds sont spatialement séparés par $2\Delta r^*$ et deux tranches de temps espacées par Δt (voir Fig. 4.3). Cette configuration connecte les points le long des droites à temps retardé constant $u = t - r^*$ et à temps avancé constant $v = t + r^*$. A chaque itération de notre algorithme on cherchera à exprimer la valeur du champ au sommet de la cellule (point A dans les Figs. 4.3, 4.5 et 4.6) à partir de quantités connues et chronologiquement liées au point A. Notre domaine est borné par une hypersurface de genre espace $t = 0$ qui contient en toute rigueur le contenu gravitationnel initial de notre système. La grille est bornée à gauche par l'hypersurface d'excision prise en $r_{\text{min}}/2M = 1 + \epsilon$ (on prendra typiquement $r_{\text{min}}^*/2M = -1500$) et bornée à droite en $r_{\text{max}}^*/2M = 1500 > r_{\text{obs}}^*$ dont la valeur est suffisamment grande pour être cohérent avec l'approximation d'observateur situé à l'infini. On prendra enfin des conditions aux bords nulles, mais comme notre grille est suffisamment large, le

domaine de dépendance causale du bord n'interfère pas avec la grille utile pour le calcul des radiations. Ainsi, les réflexions aux bords ne pollueront pas le signal d'intérêt.

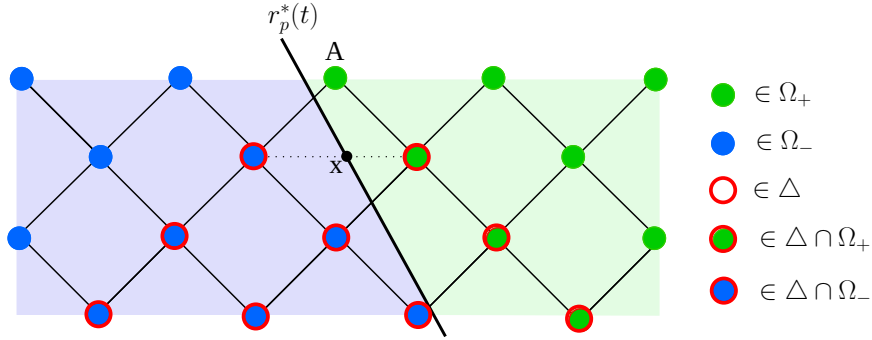


FIGURE 4.2: Echantillon du maillage au voisinage de la trajectoire. On range les points dans différents ensembles afin de formaliser l'algorithme que nous utilisons. On notera Ω_+ l'ensemble des points situés "à droite" de la trajectoire (les points verts sur la figure) et Ω_- l'ensemble des points situés "à gauche" de la trajectoire (les points bleus sur la figure). Les points cerclés de rouge définissent l'ensemble des points appartenant au cône de lumière passée du point A (exclus).

Notations

Dans les sections suivantes on sera amené à travailler avec l'équation de RWZ dans sa version discrétisée et donc amené à manipuler les valeurs du champ ψ et les coordonnées de la particule (t, r_p^*) en des points précis de notre espace-temps discrétisé. On définira alors

- ψ_i la valeur de ψ prise au point de grille i de coordonnées (t_i, r_i^*) ,
- V_i la valeur du potentiel V prise au point i de coordonnées (t_i, r_i^*) ,
- $[\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi]_x$ les conditions de saut prises en un point x de coordonnées $(t_x, r_x^* = r_p^*(t_x))$ appartenant à la trajectoire,
- $\partial_{r^*}^p \partial_t^q \psi_x^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial_{r^*}^p \partial_t^q \psi^\pm(r_p(t_x) \pm \epsilon, t_x)$,
- $\Omega_+ = \{(t_i, r_i^*) \mid r_i^* > r_p^*(t_i)\}$ c'est-à-dire l'ensemble des points de grille situés "à droite" de la ligne d'univers dans notre domaine numérique,
- $\Omega_- = \{(t_i, r_i^*) \mid r_i^* < r_p^*(t_i)\}$ c'est-à-dire l'ensemble des points de grille situés "à gauche" de la ligne d'univers dans notre domaine numérique,
- $\psi(\Omega_\pm) = \{\psi_i \mid i \in \Omega_\pm\}$. Ainsi par définition $\psi_i^+ \in \psi(\Omega_+)$ et $\psi_i^- \in \psi(\Omega_-)$.
- $\Delta = \{(t_i, r_i^*) \mid t_i < t_A, |r_i^*/t_i| < 1\}$ l'ensemble des points appartenant au cône de lumière passé du point situé au sommet de la cellule (appelé point A). Par exemple pour un développement à l'ordre 1, $\Delta = \{B, C, E\}$ (voir Fig. 4.5) et pour un développement à l'ordre 2, $\Delta = \{B, C, D, E, F\}$ (voir Fig. 4.6).

4.3.2 Algorithme

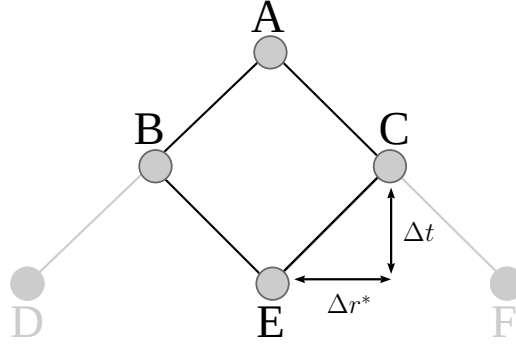


FIGURE 4.3: Géométrie d'une cellule vide, c'est-à-dire jamais occupée par la particule durant son mouvement. Les noeuds sont spatialement séparés par $2\Delta r^*$ et deux tranches de temps espacées par Δt . Seuls les points A , B et E sont nécessaires pour résoudre l'équation de RWZ homogène via un schéma aux différences finies en $\mathcal{O}(\Delta r^{*4}, \Delta t^4)$ (voir l'équation (4.54)).

Cellules vides au 2ème ordre

Comme on l'a déjà mentionné, l'évolution de ψ est régie pour la majorité du domaine numérique par l'équation de RWZ dans sa version homogène puisque la source n'occupe, qu'au plus, une cellule par pas de temps. Pour les cellules vides on utilisera un schéma classique aux différences finies en $\mathcal{O}(h^4)$ (voir Fig. 4.3)

$$\psi_A^\pm = \psi_E^\pm + (\psi_B^\pm + \psi_C^\pm) \left(1 - \frac{1}{2}h^2 V_A\right) + \mathcal{O}(h^4), \quad (4.54)$$

où $h = \Delta r^* = \Delta t$. L'indice $\pm$ indique simplement si l'on se trouve à droite ou à gauche de la trajectoire comme cela a été défini en (4.20) et (4.18). La relation (4.54) est très simple à établir, il suffit d'intégrer l'équation (4.32) sur une cellule entière en remarquant que l'opérateur d'onde intégré est donné par la relation exacte

$$\int_{\text{cellule}} [\partial_{r^*}^2 - \partial_t^2] \psi dr^* dt = - \int_{\text{cellule}} 4\partial_u \partial_v \psi du dv = -4[\psi_A - \psi_B - \psi_C + \psi_E] \quad (4.55)$$

et que le terme potentiel s'approche par

$$\int_{\text{cellule}} V \psi dr^* dt \approx h^2 V_A [\psi_A + \psi_B + \psi_C + \psi_E]. \quad (4.56)$$

Cellules vides au 4ème ordre

Dans le chapitre 5, dédié à la force propre radiale, on aura besoin d'un schéma numérique plus précis qu'un schéma à l'ordre 2. On prendra pour cela le schéma à l'ordre 4 utilisé

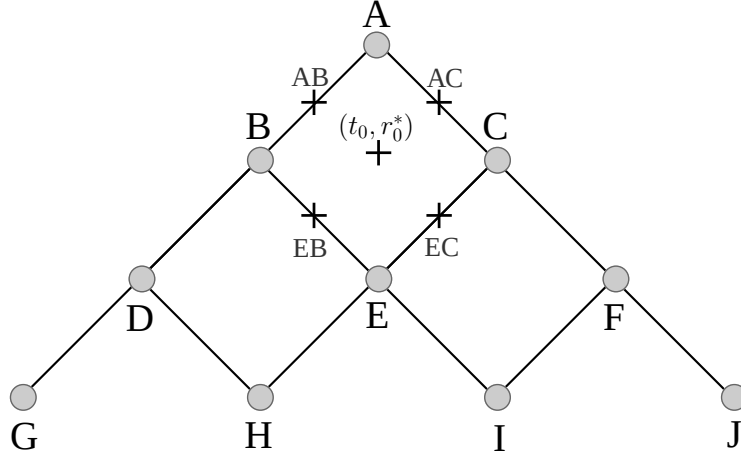


FIGURE 4.4: Stencil utilisé pour la résolution de l'équation de RWZ homogène. Les points indiqués par des croix ne sont pas des points du maillage mais sont utilisés pour construire le schéma d'ordre 4 donné dans l'équation (4.59).

dans [153] qui est lui même une version modifié du schéma défini dans [161]. Comme pour l'établissement de la relation (4.54), l'opérateur d'onde intégré sur une cellule est défini exactement en utilisant les quatre noeuds de la cellule. Le terme plus compliqué à intégrer est le terme potentiel $V\psi$ que l'on notera $\Psi_i = V_i\psi_i$ où les i sont les points considérés dans la Fig. 4.4. En utilisant une règle de Simpson pour les intégrales doubles on trouve

$$\iint_{\text{cellule}} \Psi dr^* dt = \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left[\Psi_A + \Psi_B + \Psi_E + \Psi_C + 4(\Psi_{BE} + \Psi_{AB} + \Psi_{CE} + \Psi_{AC}) + 16\Psi_0 \right] + \mathcal{O}(h^6), \quad (4.57)$$

où les valeurs de Ψ dans le terme $(\Psi_{BE} + \Psi_{AB} + \Psi_{CE} + \Psi_{AC})$ font intervenir des points qui sont en dehors du maillage. L'idée est d'approximer ce terme sans à avoir à rééchantillonner la grille. On applique la relation (4.54) sur ψ_{AB} et ψ_{AC} et on développe le potentiel $V(r)$ autour de r_0 , qui est la coordonnée spatiale du point central de la cellule. On obtient

$$\begin{aligned} \Psi_{BE} + \Psi_{AB} + \Psi_{CE} + \Psi_{AC} = & 2V_0\psi_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 V_0 \right] + V_{BE}\psi_B \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 V_{BE} \right] + \\ & V_{CE}\psi_C \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 V_{CE} \right] + \frac{1}{2} [V_{BE} - 2V_0 + V_{CE}] (\psi_B + \psi_C) \\ & + \mathcal{O}(h^4) . \end{aligned}$$

La quantité intermédiaire Ψ_0 , qui n'est pas non plus évaluée sur un point de grille, est approchée par une combinaison linéaire des valeurs de Ψ_i pour $i \in \triangle = \{B, C, D, E, F, G, H,$

$I, J\}$

$$\Psi_0 = \frac{1}{16} \left[8\Psi_B + 8\Psi_E + 8\Psi_C - 4\Psi_D - 4\Psi_F + \Psi_G - \Psi_H - \Psi_I + \Psi_J \right] + \mathcal{O}(h^4) . \quad (4.58)$$

Le schéma final permettant de résoudre l'équation de RWZ homogène à l'ordre 4 est donné par

$$\begin{aligned} \psi_A \approx & -\psi_E + \psi_B \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{3} \right)^2 (V_0 + V_B) + \frac{1}{16} \left(\frac{h}{3} \right)^4 V_0 (V_0 + V_B) \right] \\ & + \psi_C \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{3} \right)^2 (V_0 + V_C) + \frac{1}{16} \left(\frac{h}{3} \right)^4 V_0 (V_0 + V_C) \right] \\ & - \left(\frac{h}{3} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{3} \right)^2 V_0 \right] \left[\Psi_{BE} + \Psi_{AB} + \Psi_{CE} + \Psi_{AC} + 4\Psi_0 \right] , \end{aligned} \quad (4.59)$$

où le dernier terme entre crochets est donné par (4.58) et (4.59). Il est évident que les relations (4.54) et (4.59) ne peuvent en aucun cas être utilisées si la fonction ψ n'est pas régulière sur le domaine d'intégration que l'on considère. Les cellules coupées par la trajectoire sont des zones de discontinuité de la fonction ψ , c'est pourquoi un schéma numérique adapté doit être envisagé pour obtenir la valeur de ψ_A .

Cellules coupées par la ligne d'univers

Dans le cas des cellules vides, la formule (4.54) fait intervenir soit des points de Ω_+ soit des points de Ω_- . Dans une zone de discontinuité ($r_B^* < r_p^* < r_C^*$), c'est-à-dire dans une cellule où cohabitent des points de Ω_+ et des points de Ω_- (voir Fig. 4.5) donc toute relation de type différences finies échoue. On se propose d'établir une relation liant les $\psi(\Omega_+)$ et les $\psi(\Omega_-)$ de la cellule considérée en utilisant les conditions de saut définies dans la section 4.2. La stratégie est la suivante

- On cherche à obtenir une relation d'extrapolation classique du genre

$$\psi_A^\pm = \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm , \quad (4.60)$$

où les α_i sont des coefficients de pondération.

- On effectue un développement de Taylor de la fonction ψ en A et en chaque point de Δ autour du point x qui marque l'intersection entre la trajectoire et le segment $[BC]$ de la cellule. On obtient alors

$$\psi_i^\pm = \sum_{n+m \leq N} T_i^{(n,m)} \partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi_x^\pm + \mathcal{O}(h^{N+1}) , \quad (4.61)$$

où $T_i^{(n,m)} = (r_i^* - r_x)^n (t_i - t_x)^m / n!m!$ sont les coefficients de Taylor. En injectant (4.61) dans (4.60) on obtient par identification les coefficients¹ α_i .

- Cependant si $i \in \Omega_+$ (ou $i \in \Omega_-$), alors ψ_i^- (ou ψ_i^+) n'est pas bien définie. C'est pourquoi l'utilisation des conditions de saut $\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi_x^\pm = \partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi_x^\mp \pm [\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi]_x$ permet de donner un sens à ψ_i^- quand $i \in \Omega_+$ et à ψ_i^+ quand $i \in \Omega_-$. On introduit le terme de jonction ξ_i tel que

$$\psi_i^\pm = \sum_{n+m \leq N} T_i^{(n,m)} \left(\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi_x^\mp \pm [\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi]_x \right) + \mathcal{O}(h^{N+1}) , \quad (4.62)$$

$$\approx \psi_i^\mp \pm \xi_i \quad \text{pour } i \in \Omega_\mp . \quad (4.63)$$

Avec

$$\psi_i^\mp = \sum_{n+m \leq N} T_i^{(n,m)} \partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi_x^\mp \quad \text{et} \quad \xi_i = \sum_{n+m \leq N} T_i^{(n,m)} [\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi]_x , \quad (4.64)$$

- Si $A \in \Omega_-$, alors la relation (4.60) peut se réécrire

$$\psi_A^- = \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^- , \quad (4.65)$$

$$= \sum_{i \in \Delta \cap \Omega_-} \alpha_i \psi_i^- + \sum_{i \in \Delta \cap \Omega_+} \alpha_i \psi_i^- , \quad (4.66)$$

$$= \sum_{i \in \Delta \cap \Omega_-} \alpha_i \psi_i^- + \sum_{i \in \Delta \cap \Omega_+} \alpha_i (\psi_i^+ - \xi_i) , \quad (4.67)$$

La première somme correspond aux points directement accessibles sur la grille pour lesquels ψ_i^- est bien définie (car $i \in \Omega_-$) et la deuxième somme correspond aux points pour lesquels ψ_i^- n'est pas bien définie car dans ce cas $i \in \Omega_+$ qui est associé à ψ_i^+ sur la grille. On a alors

$$\psi_A^- = \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm - \sum_{i \in \Delta \cap \Omega_+} \alpha_i \xi_i . \quad (4.68)$$

De même si $A \in \Omega_+$, alors

$$\psi_A^+ = \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm - \sum_{i \in \Delta \cap \Omega_+} \alpha_i \xi_i + \xi_A . \quad (4.69)$$

¹Normalement à l'ordre N il faut $(N+1)(N+2)/2$ points pour satisfaire les $(N+1)(N+2)/2$ relations nécessaires pour trouver les α_i dans (4.60), cependant en utilisant le fait que $\partial_t^2 \psi_i^\pm = [\partial_{r^*}^2 - V_i] \psi_i^\pm$ on a besoin seulement de $2N+1$ points.

- La formule générale peut être résumée par

$$\psi_A = \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i + \sum_{n+m \leq N} \beta^{(n,m)} [\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi]_x + \mathcal{O}(h^{N+1}) , \quad (4.70)$$

où $\beta^{(n,m)} := -\sum_{i \in \Delta_A} \alpha_i T_i^{(n,m)}$ avec $\alpha_A = -1$ et $\Delta_A = (\Delta \cup \{A\}) \cap \Omega_+$. Le deuxième terme de (4.70) est construit de telle sorte que l'on tienne compte des conditions de saut provenant uniquement des points contenus dans Δ_A , c'est-à-dire les points appartenant au cône de lumière passé de A , point A compris (c'est-à-dire $\Delta \cup \{A\}$) et situés à droite de la trajectoire (c'est-à-dire $(\Delta \cup \{A\}) \cap \Omega_+$).

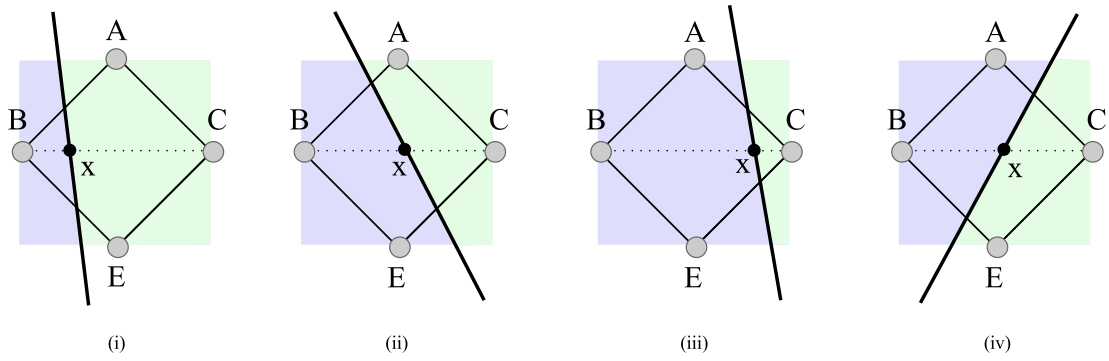


FIGURE 4.5: Dans le cas d'un schéma numérique à l'ordre 1, seuls les points A, B, C et E sont utiles. Dans ce cas la ligne d'univers coupe les cellules selon quatre configurations possibles (i), (ii), (iii) et (iv).

Schéma à l'ordre 1

Reprenons la description de la méthode précédente dans le cas où l'on souhaite s'arrêter à l'ordre 1 dans le développement (4.61) (on prendra $N = 1$). Les développements de Taylor à l'ordre 1 donnent

$$\psi_A^- = \psi_x^- + (\epsilon - \Delta r^*) \partial_{r^*} \psi_x^- + \Delta t \partial_t \psi_x^- + \mathcal{O}(\Delta r^{2*}, \Delta t^2) , \quad (4.71)$$

$$\psi_B^- = \psi_x^- - (2\Delta r^* - \epsilon) \partial_{r^*} \psi_x^- + \mathcal{O}(\Delta r^{2*}) , \quad (4.72)$$

$$\psi_C^- = \psi_x^- + \epsilon \partial_{r^*} \psi_x^- + \mathcal{O}(\Delta r^{2*}) , \quad (4.73)$$

$$\psi_D^- = \psi_x^- + (\epsilon - \Delta r^*) \partial_{r^*} \psi_x^- - \Delta t \partial_t \psi_x^- + \mathcal{O}(\Delta r^{2*}, \Delta t^2) , \quad (4.74)$$

où $\epsilon := r_C^* - r_x^*$. Résoudre $\psi_A^- = \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^-$ revient simplement à inverser le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & \epsilon - \Delta r^* & 0 \\ 1 & \epsilon & 0 \\ 1 & \epsilon - \Delta r^* & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \alpha_C \\ \alpha_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon - \Delta r^* \\ \Delta t \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

On trouve $\alpha_B = \alpha_C = -\alpha_E = 1$. D'après la Fig. 4.5, la trajectoire peut couper la cellule selon quatre configurations possibles. Prenons l'exemple de la configuration (i) de la Fig. 4.5. Dans ce cas $\Delta = \{B, C, E\}$; $\Delta \cap \Omega_- = \{B\}$; $\Delta \cap \Omega_+ = \{C, E\}$ et d'après (4.64)

$$\xi_A = [\psi]_x + (\epsilon - \Delta r^*) [\partial_{r^*} \psi]_x + \Delta t [\partial_t \psi]_x, \quad (4.76)$$

$$\xi_B = [\psi]_x - (2\Delta r^* - \epsilon) [\partial_{r^*} \psi]_x, \quad (4.77)$$

$$\xi_C = [\psi]_x + \epsilon [\partial_{r^*} \psi]_x, \quad (4.78)$$

$$\xi_E = [\psi]_x + (\epsilon - \Delta r^*) [\partial_{r^*} \psi]_x - \Delta t [\partial_t \psi]_x. \quad (4.79)$$

Les seules valeurs de ψ auxquelles on a accès sur la grille sont, dans le cas (i), ψ_B^- , ψ_C^+ , ψ_E^+ et on cherche à calculer ψ_A^+ . La formule (4.69) donne alors

$$\begin{aligned} \psi_A^+ &\approx \psi_B^- + \psi_C^+ - \psi_E^+ + \xi_A - \xi_C + \xi_E, \\ &\approx \psi_B^- + \psi_C^+ - \psi_E^+ + [\psi]_x - (2\Delta r^* - \epsilon) [\partial_{r^*} \psi]_x. \end{aligned} \quad (4.80)$$

En appliquant les équations (4.69) ou (4.68), en utilisant les relations (4.76-4.79) et en changeant les points contenus dans $\Delta \cap \Omega_+$ et $\Delta \cap \Omega_-$ selon les cas (i), (ii), (iii) ou (iv) de la Fig. 4.5 on trouve

$$(i) \quad \psi_A^+ \approx \psi_B^- + \psi_C^+ - \psi_E^+ + [\psi]_x - (2\Delta r^* - \epsilon) [\partial_{r^*} \psi]_x, \quad (4.81)$$

$$(ii) \quad \psi_A^+ \approx \psi_B^- + \psi_C^+ - \psi_E^- + \Delta t [\partial_t \psi]_x - \Delta r^* [\partial_{r^*} \psi]_x, \quad (4.82)$$

$$(iii) \quad \psi_A^- \approx \psi_B^- + \psi_C^+ - \psi_E^- - [\psi]_x - \epsilon [\partial_{r^*} \psi]_x, \quad (4.83)$$

$$(iv) \quad \psi_A^- \approx \psi_B^- + \psi_C^+ - \psi_E^+ - \Delta t [\partial_t \psi]_x - \Delta r^* [\partial_{r^*} \psi]_x. \quad (4.84)$$

Schéma à l'ordre 2

Dans (4.61) on prendra $N = 2$ et on utilisera le fait que $\partial_t^2 \psi_i^\pm = [\partial_{r^*}^2 - V_i] \psi_i^\pm$ pour réduire le nombre de points nécessaires à 5. Les points de grille seront choisis dans le cône passé de A (voir Fig. 4.6) avec $\Delta = \{B, C, D, E, F\}$. Dans ce cas on trouve

$$\alpha_B = 1 - \frac{1}{2} \epsilon h V_x, \quad (4.85)$$

$$\alpha_C = 1 - \frac{1}{2} h (2h - \epsilon) V_x, \quad (4.86)$$

$$\alpha_D = \alpha_F = \frac{1}{8} \epsilon (2h - \epsilon) V_x, \quad (4.87)$$

$$\alpha_E = -1 - \frac{1}{4} \epsilon (2h - \epsilon) V_x, \quad (4.88)$$

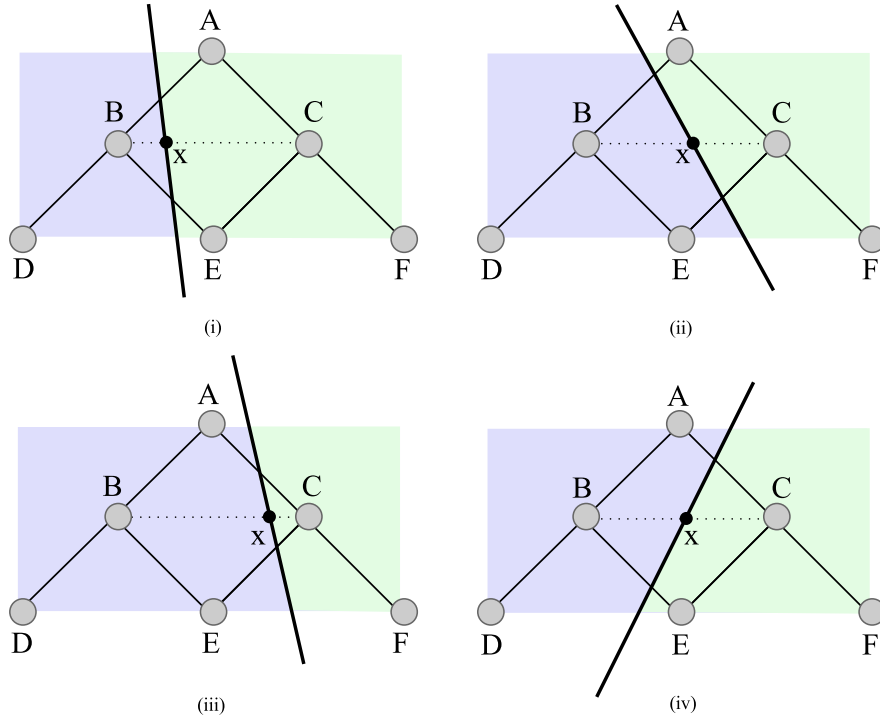


FIGURE 4.6: Dans le cas d'un schéma numérique à l'ordre 2, le stencil doit être étendu par rapport à la Fig. 4.5. Dans ce cas la ligne d'univers coupe les cellules selon quatre configurations possibles (i), (ii), (iii) et (iv).

où $\Delta r^* = \Delta t = h$. Comme au 1er ordre, à l'ordre 2, la trajectoire coupe le stencil selon quatre configurations possibles (voir Fig. 4.6) et les termes de jonction ξ_i prennent la forme suivante

$$\begin{aligned}
 \xi_A &= \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 V_x\right) [\psi]_x + (\epsilon - \Delta r^*) [\partial_{r^*} \psi]_x + \Delta t [\partial_t \psi]_x + \frac{1}{2}(\epsilon - \Delta r^*)^2 [\partial_{r^*}^2 \psi]_x \\
 &\quad + \Delta t(\epsilon - \Delta r^*) [\partial_{r^*} \partial_t \psi]_x, \\
 \xi_B &= [\psi]_x - (2\Delta r^* - \epsilon) [\partial_{r^*} \psi]_x + \frac{1}{2}(2\Delta r^* - \epsilon)^2 [\partial_{r^*}^2 \psi]_x, \\
 \xi_C &= [\psi]_x + \epsilon [\partial_{r^*} \psi]_x + \frac{1}{2}\epsilon^2 [\partial_{r^*}^2 \psi]_x, \\
 \xi_D &= \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 V_x\right) [\psi]_x - (3\Delta r^* - \epsilon) [\partial_{r^*} \psi]_x - \Delta t [\partial_t \psi]_x + \frac{1}{2}(3\Delta r^* - \epsilon)^2 [\partial_{r^*}^2 \psi]_x \\
 &\quad + \Delta t(3\Delta r^* - \epsilon) [\partial_{r^*} \partial_t \psi]_x, \\
 \xi_E &= \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 V_x\right) [\psi]_x + (\epsilon - \Delta r^*) [\partial_{r^*} \psi]_x - \Delta t [\partial_t \psi]_x + \frac{1}{2}(\epsilon - \Delta r^*)^2 [\partial_{r^*}^2 \psi]_x \\
 &\quad - \Delta t(\epsilon - \Delta r^*) [\partial_{r^*} \partial_t \psi]_x, \\
 \xi_F &= \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 V_x\right) [\psi]_x + (\epsilon + \Delta r^*) [\partial_{r^*} \psi]_x - \Delta t [\partial_t \psi]_x + \frac{1}{2}(\epsilon + \Delta r^*)^2 [\partial_{r^*}^2 \psi]_x \\
 &\quad - \Delta t(\epsilon + \Delta r^*) [\partial_{r^*} \partial_t \psi]_x.
 \end{aligned}$$

En appliquant les équations (4.69) ou (4.68), en tenant compte des relations précédentes et en changeant les points contenus dans $\Delta \cap \Omega_+$ et $\Delta \cap \Omega_-$ selon les cas (i), (ii), (iii) ou (iv) de la Fig. 4.6 on obtient les relations suivantes exploitables numériquement

$$(i) \psi_A^+ \approx \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm - (\alpha_C \xi_C + \alpha_E \xi_E + \alpha_F \xi_F - \xi_A) , \quad (4.89)$$

$$(ii) \psi_A^+ \approx \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm - (\alpha_C \xi_C + \alpha_F \xi_F - \xi_A) , \quad (4.90)$$

$$(iii) \psi_A^- \approx \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm - (\alpha_C \xi_C + \alpha_F \xi_F) , \quad (4.91)$$

$$(iv) \psi_A^- \approx \sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm - (\alpha_C \xi_C + \alpha_E \xi_E + \alpha_F \xi_F) , \quad (4.92)$$

avec $\sum_{i \in \Delta} \alpha_i \psi_i^\pm = \alpha_B \psi_B^- + \alpha_C \psi_C^+ + \alpha_D \psi_D^- + \alpha_E \psi_E^+ + \alpha_F \psi_F^+$.

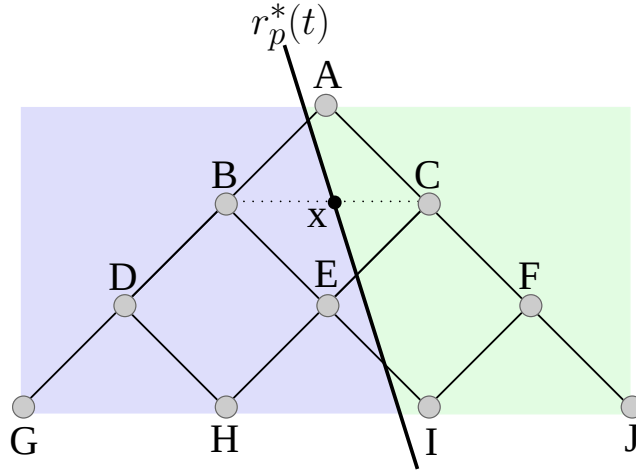


FIGURE 4.7: Dans le cas d'un schéma numérique à l'ordre 4, le stencil doit encore être étendu par rapport à la Fig. 4.6. Dans le cas d'orbites génériques la ligne d'univers coupe maintenant le stencil selon huit configurations possibles. Seule une configuration est représentée ici.

Schéma à l'ordre 4

L'extension à l'ordre 4 est triviale [162] si ce n'est que les expressions des conditions de saut et les coefficients α_i deviennent très complexes et qu'il est nécessaire d'étendre le nombre de points présents dans le stencil à 10 (voir Fig. 4.7). On a ainsi $\Delta = \{B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$. Cette précision à l'ordre 4 sera utile lorsque nous traiterons le cas des orbites radiales et que nous aurons besoin d'avoir une précision nécessaire pour calculer la dérivée troisième de la fonction ψ à la position de la particule. Dans le cas des orbites planes on ne s'intéresse qu'à la forme d'onde et aux flux émis, en théorie un schéma d'ordre 2 est suffisant.

Si l'on combine ce schéma avec le schéma donné en (4.59), au court du calcul, la trajectoire peut couper le domaine délimité par les points de Δ mais ne pas couper nécessairement la cellule $ABCD$. Par conséquent, la relation (4.58) n'est pas utilisable. On préférera prendre un développement de Taylor à $t = t_0$ constant. Si $r_p^*(t_0) > r_C^*$ on prendra

$$\Psi_0 = \frac{1}{16} \left[+5V(r_0^* - h)\psi(t_0, r_0^* - h) + 15V(r_0^* - 3h)\psi(t_0, r_0^* - 3h) \right. \\ \left. - 5V(r_0^* - 5h)\psi(t_0, r_0^* - 5h) + V(r_0^* - 7h)\psi(t_0, r_0^* - 7h) \right] + \mathcal{O}(h^4), \quad (4.93)$$

et si $r_p^*(t_0) < r_B^*$ on prendra

$$\Psi_0 = \frac{1}{16} \left[+5V(r_0^* + h)\psi(t_0, r_0^* + h) + 15V(r_0^* + 3h)\psi(t_0, r_0^* + 3h) \right. \\ \left. - 5V(r_0^* + 5h)\psi(t_0, r_0^* + 5h) + V(r_0^* + 7h)\psi(t_0, r_0^* + 7h) \right] + \mathcal{O}(h^4). \quad (4.94)$$

4.4 Résultats : Cas homogène

Avant de traiter le cas de l'équation excitée par la source, il peut être intéressant de considérer l'équation de RWZ homogène de façon à étudier la réponse du trou noir à une perturbation initiale de type impulsion gaussienne. En général, l'émission gravitationnelle d'un trou noir est caractérisée par un motif spécifique (dépendant des paramètres de masse, charge et moment angulaire) que l'on appelle *modes quasi-normaux* (MQN). Il s'agit de modes de vibrations de l'espace-temps sinusoïdaux qui s'amortissent rapidement et qui sont indépendants de la nature du processus qui leur a donné naissance. La fréquence fondamentale des MQN est proportionnelle à la masse du trou noir et le temps d'amortissement inversement proportionnel à la masse. Par exemple pour un trou noir stellaire de masse $10M_\odot$, le temps d'amortissement est d'environ 55ms pour une fréquence fondamentale à $f = 1.2\text{kHz}$ qui est dans la bande de fréquence des détecteurs terrestres d'OG actuels. Les premiers travaux concernant le calcul des MQN remontent à Chandrasekhar et Detweiler [163]. On peut citer également plusieurs contributions numériques ou analytiques [164–166].

4.4.1 Modes quasi-normaux

On prendra comme condition initiale un paquet d'ondes gaussien centré en r_0^* tel que

$$\psi^\ell(t = 0, r^*) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(r^* - r_0^*)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (4.95)$$

Pour résoudre numériquement l'équation homogène $[\partial_{r^*}^2 - \partial_t^2 - V^\ell]\psi^\ell = 0$ on utilisera le schéma donné en (4.54) avec un observateur placé en $r_{\text{obs}}^* = 500M$ et on utilisera la

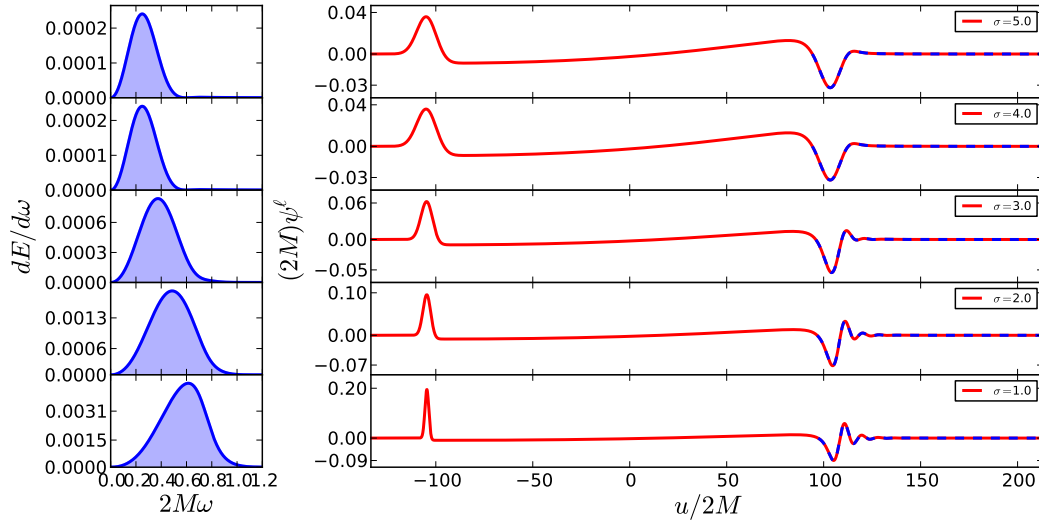


FIGURE 4.8: Etude de la sensibilité des formes d'ondes à la dispersion du paquet d'ondes initial pour $r_0 = 200M$. Pour les premières valeurs de σ la quasi totalité du paquet d'ondes est réfléchi par le potentiel V^ℓ , le coefficient de transmission est très faible et seules les basses fréquences du contenu initial sont présentes dans le spectre (à gauche). Pour $\sigma \lesssim 4$, le spectre semble se décaler vers les hautes fréquences et les formes d'ondes font apparaître les oscillations quasi-normales, signe que le contenu initial a interagi avec le potentiel et qu'une partie des ondes a été transmise. Ainsi, plus σ diminue et plus le spectre sera piqué autour de la fréquence du MQN. Le spectre a été calculé à partir du signal en pointillé pour ne prendre que la contribution des MQN.

formule (3.105) pour le calcul du spectre du mode paire $\ell = 2$. Dans un premier temps étudions la sensibilité des MQN à la dispersion du paquet d'onde. En effet afin d'avoir une bonne représentation du phénomène d'émission de MQN il est nécessaire d'avoir une condition initiale appropriée.

Dans la Fig. 4.8 on fixe r_0 à $200M$ (c'est-à-dire $r_0^* \approx 209M$) et on calcule la forme d'onde à la position de l'observateur puis le spectre du signal représentatif de l'émission de MQN pour différentes valeurs du paramètre σ . Les formes d'ondes sont données en fonction du temps retardé $u = t - r^*$ c'est pourquoi le premier pic à $u \approx -200M$ correspond à une partie de la donnée initiale qui s'est propagée librement en direction de l'observateur. Par contre à partir de $u = 0$ jusqu'à $u \approx 200M$ il s'agit de la partie de la donnée initiale qui s'est propagée en direction du trou noir, qui a interagi avec le potentiel et qui sera associée au contenu basse fréquence du spectre. Enfin, pour $t > 200M$ il s'agit du signal réfléchi par la barrière potentielle sous la forme de MQN rangés dans la partie haute fréquence du spectre. On verra que pour des valeurs de r_0 plus petites, la limite entre ces différentes régions peut être ambiguës et conduit à des interférences.

Pour les premières valeurs de σ la quasi totalité du paquet d'ondes est réfléchi par le potentiel V^ℓ , le coefficient de transmission est très faible et seules les basses fréquences du contenu initial sont présentes dans le spectre. Pour $\sigma \lesssim 4$, le spectre semble se décaler

vers les hautes fréquences et les formes d'ondes font apparaître les oscillations quasi-normales, signe que le contenu initial a interagi avec le potentiel et qu'une partie des ondes a été transmise. En réalité les basses fréquences sont toujours là mais la quantité d'énergie reliée à la fréquence fondamentale des MQN y est bien plus importante. Ainsi, plus σ diminue et plus le spectre sera piqué autour de la fréquence du MQN. Sur la Fig. 4.9 on observe concrètement la dynamique des ondes durant leur transport sur la grille espace-temps. Sur la Fig. 4.9a on a le cas d'une réflexion sans transmission du paquet d'ondes initial lorsque celui-ci est très dispersé ($\sigma = 5.0$). Sur la Fig. 4.9b on observe au contraire une transmission du paquet d'ondes lorsque celui-ci atteint le point de grille où le potentiel V^ℓ est maximum (à environ $r \approx 3.1M$ ou $r^* \approx 1.9M$) puis le transport des oscillations en direction de l'observateur.

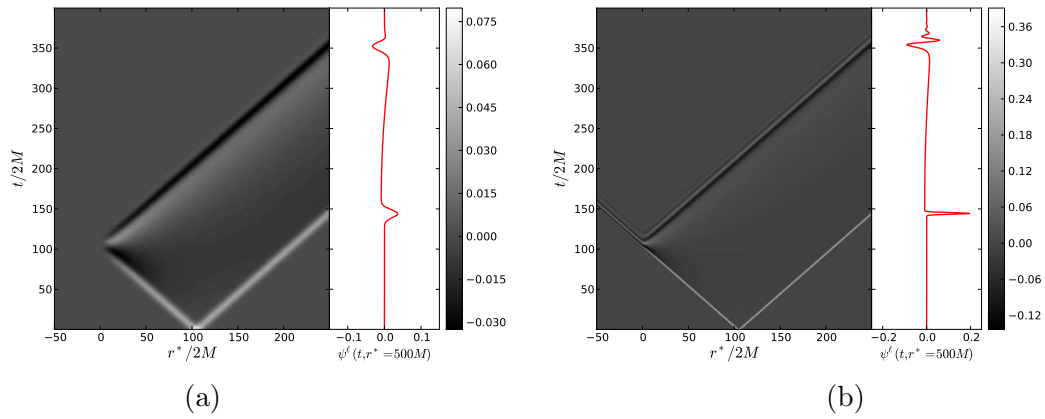


FIGURE 4.9: Evolution d'un paquet d'ondes ψ^ℓ sur la grille (t, r^*) pour $\ell = 2$ et pour deux valeurs de σ . Les valeurs de gris codent l'amplitude de ψ^ℓ sur la grille. On a fixé $r_0/2M = 100$ c'est pourquoi, dans les deux cas (a) et (b), pour $t/2M < 100$, le paquet d'ondes initial se propage librement dans une région où la valeur du potentiel est faible. En (a) $\sigma = 5$, le coefficient de transmission du potentiel est faible et la totalité des ondes sont réfléchies en direction de l'observateur. En (b) $\sigma = 1$, il y a transmission d'une partie des ondes en direction du trou noir (partie $(t > 200M, r^* < 1.9M)$) et une réflexion en direction de l'observateur sous la forme de modes quasi normaux (partie $(t > 200M, r^* > 1.9M)$). La courbe rouge correspond au signal enregistré par l'observateur en $r_{\text{obs}}^* = 500M$.

Dans ce qui suit on fixera $\sigma = 1.0$ qui permet un coefficient de transmission du potentiel suffisant pour permettre l'excitation du trou noir sous la forme de MQN. On observera dans la Fig. 4.10 la sensibilité du spectre du signal à la localisation initiale du paquet d'onde. Pour de grandes valeurs de r_0 telles que $r_0 = 200M, 100M$, le spectre a la forme d'un pic étalé sur une large bande fréquentielle. Toutes ces fréquences proviennent du chevauchement entre les hautes fréquences de MQN et les basses fréquences venant de l'interaction du potentiel avec les ondes initiales lors de leur transport en direction du trou noir. L'allure du spectre peut devenir plus complexe lorsque l'on diminue r_0 . Par exemple pour $r_0 = 40M, 30M$ ou $20M$ le spectre peut présenter plusieurs pics que l'on interprète comme l'interférence des ondes initiales tombant sur le trou noir et celles

qui sont en même temps réfléchies par le potentiel. La structure multi-piquée disparaît quand on diminue encore r_0 car on est trop proche de l'horizon pour que les interférences aient une contribution significative dans le spectre qui est essentiellement dominé par la fréquence fondamentale des MQN.

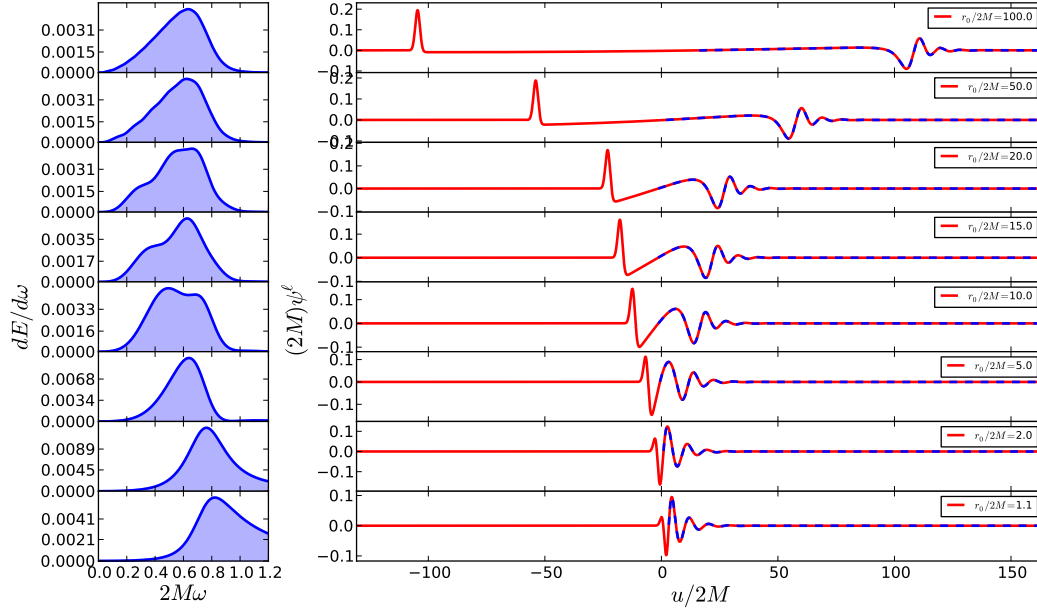


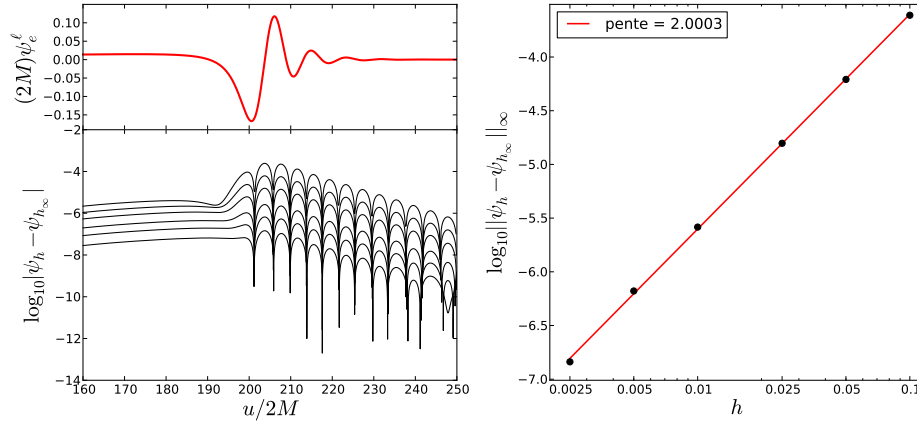
FIGURE 4.10: Etude de la sensibilité des formes d'ondes (à droite) à la position initiale du paquet d'ondes pour $\sigma = 1$. La structure du spectre (à gauche) évolue pour différentes valeurs de r_0 . L'allure multi-piquée pour $r_0 = 40M$ à $r_0 = 20M$ est interprétée comme l'interférence des ondes initiales tombant sur le trou noir et celles qui sont en même temps réfléchies par le potentiel. Pour des r_0 proches de l'horizon, le spectre est essentiellement dominé par la fréquence fondamentale des MQN. Les spectres ont été calculés à partir du signal en pointillé (débutant au troisième zéro) pour ne prendre que la contribution des MQN.

Même si le contexte présenté ici est simple, on retrouvera les différentes phases du rayonnement gravitationnel (contenu initial, interférences, MQN) pour des systèmes complexes où les perturbations sont produites par une particule en mouvement autour du trou noir ou en chute libre sur ce dernier.

4.4.2 Convergence numérique

La convergence numérique à l'ordre 2 prétendue par l'expression (4.54) est vérifiée dans la Fig. 4.11 où on a calculé la fonction d'onde pour une perturbation initialement localisée en $r_0 = 200M$, pour $\sigma = 1$, $\ell = 2$ et pour différentes valeurs du pas d'intégration $h = \Delta t = \Delta r^*$. La pente donnée par le logarithme de la norme infinie $\|\psi_h^\ell - \psi_{h_\infty}^\ell\|_\infty = \sup |\psi_h^\ell - \psi_{h_\infty}^\ell|$ confirme l'ordre 2 pour $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.0025$, $h_\infty = 0.001$

et où ψ_h^ℓ indique que l'on a calculé la fonction d'onde ψ^ℓ avec un pas d'intégration égal à h .



4.5 Résultats : Orbites radiales

Il s'agit ici de tester le code pour une source non nulle et de donner un premier contexte physique aux OG générées par un trou noir perturbé. Les perturbations seront produites par une particule ponctuelle en chute libre sur le trou noir en suivant une trajectoire purement radiale. De nombreuses études sur le rayonnement gravitationnel de ce genre de systèmes ont été menées depuis les années 70. Les premiers ont été Davis, Ruffini, Press et Price [167] qui ont considéré, dans le domaine fréquentiel, le rayonnement émis par une particule initialement au repos en chute libre depuis l'infini sur un trou noir de Schwarzschild. Plus tard, Ferrari et Ruffini [168] reprendront, toujours dans le domaine fréquentiel, le même système mais en conférant une vitesse initiale à la particule depuis l'infini. Les premiers à avoir envisagé et résolu le problème de la chute de la particule initialement au repos depuis une distance finie au trou noir sont Lousto et Price en 1997 dans une série de papiers [144][158][159] où ils donnent et détaillent une technique numérique pour traiter la source ponctuelle dans le domaine temporel. Martel et Poisson [160] reprendront cinq ans plus tard ce même problème en proposant une famille de conditions initiales à un paramètre, toutes solutions de la contrainte hamiltonienne et permettant d'étudier l'influence des conditions initiales sur les formes d'ondes et leurs spectres en énergie.

Dans cette section, nous reproduirons, à partir de notre schéma numérique basé sur les conditions de saut de la fonction d'onde, les formes d'ondes générées par une particule en chute radiale initialement au repos depuis une distance donnée au trou noir. La formulation explicite des conditions de saut pour la chute radiale est donnée à l'annexe B. On rappelle l'équation (3.25) de la géodésique d'une particule en chute libre dans un trou noir de Schwarzschild

$$\left(\frac{dr_p}{d\tau}\right)^2 = \mathcal{E}^2 - f(r_p) , \quad (4.96)$$

où $\mathcal{E} = f(r_p)u^t$. On peut supposer sans perte de généralité que $\theta_p(\tau) = \phi_p(\tau) = 0$ et donc que $m = 0 \forall \ell$. Par conséquent, la nouvelle symétrie du problème simplifie généreusement le tenseur de perturbation $h_{\alpha\beta}$ (puisque seuls les modes paires subsistent; $h_{\alpha\beta}^{(o)\ell m} = 0 \forall (\ell, m)$) qui devient

$$h_{\alpha\beta} = \sum_{\ell} h_{\alpha\beta}^{(e)\ell} = \sum_{\ell} \begin{pmatrix} f(r)H_2^{\ell 0} & H_1^{\ell 0} & 0 & 0 \\ H_1^{\ell 0} & f(r)^{-1}H_2^{\ell 0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K^{\ell 0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{\ell 0} , \quad (4.97)$$

où d'après (3.66g) on a $H_0^{\ell 0} = H_2^{\ell 0} \forall \ell$. Le terme source (3.88) de l'équation d'onde est réécrit tel que les fonctions $\mathcal{F}_e^{\ell m}$ et $\mathcal{G}_e^{\ell m}$ sont maintenant

$$\mathcal{F}_e^{\ell 0}(t) = 8\pi m_0 \frac{r_p f(r_p)^3}{\mathcal{E}(\lambda + 1)(\lambda r_p + 3M)} Y^{\ell 0\star} , \quad (4.98)$$

$$\mathcal{G}_e^{\ell 0}(t) = -8\pi m_0 \frac{f(r_p)^2}{r_p} \frac{[r_p^2 \lambda(\lambda + 1) + 6Mr_p(\lambda + 1 - E^2) + 3M^2]}{\mathcal{E}(\lambda + 1)(\lambda r_p + 3M)^2} Y^{\ell 0\star} , \quad (4.99)$$

où les HSS perdent leur degré de liberté azimutal et sont uniquement dépendants de ℓ suivant la simple expression

$$Y^{\ell 0\star} = Y^{\ell 0} = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} . \quad (4.100)$$

Ici dans le cas que nous considérons, la fonctions d'onde conserve sa nature discontinue à la position de la particule mais les perturbations, elles, sont $\mathcal{C}^0$ en $r = r_p(t_p)$ [132][169][157].

4.5.1 Conditions initiales

Dans le cas homogène traité précédemment, on a vu que lorsque le paquet d'ondes est initialement proche de l'horizon, le contenu initial en OG pouvait interférer avec les ondes réfléchies par le potentiel. Il est donc crucial, au moins pour de faibles valeurs de r_0 d'initier l'algorithme à partir d'une hypersurface qui contient et représente convenablement l'histoire passée de la particule à l'instant $t = 0$. Il existe de nombreuses possibilités pour imposer des conditions initiales mais l'une des grandes difficultés est de trouver une solution initiale qui représente une situation physique. Ce genre de solutions doivent normalement satisfaire les contraintes hamiltonienne et de moment angulaire (3.66a) des équations du champ ce qui n'est pas forcément atteint de façon unique. Deux solutions très étudiées sont la solution de type Misner [170] et la solution de Brill-Lindquist [171][172] qui représentent la métrique de deux trous noirs momentanément au repos et qui subissent une collision frontale. Dans le cas de deux trous noirs de masses m_0 et M tels que $m_0 \ll M$, la solution de Brill-Lindquist peut être développée en puissance de m_0/M pour donner une solution adaptée au problème de condition initiale en théorie perturbative. Dans notre cas nous avons

$$\begin{aligned} H_1^{\ell 0}(t=0, r) &= 0, \\ H_2^{\ell 0}(t=0, r) &= K^{\ell 0}(t=0, r) = 2m_0 \frac{\sqrt{4\pi/(2\ell+1)}}{(1+M/2R_0)(1+M/2R)} \frac{R_{<}^\ell}{R_{>}^{\ell+1}}, \end{aligned} \quad (4.101)$$

où $R = r(1 + \sqrt{f(r)})^2/4$ est la *coordonnée isotrope*, $R_{<} = \min(R, R_0)$, $R_{>} = \max(R, R_0)$ et r_0 est la position initiale de la particule. Cette solution examinée par Lousto et Price [158] est intéressante dans le sens où la relation $H_2^{\ell 0} = K^{\ell 0}$, à l'instant initial, satisfait bien sûr les équations de contrainte mais conduit aussi à une métrique conformément plate, c'est-à-dire qu'à $t = 0$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 + K^{\ell 0} Y^{\ell 0}\right) \left[f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2\right], \\ &= \left(1 + K^{\ell 0} Y^{\ell 0}\right) \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^4 \left[dR^2 + R^2 d\Omega^2\right]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Martel et Poisson [160] mettent en avant cette propriété pour étendre la solution (4.101) à une famille de solution paramétrée telle que $H_2^{\ell 0}(t=0, r) = \alpha K^{\ell 0}(t=0, r)$. Le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre qui permet ainsi de mesurer la quantité de rayonnement gravitationnel présent sur l'hypersurface initiale.

Dans notre cas présent on gardera $\alpha = 1$ et en injectant la relation (4.101) dans

$$\psi^{\ell 0}(t=0, r) = \frac{r}{\lambda+1} \left[K^{\ell 0} + \frac{rf(r)}{\lambda r + 3M} \left(H_2^{\ell 0} - r \frac{\partial K^{\ell 0}}{\partial r} \right) \right], \quad (4.103)$$

on obtient une condition initiale pour la fonction d'onde à laquelle on ajoute la condition $d\psi^\ell/dt|_{t=0} = 0$ provenant du fait que la particule a une vitesse initiale nulle. Cependant numériquement on verra qu'il est parfois possible de s'affranchir d'imposer une condition initiale exacte au problème pourvu que le rayonnement initial non physique ne soit pas causalement lié au signal d'intérêt. Comme on l'a fait pour le cas homogène, pour de grandes valeurs de r_0 le spectre ne montrait pas de signes d'interférences et c'est typiquement la technique que nous adopterons dans le cas d'orbites périodiques. En effet, après quelques périodes, le rayonnement initial est dispersé à l'infini et n'interfère plus avec les OG physiques.

4.5.2 Formes d'ondes

Les formes d'ondes sont toujours évaluées en $r_{\text{obs}}^* = 500M$ et tracées en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ comme dans le cas homogène et le pas d'intégration est pris tel que $\Delta r^* = \Delta t = h = 0.02M$. Les formes d'ondes et leurs spectres respectifs sont tracés dans la Fig 4.12 pour différentes valeurs de r_0 . Sur les graphes de droite on remarque directement l'excitation des MQN sous leur forme typique sinusoïdale atténuée. La phase qui précède les MQN est plus complexe et est responsable de la structure bosselée dans la partie basse fréquence ($2M\omega < 0.7$) des spectres pour $r_0 = 40M, 20M, 14M, 10M$. En effet le spectre subit une modulation en fréquence qui semble dépendre de la position initiale de la particule au repos et donc du contenu initial en OG.

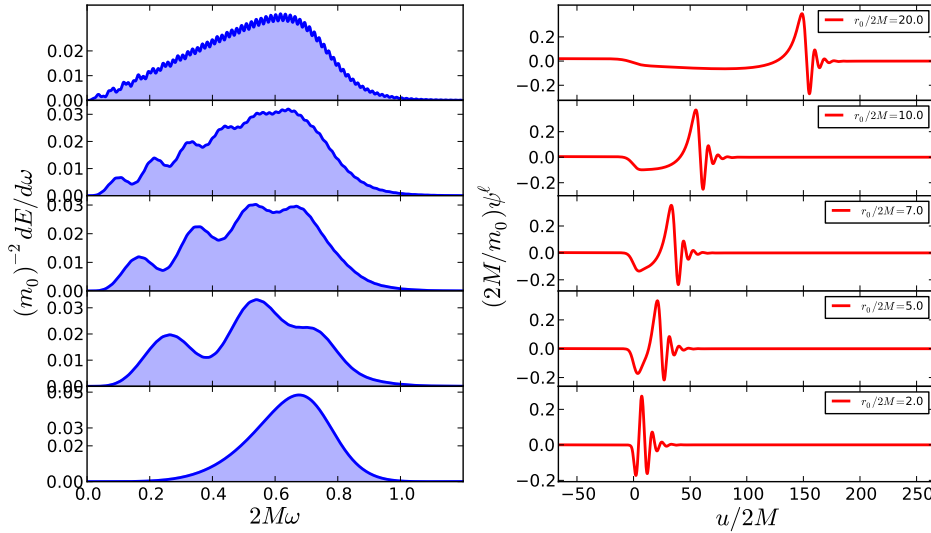


FIGURE 4.12: Formes d'ondes et spectres en énergie associés pour $\ell = 2$ et pour différentes valeurs de la position initiale r_0 la particule.

Cette modulation est due à l'interférence entre trois contributions distinctes : (i) Les OG contenues dans l'hypersurface initiale, (ii) les OG générées durant l'accélération de la particule, c'est-à-dire le rayonnement quadrupolaire émis par la particule en mouvement

et (iii) les OG produites par le trou noir sous la forme d'oscillations quasi-normales lors du plongeon de la particule, c'est-à-dire les ondes réfléchies par le potentiel.

Pour de grandes valeurs de r_0 , comme le cas $r_0 = 40M$ ou $r_0 = 20M$, on distingue correctement les différentes phases d'action des ondes (i), (ii) et (iii). Les ondes de type (i) sont contenues dans la région $u \in [-r_0^*, +r_0^*]$, puis durant le temps de chute (qui dure environ $300M$ dans le cas $r_0 = 40M$) le rayonnement de type (ii) correspond à la descente de la forme d'onde dans la partie négative jusqu'à ce que la particule soit absorbée par le trou noir. Celui-ci se désexcite sous la forme d'ondes de type (iii) qui correspond, bien entendu à la dernière partie oscillante de la forme d'onde. Ainsi dans ce cas de figure l'allure du contenu initial est peu important car il n'influence pas l'amplitude des MQN (voir Fig. 4.14).

Pour des valeurs intermédiaires de r_0 , telles que $r_0 = 10M$ ou $r_0 = 14M$, la distinction entre (i), (ii) et (iii) est moins visible, leurs contributions se mélangent et les structures d'interférence deviennent plus sévères sur les spectres. Lousto et Price [144] ont montré que l'espacement typique des bosses présentes sur les spectres étaient en fait inversement proportionnel à la durée durant laquelle les ondes de type (ii) sont générées.

Les interférences sont moins présentes pour de petits r_0 comme $r_0 = 4M$ ou $r_0 = 2.2M$ (voir Fig. 4.13b) car pour une position initiale très proche, voire à l'intérieur de la barrière potentielle, le rayonnement d'accélération (type (ii)) est négligeable puisque la particule est absorbée par le trou noir presque instantanément. Les conditions initiales (type (i)) déforment l'horizon qui devient dynamique et commence à rayonner ses fréquences quasi-normales sous la forme d'un spectre piqué autour de la fréquence fondamentale. Martel et Poisson [160] ont montré que dans ce cas, contrairement au cas des grands r_0 , le contenu en OG initial est primordial puisque c'est lui qui va déterminer l'amplitude des MQN et qu'en particulier, dans une gamme de positions initiales proche de l'horizon ($2M < r_0 < 10M$), la relation initiale $H_2^{\ell 0}(t=0, r) = \alpha K^{\ell 0}(t=0, r)$ pour laquelle l'énergie rayonnée est minimisée n'est pas forcément celle satisfaisant $\alpha = 1$. L'amplitude des formes d'ondes et les spectres présents dans les Figs. 4.12, 4.13a et 4.13b sont en bon accord avec les graphes donnés par les travaux précédents [144][158] déjà cités. De même dans le tableaux 4.1 on donne l'énergie rayonnée à travers les modes $\ell = 2, 3, 4, 5$ pour différentes valeurs de r_0 . Ces valeurs sont également en accord à moins de 1% avec les valeurs présentes dans le tableau I de [144].

On a vu que pour de grandes valeurs de r_0 , la forme de la condition initiale n'influence pas l'amplitude des MQN de la forme d'onde prise en $r_{\text{obs}}^* = 500M$, cependant on verra dans le chapitre suivant que les données initiales de type Brill-Lindquist induisent des oscillations non physiques de la force retardée extraite à la position de la particule au début de la chute. Pour résoudre ce problème on utilisera une condition initiale alternative de type *trajectoire symétrique* pour laquelle $\psi^\ell(t=0, r) = 0$ et où la trajectoire est symétrique. C'est-à-dire que la particule démarre proche de l'horizon en $r = r_i M$ avec

$r_0/2M$	ℓ	$(2M/m_0^2)E_\ell$	$r_0/2M$	ℓ	$(2M/m_0^2)E_\ell$
10	2	$1.57 \cdot 10^{-2}$	2	2	$1.49 \cdot 10^{-2}$
	3	$1.83 \cdot 10^{-3}$		3	$2.21 \cdot 10^{-3}$
	4	$2.41 \cdot 10^{-4}$		4	$3.56 \cdot 10^{-4}$
	5	$3.43 \cdot 10^{-5}$		5	$1.23 \cdot 10^{-4}$
5	2	$1.43 \cdot 10^{-2}$	1.1	2	$1.03 \cdot 10^{-3}$
	3	$1.62 \cdot 10^{-3}$		3	$2.07 \cdot 10^{-4}$
	4	$2.20 \cdot 10^{-4}$		4	$4.99 \cdot 10^{-5}$
	5	$3.68 \cdot 10^{-5}$		5	$1.50 \cdot 10^{-5}$

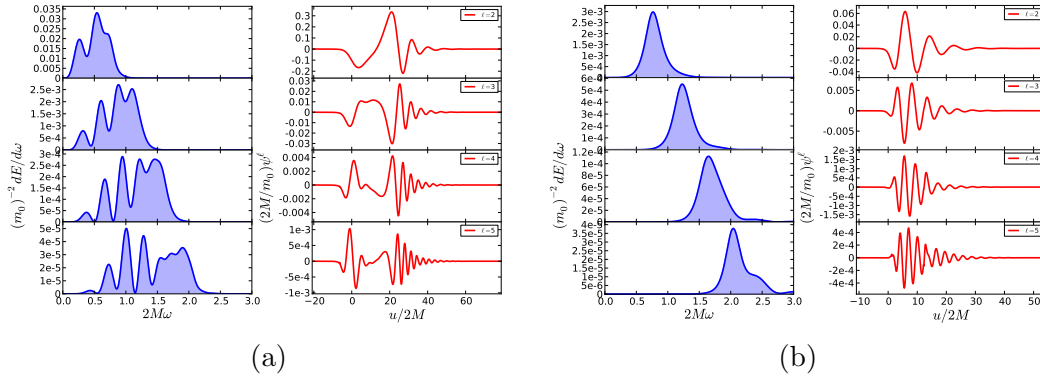
TABLE 4.1: Energie rayonnée pour une chute libre depuis r_0 .

FIGURE 4.13: Formes d'ondes et spectres associés pour les modes $\ell = 2, 3, 4, 5$ pour $r_0 = 10M$ en (a) et $r_0 = 2.2M$ en (b). Dans le cas (a) il y a une forte interférence entre les OG initiales, les OG d'accélération et les MQN donnant un spectre de plus en plus complexe et modulé quand on augmente ℓ . Dans le cas (b), les OG initiales sont localisées à l'intérieur de la barrière potentielle, c'est pourquoi le rayonnement d'accélération est négligeable puisque la particule est absorbée par le trou noir presque instantanément. Les OG initiales déforment l'horizon qui devient dynamique et commence à rayonner ses fréquences quasi-normales en formant un spectre piqué autour de la fréquence fondamentale des MQN qui augmente avec ℓ .

une vitesse initiale positive v_i , atteint "l'altitude" maximale en $r = r_0$ avec une vitesse nulle puis entame sa chute en direction du trou noir. La phase de montée laisse le temps aux OG initiales de se disperser à l'infini et n'interagissent pas avec les OG générées à la position de la particule durant sa chute. Puisque la trajectoire suivie par une particule en chute libre depuis r_0 est un fragment de la géodésique d'une particule partant de r_i avec une vitesse v_i alors les trois quantités r_i, v_i, r_0 sont reliées d'après (3.25) par

$$v_i = \frac{f(r_i)}{\mathcal{E}} \sqrt{\mathcal{E}^2 - f(r_i)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \sqrt{f(r_0)}. \quad (4.104)$$

Dans la Fig. 4.14 on vérifie pour $r_i = 2.2M$ et $r_0 = 40M$ que la condition initiale nulle pour une trajectoire symétrique (courbe et spectre en rouge) reconstruit bien le spectre et le rayonnement gravitationnel donné pour une condition initiale de type Brill-Lindquist (courbe et spectre en noire).

L'algorithme mis en place à partir des conditions de saut nous a permis de traiter

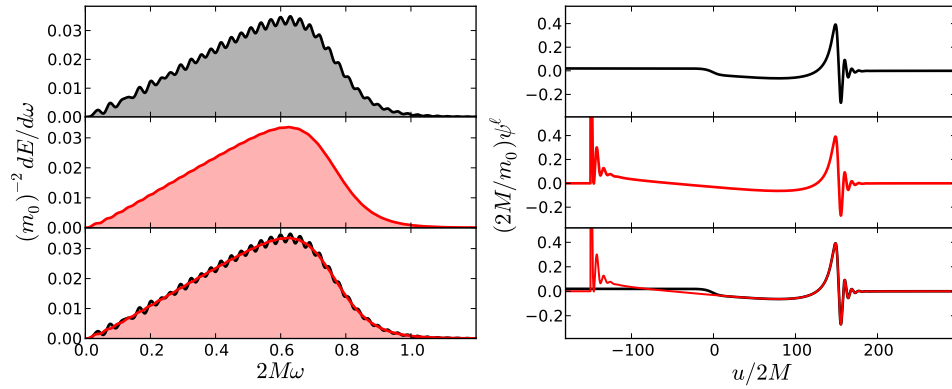


FIGURE 4.14: Forme d'onde et son spectre associé pour $\ell = 2$ et $r_0 = 40M$ dans le cas de deux conditions initiales différentes. L'une est de type Brill-Lindquist (spectre et courbe en noir) l'autre est une condition initiale nulle où la particule suit une trajectoire symétrique en partant de $r_i = 2.2M$ avec une vitesse initiale $v_i \approx 0.086$, arrive en $r_0 = 40M$ avec une vitesse nulle puis entame sa chute vers le trou noir.

l'équation de RWZ dans sa version non homogène où la source représente une particule ponctuelle initialement au repos en chute libre depuis une position finie. L'étude de la sensibilité des formes d'ondes à la position initiale et aux conditions initiales nous a donné l'occasion de mettre en évidence les phénomènes d'interférences des OG durant la chute de la particule et durant leur propagation et nous avons pu confronter nos résultats à la littérature existante.

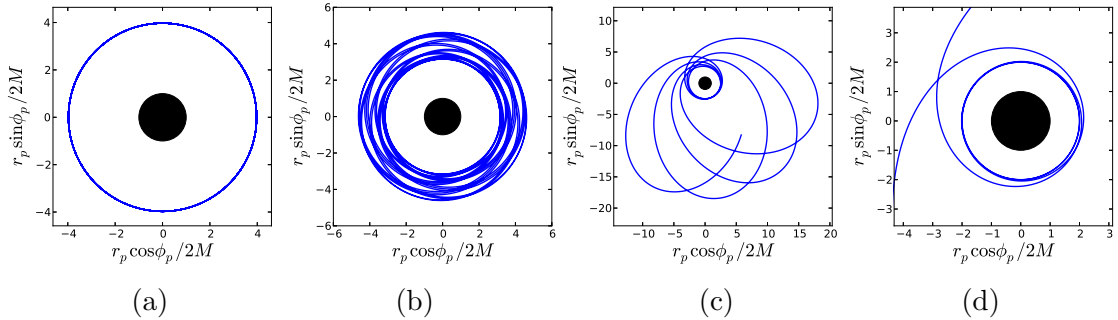


FIGURE 4.15: Quatre orbites étudiées dans cette section. L'orbite (a) correspond aux paramètres orbitaux $(e, p) = (0, 7.9456)$, l'orbite (b) est associée à $(e, p) = (0.188917, 7.50478)$, l'orbite (c) correspond à $(e, p) = (0.764124, 8.75455)$ et l'orbite (d) à $(e, p) = (1.0, 8.001)$.

4.6 Résultats : Orbites planes

On considérera ici les orbites données par le système d'équations différentielles (3.20) paramétrées par e et p . Nous explorerons trois type d'orbites : les orbites circulaires ($e = 0$), elliptiques ($0 < e < 1$) et de type zoom-whirl ($e \rightarrow (p-6)/2$). Les formes d'ondes

pour ces orbites ont déjà été étudiées dans la littérature, cette base constituera donc un bon moyen de tester notre code pour lequel la formulation explicite des conditions de saut (donnée en annexe A) devient très complexe. Les premières formes d'ondes dans le domaine temporel pour des orbites planes ont été produites par Martel [145] qui a été suivi par Sopuerta et Laguna [152] à l'aide d'une reformulation faible de l'équation de RWZ puis Field et al. [156]. De nombreuses autres contributions dans le domaine fréquentiel peuvent être mentionnées comme les travaux de Poisson [173] et Cutler et al. [174] ou de Fujita [175]. Barack et Lousto [176] ont aussi retrouvé les flux en énergie et moment angulaire à partir de la métrique formulée dans la jauge harmonique. Nagar et al. [177] confrontent le formalisme EOB au cadre perturbatif et fournissent des résultats auxquels nous pourrions nous référer tout comme les travaux de Hopper et Evans qui travaillent dans le domaine fréquentiel et reconstruisent, par transformation de jauge vers la jauge harmonique, les perturbations de la métrique dans le domaine temporel. Nous confronterons ainsi nos résultats à certains de ces travaux qui regroupent des techniques numériques très variées. Nous constaterons et vérifierons également le fait qu'imposer un terme source singulier à l'équation de RWZ nous fait perdre la convergence théorique attendue, phénomène également bien connu de la littérature [152][153].

4.6.1 Conditions initiales

Numériquement l'observateur sera placé en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ et la grille est toujours telle que $r_{\text{min}}^* \leq r^* \leq r_{\text{max}}^*$ où $r_{\text{max}}^* = -r_{\text{min}}^* = 3000M$. Les orbites seront calculées en insérant les jeu de paramètres orbitaux (e, p) dans (3.20) avec les conditions initiales $\phi_p(t=0) = \chi(t=0) = 0$ c'est-à-dire que la particule est placée au périastre à l'instant initial. On rappelle que les conditions initiales pour la fonction d'onde doivent contenir et représenter le rayonnement émis par la particule durant toute son histoire passé jusqu'à la date du début de notre simulation numérique. Avoir à traiter des orbites périodiques va simplifier le problème des conditions initiales dans le sens où on prendra une condition initiale nulle pour la fonction d'onde.

$$\psi_{e/o}^{\ell m}(t=0, r) = \frac{d\psi_{e/o}^{\ell m}}{dt}(t=0, r) = 0 . \quad (4.105)$$

En effet les OG non physiques générées par nos mauvaises conditions initiales n'influencent que les premiers instants de l'évolution. Les OG initiales sont rapidement dispersées à l'infini et on considère qu'après cette phase transitoire, qui peut durer une ou deux périodes, le signal est purement formé par le rayonnement émis par la particule comme le montre la Fig. 4.16.

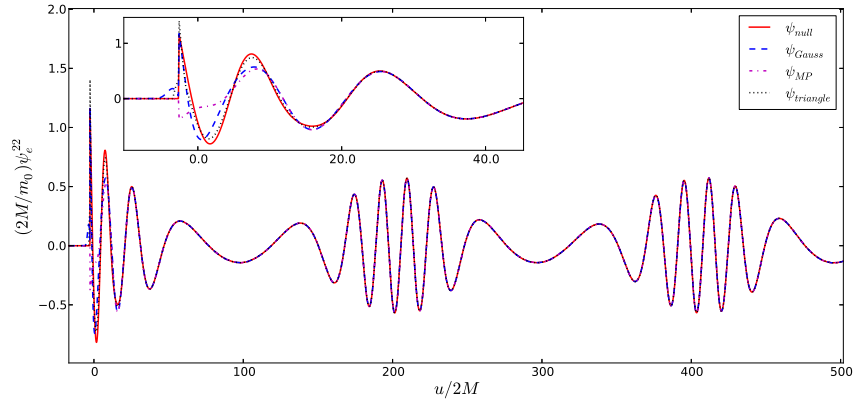


FIGURE 4.16: La fonction $\psi_e^{\ell m}$ pour le mode quadrupolaire $(\ell, m) = (2, 2)$ et les paramètres orbitaux $(e, p) = (0.5, 7.2)$ est tracée pour différentes données initiales : ψ_{null} est une condition initiale nulle, ψ_{Gauss} une condition initiale gaussienne, ψ_{MP} une condition initiale de type Martel et Poisson [160] et $\psi_{triangle}$ une condition initiale triangulaire. En imposant une condition initiale non physique dans le cas d'une orbite liée, la forme d'onde est polluée durant les premières périodes par des oscillations non physiques qui se dispersent à l'infini. Une fois les oscillations initiales dissipées, la forme d'onde converge vers la forme d'onde physique générée par le système.

4.6.2 Orbites circulaires

Pour une orbite circulaire, la particule tourne autour du trou noir central à la coordonnée $r_p(t) = pM$ avec une fréquence angulaire $\Omega_\phi = \dot{\phi}_p = M^{-1}p^{-3/2}$. Chaque mode ℓm de la fonction d'onde oscille à la fréquence $m\Omega_\phi$ comme on le vérifie sur la Fig. 4.17. Contrairement au cas radial, où seule la fonction paire est non nulle et purement réelle, dans le cas plus générique, la source est de nature complexe, il est donc nécessaire de calculer séparément la partie réelle et la partie imaginaire pour la fonction paire $\psi_e^{\ell m}$ et la fonction impaire $\psi_o^{\ell m}$. Dans la Fig. 4.18 on donne un exemple de forme d'onde complexe pour une orbite circulaire à $p = 7.9456$ où le rayonnement est modulé par la phase de l'orbite produisant un signal purement sinusoïdale à la fréquence orbitale pour le mode $(\ell, m) = (2, 1)$ et la fréquence double de la fréquence orbitale pour le mode $(\ell, m) = (2, 2)$.

Le calcul des flux en énergie et en moment angulaire est fait à partir des relations (3.103) et (3.104) pour chaque mode de perturbation ℓm . Un indice ∞ ou H sur les quantités $\mathring{E}^{\infty, H}, \mathring{L}^{\infty, H}$ signifie que l'on extrait les flux respectivement à l'infini ou à l'horizon. La reconstruction du flux total est obtenue en utilisant la symétrie par rapport au nombre m

$$\mathring{E}_{\ell, -m} = \mathring{E}_{\ell, m} , \quad (4.106)$$

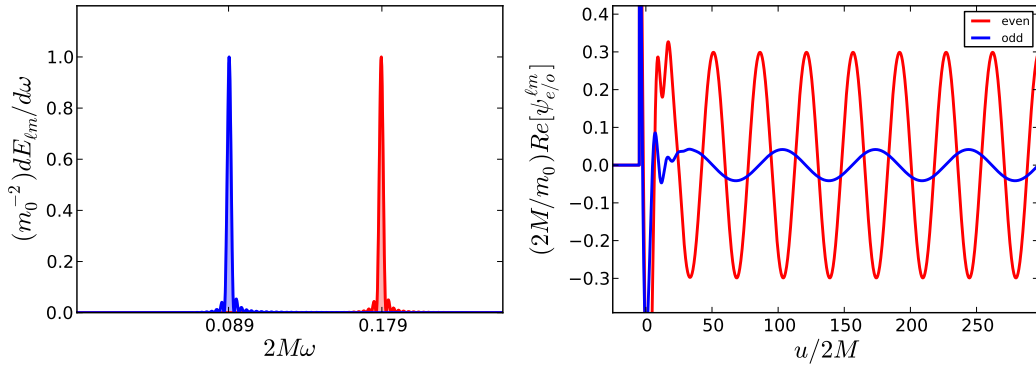


FIGURE 4.17: La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (en rouge) oscille à deux fois la fréquence orbitale et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (en bleu) oscille à la fréquence orbitale $\Omega_\phi = M^{-1}p^{-3/2}$ avec $p = 7.9456$.

tel que

$$\dot{E} = \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \dot{E}_{\ell m} = \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \left[\dot{E}_{\ell 0} + 2 \sum_{m=1}^{\ell} \dot{E}_{\ell m} \right]. \quad (4.107)$$

De la même façon on a

$$\dot{L} = 2 \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \sum_{m=1}^{\ell} \dot{L}_{\ell m}, \quad (4.108)$$

où $\ell_{\max}$ est choisi tel que

$$\max \left(\frac{\dot{E}_{\ell_{\max}}}{\dot{E}}, \frac{\dot{L}_{\ell_{\max}}}{\dot{L}} \right) \leq 1\%. \quad (4.109)$$

De plus, puisque la particule suit un mouvement équatorial on peut éviter le calcul de certains modes car si $\ell + m$ est paire, alors $\psi_o^{\ell m} = 0$, tandis que si $\ell + m$ est impaire, alors $\psi_e^{\ell m} = 0$.

Dans les Tabs. 4.2 et 4.3, le flux en énergie $\dot{E}_{\ell m}^\infty$ et en moment angulaire $\dot{L}_{\ell m}$ (en unités M/m_0^2) extrait à l'infini (en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$) sont calculés pour différents modes ($\ell \leq \ell_{\max} = 5, m \leq \ell$) et un semi-latus rectum $p = 7.9456$. Pour $\dot{E}_{\ell m}^\infty$, nos résultats sont comparés à ceux de Poisson [178], Martel [145], Barack and Lousto [176] et Sopuerta et Laguna [152]. Les valeurs totales sont cohérentes à mieux de 0.1%. Pour $\dot{L}_{\ell m}^\infty$, nos résultats sont confrontés à ceux de Poisson [178], Martel [145] et Sopuerta et Laguna [152] avec un accord à mieux de 0.2%. Pour atteindre cette précision on utilise une extrapolation de Richardson sur la valeur des flux. En pratique, les flux sont calculés pour une série de pas d'intégration $h/2^n$ avec $n = 0, 1, 2, 3$ et $h/2M = 0.1$ puis sont

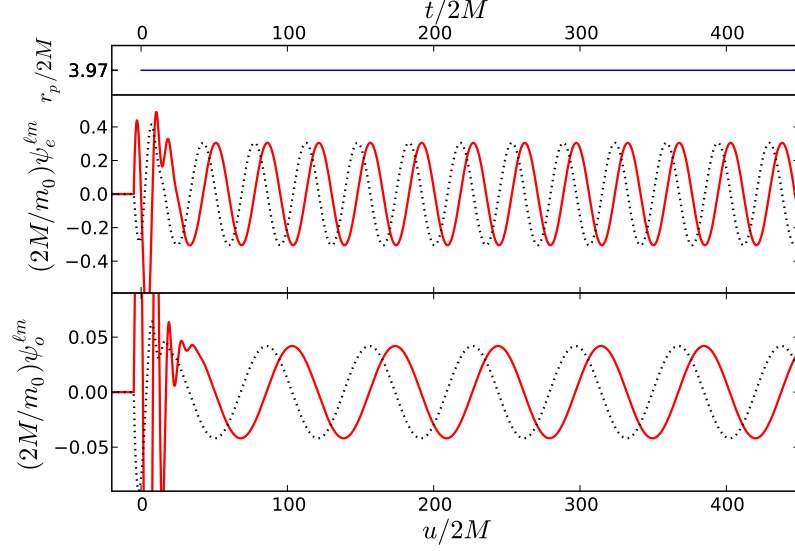


FIGURE 4.18: La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (haut) et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (bas) sont obtenus en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ pour une orbite circulaire de paramètres orbitaux $(e, p) = (0, 7.9456)$. La partie réelle est tracée en trait plein rouge et la partie imaginaire en pointillés noirs. Le déphasage entre les deux parties réelle et imaginaire est de $\Delta u = \frac{\pi}{2} m^{-1} \Omega^{-1} = \frac{\pi}{2} m^{-1} M p^{3/2}$. La courbe bleue dans le graphe du haut correspond à la trajectoire de la particule en fonction du temps coordonné et l'observateur est situé en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$.

extrapolés en utilisant le premier terme de la formule de récurrence de Richardson.

ℓ	m	$\mathring{E}_{\ell m}^\infty$	$\mathring{E}_{\ell m}^\infty$ [178]	$\mathring{E}_{\ell m}^\infty$ [145]	$\mathring{E}_{\ell m}^\infty$ [176]	$\mathring{E}_{\ell m}^\infty$ [152]
2	1	$8.1680.10^{-07}$	$8.1633.10^{-07}$ [0.06%]	$8.1623.10^{-07}$ [0.07%]	$8.1654.10^{-07}$ [0.03%]	$8.1662.10^{-07}$ [0.02%]
2	2	$1.7064.10^{-04}$	$1.7063.10^{-04}$ [0.006%]	$1.7051.10^{-04}$ [0.07%]	$1.7061.10^{-04}$ [0.02%]	$1.7064.10^{-04}$ [$< 0.001\%$]
3	1	$2.1757.10^{-09}$	$2.1731.10^{-09}$ [0.1%]	$2.1741.10^{-09}$ [0.07%]	$2.1734.10^{-09}$ [0.1%]	$2.1732.10^{-09}$ [0.1%]
3	2	$2.5203.10^{-07}$	$2.5199.10^{-07}$ [0.02%]	$2.5164.10^{-07}$ [0.2%]	$2.5207.10^{-07}$ [0.01%]	$2.5204.10^{-07}$ [0.002%]
3	3	$2.5471.10^{-05}$	$2.5471.10^{-05}$ [0.001%]	$2.5432.10^{-05}$ [0.2%]	$2.5479.10^{-05}$ [0.03%]	$2.5475.10^{-05}$ [0.02%]
4	1	$8.4124.10^{-13}$	$8.3956.10^{-13}$ [0.2%]	$8.3507.10^{-13}$ [0.7%]	$8.3982.10^{-13}$ [0.2%]	$8.4055.10^{-13}$ [0.08%]
4	2	$2.5099.10^{-09}$	$2.5091.10^{-09}$ [0.03%]	$2.4986.10^{-09}$ [0.5%]	$2.5099.10^{-09}$ [0.002%]	$2.5099.10^{-09}$ [0.002%]
4	3	$5.7750.10^{-08}$	$5.7751.10^{-08}$ [0.001%]	$5.7464.10^{-08}$ [0.5%]	$5.7759.10^{-08}$ [0.02%]	$5.7765.10^{-08}$ [0.03%]
4	4	$4.7251.10^{-06}$	$4.7256.10^{-06}$ [0.01%]	$4.7080.10^{-06}$ [0.4%]	$4.7284.10^{-06}$ [0.07%]	$4.7270.10^{-06}$ [0.04%]
5	1	$1.2632.10^{-15}$	$1.2594.10^{-15}$ [0.3%]	$1.2544.10^{-15}$ [0.7%]	$1.2598.10^{-15}$ [0.3%]	$1.2607.10^{-15}$ [0.2%]
5	2	$2.7910.10^{-12}$	$2.7896.10^{-12}$ [0.05%]	$2.7587.10^{-12}$ [1.2%]	$2.7877.10^{-12}$ [0.1%]	$2.7909.10^{-12}$ [0.003%]
5	3	$1.0933.10^{-09}$	$1.0933.10^{-09}$ [$< 0.001\%$]	$1.0830.10^{-09}$ [0.9%]	$1.0934.10^{-09}$ [0.009%]	$1.0936.10^{-09}$ [0.03%]
5	4	$1.2322.10^{-08}$	$1.2324.10^{-08}$ [0.01%]	$1.2193.10^{-08}$ [1.1%]	$1.2319.10^{-08}$ [0.03%]	$1.2329.10^{-08}$ [0.05%]
5	5	$9.4544.10^{-07}$	$9.4563.10^{-07}$ [0.02%]	$9.3835.10^{-07}$ [0.8%]	$9.4623.10^{-07}$ [0.08%]	$9.4616.10^{-07}$ [0.08%]
Tot.		$2.0293.10^{-04}$	$2.0292.10^{-04}$ [0.005%]	$2.0273.10^{-04}$ [0.096%]	$2.0291.10^{-04}$ [0.009%]	$2.0293.10^{-04}$ [$< 0.001\%$]

TABLE 4.2: Orbite circulaire $(e, p) = (0, 7.9456)$. Le flux d'énergie $\mathring{E}_{\ell m}^\infty$ (en unités M^2/m_0^2) pris en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ est calculé pour différents modes ℓm avec $\ell \leq 5$. La première colonne liste nos résultats, la seconde ceux de Poisson [178], la troisième ceux de Martel [145], la quatrième ceux de Barack et Lousto [176], et la dernière ceux de Sopena et Laguna [152]. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.

ℓ	m	$\mathring{L}_{\ell m}^\infty$	$\mathring{L}_{\ell m}^\infty$ [178]	$\mathring{L}_{\ell m}^\infty$ [145]	$\mathring{L}_{\ell m}^\infty$ [152]
2	1	1.8294.10 ⁻⁰⁵	1.8283.10 ⁻⁰⁵ [0.06%]	1.8270.10 ⁻⁰⁵ [0.1%]	1.8289.10 ⁻⁰⁵ [0.03%]
2	2	3.8218.10 ⁻⁰³	3.8215.10 ⁻⁰³ [0.009%]	3.8164.10 ⁻⁰³ [0.1%]	3.8219.10 ⁻⁰³ [0.002%]
3	1	4.8729.10 ⁻⁰⁸	4.8670.10 ⁻⁰⁸ [0.1%]	4.8684.10 ⁻⁰⁸ [0.09%]	4.8675.10 ⁻⁰⁸ [0.1%]
3	2	5.6448.10 ⁻⁰⁶	5.6439.10 ⁻⁰⁶ [0.02%]	5.6262.10 ⁻⁰⁶ [0.3%]	5.6450.10 ⁻⁰⁶ [0.003%]
3	3	5.7048.10 ⁻⁰⁴	5.7048.10 ⁻⁰⁴ [<0.001%]	5.6878.10 ⁻⁰⁴ [0.2%]	5.7057.10 ⁻⁰⁴ [0.02%]
4	1	1.8841.10 ⁻¹¹	1.8803.10 ⁻¹¹ [0.2%]	1.8692.10 ⁻¹¹ [0.8%]	1.8825.10 ⁻¹¹ [0.09%]
4	2	5.6213.10 ⁻⁰⁸	5.6195.10 ⁻⁰⁸ [0.03%]	5.5926.10 ⁻⁰⁸ [0.5%]	5.6215.10 ⁻⁰⁸ [0.003%]
4	3	1.2934.10 ⁻⁰⁶	1.2934.10 ⁻⁰⁶ [0.003%]	1.2933.10 ⁻⁰⁶ [0.01%]	1.2937.10 ⁻⁰⁶ [0.02%]
4	4	1.0583.10 ⁻⁰⁴	1.0584.10 ⁻⁰⁴ [0.01%]	1.0518.10 ⁻⁰⁴ [0.6%]	1.0586.10 ⁻⁰⁴ [0.03%]
5	1	2.8293.10 ⁻¹⁴	2.8206.10 ⁻¹⁴ [0.3%]	2.8090.10 ⁻¹⁴ [0.7%]	2.8237.10 ⁻¹⁴ [0.2%]
5	2	6.2509.10 ⁻¹¹	6.2479.10 ⁻¹¹ [0.05%]	6.1679.10 ⁻¹¹ [1.3%]	6.2509.10 ⁻¹¹ [0.001%]
5	3	2.4487.10 ⁻⁰⁸	2.4486.10 ⁻⁰⁸ [0.002%]	2.4227.10 ⁻⁰⁸ [1.1%]	2.4494.10 ⁻⁰⁸ [0.03%]
5	4	2.7598.10 ⁻⁰⁷	2.7603.10 ⁻⁰⁷ [0.02%]	2.7114.10 ⁻⁰⁷ [1.8%]	2.7613.10 ⁻⁰⁷ [0.05%]
5	5	2.1175.10 ⁻⁰⁵	2.1179.10 ⁻⁰⁵ [0.02%]	2.0933.10 ⁻⁰⁵ [1.2%]	2.1190.10 ⁻⁰⁵ [0.07%]
Total		4.5449.10 ⁻⁰³	4.5446.10 ⁻⁰³ [0.007%]	4.5369.10 ⁻⁰³ [0.2%]	4.5452.10 ⁻⁰³ [0.005%]

TABLE 4.3: Orbite circulaire $(e, p) = (0, 7.9456)$. Le flux de moment angulaire $\mathring{L}_{\ell m}^\infty$ (en unités M/m_0^2) pris en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ est calculé pour différents modes ℓm avec $\ell \leq 5$. La première colonne liste nos résultats, la seconde ceux de Poisson [178], la troisième ceux de Martel [145] et la dernière ceux de Sopuerta et Laguna [152]. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.

4.6.3 Orbites elliptiques

Pour les orbites elliptiques, les formes d'onde sont plus complexes (voir l'exemple tracé sur Fig. 4.19 pour $(e, p) = (0.188917, 7.50478)$) et les flux ne sont plus constants car modulés par la distance de la particule au trou noir. On considère alors les flux en énergie et en moment angulaire moyennés sur plusieurs périodes orbitales

$$\langle \mathring{E} \rangle = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathring{E} dt, \quad (4.110)$$

$$\langle \mathring{L} \rangle = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathring{L} dt, \quad (4.111)$$

où $T_2 - T_1 = kT_{\text{orb}}$, $k \geq 5$, $k \in \mathbb{N}$.

Dans le Tab. 4.4 le flux d'énergie $\mathring{E}^\infty$ à l'infini (en unités M^2/m_0^2) et le flux de moment angulaire $\mathring{L}^\infty$ (en unité M/m_0^2) sont moyennés sur 5 périodes pour deux orbites différentes $(e, p) = (0.188917, 7.50498)$ et $(e, p) = (0.764124, 8.75455)$ déjà étudiées dans la littérature. Nos résultats sont ici comparés à ceux de Cutler et al. [126], Martel [145] et Sopuerta et Laguna [152]. $\mathring{E}^\infty$ et $\mathring{L}^\infty$ diffèrent au maximum de 2% avec ceux de Martel mais sont plus proches des autres références à mieux de 0.1%.

De même, dans le Tab. 4.5 on utilise les données de Hopper et Evans [154] qui les ont eux même comparés aux calculs de Fujita [175]. On compare ici nos résultats sur

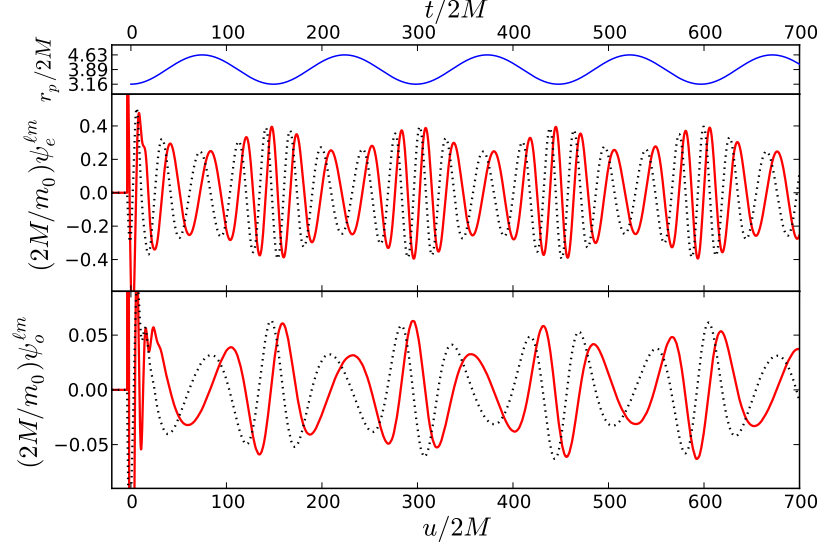


FIGURE 4.19: La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (haut) et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (bas) sont obtenus en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ pour une orbite circulaire de paramètres orbitaux $(e, p) = (0.188917, 7.50478)$. La partie réelle est tracée en trait plein rouge et la partie imaginaire en pointillés noirs. La courbe bleue dans le graphe du haut correspond à la trajectoire de la particule en fonction du temps coordonné et l'observateur est situé en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$.

nos flux d'énergie et de moment angulaire à l'infini moyennés pour chaque mode ℓ sur 5 périodes. Chaque mode ℓ est obtenu en sommant toutes les contributions venant des modes m à ℓ fixé. Nos résultats semblent être en accord avec ceux de Hopper et Evans [154] à mieux de 0.01%.

e	p	$\langle \dot{E}^\infty \rangle$	$\langle \dot{E}^\infty \rangle$ [126]	$\langle \dot{E}^\infty \rangle$ [145]	$\langle \dot{E}^\infty \rangle$ [152]
0.188917	7.50478	$3.1617 \cdot 10^{-04}$	$3.1680 \cdot 10^{-04}$ [0.2%]	$3.1770 \cdot 10^{-04}$ [0.5%]	$3.1640 \cdot 10^{-04}$ [0.07%]
0.764124	8.75455	$2.1026 \cdot 10^{-04}$	$2.1008 \cdot 10^{-04}$ [0.09%]	$2.1484 \cdot 10^{-04}$ [2.1%]	$2.1004 \cdot 10^{-04}$ [0.1%]
e	p	$\langle \dot{L}^\infty \rangle$	$\langle \dot{L}^\infty \rangle$ [126]	$\langle \dot{L}^\infty \rangle$ [145]	$\langle \dot{L}^\infty \rangle$ [152]
0.188917	7.50478	$5.9550 \cdot 10^{-03}$	$5.9656 \cdot 10^{-03}$ [0.2%]	$5.9329 \cdot 10^{-03}$ [0.4%]	$5.9555 \cdot 10^{-03}$ [0.008%]
0.764124	8.75455	$2.7531 \cdot 10^{-03}$	$2.7503 \cdot 10^{-03}$ [0.1%]	$2.7932 \cdot 10^{-03}$ [1.4%]	$2.7505 \cdot 10^{-03}$ [0.09%]

TABLE 4.4: Cas de deux orbites elliptiques $(e, p)=(0.188917, 7.50478)$ et $(0.764124, 8.75455)$. Le flux d'énergie (en unités M^2/m_0^2) et de moment angulaire $\dot{L}_{\ell m}^\infty$ (en unités M/m_0^2) pris en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ sont moyennés sur 5 périodes orbitales et calculés pour différents modes ℓm avec $\ell \leq 5$. Nos résultats (troisième colonne) sont comparés à ceux de Cutler et al. [126], Martel [145] et Sopuerta et Laguna [152]. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.

4.6.4 Orbites paraboliques et zoom-whirl

Dans le cas des orbites paraboliques, $e = 1$ et pour rester dans le domaine de stabilité (voir Fig. 3.2), p doit être supérieur à 8. Le péri-astre est localisé en $r_{\text{min}} = Mp/2$ et lorsque p approche sa valeur minimale $p \approx 8$ la particule suit une trajectoire quasi-circulaire autour du trou noir pendant plusieurs cycles puis est éjectée à l'infini. C'est

ℓ	$\langle \dot{E}_\ell^\infty \rangle$	$\langle \dot{E}_\ell^\infty \rangle$ [154]	$\langle \dot{L}_\ell^\infty \rangle$	$\langle \dot{L}_\ell^\infty \rangle$ [154]
2	$1.571333.10^{-04}$	$1.57133846.10^{-04}$ [0.0004%]	$2.092406.10^{-03}$	$2.09219582.10^{-03}$ [0.01%]
3	$3.776283.10^{-05}$	$3.77696202.10^{-05}$ [0.02%]	$4.745961.10^{-04}$	$4.74663748.10^{-04}$ [0.01%]
4	$1.149375.10^{-05}$	$1.14987458.10^{-05}$ [0.04%]	$1.399210.10^{-04}$	$1.39978027.10^{-04}$ [0.04%]
5	$3.837470.10^{-06}$	$3.84046353.10^{-06}$ [0.08%]	$4.575322.10^{-05}$	$4.57886526.10^{-05}$ [0.08%]
Total	$2.102273.10^{-04}$	$2.10242676.10^{-04}$ [0.007%]	$2.752676.10^{-03}$	$2.75262625.10^{-03}$ [0.002%]

TABLE 4.5: Orbite elliptique (0.764124, 8.75455). On compare ici nos résultats (deuxième et quatrième colonnes) à ceux de Hopper et Evans [154] sur les flux d'énergie (en unités M^2/m_0^2) et de moment angulaire (en unités M/m_0^2) à l'infini moyennés pour chaque mode ℓ sur 5 périodes. Chaque mode ℓ est obtenu en sommant toutes les contributions venant des modes m tel que $(\dot{E}_\ell^\infty, \dot{L}_\ell^\infty) = \sum_{m=-\ell}^\ell (\dot{E}_{\ell m}^\infty, \dot{L}_{\ell m}^\infty)$. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.

ce qu'on appelle l'effet de zoom-whirl. Les OG émises durant ce mouvement ont ainsi l'allure d'un paquet d'ondes localisé sur une durée pendant laquelle la particule effectue des révolutions autour du trou noir. Ce comportement disparaît quand p devient grand ($p > 6 + 2e$). Sur la Fig. 4.20 on donne un exemple de zoom-whirl pour $p = 8.001$. L'énergie et le moment angulaire sont obtenus en intégrant respectivement le flux en énergie et en moment angulaire sur un laps de temps symétrique autour du paquet d'OG tel que

$$E = \int_{T_1}^{T_2} \dot{E} dt, \quad (4.112)$$

$$L = \int_{T_1}^{T_2} \dot{L} dt, \quad (4.113)$$

où $(T_1 + T_2)/2 = T_{\min}$ est la date à laquelle $r_p = r_{\min} = pM/2$. En pratique, pour le calcul se rapportant au signal de la Fig. 4.20 on intégrera entre $T_1 = T_{\min} - 600M$ et $T_2 = T_{\min} + 600M$.

Dans le Tab. 4.6, on a listé les valeurs d'énergie et de moment angulaire rayonnés à l'infini ($r_{\text{obs}}^* = 1500M$) et absorbés à l'horizon ($r_{\text{obs}}^* = -1500M$) pour deux valeurs de p proches de la separatrix. Ces résultats sont en accord avec les données de Martel [145] et Sopuerta et Laguna [152].

p	E^∞	E^∞ [145]	E^∞ [152]	E^H	E^H [145]	E^H [152]
8.00001	3.5820	3.6703[2.4%]	3.5603[0.6%]	$1.8900.10^{-1}$	$1.8876.10^{-1}$ [0.1%]	$1.8884.10^{-1}$ [0.008%]
8.001	2.2350	2.2809[2.0%]	2.2212[0.6%]	$1.1349.10^{-1}$	$1.1260.10^{-1}$ [0.8%]	$1.1339.10^{-1}$ [0.09%]
p	L^∞	L^∞ [145]	L^∞ [152]	L^H	L^H [145]	L^H [152]
8.00001	$2.9596.10^1$	$3.0133.10^1$ [1.8%]	$2.9415.10^1$ [0.6%]	1.5137	1.5208[0.5%]	1.5112[0.2%]
8.001	$1.8813.10^1$	$1.9088.10^1$ [1.4%]	$1.8704.10^1$ [0.6%]	$9.0964.10^{-1}$	$9.1166.10^{-1}$ [0.2%]	$9.0783.10^{-1}$ [0.2%]

TABLE 4.6: Orbites paraboliques ($e = 1, p \approx 8$). Les valeurs d'énergie (en unité M/m_0^2) et de moment angulaire (en unité m_0^{-2}) rayonnés à l'infini et absorbés à l'horizon sont calculées pour deux valeurs de p proches de la separatrix puis comparées aux données de Martel [145] et de Sopuerta et Laguna [152].

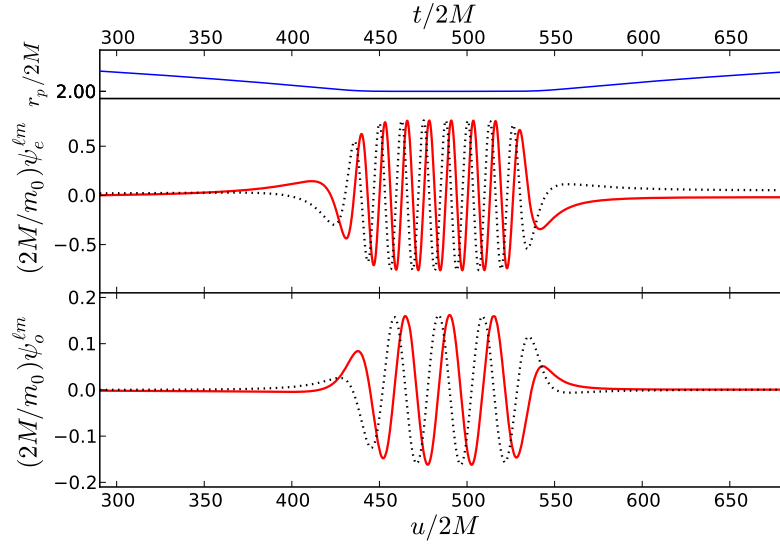


FIGURE 4.20: La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (haut) et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (bas) sont obtenus en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ pour une orbite parabolique de paramètres orbitaux $(e, p) = (1.0, 8.001)$. La partie réelle est tracée en trait plein rouge et la partie imaginaire en pointillés noirs. La courbe bleue dans le graphe du haut correspond à la trajectoire parabolique de la particule en fonction du temps coordonné. La particule entame une trajectoire quasi-circulaire entre $t/2M \approx 450M$ et $t/2M \approx 530M$ puis est éjectée à l'infini. On est dans un cas d'orbite de type zoom-whirl. L'observateur est situé en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$.

4.6.5 Convergence numérique

Pour le cas homogène on a montré que le code respectait bien la convergence théorique à l'ordre 2. Dans le cas non homogène, la source est non nulle et de surcroît singulière à la position de la particule. Le fait d'inclure une particule ponctuelle dans le système induit la présence d'un δ de Dirac dans l'expression de la source qui rend discontinue la dérivée de la solution mais aussi la présence d'une dérivée de δ qui rend la solution elle-même discontinue le long de la trajectoire. Cette dernière contribution est trop sévère pour préserver la convergence de l'algorithme à l'ordre 2. Dans la Fig. 4.21 on a calculé la fonction d'onde pour le mode $(\ell, m) = (2, 2)$ prise en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ pour différentes valeurs du pas d'intégration $h = \Delta t = \Delta r^*$. La pente donnée par le logarithme de la norme infinie $\|\psi_h^\ell - \psi_{h_\infty}^\ell\|_\infty = \sup |\psi_h^\ell - \psi_{h_\infty}^\ell|$ pour $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$ et $h_\infty = 0.0025$ montre que la convergence tombe en dessous de l'ordre 2 pour les raisons que l'on vient d'évoquer. Ce phénomène reste vrai également dans le cas du schéma à l'ordre 4 pour lequel la particule ponctuelle fait tomber la convergence de notre algorithme à 3 dans le cas de la chute radiale.

4.7 Discussion

Dans ce chapitre nous avons construit un schéma numérique qui permet de traiter l'équation de RWZ avec un terme source singulier qui engendre une discontinuité de

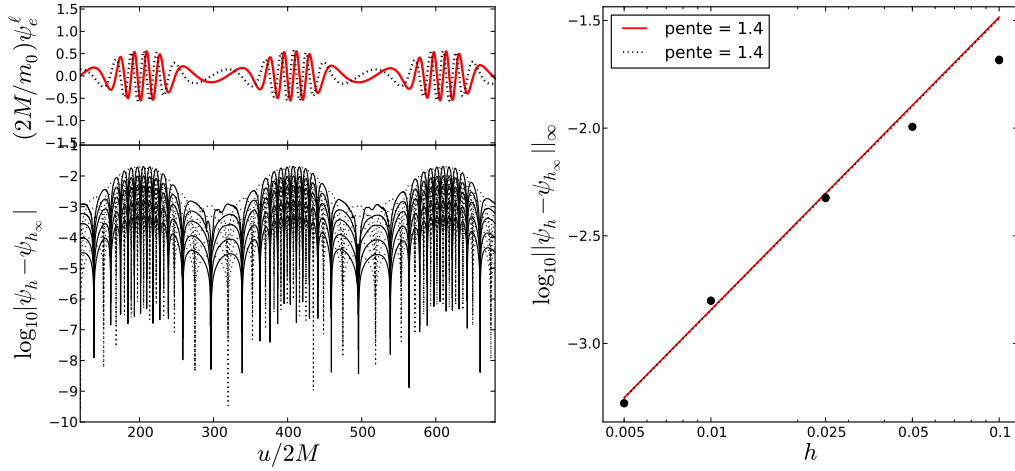


FIGURE 4.21: Test de convergence appliqué au calcul de la forme d'onde quadrupolaire $(\ell, m) = (2, 2)$ (en haut à gauche) pour une orbite elliptique $(e, p) = (0.5, 7.2)$. En bas à gauche on a tracé la différence $\psi_h^\ell - \psi_{h_\infty}^\ell$ en valeur absolue et à droite la norme infinie de cette quantité pour différentes valeurs du pas d'intégration $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$ avec $h_\infty = 0.0025$. La pente indique un ordre de convergence inférieur à 2 à cause de la présence de la particule compacte. Les courbes en trait plein sont relatives à la partie réelle de la forme d'ondes et les courbes tracées en pointillés sont relatives à la partie imaginaire de la forme d'onde.

solution supportée par la trajectoire. Les formes d'ondes et les spectres ont été comparés aux données déjà présentes dans la littérature avec un bon accord pour le cas homogène, pour les orbites radiales et les orbites planes. Les caractéristiques de ce schéma peuvent être résumées en plusieurs points

- Pour les cellules du domaine numérique jamais traversées par la particule on utilise un schéma numérique aux différences finies classique dont l'algorithme est donné en (4.54) à l'ordre 2 et en (4.59) à l'ordre 4.
- Les cellules coupées par la trajectoire subissent un traitement spécial car la solution y est discontinue. La formule générale pour obtenir la valeur de la fonction d'onde au sommet de la cellule est donnée par l'équation (4.70) constituée de deux parties. La première partie est une simple combinaison linéaire des ψ_i que nous avons en mémoire et la deuxième partie est un terme purement analytique construit à partir des conditions de saut de la fonction d'onde pris en un point de la trajectoire contenu dans la cellule.
- Grâce aux conditions de saut, la particule ponctuelle est gérée comme une vraie distribution et aucune fonction analytique n'est requise pour approximer δ et δ' comme cela peut être fait dans certains travaux [177].
- L'adaptation du schéma à un ordre de précision plus élevé est assez simple et nécessite seulement le calcul des conditions de saut à l'ordre désiré.

- La portabilité de cet algorithme à des problèmes différents du rayonnement gravitationnel est également possible. Nous avons, par exemple, traité le problème d'une particule rayonnant un champ scalaire (seuls le potentiel et la source changent) sur une orbite générique. La seule chose à faire est de calculer analytiquement les conditions de saut vérifiées par la solution. De même l'algorithme peut être adapté de manière générale à toute équation hyperbolique contenant un terme source singulier.

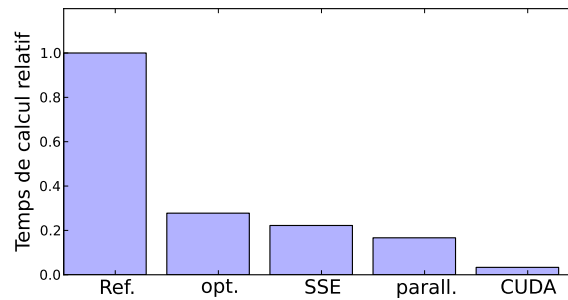


FIGURE 4.22: Speedup par rapport à la routine de référence ("Ref.") en fonction des techniques utilisées. La mention "opt." désigne certaines optimisations liées au traitement des tableaux contenant les valeurs de ψ . "SSE" désigne l'implémentation de l'unité SSE (*Streaming S.I.M.D. Extensions* avec SIMD pour *Single Instruction on Multiple Data*) permettant d'effectuer des opérations simultanées faisant intervenir des données dans deux registres différents. "parall." fait référence à la parallélisation openMP et "CUDA" la parallélisation sur GPU.

Dans l'objectif du calcul des formes d'onde et des flux associés à moins de 1% d'erreur, ce code est parfaitement adapté. Nous pouvons donc l'utiliser pour aller plus loin dans l'étude du rayonnement gravitationnel d'une particule ponctuelle dans un trou noir de Schwarzschild (voir chapitre 5). On peut cependant lister différents points techniques qui ont été ou qui peuvent être mis en place pour améliorer les performances du code notamment en terme de temps de calcul.

- Dans le cas radial, la partie homogène du code, c'est-à-dire la partie transport des ondes sans production d'OG (après que la particule ait été absorbée) par le trou noir a été optimisée d'un point de vue purement algorithmique. En partant d'une routine de base calculant simplement l'équation (4.54) (ou (4.59)) dans une double boucle spatio-temporelle, plusieurs techniques ont été utilisées [179] pour réduire drastiquement le temps de calcul. On peut mentionner notamment l'utilisation de l'unité S.S.E qui agit directement sur le processeur via une opération sur les registres qui permet le calcul simultané d'opérations répétitives. La routine a également été parallélisée sur CPU (subdivision du domaine numérique alloué à chaque processeur) puis une parallélisation sur GPU a été testée (voir Fig. 4.22).

- Afin de s'abstenir d'avoir à gérer les conditions aux bords de façon à éviter toute réflexion numérique des ondes qui pourraient polluer le rayonnement physique, on utilise une grille spatiale $r_{\min}^* \leq r^* \leq r_{\max}^*$ très étendue. Typiquement on a pris pour les orbites planes $r_{\max}^* = -r_{\min}^* = 3000M$. Cependant d'autres techniques peuvent être envisagées : par exemple encadrer le domaine numérique par une zone tampon de "viscosité artificielle" qui aurait pour but d'atténuer toutes les ondes qui la traversent, évitant ainsi les réflexions aux bords. Une technique de compactification des coordonnées décrite dans les travaux d'Anil Zenginoglu [180] peut aussi être envisagée et sera incluse dans nos perspectives de travail.

Chapitre 5

Force propre gravitationnelle : cas de la chute radiale

LE calcul de la force propre gravitationnelle est une tâche difficile à accomplir principalement à cause de la régularisation. C'est pourquoi, historiquement, les travaux présents dans la littérature ont initialement abordé des problèmes simplifiés comme la force propre scalaire dans une métrique de Schwarzschild, puis de Kerr pour des orbites de plus en plus complexes. La force propre électromagnétique a également été étudiée pour une métrique de Schwarzschild. Ces préliminaires ont permis de développer une grande variété d'approches et de techniques de régularisation qui permettent aujourd'hui le calcul de la force propre gravitationnelle. On pourra se référer aux tableaux 1, 2 et 3 de [104] pour un état de l'art sur le calcul de la force propre (scalaire, électromagnétique et gravitationnelle) pour une particule en mouvement le long d'une géodésique. L'évolution orbitale, c'est-à-dire modifier la trajectoire par les données de la force propre au cours du temps, est un sujet d'investigation très récent. Les travaux de Diener et al. [181] ont par exemple conduit au calcul auto-consistant de la force propre et des équations du mouvement pour une particule transportant un champ scalaire. De même pour le cas gravitationnel, Warburton et al. [182], ont produit la première évolution orbitale spirale autour d'un trou noir de Schwarzschild. Lackeos et Burko [183] ont également traité le problème pour une orbite quasi-circulaire. Ces efforts ont été menés dans la jauge harmonique dans laquelle la force propre gravitationnelle est bien définie.

Dans ce chapitre on propose de rester dans la jauge de RW et de traiter le problème de l'évolution orbitale dans le cas d'une particule qui chute radialement sur un trou noir de Schwarzschild. Ce travail sera détaillé en plusieurs étapes. On effectuera d'abord le calcul complet de la force propre gravitationnelle le long d'une géodésique radiale. Il sera alors nécessaire, dans le cadre de la régularisation Mode-Sum, de calculer les paramètres de régularisation dans la jauge de RW. La jauge de RW a l'avantage de nous donner accès très facilement aux composantes du tenseur de perturbation (qui sont

généralement très fortement couplées en jauge harmonique) via la fonction d'onde de RWZ. C'est pourquoi on calculera les perturbations à la position de la particule, les composantes de la force propre puis l'auto-accélération qui intervient dans l'équation du mouvement. La résolution de l'équation du mouvement en temps coordonnée avec le terme d'auto-accélération est ensuite abordée de deux façons différentes : par une approche pragmatique qui linéarise l'équation du mouvement et par une approche osculatrice pour laquelle on a développé un code de calcul que l'on présentera.

5.1 Force propre gravitationnelle en jauge de RW : Particularité du cas radial

Au chapitre 2 on a vu que le formalisme mis en place par MiSaTaQuWa dans la jauge harmonique conduit à régulariser la force propre en soustrayant la partie singulière de la force retardée

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{H})} = F_{\text{ret}}^{\alpha(\text{H})} - F_{\text{S}}^{\alpha(\text{H})} . \quad (5.1)$$

L'indice (H) indique que les quantités désignées sont évaluées en jauge harmonique. On rappelle que la force retardée en jauge harmonique est calculée à partir du champ retardé que l'on introduit dans l'expression (2.58)

$$\begin{aligned} F_{\text{ret}}^{\alpha(\text{H})} &= F^{\alpha} \left[h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\text{H})} \right] , \\ &= -\frac{1}{2} m_0 \left(g^{\alpha\beta} + u^{\alpha} u^{\beta} \right) \left(2 \nabla_{\delta} h_{\beta\gamma}^{\text{ret}(\text{H})} - \nabla_{\alpha} h_{\gamma\delta}^{\text{ret}(\text{H})} \right) u^{\gamma} u^{\delta} , \\ &= m_0 k^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_{\delta} \bar{h}_{\beta\gamma}^{\text{ret}(\text{H})} , \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $\bar{h}_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\text{H})}$ est donnée par (2.59) et $k^{\alpha\beta\gamma\delta}$ par (2.61). Imaginons maintenant que l'on procède à un changement de jauge vers une jauge quelconque (G), le champ retardé se transforme comme

$$h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\text{G})} = h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\text{H})} + \delta h_{\alpha\beta}^{(\text{H} \rightarrow \text{G})} , \quad (5.3)$$

et la force propre subit une transformation de type (2.64) et s'écrit dans la nouvelle jauge comme

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{G})} = F_{\text{self}}^{\alpha(\text{H})} + \delta F^{\alpha(\text{H} \rightarrow \text{G})} , \quad (5.4)$$

$$= F_{\text{ret}}^{\alpha(\text{H})} - F_{\text{S}}^{\alpha(\text{H})} + \delta F^{\alpha(\text{H} \rightarrow \text{G})} . \quad (5.5)$$

A partir de (5.2) et (5.3) on a $\delta F^{\alpha(\text{H} \rightarrow \text{G})} = F^{\alpha} \left[\delta h_{\alpha\beta}^{(\text{H} \rightarrow \text{G})} \right]$ et $F_{\text{ret}}^{\alpha(\text{G})} = F_{\text{ret}}^{\alpha(\text{H})} + \delta F^{\alpha(\text{H} \rightarrow \text{G})}$ c'est-à-dire que la force propre et la force retardée se transforment de la même manière

ce qui conduit à

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{G})} = F_{\text{ret}}^{\alpha(\text{G})} - F_{\text{S}}^{\alpha(\text{H})} . \quad (5.6)$$

Ce résultat essentiel montre qu'en pratique, dans une jauge arbitraire (G), la partie singulière à extraire de la force retardée est toujours exprimée dans la jauge harmonique et non dans la jauge (G) comme on pourrait le supposer. Cette propriété est semblable à la nature isotropique de la jauge harmonique qui permet d'atteindre de façon exacte la partie singulière de la force qui possède aussi une structure isotropique [28]. Une autre condition de jauge introduirait une modification artificielle de la partie singulière.

Concernant la régularisation par Mode-Sum, vue à la section 2.3.1, elle a été introduite dans le cadre de la jauge harmonique (cadre dans lequel la force propre a été formulée par MiSaTaQuWa [27]). Il n'existe pas d'expression formelle générale de la force propre en jauge de RW, cependant, en opérant le même changement de jauge que l'on a défini en (5.3), on peut donner un sens à la force régularisée par Mode-Sum en jauge de RW. L'idée est de pouvoir utiliser tout le formalisme de RWZ pour le calcul numérique de la force propre en jauge de RW. Barack et Ori [53] ont montré que ce problème était envisageable seulement pour une classe restreinte de jauges; les jauges pour lesquelles le vecteur de transformation de jauge est régulier. Donc si la transformation de la jauge harmonique vers la jauge de RW reste régulière alors la technique Mode-Sum peut être utilisée pour régulariser la force retardée dans la jauge de RW.

On rappelle l'expression (2.99) de la décomposition Mode-Sum dans la jauge harmonique

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{H})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}}^{\alpha\ell(\text{H})} - A^{\alpha} L - B^{\alpha} - C^{\alpha} L^{-1} \right] - D^{\alpha} , \quad (5.7)$$

où $L = \ell + 1/2$. On rappelle également que les paramètres de régularisation A^{α} , B^{α} , C^{α} et D^{α} calculés dans la jauge harmonique sont des quantités vectorielles indépendantes du nombre ℓ . Injectons maintenant la décomposition (5.7) dans la relation de transformation (5.4)

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{G})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}}^{\alpha\ell(\text{H})} + \delta F^{\alpha\ell(\text{H} \rightarrow \text{G})} - A^{\alpha} L - B^{\alpha} - C^{\alpha} L^{-1} \right] - D^{\alpha} , \quad (5.8)$$

où les modes $\delta F^{\alpha\ell(\text{H} \rightarrow \text{G})}$ du vecteur de transformation de jauge sont définis par

$$\delta F^{\alpha(\text{H} \rightarrow \text{G})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta F^{\alpha\ell(\text{H} \rightarrow \text{G})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} m_0 k^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_{\delta} \left[\delta \bar{h}_{\beta\gamma}^{\ell(\text{H} \rightarrow \text{G})} \right] . \quad (5.9)$$

Or par définition,

$$F_{\text{ret}}^{\alpha\ell(\text{H})} + \delta F^{\alpha\ell(\text{H}\rightarrow\text{G})} = F_{\text{ret}}^{\alpha\ell(\text{G})} , \quad (5.10)$$

donc

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{G})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}}^{\alpha\ell(\text{G})} - A^{\alpha}L - B^{\alpha} - C^{\alpha}L^{-1} \right] - D^{\alpha} . \quad (5.11)$$

où $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell(\text{G})}$ désigne le mode ℓ de la force retardée exprimée dans la nouvelle jauge (G). La relation (5.11) indique que les paramètres de régularisation sont alors indépendants de la jauge dans laquelle on calcule la force retardée mais cela sous réserve que le vecteur de transformation de jauge $\delta F^{\alpha(\text{H}\rightarrow\text{G})}$ reste régulier. Ainsi dans le cas d'un passage vers la jauge de RW, si $\delta F^{\alpha(\text{H}\rightarrow\text{RW})}$ est régulier alors on peut obtenir la force propre en RW par régularisation de la force retardée calculée à partir des perturbations dans la jauge de RW

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{RW})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}}^{\alpha\ell(\text{RW})} - A^{\alpha}L - B^{\alpha} - C^{\alpha}L^{-1} \right] - D^{\alpha} . \quad (5.12)$$

Barack et Ori [53] ont fait une étude détaillée en examinant plusieurs types d'orbites et ont conclu que la jauge de RW est régulièrement connectée à la jauge harmonique seulement pour les orbites purement radiales. La relation (5.12) est donc valide dans le cas que nous envisageons, c'est-à-dire une particule en chute libre sur un trou noir de Schwarzschild. Par ailleurs, dans ce cas de figure, il a été montré [53] que les composantes du vecteur de changement de jauge $\xi^{\alpha}(\tau)$ sont non seulement régulières à la position de la particule mais sont déterminées à partir de trois champs scalaires librement ajustables et que l'on peut choisir nuls. En conséquence de cette dernière affirmation, la partie singulière de la force retardée est la même quelle que soit la jauge dans laquelle elle est calculée c'est-à-dire que les paramètres de régularisation sont les mêmes en jauge de RW qu'en jauge harmonique. Dans la section suivante on proposera justement une dérivation des paramètres de régularisation en partant du formalisme de RW et on confirmera bien que leurs expressions sont identiques à celles trouvées en jauge harmonique [101].

5.2 Paramètres de régularisation

5.2.1 Calcul des paramètres de régularisation en jauge de RW

La régularisation de la force propre par la méthode Mode-Sum nécessite l'évaluation de la partie divergente de la force retardée au voisinage de la particule. $F^{\alpha}[h_{\alpha\beta}^{\text{dir}}]$ est approchée sous la forme d'une série en puissances de $1/L$ dont les coefficients sont les paramètres de

régularisation. Le calcul des paramètres de régularisation peut se baser sur une analyse locale de la fonction d'onde ψ , ou plus exactement de la fonction de Green qui lui est associée, au voisinage de la particule. La technique consiste à effectuer un développement perturbatif des modes de la fonction de Green dans une petite région spatio-temporelle autour de la particule et pour de grandes valeurs de ℓ . Cette procédure, proposée par Barack [184][185] produit les paramètres de régularisation de la force propre dans la jauge harmonique (pour un champ scalaire [184] ou gravitationnel [185]).

On se propose ici d'adapter et de détailler ce procédé [184] dans la jauge de Regge-Wheeler pour la chute radiale. Ce calcul n'apparaît pas explicitement dans la littérature c'est pourquoi on choisit de le détailler dans ce chapitre mais sa compréhension n'est pas nécessaire au lecteur pour appréhender le reste de ce document. Les résultats de ce calcul nous donnerons les paramètres de régularisation de la force propre dans la jauge de RW pour une orbite radiale [53][54]. On aura également accès au comportement de la fonction d'onde et de ses dérivées par rapport à ℓ et pour de grandes valeurs de ℓ . Ceci nous permettra de tester la convergence de notre code numérique pour de grands modes. Nous calculerons ensuite les modes des fonctions de perturbation $H_{1,2}^\ell$ et de la force retardée $F^{\alpha\ell}[h_{\alpha\beta}^{\text{ret}\ell}]$ pour de grandes valeurs de ℓ . On montrera enfin, une fois les paramètres de régularisation calculés, que leur expression est identique à ceux formulés dans la jauge harmonique, confirmant ainsi leur caractère invariant de jauge [53].

Dans cette section, on dénotera par $x'_p(\tau) = (t'_p, r'_p)$ un point quelconque de la ligne d'univers γ suivi par la particule et par $x_p = (t_p, r_p) = x'_p(\tau = 0)$ le point où l'on souhaite évaluer la force propre (voir Fig. 5.1). Le point $x = (t, r)$ indiquera un point pris dans le voisinage de x_p en lequel on évaluera initialement le champ $\psi(x)$ gouverné, on le rappelle, par l'équation de RWZ

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 - V(r) \right] \psi = \mathcal{G}(t) \delta(r - r'_p(t)) + \mathcal{F}(t) \partial_r \delta(r - r'_p(t)) . \quad (5.13)$$

On définit la fonction de Green $G(x, x_p(\tau))$ associée à l'équation (5.13) par

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{0^+} G(x, x'_p(\tau)) d\tau \quad (5.14)$$

et satisfaisant l'équation suivante

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 - V(r) \right] G = \hat{\mathcal{G}}(r) \delta(r - r'_p) \delta(t - t'_p) + \hat{\mathcal{F}}(r) \partial_r \delta(r - r'_p) \delta(t - t'_p) , \quad (5.15)$$

où

$$\begin{aligned}
 V(r) &= 2f(r) \frac{\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 3\lambda^2Mr^2 + 9\lambda M^2r + 9M^3}{r^3(\lambda r + 3M)^2} \\
 \hat{\mathcal{F}}(r) &= -\frac{\kappa r f^2(r)}{4(\lambda+1)(\lambda r + 3M)} \\
 \hat{\mathcal{G}}(r) &= \frac{\kappa r f(r)}{2(\lambda+1)(\lambda r + 3M)} \left[\frac{r(\lambda+1) - M}{2r} - \frac{3M\mathcal{E}^2}{\lambda r + 3M} \right].
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

On rappelle l'expression des quantités $\lambda = (\ell+2)(\ell-1)/2$ et $\kappa = 8\pi m_0 Y^{\ell_0} = 4m_0 \sqrt{2\pi L}$.

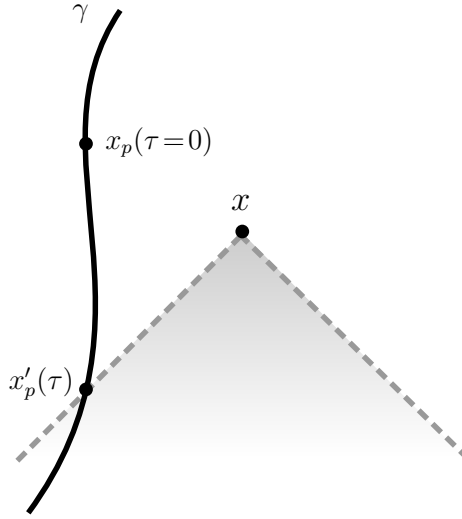


FIGURE 5.1: On dénotera par $x'_p(\tau) = (t'_p, r'_p)$ un point quelconque de la ligne d'univers γ suivi par la particule et par $x_p = (t_p, r_p) = x'_p(\tau = 0)$ le point où l'on évalue la force propre. Le point $x = (t, r)$ indiquera un point pris dans le voisinage de x_p en lequel on évaluera initialement le champ $\psi(x)$

Stratégie pour obtenir le comportement asymptotique de $\partial_t^n \partial_r^m \psi^\ell$ quand $\ell \rightarrow \infty$ pour $n + m \leq 3$:

- **Fonction de Green réduite.**

Ecrire G sous une forme réduite qui tient compte de la forme causale de son support, c'est-à-dire à valeur non nulle dans le cône de lumière futur de x'_p .

- **Développement de G en puissances de $1/L$ autour du point $x = x_p$.**

On développe la fonction de Green réduite en puissances de $1/L$ et chaque terme de la série est développé localement autour du point $x \rightarrow x_p$. G sera de la forme

$$G = G_0 L^{-2} + G_1 L^{-3} + G_2 L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}). \tag{5.17}$$

A ce stade les coefficients G_n sont fonction de x_p et de x'_p .

- **Développement autour de $x'_p = x_p$.**

L'intégration de G selon τ nécessite que les coefficients G_n possèdent une formulation explicite en terme de temps propre τ . Ceci est atteint par développement de Taylor des termes $G_n(x'_p(\tau))$ autour de $\tau = 0$. Au final la fonction de Green à intégrer sera de la forme

$$G = \tilde{G}_0(\tau)L^{-2} + \tilde{G}_1(\tau)L^{-3} + \tilde{G}_2(\tau)L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) . \quad (5.18)$$

- **Calcul de $\psi^{\ell \rightarrow \infty}(x_p)$ et de $\partial_r \psi^{\ell \rightarrow \infty}(x_p)$.**

On intègre G et $\partial_r G$ pour obtenir le comportement asymptotique de ψ^ℓ et $\partial_r \psi^\ell$ quand $\ell \rightarrow \infty$.

- **Calcul de $\partial_t^n \partial_r^m \psi^{\ell \rightarrow \infty}(x_p)$.**

Plutôt que de calculer $\partial_t^n \partial_r^m G$, on utilisera les relations sur les dérivées déjà utilisées pour le calcul des conditions de saut pour obtenir les quantités $\partial_t^n \partial_r^m \psi^{\ell \rightarrow \infty}$ pour $n + m \leq 3$.

D'après les propriétés sur les distributions (4.5) et (4.10), on peut réécrire l'équation (5.15) en utilisant une autre version $\hat{G}$ de la fonction de Green G définie telle que

$$G(x, x'_p) = \left[\hat{\mathcal{Q}}(r'_p) - \hat{\mathcal{F}}(r'_p) \partial / \partial r'_p \right] \hat{G}(x, x'_p) , \quad (5.19)$$

où $\hat{\mathcal{Q}}(r'_p) := \left[\hat{\mathcal{G}}(r) - d\hat{\mathcal{F}}(r)/dr \right]_{r=r'_p}$. L'équation (5.15) devient

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 - V(r) \right] \hat{G} = f(r'_p)^{-1} \delta(r^* - r'^*_p) \delta(t - t'_p) \quad (5.20)$$

où on a employé la relation $\delta(r - r'_p) = f(r'_p)^{-1} \delta(r^* - r'^*_p)$. Pour tenir compte de la structure causale de la fonction de Green, il est utile d'introduire les coordonnées d'Eddington-Finkelstein [128] (u, v) reliées aux coordonnées (t, r^*) par une application μ bi-continue telle que

$$\mu : \begin{pmatrix} t \\ r^* \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = t - r^* \\ v = t + r^* \end{pmatrix} , \quad (5.21)$$

$$\mu^{-1} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t = (v + u)/2 \\ r^* = (v - u)/2 \end{pmatrix} . \quad (5.22)$$

L'opérateur d'onde s'écrit simplement en terme de u et v par $\partial_{r^*}^2 - \partial_t^2 = -4\partial_{uv}$. De même écrire $\delta(r^* - r'^*_p) \delta(t - t'_p)$ en fonction des variables (u, v) nécessite de traiter la composition d'une distribution (ici le δ de Dirac) avec une fonction $\mu(t, r^*)$. Sous la

définition intégrale de δ , on procède par changement de variable

$$\int_{\mu(\mathbb{R}^2)} \delta(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\mu(x)) \phi(\mu(x)) |J_\mu| dx , \quad (5.23)$$

où $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $|J_\mu|$ est le déterminant de la matrice jacobienne associée à μ dont la valeur est $|J_\mu| = 2$. On obtient alors

$$\left[4\partial_{uv} + V(r) \right] \widehat{G} = 2f(r'_p)^{-1} \delta(u - u'_p) \delta(v - v'_p) . \quad (5.24)$$

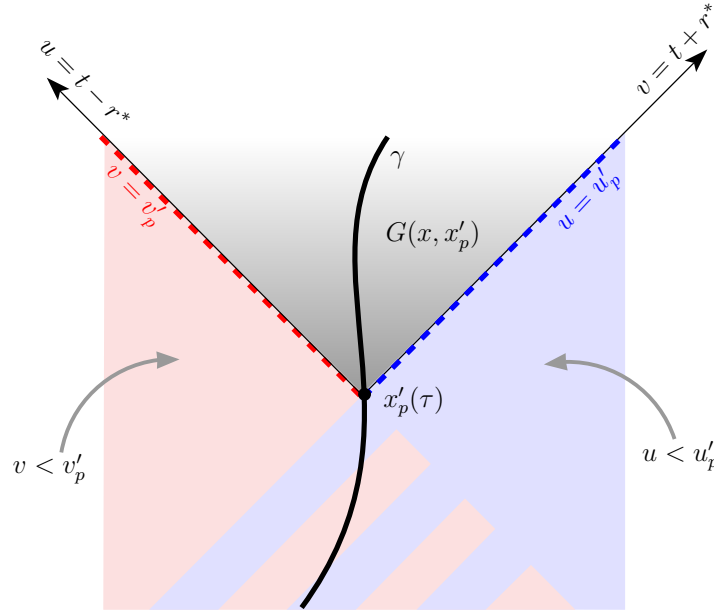


FIGURE 5.2: La fonction de Green réduite $\widehat{G}(x, x'_p)$ a support dans le cône de lumière futur de x'_p (zone grisée) donc $\widehat{G}(u < u'_p, v) = 0$ (zone bleue) et $\widehat{G}(u, v < v'_p) = 0$ (zone rouge).

Fonction de Green réduite

On cherche maintenant à se servir de notre connaissance sur la structure causale de $\widehat{G}$ pour la réécrire sous une forme réduite. En effet on sait que $\widehat{G}(x, x'_p)$ a support dans le cône de lumière futur de x'_p donc $\widehat{G}(u < u'_p, v) = \widehat{G}(u, v < v'_p) = 0$. Ainsi pour tenir compte de la causalité on introduit la fonction de Green réduite $g(x, x'_p)$ telle que

$$\widehat{G}(x, x'_p) = 2f(r'_p)^{-1} g(x, x'_p) \mathcal{H}(u - u'_p) \mathcal{H}(v - v'_p) , \quad (5.25)$$

où $\mathcal{H}(u - u'_p) \mathcal{H}(v - v'_p)$ confine le support de $\widehat{G}(x, x'_p)$ sur l'ensemble des points x appartenant au cône de lumière futur de x'_p . En insérant cette décomposition (5.25) dans la

relation (5.24) on exprime l'opérateur d'onde appliqué à $\widehat{G}$

$$\begin{aligned} \partial_{uv} \left[g(x, x'_p) \mathcal{H}(u - u'_p) \mathcal{H}(v - v'_p) \right] &= \partial_u \left[\partial_v g \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p} + g \mathcal{H}_{u'_p} \delta_{v'_p} \right] \\ &= \partial_{uv} g \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p} + \partial_v g \delta_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p} + \partial_u g \mathcal{H}_{u'_p} \delta_{v'_p} + g \delta_{u'_p} \delta_{v'_p} . \end{aligned} \quad (5.26)$$

L'équation (5.24) exprimée à partir de g fait intervenir quatre types de quantités distinctes (i) $(\cdots) \times \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p}$, (ii) $(\cdots) \times \delta_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p}$, (iii) $(\cdots) \times \mathcal{H}_{u'_p} \delta_{v'_p}$ et (iv) $(\cdots) \times \delta_{u'_p} \delta_{v'_p}$. L'action de chaque terme s'explique en étudiant le comportement de l'équation le long des droites caractéristiques $u = u'_p$ et $v = v'_p$.

1. Pour $u > u'_p$ et $v > v'_p$, aucune contribution ne vient des termes (ii), (iii) et (iv), g satisfait l'équation homogène $4\partial_{uv}g + V(r)g = 0$.
2. Si $u = u'_p$ est constant, seul le terme (ii) a une contribution donc $\partial_v g(u'_p, v) = 0$.
3. Si $v = v'_p$ est constant, seul le terme (iii) a une contribution donc $\partial_u g(u, v'_p) = 0$.
4. Considéré sur un point de la ligne d'univers $(u, v) = (u'_p, v'_p)$, le coefficient du terme (iv) doit être égal à celui du terme source de (5.24) donc $g(u'_p, v'_p) = 1$.

D'après 1. on a

$$4\partial_{uv}g + V(r)g = 0, \quad \forall u > u'_p \text{ et } v > v'_p \quad (5.27)$$

D'après les considérations 2., 3. et 4. on a

$$g(u = u'_p, v) = g(u, v = v'_p) = 1. \quad (5.28)$$

La relation (5.28) constitue en fait les conditions initiales à associer à (5.27) et assure ainsi l'unicité de la solution.

Développement de G en puissances de $1/L$ autour du point $x \rightarrow x_p$

Le problème est réduit maintenant à résoudre le système aux conditions initiales suivant

$$\begin{aligned} 4\partial_{uv}g + V(r)g &= 0, \\ g(u = u'_p, v) &= g(u, v = v'_p) = 1. \end{aligned} \quad (5.29)$$

La méthode consiste à trouver une solution de g au voisinage du point d'évaluation $x = x_p$ tout en considérant de grandes valeurs de ℓ . On développera donc nos quantités en série de Taylor autour de $r = r_p$ puis on les exprimera en série de puissances de $1/L$. Pour travailler avec à la fois des quantités très petites comme les séparations spatiales du type $r - r_p$ et de grandes quantités proportionnelles à L , il sera utile d'introduire

de nouvelles variables, dites neutres [184], de la forme $L \times$ *petite séparation spatiale*. Suivons cette procédure tout d'abord sur le terme potentiel $V(r)$.

$$V(r) = f(r) \frac{18M^3 + 18r\lambda M^2 + 6r^2\lambda^2 M + 2r^3\lambda^2(\lambda + 1)}{r^3(3M + \lambda r)^2} \quad (5.30)$$

où $\lambda = 1/2(\ell + 1)(\ell + 2) = 1/2(L^2 - 9/4)$. Au voisinage de $r = r_p$, ou de façon équivalente autour de $r^* = r_p^*$ on a

$$\begin{aligned} V(r) &= V(r_p) + \left. \frac{dV}{dr^*} \right|_{r_p^*} (r^* - r_p^*) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dr^{*2}} \right|_{r_p^*} (r^* - r_p^*)^2 + \mathcal{O}((r^* - r_p^*)^3) \\ &= V^{(0)}(r_p) + V^{(1)}(r_p)\Delta r_p^* + V^{(2)}(r_p)\Delta r_p^{*2} + \mathcal{O}(\Delta r_p^{*3}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

avec

$$\begin{aligned} V^{(0)}(r_p) &= V(r_p) \\ V^{(1)}(r_p) &= f(r_p) \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r_p} \\ V^{(2)}(r_p) &= \frac{1}{2} \left[f(r_p) \left. \frac{df}{dr} \right|_{r_p} \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r_p} + f^2(r_p) \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r_p} \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

et $\Delta r_p^* = r^* - r_p^*$. On donne ensuite le comportement asymptotique de $V^{(0)}$, $V^{(1)}$ et $V^{(2)}$ pour $1/L \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} V^{(0)}(r_p) &= \frac{f(r)}{r_p^2} \left[L^2 - \left(\frac{6M}{r_p} + \frac{1}{4} \right) \right] + \mathcal{O}(L^{-1}) \\ &= V_{(2)}^{(0)} L^2 + V_{(0)}^{(0)} + \mathcal{O}(L^{-1}), \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} V^{(1)}(r_p) &= \frac{f(r)}{r_p^2} \left[\frac{6M - 2r_p}{r_p^2} L^2 - \left(\frac{96M^2 - 33Mr - r_p^2}{2r_p^3} \right) \right] + \mathcal{O}(L^{-1}) \\ &= V_{(2)}^{(1)} L^2 + V_{(0)}^{(1)} + \mathcal{O}(L^{-1}), \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} V^{(2)}(r_p) &= \frac{f(r)}{r_p^2} \left[\frac{60M^2 - 40Mr_p + 6r_p^2}{2r_p^4} L^2 - \frac{1152M^3 - 810M^2r_p + 124Mr_p^2 + 3r_p^3}{4r_p^5} \right] + \mathcal{O}(L^{-1}) \\ &= V_{(2)}^{(2)} L^2 + V_{(0)}^{(2)} + \mathcal{O}(L^{-1}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dans ces notations, $V_{(n)}^{(k)}$ indique le n -ème coefficient de Taylor en $1/L$ du k -ème coefficient en r_p^* . Le potentiel développé devient alors

$$V(r_p) = V^{(0)}(r_p) + \underbrace{V_{(2)}^{(1)}(r_p)L^2\Delta r_p^*}_{\mathcal{O}(L)} + \underbrace{V_{(0)}^{(1)}(r_p)\Delta r_p^*}_{\mathcal{O}(L^{-1})} + \underbrace{V_{(2)}^{(2)}(r_p)L^2\Delta r_p^{*2}}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{V_{(0)}^{(2)}(r_p)\Delta r_p^{*2}}_{\mathcal{O}(L^{-2})} + \mathcal{O}(\Delta r_p^{*3}) , \quad (5.36)$$

où on a indiqué l'ordre de chaque terme par une accolade. On remarque que les termes du genre $L^n \Delta r_p^{*n}$ $n \in \mathbb{N}$ sont d'ordre 0 et ne renseignent pas sur le comportement de V par rapport à L car $\mathcal{O}(L^{-1}) \sim \mathcal{O}(\Delta r_p^*)$. C'est pourquoi on choisit d'introduire des *variables neutres* pour lesquelles on pourra considérer le produit $L \times$ *petite séparation spatiale* comme constant. On soulignera ces variables pour indiquer qu'il s'agit de variables neutres. On choisira

$$\underline{\Delta}r_p^* := L\Delta r_p^* . \quad (5.37)$$

En tronquant le développement (5.36) en $\mathcal{O}(L^{-1})$ on obtient, en terme de variable neutre

$$V(r_p) = \frac{f(r_p)}{r_p^2} \left[L^2 + (\nu_1 \underline{\Delta}r_p^*) L + (\nu_2 + \nu_3 \underline{\Delta}r_p^{*2}) \right] + \mathcal{O}(L^{-1}) , \quad (5.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2}{r_p} \left(\frac{3M}{r_p} - 1 \right) , \\ \nu_2 &= -\frac{6M}{r_p} - \frac{1}{4} , \\ \nu_3 &= \frac{1}{r_p^2} \left(3 - \frac{20M}{r_p} + \frac{30M^2}{r_p^2} \right) . \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pareillement à (5.37), on désigne par $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ les deux variables neutres

$$\underline{X} := \frac{1}{2}\rho(r_p)L(u - u'_p) \quad \text{et} \quad \underline{Y} := \frac{1}{2}\rho(r_p)L(v - v'_p) , \quad (5.40)$$

où le pré-facteur $\rho(r_p) := f(r_p)^{1/2}/r_p$ est là pour simplifier l'équation (5.27) une fois le changement de variable $\partial_{uv}g = (1/4)\rho(r_p)^2L^2\partial_{\underline{X}\underline{Y}}g$ effectué. De même on notera $\underline{Z}$ une variable neutre qui nous sera utile par la suite

$$\underline{Z} := 2\sqrt{\underline{X}\underline{Y}} . \quad (5.41)$$

$\underline{Z}$ peut aussi s'écrire $\underline{Z} = \rho(r_p)L\sqrt{(u - u'_p)(v - v'_p)}$ et également $\underline{Z} = (L/r_p)s$ où s est la distance géodésique entre le point x et le point x'_p . En effet dans une métrique de

Schwarzschild on a $ds^2 = -f(r)dudv$ et donc $s = \int_{x'_p}^x |g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} \approx \sqrt{f(r_p)(u - u'_p)(v - v'_p)}$. On aura également besoin de la variable $\underline{\Delta r}'_p$ définie telle que

$$\underline{\Delta r}'_p := \rho(r_p)L(r_p'^* - r_p^*) . \quad (5.42)$$

On se référera à la Fig. 5.3 pour avoir une signification géométrique des variables neutres introduites précédemment. L'équation à résoudre est maintenant

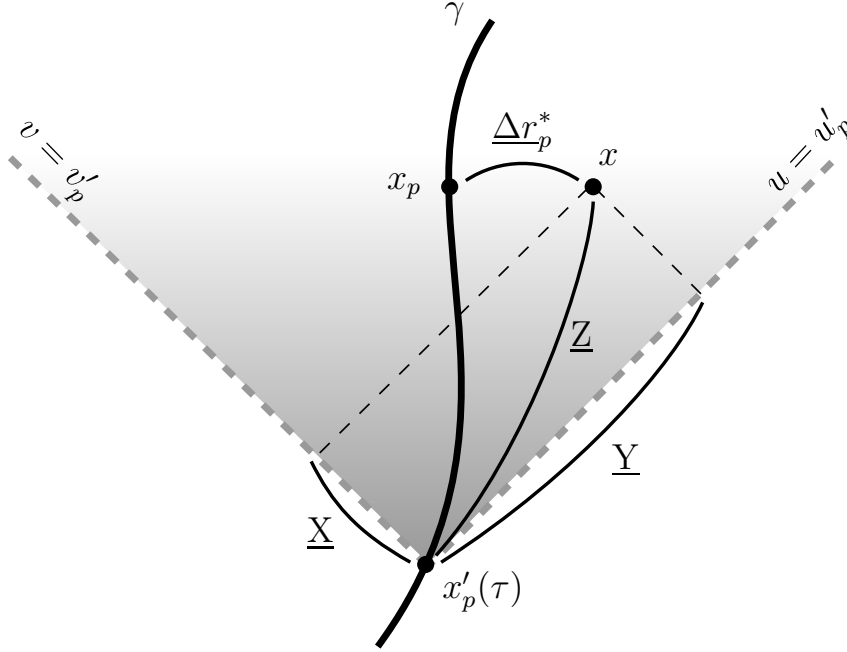


FIGURE 5.3: Représentation géométrique des variables neutres utilisées dans l'analyse locale de $g(x, x'_p)$. En gris on a indiqué le support de la fonction de Green qui correspond à l'ensemble des points x appartenant au futur chronologique de x'_p .

$$\partial_{\underline{X}\underline{Y}}g + \left[1 + (\nu_1 \underline{\Delta r}_p^*) L^{-1} + (\nu_2 + \nu_3 \underline{\Delta r}_p'^*) L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right] g = 0 . \quad (5.43)$$

où la fonction de Green réduite g devra aussi être exprimée sous la forme d'une série de puissance de $1/L$ dont les coefficients à évaluer seront fonction des variables $\underline{\Delta r}_p^*$, $\underline{\Delta r}'_p$ et $\underline{Z}$.

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-k} g_k(\underline{\Delta r}_p^*, \underline{\Delta r}'_p, \underline{Z}) . \quad (5.44)$$

Il suffit de tronquer la somme en $k = 2$ pour obtenir la précision que l'on souhaite. L'équation (5.27) devient alors

$$\sum_{k=0}^2 L^{-k} \partial_{\underline{X}\underline{Y}} g_k + \left[1 + (f_1 \Delta_r) L^{-1} + (f_2 + f_3 \Delta_r^2) L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right] \sum_{k=0}^2 L^{-k} g_k = 0 . \quad (5.45)$$

Maintenant, en identifiant les puissances de L on obtient un système d'équations hiérarchisé complété par les conditions initiales (5.28) de la forme

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{X}\underline{Y}} g_k + g_k &= S_k , \\ g_k(u = u'_p, v) &= g_k(u, v = v'_p) = \delta_{k0} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Explicitement on a

$$\text{ordre 0 : } \partial_{\underline{X}\underline{Y}} g_0 + g_0 = 0 , \quad (5.47)$$

$$\text{ordre 1 : } \partial_{\underline{X}\underline{Y}} g_1 + g_1 = -\nu_1 \underline{\Delta r}_p^* g_0 , \quad (5.48)$$

$$\text{ordre 2 : } \partial_{\underline{X}\underline{Y}} g_2 + g_2 = -\nu_1 \underline{\Delta r}_p^* g_1 - (\nu_2 + \nu_3 \underline{\Delta r}_p^{*2}) g_0 . \quad (5.49)$$

Par changement de variable $\underline{Z} = 2\sqrt{\underline{X}\underline{Y}}$, le membre de gauche se transforme comme

$$\frac{\partial^2}{\partial \underline{X} \partial \underline{Y}} g_k + g_k = \underline{Z}^2 \frac{\partial^2 g_k}{\partial \underline{Z}^2} + \underline{Z} \frac{\partial g_k}{\partial \underline{Z}} + \underline{Z}^2 g_k . \quad (5.50)$$

Ainsi la première équation (5.47) est triviale puisqu'il s'agit de résoudre une équation de Bessel d'ordre 0

$$\underline{Z}^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \underline{Z}^2} + \underline{Z} \frac{\partial g_0}{\partial \underline{Z}} + (\underline{Z}^2 - 0^2) g_k = 0 , \quad (5.51)$$

dont la solution est une fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0

$$g_0 = J_0(\underline{Z}) . \quad (5.52)$$

Les équations (5.48) et (5.49) sont des équations de Bessel avec un terme source dans lequel des fonctions de Bessel sont présentes. En travaillant sur les relations entre les variables neutres $\underline{\Delta r}_p^*$, $\underline{\Delta r}_p'^*$, $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ on peut réécrire les termes source S_k en fonction de $\underline{Z}$ et $\underline{Y} - \underline{X} = \underline{\Delta r}_p^* - \underline{\Delta r}_p'^*$ uniquement. En suivant les relations données dans le Tab. 5.1 on construit les solutions des équations (5.48) et (5.49) compatibles avec les conditions initiales de (5.46)

$$g_1 = -\frac{1}{4} \nu_1 \underline{Z} J_1(\underline{Z}) (\underline{\Delta r}_p^* + \underline{\Delta r}_p'^*) , \quad (5.53)$$

$$g_2 = -\frac{1}{6}\underline{Z}J_1(\underline{Z})\left[\nu_3(\underline{\Delta}r_p^{*2} + \underline{\Delta}r_p^*\underline{\Delta}r_p'^* + \underline{\Delta}r_p'^{*2}) + \nu_2\right] \\ + \frac{1}{96}\underline{Z}^2J_2(\underline{Z})\left[3\nu_1^2(\underline{\Delta}r_p^* + \underline{\Delta}r_p'^*)^2 - 8\nu_3\right] + \frac{1}{96}\nu_1^2\underline{Z}^3J_3(\underline{Z}) . \quad (5.54)$$

S	Solution de $\partial_{\underline{X}\underline{Y}}g + g = S$
0	$J_0(\underline{Z})$
$J_0(\underline{Z})$	$\underline{Z}J_1(\underline{Z})/2$
$(\underline{Y} - \underline{X})J_0(\underline{Z})$	$(\underline{Y} - \underline{X})\underline{Z}J_1(\underline{Z})/4$
$(\underline{Y} - \underline{X})^2J_0(\underline{Z})$	$[\underline{Z}^2J_2(\underline{Z}) + 2(\underline{Y} - \underline{X})^2\underline{Z}J_1(\underline{Z})] / 12$
$\underline{Z}J_1(\underline{Z})$	$\underline{Z}^2J_2(\underline{Z})/4$
$(\underline{Y} - \underline{X})\underline{Z}J_1(\underline{Z})$	$(\underline{Y} - \underline{X})\underline{Z}^2J_2(\underline{Z})/6$
$(\underline{Y} - \underline{X})^2\underline{Z}J_1(\underline{Z})$	$[\underline{Z}^3J_3(\underline{Z}) + 3(\underline{Y} - \underline{X})^2\underline{Z}^2J_2(\underline{Z})] / 24$

TABLE 5.1: Reproduction du tableau 1 de [184] qui donne la solution de l'équation de Bessel généralisée $\partial_{XY}g + g = S$ pour un terme source S dépendant lui même d'une fonction de Bessel.

Reconstruction de la fonction de Green $G(x, x'_p)$

Connaissant maintenant le comportement local de g pour de grands modes

$$g = g_0 + g_1L^{-1} + g_2L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) , \quad (5.55)$$

on peut reconstruire la fonction $\widehat{G}(x, x'_p)$ reliée à g par

$$\widehat{G}(x, x'_p) = 2f(r_p)^{-1}g(x, x'_p)\mathcal{H}(u - u'_p)\mathcal{H}(v - v'_p) , \quad (5.56)$$

elle-même reliée à la fonction de Green introduite au début dans (5.14) et (5.15)

$$G = \left[\widehat{\mathcal{Q}}(r'_p) - \widehat{\mathcal{F}}(r'_p) \frac{d}{dr'_p} \right] \widehat{G} , \quad (5.57)$$

avec

$$\widehat{\mathcal{F}}(r'_p) = -\kappa \left[f^2(r'_p)L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-6}) \right] , \quad (5.58)$$

$$\widehat{\mathcal{Q}}(r'_p) = \kappa\rho(r'_p)^2 \left[L^{-2} + \left(\frac{9}{4} - \frac{4M}{r'_p} \right) L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-6}) \right] . \quad (5.59)$$

Selon (5.57), le calcul de G nécessite la dérivée de $\widehat{G}$ par rapport à r'_p . Ce terme fait nécessairement intervenir les dérivées de $\underline{\Delta}r_p'^*$, $\underline{Z}$ et de $\mathcal{H}_{u'_p}\mathcal{H}_{v'_p}$ que l'on explicite ici

$$\frac{d\underline{\Delta r_p'^*}}{dr_p'} = \frac{dr_p'^*}{dr_p'} \frac{d}{dr_p'^*} \underline{\Delta r_p'^*} = L\rho(r_p)f(r_p')^{-1} , \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{Z}}{dr_p'} &= L\rho(r_p)f(r_p')^{-1} \frac{d}{dr_p'^*} \sqrt{(u - u_p)(v - v_p)} \\ &= L\rho(r_p)f(r_p')^{-1} \left(\frac{\underline{Y} - \underline{X}}{\underline{Z}} \right) \\ &= L\rho(r_p)f(r_p')^{-1} \left(\frac{\underline{\Delta r_p'^*} - \underline{\Delta r_p'^*}}{\underline{Z}} \right) , \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\frac{d}{dr_p'} \left[\mathcal{H}(u' - u_p) \mathcal{H}(v - v_p') \right] = f(r_p')^{-1} \left[\mathcal{H}_{v_p'} \delta(u - u_p') - \mathcal{H}_{u_p'} \delta(v - v_p') \right] . \quad (5.62)$$

Cette dernière quantité met en jeu deux termes dont la contribution non nulle dépend de la façon dont on prend la limite à droite $r \rightarrow r_p^+$ ou à gauche $r \rightarrow r_p^-$ du point d'évaluation (voir Fig. 5.4). Par conséquent, pour simplifier les notations, on adoptera les deux variables neutres suivantes (voir le Tab. 5.3 pour un récapitulatif des variables neutres utilisées depuis le début du calcul)

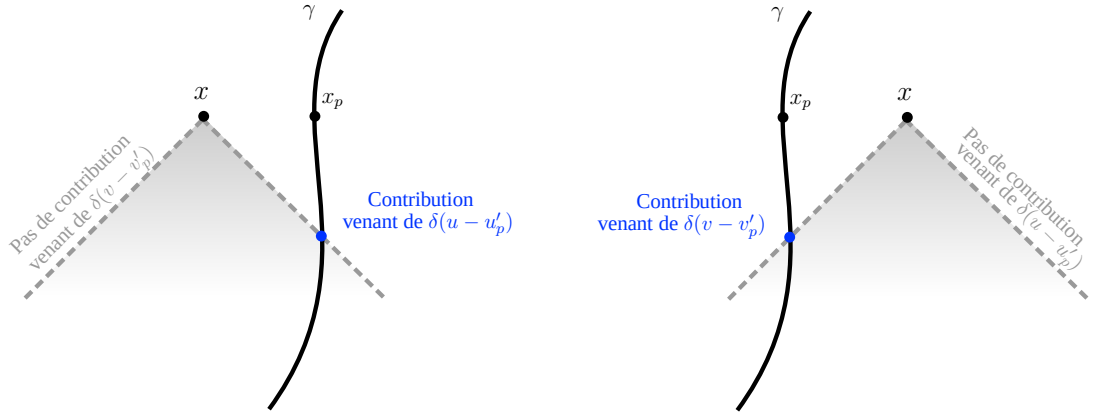


FIGURE 5.4: La valeur de la dérivée (5.65) dépendra de la façon dont on prend la limite à droite $r \rightarrow r_p^+$ ou à gauche $r \rightarrow r_p^-$ du point d'évaluation. En effet si $r \rightarrow r_p^-$ (configuration de gauche sur la figure) le terme faisant intervenir $\delta(v - v_p')$ dans (5.65) sera nul. De même si $r \rightarrow r_p^+$ (configuration de droite sur la figure) le terme faisant intervenir $\delta(u - u_p')$ dans (5.65) sera nul.

$$\begin{aligned} \underline{\omega}^+ &= 2\underline{X} \\ &= L\rho(r_p)(u - u_p') , \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \underline{\omega}^- &= 2\underline{Y} \\ &= L\rho(r_p)(v - v_p') . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Par changement de variable on a

$$\begin{aligned} \delta(\underline{\omega}^+) &= \delta(u - u'_p) \left| \frac{d\underline{\omega}^+}{du} \right|_{u=u'_p}^{-1} & \text{et} & & \delta(\underline{\omega}^-) &= \delta(v - v'_p) \left| \frac{d\underline{\omega}^-}{dv} \right|_{v=v'_p}^{-1} \\ &= L^{-1} \rho(r_p)^{-1} \delta(u - u'_p) , & & & &= L^{-1} \rho(r_p)^{-1} \delta(v - v'_p) . \end{aligned} \quad (5.64)$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dr'_p} [\mathcal{H}u'_p \mathcal{H}v'_p] = \pm L \rho(r_p) f(r'_p)^{-1} \delta(\underline{\omega}^\pm) . \quad (5.65)$$

A partir de (5.25), (5.55) et (5.59) on peut expliciter le premier terme de $G = \widehat{\mathcal{Q}}(r'_p) \widehat{G} - \widehat{\mathcal{F}}(r'_p) d\widehat{G}/dr'_p$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Q}}(r'_p) \widehat{G} &= 2\widehat{\mathcal{Q}}(r'_p) f(r'_p)^{-1} g(x, x'_p) \mathcal{H}(u - u'_p) \mathcal{H}(v - v'_p) \\ &= \frac{\kappa}{r'_p} \left\{ g_0 L^{-2} + g_1 L^{-3} + \left[g_2 + g_0 \left(\frac{9}{4} - \frac{4M}{r'_p} \right) \right] L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \right\} \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p} . \end{aligned} \quad (5.66)$$

De même pour le deuxième terme on commencera par donner le terme dérivé à partir de (5.25), (5.55) et (5.65)

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{G}}{dr'_p} &= \frac{d}{dr'_p} \left[2f^{-1}(r'_p) g \mathcal{H}(u - u'_p) \mathcal{H}(v - v'_p) \right] \\ &= \underbrace{-\frac{4M}{r_p'^2} f(r'_p)^{-2} g \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p}}_{d\widehat{G}_1(r'_p)} + \underbrace{2f(r'_p)^{-1} \frac{dg}{dr'_p} \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p}}_{d\widehat{G}_2(r'_p)} + \underbrace{2f(r'_p)^{-1} g \frac{d}{dr'_p} \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p}}_{d\widehat{G}_3(r'_p)} \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$d\widehat{G}_1(r'_p) = \left[-\frac{4M}{r_p'^2} f^{-2}(r'_p) g_0 + \mathcal{O}(L^{-1}) \right] \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p} , \quad (5.68)$$

$$d\widehat{G}_2(r'_p) = \left[2f(r'_p)^{-1} \frac{dg_0}{dr'_p} + 2f(r'_p)^{-1} \frac{dg_1}{dr'_p} L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-1}) \right] \mathcal{H}_{u'_p} \mathcal{H}_{v'_p} , \quad (5.69)$$

$$d\widehat{G}_3^\pm(r'_p) = \pm 2L \rho(r_p) f(r'_p)^{-2} g_0 \delta(\underline{\omega}^\pm) \pm 2\rho(r_p) f(r'_p)^{-2} g_1 \delta(\underline{\omega}^\pm) + \mathcal{O}(L^{-1}) . \quad (5.70)$$

Le terme (5.69) fait appel à la dérivée de $\underline{Z}$ calculée en (5.61) et la dérivée de $J_n(\underline{Z})$ dont on rappelle les propriétés ici

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\underline{Z}} [\underline{Z}^n J_n(\underline{Z})] &= \underline{Z}^n J_{n-1}(\underline{Z}) , \\ J_{-1}(\underline{Z}) &= -J_1(\underline{Z}) . \end{aligned} \quad (5.71)$$

En multipliant (5.67) par (5.58) on a au final

$$\widehat{\mathcal{F}}d\widehat{G}_1 = \kappa \frac{4M}{r_p^2} J_0(\underline{Z}) L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) , \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}d\widehat{G}_2 = & \kappa \rho(r_p) (\underline{\Delta r_p^*} - \underline{\Delta r_p'^*}) \frac{J_1(\underline{Z})}{\underline{Z}} L^{-3} + \frac{1}{2} \kappa \nu_1 \rho(r_p) (\underline{\Delta r_p^{2*}} - \underline{\Delta r_p'^{2*}}) J_0(\underline{Z}) L^{-4} \\ & + \frac{1}{2} \kappa \nu_1 \rho(r_p) \underline{Z} J_1(\underline{Z}) L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) , \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\widehat{\mathcal{F}}d\widehat{G}_3^\pm = \mp 2\kappa \rho(r_p) J_0(\underline{Z}) \delta(\underline{\omega}^\pm) L^{-3} \mp 2\kappa \rho(r_p) g_1 \delta(\underline{\omega}^\pm) L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) . \quad (5.74)$$

On injecte alors (5.66) et (5.72-5.74) dans (5.19) et on obtient $G(x, x_p)$ sous la forme d'une série entière de puissance $1/L$

$$G = G_0 L^{-2} + G_1^\pm L^{-3} + G_2^\pm L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) , \quad (5.75)$$

où les coefficients G_n dépendent de r à travers $\underline{\Delta r_p^*}$ et r_p' à travers $\underline{\Delta r_p'^*}$

$$G_0 = \frac{\kappa}{r_p'} J_0(\underline{Z}) , \quad (5.76)$$

$$G_1^\pm = \frac{\kappa}{r_p} \left[\frac{r_p}{r_p'} g_1 - 2f(r_p)^{1/2} (\underline{\Delta r_p^*} - \underline{\Delta r_p'^*}) \frac{J_1(\underline{Z})}{\underline{Z}} \pm 2J_0(\underline{Z}) \delta(\underline{\omega}^\pm) \right] , \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} G_2^\pm = & \frac{\kappa}{r_p} \left\{ \frac{r_p}{r_p'} g_2 + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r_p}{r_p'} \right) \left(9 - \frac{32M}{r_p'} \right) - \frac{1}{2} \nu_1 f(r_p)^{1/2} (\underline{\Delta r_p^{2*}} - \underline{\Delta r_p'^{2*}}) \right] J_0(\underline{Z}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \nu_1 f(r_p)^{1/2} \underline{Z} J_1(\underline{Z}) \pm 2g_1 \delta(\underline{\omega}^\pm) \right\} . \end{aligned} \quad (5.78)$$

Le développement de la fonction d'onde ψ pour de grandes valeurs de ℓ est accessible par intégration de (5.75) le long de la ligne d'univers. D'après (5.14), l'intégration se fait sur le temps propre τ , donc pour être capable d'intégrer G le long de la ligne d'univers il faut d'abord exprimer les coefficients G_n , évalués en $x = x_p$, en fonction du temps propre τ . Concrètement il s'agit de développer les G_n en puissances de τ autour du point d'évaluation $x_p'(\tau) = x_p$. On se propose de suivre la stratégie suivante :

- On évalue (5.75) au point d'évaluation $x = x_p$ en prenant $r \rightarrow r_p$ et $\underline{\Delta r_p^*} \rightarrow 0$. Tous les coefficients G_n seront alors fonction uniquement de r_p' et de r_p .
- On développe toutes les quantités dépendantes de r_p' en puissances de τ autour du point $r_p' = r_p$ c'est-à-dire autour de $\tau = 0$ jusqu'à l'ordre τ^2 . Ceci nous conduira à introduire une variable temporelle neutre $\underline{\tau} \propto L\tau$.
- A $\underline{\tau}$ constant, on trouve le développement de G en puissances de $1/L$ sous la forme

$$G = \tilde{G}_0(\underline{\tau}) L^{-2} + \tilde{G}_1^\pm(\underline{\tau}) L^{-3} + \tilde{G}_2^\pm(\underline{\tau}) L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \quad (5.79)$$

où les coefficients $\tilde{G}_n(\underline{\tau})$ dépendent explicitement du temps propre τ et de L à travers $\underline{\tau}$.

- L'intégration de G pour obtenir $\psi^{\ell \rightarrow \infty}(t, r_p)$ fera intervenir des termes proportionnels à $\underline{\tau}^k J_n(\underline{\tau})$, avec $k, n \in \mathbb{N}$, qui devront être traités avec précaution puisqu'ils conduisent à des intégrales impropres.
- L'ensemble de la procédure est applicable à $\partial_r G$ pour obtenir $\partial_r \psi^{\ell \rightarrow \infty}(t, r_p)$.

Fonction de Green G au point d'évaluation $x = x_p$

On reprend (5.76-5.78) en imposant $r \rightarrow r_p$ et $\underline{\Delta r}_p^* \rightarrow 0$

$$G_0 = \frac{\kappa}{r_p'} J_0(\underline{Z}) , \quad (5.80)$$

$$G_1^\pm = \frac{\kappa}{r_p} \left[\frac{r_p}{r_p'} g_1 - 2f(r_p)^{1/2} \underline{\Delta r}_p^* \frac{J_1(\underline{Z})}{\underline{Z}} \pm 2J_0(\underline{Z}) \delta(\underline{\omega}^\pm) \right] , \quad (5.81)$$

$$G_2^\pm = \frac{\kappa}{r_p} \left\{ \frac{r_p}{r_p'} g_2 + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r_p}{r_p'} \right) \left(9 - \frac{32M}{r_p'} \right) - \frac{1}{2} \nu_1 f(r_p)^{1/2} \underline{\Delta r}_p^{*2} \right] J_0(\underline{Z}) - \frac{1}{2} \nu_1 f(r_p)^{1/2} \underline{Z} J_1(\underline{Z}) \pm 2g_1 \delta(\underline{\omega}^\pm) \right\} , \quad (5.82)$$

avec

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{4} f_1 \underline{Z} J_1(\underline{Z}) \underline{\Delta r}_p^{*2} , \\ g_2 &= -\frac{1}{6} \underline{Z} J_1 \left[f_3 \underline{\Delta r}_p^{*2} + 3\nu_2 \right] + \frac{1}{96} \underline{Z}^2 J_2(\underline{Z}) \left[3\nu_1^2 \underline{\Delta r}_p^{*2} - 8f_3 \right] + \frac{1}{96} f_1^2 \underline{Z}^3 J_3(\underline{Z}) , \end{aligned} \quad (5.83)$$

où toutes les quantités $\underline{\omega}^\pm$, $\underline{Z}$, $\underline{\Delta r}_p^*$ sont prises en $r = r_p$.

Développement autour de $r_p' = r_p$

Toutes les quantités susceptibles de dépendre de r_p' et donc de τ dans les expressions (5.80-5.82) sont

$$\underline{\Delta r}_p^*, \quad 1/r_p', \quad \underline{Z} \quad \text{et} \quad J_n(\underline{Z}) . \quad (5.84)$$

Effectuer un développement autour de $r_p' = r_p$ correspond à un développement autour de $\tau = 0$ car $r_p = r_p'(\tau = 0)$. Soit $\Gamma(\tau)$, une des quantités listées dans (5.84), le développement de Taylor s'écrit

$$\Gamma = \Gamma(\tau = 0) + \frac{d\Gamma}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2\Gamma}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} \tau^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\Gamma}{d\tau^3} \Big|_{\tau=0} \tau^3 + \dots \quad (5.85)$$

où τ est une petite quantité telle que $\mathcal{O}(\tau) \sim \mathcal{O}(1/L)$. C'est pourquoi, là aussi, on introduit la variable temporelle neutre

$$\underline{\tau} = -L\tau . \quad (5.86)$$

A $\underline{\tau}$ constant on obtient le développement suivant

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1(\underline{\tau})L^{-1} + \Gamma_2(\underline{\tau})L^{-2} + \Gamma_3(\underline{\tau})L^{-3} + \dots \quad (5.87)$$

où les coefficients $\Gamma_n(\underline{\tau})$ dépendent de τ et de L uniquement via $\underline{\tau}$. Les coefficients $\Gamma_n(\underline{\tau})$ sont référencés dans le Tab. 5.2 pour chaque quantité listée dans (5.84). Certains termes

Γ	$\Gamma_0(\underline{\tau})$	$\Gamma_1(\underline{\tau})$	$\Gamma_2(\underline{\tau})$
$\underline{\Delta r_p'^*}$	$-f(r_p)^{1/2}\dot{r}_p^*\underline{\tau}$	$\frac{1}{2}f(r_p)^{1/2}r_p\ddot{r}_p'^*\underline{\tau}^2$	$-\frac{1}{6}f(r_p)^{1/2}r_p^2\dot{r}_p'^*\underline{\tau}^3$
$1/r_p'$	$\frac{1}{r_p}$	$\dot{r}_p'r_p^{-1}\underline{\tau}$	$\dot{r}_p'^2/r_p - \ddot{r}_p'/2\underline{\tau}^2$
$\underline{Z}$	$-\dot{s}\underline{\tau}$	$\frac{1}{2}r_p\ddot{s}\underline{\tau}^2$	$-\frac{1}{6}r_p^2\dot{s}\underline{\tau}^3$
$J_n(\underline{Z})$	$J_n(\underline{\tau})$	$\frac{1}{2}r_p\ddot{s}\frac{dJ_n(\underline{\tau})}{d\underline{\tau}}\underline{\tau}^2$	$\left[-\frac{1}{6}r_p^2\dot{s}\frac{dJ_n(\underline{\tau})}{d\underline{\tau}}\underline{\tau}^3 + \frac{1}{8}r_p^2\dot{s}^2\frac{d^2J_n(\underline{\tau})}{d\underline{\tau}^2}\underline{\tau}^4\right]$

TABLE 5.2: Coefficients de Taylor $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 L^{-1} + \Gamma_2 L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3})$ quand Γ est une des quantités listées dans (5.84)

de Tab. 5.2 ne sont pas explicitement écrits mais devront, en pratique, être ramenés à r_p et $\underline{\tau}$. La quadri-vitesse, la quadri-accélération et sa dérivée en coordonnée tortue sont

$$\begin{aligned} \dot{r}_p^* &= f(r_p)^{-1}\dot{r}_p , \\ \ddot{r}_p^* &= f(r_p)^{-2} \left(f(r_p)\ddot{r}_p - f'(r_p)\dot{r}_p^2 \right) , \\ \dot{\ddot{r}}_p^* &= f(r_p)^{-3} \left[(2f'(r_p)^2 - f''(r_p)f(r_p))\dot{r}_p^3 - f'(r_p)f(r_p)\dot{r}_p\ddot{r}_p + f(r_p)^2\dot{\ddot{r}}_p \right] . \end{aligned} \quad (5.88)$$

Où les primes indiquent une dérivation par rapport à r et le point une dérivée par rapport à τ . En utilisant

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = -f(r_p')\frac{du_p'}{d\tau}\frac{dv_p'}{d\tau} , \quad (5.89)$$

qui conduit à la relation de normalisation $\dot{u}_p\dot{v}_p = f(r_p)^{-1}$ puis en prenant ses dérivées successives par rapport à τ prises au point $r_p' = r_p$ on obtient $\ddot{u}_p\dot{v}_p + \dot{u}_p\ddot{v}_p = f'(r_p)^{-1}\dot{r}_p$ et $\dot{u}_p\dot{\ddot{v}}_p + 2\ddot{u}_p\dot{v}_p + \dot{u}_p\ddot{v}_p = f''(r_p)^{-1}\dot{r}_p^2 + f'(r_p)^{-1}\ddot{r}_p$. On peut écrire alors les dérivées de s

par rapport au temps propre et prises au point d'évaluation $\tau = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{s}(\tau = 0) &= -1 , \\
\ddot{s}(\tau = 0) &= \frac{1}{2}f'(r_p)f^{-1}(r_p)\dot{r}_p , \\
\dot{\ddot{s}}(\tau = 0) &= \frac{1}{16f(r_p)^2} \left[(8f''(r_p)f(r_p) - 13f'(r_p)^2)\dot{r}_p^2 + 8f'(r_p)f(r_p)\ddot{r} \right] + \frac{1}{4}f(r_p)\ddot{u}_p\ddot{v}_p .
\end{aligned} \tag{5.90}$$

On aura également besoin d'exprimer les dérivées de $J_n(\underline{\tau})$ par rapport à $\underline{\tau}$ pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_n(\underline{\tau})}{d\underline{\tau}} &= J_{n-1}(\underline{\tau}) - \frac{n}{\underline{\tau}}J_n(\underline{\tau}) \\
&= \frac{n}{\underline{\tau}}J_n(\underline{\tau}) - J_{n+1}(\underline{\tau}) ,
\end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2J_n(\underline{\tau})}{d\underline{\tau}^2} &= \frac{1}{2^2} \left[J_{n-2}(\underline{\tau}) - 2J_n(\underline{\tau}) + J_{n+2}(\underline{\tau}) \right] \\
&= J_n \left[\frac{n(n+1)}{\underline{\tau}^2} - 1 \right] + \frac{J_{n+1}}{\underline{\tau}} .
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Variable	Expression
$\underline{\Delta r}_p^*$	$L(r^* - r_p^*)$
$\underline{\Delta r}_p'^*$	$\rho(r_p)L(r_p'^* - r_p^*)$
$\underline{X}$	$1/2\rho(r_p)L(u - u'_p)$
$\underline{Y}$	$1/2\rho(r_p)L(v - v'_p)$
$\underline{Z}$	$\rho(r_p)L\sqrt{(u - u'_p)(v - v'_p)}$
$\underline{\omega}^+$	$2\underline{X}$
$\underline{\omega}^-$	$2\underline{Y}$
$\underline{\tau}$	$-L\tau$

TABLE 5.3: Liste des variables neutres utilisées et leurs expressions en fonction de L et des variables standards.

Calcul de $\psi^{\ell \rightarrow \infty}$ et de $\partial_r \psi^{\ell \rightarrow \infty}$

En introduisant les développements de (5.84) donnés par le Tab. 5.2 dans les coefficients (5.80-5.82) on finit par exprimer les coefficients de G en fonction du temps propre

$$G = \tilde{G}_0(\underline{\tau})L^{-2} + \tilde{G}_1^\pm(\underline{\tau})L^{-3} + \tilde{G}_2^\pm(\underline{\tau})L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \tag{5.93}$$

avec

$$\tilde{G}_0(\underline{\tau}) = \frac{\kappa}{r_p} J_0(\underline{\tau}) \quad (5.94)$$

$$\tilde{G}_1^\pm(\underline{\tau}) = \pm \frac{4\kappa\delta(\underline{\omega}^\pm)}{r_p} J_0(\underline{\tau}) - \frac{\kappa\nu_1 f(r_p)^{1/2} \dot{r}_p^* \dot{s}}{4r_p} \underline{\tau}^2 J_1(\underline{\tau}) - \frac{\kappa\ddot{s}}{2} \underline{\tau}^2 J_1(\underline{\tau}) - \frac{\kappa f(r_p) \dot{r}_p^*}{r_p} \underline{\tau} J_2(\underline{\tau}) \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2^\pm(\underline{\tau}) = & \frac{\kappa}{96r_p} \left\{ -12 \left[64M - 18r_p - 4f(r_p) \left(-2M + 2f(r_p)r_p + f(r_p)^{1/2}\nu_1 r_p \right) \dot{r}_p^{*2} \underline{\tau}^2 \right. \right. \\ & + r_p^2 \ddot{s} \left(f(r_p)^{1/2}\nu_1 \dot{r}_p^* \dot{s} + r_p \ddot{s} \right) \underline{\tau}^4 \left. \right] J_0(\underline{\tau}) \\ & + r_p \underline{\tau} \left[48\nu_2 \dot{s} - 24f(r_p)^{3/2}\nu_1 \dot{r}_p^{*2} \dot{s} \underline{\tau}^2 + 16f(r_p) \dot{r}_p^* (\nu_3 \dot{r}_p^* \dot{s} - 3r_p \ddot{s}) \underline{\tau}^2 \right. \\ & + 4r_p \underline{\tau} (4r_p \dot{s} \underline{\tau} \mp 24\delta(\underline{\omega}^\pm) \ddot{s} + 3r_p \ddot{s}^2 \underline{\tau}) \\ & + 12f(r_p)^{1/2}\nu_1 (4\dot{s} \mp 4\delta(\underline{\omega}^\pm) \dot{r}_p^* \dot{s} \underline{\tau} + r_p (\ddot{r}_p^* \dot{s} + \dot{r}_p^* (1 + \dot{s}) \ddot{s}) \underline{\tau}^2) J_1(\underline{\tau}) \\ & \left. \left. + (-8\nu_3 \dot{s}^2 + 48f(r_p)r_p (\ddot{r}_p^* + 2\dot{r}_p^* \ddot{s}) + 3f(r_p)\nu_1^2 \dot{r}_p^{*2} \dot{s}^2 \underline{\tau}^2) \underline{\tau} J_2(\underline{\tau}) - \nu_1^2 \dot{s}^3 \underline{\tau}^2 J_3(\underline{\tau}) \right] \right\} \quad (5.96) \end{aligned}$$

Ainsi on peut remarquer par exemple que $\tilde{G}_2^\pm$ est construit à partir des contributions venant des termes de $G_2^\pm$ en $\mathcal{O}(\underline{\tau}^0)$, des termes de $G_1^\pm$ en $\mathcal{O}(\underline{\tau}^1)$ et des termes de G_0 en $\mathcal{O}(\underline{\tau}^2)$. Toutes les quantités autres que $\underline{\tau}$ intervenant dans la formulation des $\tilde{G}_n(\underline{\tau})$ sont toutes évaluées en r_p . En reprenant la définition (5.14) on peut calculer l'intégrale de G selon $\underline{\tau}$

$$\begin{aligned} \psi^{\ell \rightarrow \infty}(x) &= \int_{-\infty}^{0^+} G(x, x_p(\tau)) d\tau \\ &= \frac{r_p}{L} \int_{0^-}^{+\infty} \tilde{G}(x, x_p(\hat{\tau})) d\hat{\tau} \\ &= \frac{r_p}{L} \int_{0^-}^{+\infty} \left(\tilde{G}_0(\hat{\tau}) L^{-2} + \tilde{G}_1(\hat{\tau}) L^{-3} + \tilde{G}_2(\hat{\tau}) L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \right) d\hat{\tau} \\ &= \underbrace{r_p \int_{0^-}^{+\infty} \tilde{G}_0(\hat{\tau}) L^{-3} d\hat{\tau}}_{\psi_{\text{OL}3}} + \underbrace{r_p \int_{0^-}^{+\infty} \tilde{G}_1(\hat{\tau}) L^{-4} d\hat{\tau}}_{\psi_{\text{OL}4}^\pm} + \mathcal{O}(L^{-5}) . \quad (5.97) \end{aligned}$$

Les intégrales intervenant dans (5.97) font intervenir en particulier des termes de la forme

$$\int_{0^-}^{+\infty} \underline{\tau}^k J_n(\underline{\tau}) d\underline{\tau} \quad k, n \in \mathbb{N} . \quad (5.98)$$

Cette intégrale diverge pour certaines valeurs de k et n . En effet, $J_n(\underline{\tau})$ suit le comportement asymptotique de la forme $J_n(\underline{\tau}) \approx \sqrt{2/\pi\underline{\tau}} \cos(\underline{\tau} - n\pi/2 - \pi/4)$ donc, pour de grandes valeurs de $\underline{\tau}$ positives, l'intégrand sera du type $\sqrt{2/\pi\underline{\tau}}^m \cos(\underline{\tau} - n\pi/2 - \pi/4)$ avec

$m = k - 1/2$. Afin de donner un sens (une valeur finie) à (5.98) on utilisera une nouvelle opération, introduite dans [184], qui a pour but de neutraliser les termes responsables de la divergence

$$\int_{0-}^{+\infty} \rightarrow \int_{0-}^{+\infty} . \quad (5.99)$$

La définition de l'intégrale "tilde" est donnée par la limite du même nom

$$\int_{0-}^{+\infty} := \widetilde{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{0-}^{\lambda} , \quad (5.100)$$

où la limite appliquée à une quantité K quelconque dépendante de λ est donnée par

$$\widetilde{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} K(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[K(\lambda) - \sum_j O_j(\lambda) \right] . \quad (5.101)$$

Les termes $O_j(\lambda)$ ont une forme oscillante multipliée par une loi de puissance $O_j(\lambda) = a_j \lambda^{b_j} \cos(c_j \lambda + d_j)$ avec $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$. La "limite tilde" apparaît donc comme la limite standard à laquelle on retranche tous les termes de type $O_j(\lambda)$ jusqu'à ce que la limite soit finie. Cette méthode est très bien détaillée et clairement justifiée dans le papier de Barack [184], on laissera donc le soin au lecteur de consulter cette référence si besoin (et plus particulièrement la partie III et l'annexe A). Brièvement, il est expliqué que lorsque l'on effectue l'intégration le long de la ligne d'univers il est permis (voir obligatoire) d'ignorer les termes qui divergent pour des $\underline{\tau}$ grands et qui s'écrivent comme un terme oscillant fois une puissance de $\underline{\tau}$. Techniquement, le résultat de $\int_{0-}^{+\infty} \underline{\tau}^k J_n(\underline{\tau}) d\underline{\tau}$ sera dépendant de la relation entre k et n . On donnera ici un exemple dans le cas où $0 \leq k \leq n$ afin de montrer comment la "limite tilde" agit concrètement sur la quantité à régulariser. Considérons $\mathcal{I}_n^k(\lambda)$ la primitive de la fonction $\lambda^k J_n(\lambda)$

$$\mathcal{I}_n^k(\lambda) := \int \lambda^k J_n(\lambda) d\lambda . \quad (5.102)$$

L'intégrant peut être réécrit tel que

$$\lambda^k J_n(\lambda) = \lambda^{k-n-1} \left[\lambda^{n+1} J_n(\lambda) \right] = \lambda^{k-n-1} \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda^{n+1} J_{n+1}(\lambda) \right] . \quad (5.103)$$

Puis par intégration par partie on obtient une relation de récurrence sur $\mathcal{I}_n^k(\lambda)$

$$\mathcal{I}_n^k(\lambda) = \lambda^k J_{n+1}(\lambda) - (k - n - 1) \mathcal{I}_{n+1}^{k-1}(\lambda) \quad (5.104)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{(n - k - 1 + 2j)!!}{(n - k - 1)!!} \lambda^{k-j} J_{n+1+j}(\lambda) \right] + \frac{(n + k - 1)!!}{(n - k - 1)!!} \mathcal{I}_{n+k}^0(\lambda) . \quad (5.105)$$

Ainsi lors du passage à la limite tilde, le terme de somme dans (5.105) disparaît car chaque terme de la somme est de la forme $O_j(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Le terme proportionnel à $\mathcal{I}_{n+k}^0(\lambda)$ est trivial puisque l'intégrale standard $\int_0^{+\infty} J_n(\lambda) d\lambda = 1 \ \forall n \geq 0$ est bien définie et de valeur finie. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \lambda^k J_n(\lambda) d\lambda = \frac{(n+k-1)!!}{(n-k-1)!!} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n. \quad (5.106)$$

En suivant le même raisonnement on peut donner les formules générales [184] selon les valeurs de k et n

$$\int_0^{+\infty} \underline{\tau}^k J_n(\underline{\tau}) d\underline{\tau} = \begin{cases} (n+k-1)!!/(n-k-1)!!, & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ (-1)^{(k-n)/2} (n+k-1)!!/(n-k-1)!!, & \text{si } k-n > 0 \text{ est pair,} \\ 0, & \text{si } k-n > 0 \text{ est impair} \end{cases} \quad (5.107)$$

En revenant au calcul de $\psi^{\ell \rightarrow \infty}$, l'évaluation de l'intégrale (5.97) se fait en remplaçant l'intégrale standard par une intégrale tilde. Le premier terme en $\mathcal{O}(L^{-3})$ est évident et donne

$$\psi_{\text{OL3}} = r_p \int_{0^-}^{+\infty} \frac{\kappa}{r_p} J_0(\underline{\tau}) d\underline{\tau} = \kappa. \quad (5.108)$$

Le terme en $\mathcal{O}(L^{-4})$ s'écrit

$$\psi_{\text{OL4}}^{\pm} = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{\kappa}{4} \left[\pm 8\delta(\underline{\omega}^{\pm}) J_0(\underline{\tau}) - \nu_1 f(r_p)^{1/2} \dot{r}_p^* \dot{\underline{\tau}}^2 J_1(\underline{\tau}) - 2\ddot{s} \underline{\tau}^2 J_1(\underline{\tau}) - 4f(r_p) \dot{r}_p^* \underline{\tau} J_2(\underline{\tau}) \right] d\underline{\tau} \quad (5.109)$$

avec $\delta(\underline{\omega}^{\pm}) = \delta(\underline{\tau}) |d\underline{\omega}^{\pm}/d\underline{\tau}|^{-1} = |f\dot{\omega}_{\mp}| \delta(\underline{\tau})$ (la deuxième égalité utilise la condition de normalisation). En utilisant les formules (5.107) l'intégrale se simplifie et peut être calculée

$$\begin{aligned} \psi_{\text{OL4}}^{\pm} &= \pm 2\kappa \int_{0^-}^{+\infty} |f\dot{\omega}_{\mp}| \delta(\underline{\tau}) J_0(\underline{\tau}) d\underline{\tau} - \kappa f(r_p) \dot{r}_p^* \int_{0^-}^{+\infty} \underline{\tau} J_2(\underline{\tau}) d\underline{\tau} \\ &= \pm 2\kappa |f\dot{\omega}_{\mp}|_{\tau=0} J_0(0) - \kappa f \dot{r}_p^* \frac{2!!}{0!!} \\ &= -2\kappa f \left[\dot{r}_p^* \mp \dot{\omega}_{\mp} \right] \\ &= \pm 2\kappa f \dot{t} \\ &= \pm 2\kappa \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Au final on obtient l'expression de la fonction ψ sur la ligne d'univers pour de grands modes $\ell \rightarrow \infty$. En réalité il s'agit plus précisément des quantités $\psi^{\pm}(t, r_p)$ déjà définies

en (4.18) et (4.20)

$$\psi^{\pm\ell\rightarrow\infty} = \kappa \left[L^{-3} \pm 2\mathcal{E}L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \right]. \quad (5.111)$$

En repartant des équations (5.76-5.78), le même calcul peut être effectué pour obtenir le comportement de $\partial_r \psi^\ell$ pour $\ell \rightarrow \infty$. Il suffit au préalable de dériver par rapport à r les coefficients (5.76-5.78) puis de suivre la même procédure que pour ψ^ℓ . Le résultat final est donné par

$$\partial_r \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty} = \frac{\kappa}{r_p} f(r_p)^{-1} \left[\mp \mathcal{E}L^{-2} - \frac{3}{2} \mathcal{E}^2 L^{-3} \pm \left(\frac{6M}{r_p} - \frac{9}{4} \right) \mathcal{E}L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \right]. \quad (5.112)$$

Calcul de $\partial_t^n \partial_r^m \psi^{\ell\rightarrow\infty}(x_p)$ pour $n + m \leq 3$

Pour la dérivée temporelle on peut utiliser la relation (4.6) sur les dérivées

$$\partial_t \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty} = -\mathring{r}_p \partial_r \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty}. \quad (5.113)$$

Pour le calcul des dérivées suivantes on pourrait reprendre tout le calcul comme cela a été fait pour $\partial_r \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty}$ en prenant les dérivées successives des coefficients G_n , cependant il y a moyen d'éviter beaucoup (énormément) de calculs en réutilisant les relations vues lors du calcul des conditions de saut d'ordre supérieur ou égale à 2. En effet le point de départ pour ces relations est de considérer l'égalité $\mathcal{Z}[\psi^+ - \psi^-] = 0$ ou une différentiation de cette égalité par rapport à r (voir section 4.2). Donc pour obtenir une relation sur $\partial_r^2 \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty}$, $\partial_r \partial_t \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty}$ et $\partial_t^2 \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty}$ on considérera $\mathcal{Z} \psi^{\pm\ell\rightarrow\infty} = 0$. On obtiendra alors les mêmes relations que pour les conditions de saut mais appliquées à $\psi^{\pm\ell\rightarrow\infty}$. Par exemple

$$\partial_r^2 \psi^\pm = \frac{1}{f(r_p)^2 - \mathring{r}_p^2} \left[\frac{d}{dt} \partial_t \psi^\pm - f(r_p) f'(r_p) \partial_r \psi^\pm - \mathring{r}_p \frac{d}{dt} \partial_r \psi^\pm + V(r_p) \psi^\pm \right], \quad (5.114)$$

(on a pas écrit l'exposant $\ell \rightarrow \infty$ pour alléger l'expression). Pour les dérivées troisièmes $\partial_r^3 \psi^\pm$, $\partial_r^2 \partial_t \psi^\pm$, $\partial_r \partial_t^2 \psi^\pm$ et $\partial_t^3 \psi^\pm$ on considérera la dérivée de $\mathcal{Z} \psi^\pm = 0$ par rapport à r .

Au final on obtient les relations suivantes

$$\partial_r \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p} f(r_p)^{-1} \left[\mp \mathcal{E} L^{-2} - \frac{3}{2} \mathcal{E}^2 L^{-3} \pm \left(\frac{6M}{r_p} - \frac{9}{4} \right) \mathcal{E} L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \right] \quad (5.115a)$$

$$\partial_r^2 \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p^2} f(r_p)^{-2} \left[\mathcal{E}^2 L^{-1} \pm \left(2 - \frac{3M}{r_p} \right) \mathcal{E} L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right] \quad (5.115b)$$

$$\partial_r^3 \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p^3} f(r_p)^{-3} \left\{ \mp \mathcal{E}^3 + \mathcal{E}^2 \left[\frac{5}{2} \mathcal{E}^2 + \frac{9M}{r_p} - 6 \right] L^{-1} \mp 3\mathcal{E} \left[\frac{7M}{r_p} \left(\frac{M}{r_p} - 1 \right) + 2 \right] L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right\} \quad (5.115c)$$

$$\partial_t \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p} \left[\pm \dot{r}_p L^{-2} + \frac{3}{2} \mathcal{E} \dot{r}_p L^{-3} \mp \left(\frac{6M}{r_p} - \frac{9}{4} \right) \dot{r}_p L^{-4} + \mathcal{O}(L^{-5}) \right] \quad (5.115d)$$

$$\partial_t^2 \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p^2} \left[(\mathcal{E}^2 - f(r_p)) L^{-1} \mp \frac{\mathcal{E}}{2r_p} L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right] \quad (5.115e)$$

$$\partial_t^3 \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p^3 f(r_p)} \left\{ \mp \mathcal{E} (\mathcal{E}^2 - f(r_p)) + \frac{\mathcal{E}^2 \dot{r}_p}{2r_p} [16M + 5r_p(\mathcal{E}^2 - 1)] L^{-1} \right. \\ \left. \pm \frac{\mathcal{E} \dot{r}_p}{r_p^2} (3M^2 - 2Mr_p) L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right\} \quad (5.115f)$$

$$\partial_r \partial_t \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p^2 f(r_p)} \left[-\mathcal{E} \dot{r}_p L^{-1} \pm \left(\frac{3M}{r_p} - 1 \right) \dot{r}_p L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right] \quad (5.115g)$$

$$\partial_r \partial_t^2 \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p^3 f(r_p)} \left\{ \mp \mathcal{E} (\mathcal{E}^2 - f(r_p)) + \frac{1}{2r_p^2} \left[(5\mathcal{E}^4 - 9\mathcal{E}^2 + 4) r_p^2 + (24M\mathcal{E}^2 - 20M) r_p + 6 \right] L^{-1} \right. \\ \left. \pm \frac{\mathcal{E}}{r_p^2} (Mr_p - 3M^2) L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3}) \right\} \quad (5.115h)$$

$$\partial_r^2 \partial_t \psi^\pm = \frac{\kappa}{r_p^3} f(r_p)^{-2} \left\{ \pm \mathcal{E}^2 \dot{r}_p - \mathcal{E} \dot{r}_p \left[\frac{5}{2} \mathcal{E}^2 + \frac{9M}{r_p} - 4 \right] L^{-1} \pm \dot{r}_p \left[\frac{3M}{r_p} \left(\frac{5M}{r_p} - 4 \right) + 2 \right] L^{-2} \right. \\ \left. + \mathcal{O}(L^{-3}) \right\} \quad (5.115i)$$

On a pas écrit l'exposant $\ell \rightarrow \infty$ mais bien entendu ces expressions sont valables pour de grandes valeurs de ℓ . Il est maintenant possible de donner le comportement asymptotique pour $\ell \rightarrow \infty$ pour les fonctions de perturbations H_1 et H_2 à partir des

relations (3.96) et (3.95) (vues à la section 3.4.1) et leurs dérivées premières

$$H_1 = -\kappa \left[\frac{\mathcal{E}^2 \dot{r}_p}{r_p f(r_p)^2} L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right] \quad (5.116a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t H_1^\pm = \frac{\kappa}{r_p^2 f(r_p)} \Big\{ \mp \mathcal{E} (\mathcal{E}^2 - f(r_p)) \\ + \frac{\kappa}{2r_p^2} \left[(5\mathcal{E}^4 - 7\mathcal{E}^2 + 2)r_p^2 + (18M\mathcal{E}^2 - 10M)r_p + 12M^2 \right] L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \Big\} \end{aligned} \quad (5.116b)$$

$$\partial_r H_1^\pm = \frac{\kappa}{r_p^2 f(r_p)^3} \left\{ \mp \dot{r}_p \mathcal{E}^3 - \frac{\kappa \mathcal{E}^2 \dot{r}_p}{2r_p^2 f(r_p)} \left[(5\mathcal{E}^2 - 4)r_p^2 + (8 - 5\mathcal{E}^2)2Mr_p - 16M^2 \right] L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right\} \quad (5.116c)$$

$$H_2 = \kappa \left[\frac{1}{2r_p f(r_p)} (2\mathcal{E}^2 - f(r_p)) L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right] \quad (5.116d)$$

$$\partial_t H_2^\pm = \frac{\kappa}{2r_p^2 f(r_p)^2} \left\{ \pm \mathcal{E} \dot{r}_p (2\mathcal{E}^2 - f(r_p)) - \frac{\mathcal{E}^2 \dot{r}_p}{2r_p f(r_p)} \left[(10\mathcal{E}^2 - 9)r_p + 26M \right] L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right\} \quad (5.116e)$$

$$\begin{aligned} \partial_r H_2^\pm = \frac{\kappa}{2r_p^2 f(r_p)^2} \Big\{ \mp \mathcal{E} (2\mathcal{E}^2 - f(r_p)) \\ + \frac{1}{2r_p^2 f(r_p)} \left[(10\mathcal{E}^4 - 13\mathcal{E}^2 + 2)r_p^2 + (26M\mathcal{E}^2 - 4)2Mr_p + 8M^2 \right] L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \Big\} \end{aligned} \quad (5.116f)$$

Les expressions (5.116a) et (5.116a) confirment bien le fait que même dans le régime $\ell \rightarrow \infty$, les modes des fonctions de perturbation sont continus à la position de la particule (voir section 4.5). On peut également donner les expressions pour K même si en pratique on ne les utilisera pas

$$K^\pm = \kappa \left[\frac{1}{2r_p} L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right] \quad (5.116g)$$

$$\partial_t K = \frac{\kappa \dot{r}_p}{2f(r_p)r_p^2} \left[\pm \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}^2}{2} L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right] \quad (5.116h)$$

$$\partial_r K^\pm = \frac{\kappa}{2f(r_p)r_p^2} \left[\mp \mathcal{E} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{2} - f \right) L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right] \quad (5.116i)$$

$$\begin{aligned} \partial_{tr} K^\pm = \frac{\kappa \dot{r}_p}{2f(r_p)^2 r_p^3} \Big\{ -\mathcal{E}^2 L \\ \pm \mathcal{E} \left[5M - 2r_p \mathcal{E} (1 - \mathcal{E}) \right] - \frac{\mathcal{E}^2}{2f r_p} \left(17M + 4r_p \mathcal{E}^2 - 11r_p \right) L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}) \Big\} \end{aligned} \quad (5.116j)$$

Calcul des paramètres de régularisation

On rappelle que les modes de la force retardée s'écrivent à partir des modes du champ retardé via la relation

$$F_{\text{ret}}^{\alpha\ell} = -\frac{1}{2}m_0 \left(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta \right) \left(2\nabla_\delta h_{\beta\gamma}^{\text{ret}\ell} - \nabla_\alpha h_{\gamma\delta}^{\text{ret}\ell} \right) u^\gamma u^\delta, \quad (5.117)$$

où $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}\ell}$ est donné par

$$h_{\alpha\beta}^{\text{ret}\ell} = \begin{pmatrix} f(r)H_2^\ell & H_1^\ell \\ H_1^\ell & f(r)^{-1}H_2^\ell \end{pmatrix} Y^{\ell 0}, \quad (5.118)$$

avec $Y^{\ell 0} = \sqrt{(2\ell+1)/4\pi} = \sqrt{L/2\pi}$. En $r = r_p(t)$, la relation entre la force retardée et les fonctions de perturbations $H_{1,2}^\ell$ pour chaque mode est alors donnée explicitement par

$$F_{\text{ret}}^{\alpha\ell} = -\frac{m_0}{2f} \left[f_0^\alpha \left(\frac{\partial H_2^\ell}{\partial t} - \frac{df}{dr} H_1^\ell \right) + f_1^\alpha \left(\frac{\partial H_1^\ell}{\partial t} - \frac{df}{dr} H_2^\ell \right) + f_2^\alpha \frac{\partial H_2^\ell}{\partial r} + f_3^\alpha \frac{\partial H_1^\ell}{\partial r} \right] Y^{\ell 0}. \quad (5.119)$$

Les fonctions $f_{i=0,1,2,3}^\alpha$ sont définies sur la trajectoire telles que

$$\begin{aligned} f_0^t(r_p) &= f(r_p)\dot{t}^2 [f(r_p)\dot{t}^2 - 1] + \dot{r}_p^2 f(r_p)^{-1} [f(r_p)\dot{t}^2 + 1] \\ f_1^t(r_p) &= 2f(r_p)\dot{r}_p\dot{t}^3 \\ f_2^t(r_p) &= \dot{r}_p^2 [\dot{r}_p^2 + f(r_p)^2\dot{t}^2 - 2f(r_p)] \\ f_3^t(r_p) &= 2\dot{r}_p^2 [f(r_p)\dot{t}^2 - 1] \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$\begin{aligned} f_0^r(r_p) &= \dot{r}_p\dot{t} [\dot{r}_p^2 + f(r_p)^2\dot{t}^2 + 2f(r_p)] \\ f_1^r(r_p) &= 2f(r_p)\dot{t}^2 [f(r_p) + \dot{r}_p^2] \\ f_2^r(r_p) &= \dot{r}_p^2 [\dot{r}_p^2 + f(r_p)] + f(r_p)^2\dot{t}^2 [\dot{r}_p^2 - f(r_p)] \\ f_3^r(r_p) &= 2f(r_p)\dot{r}_p^3\dot{t} \end{aligned} \quad (5.121)$$

avec $\dot{t} = dt/d\tau$ et $\dot{r}_p = dr_p/d\tau$. Les modes de la force propre définis à la section 2.3 $F_{\text{self}}^{\alpha\ell} = F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell} - F_{\text{sing}\pm}^{\alpha\ell}$ nécessitent le calcul de la partie singulière $F_{\text{sing}\pm}^{\alpha\ell}$ que l'on associe ici, d'après la méthode de régularisation Mode-Sum, à $F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell \rightarrow \infty}$. Ainsi en injectant les développements trouvés aux équations (5.116) dans l'expression (5.119) on obtient

$$\lim_{x \rightarrow x_p} F_{\text{sing}\pm}^{\alpha\ell} = F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell \rightarrow \infty}(r_p) = A_\pm^\alpha L + B^\alpha + C^\alpha L^{-1} + \mathcal{O}(L^{-2}). \quad (5.122)$$

avec

$$A_{\pm}^r = \mp \frac{m_0^2}{r_p^2} \mathcal{E}, \quad A_{\pm}^t = \mp \frac{m_0^2 \dot{r}_p^2}{r_p^2 f(r_p)}, \quad B^r = -\frac{m_0^2}{2r_p^2} \mathcal{E}^2, \quad B^t = -\frac{m_0^2 \dot{r}_p}{2r_p^2 f(r_p)} \mathcal{E}, \quad C^\alpha = 0. \quad (5.123)$$

où $\dot{t} = \mathcal{E}/f(r_p)$ et $\dot{r}_p = \sqrt{\mathcal{E}^2 - f(r_p)}$. Les coefficients A^α , B^α , C^α sont les paramètres de régularisation indépendant de ℓ qui nous permettent de compléter le schéma de régularisation Mode-Sum

$$F_{\text{self}}^\alpha(r_p) = \sum_{\ell=0}^{\infty} F_{\text{self}}^{\alpha\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell}(r_p) - A_{\pm}^\alpha L - B^\alpha - C^\alpha L^{-1} \right], \quad (5.124)$$

où chaque mode est donné par

$$F_{\text{self}}^{\alpha\ell}(r_p) = F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell}(r_p) - A_{\pm}^\alpha L - B^\alpha - C^\alpha L^{-1}. \quad (5.125)$$

Le paramètre résiduel D^α (voir section 2.3.1) est également nul [101][54] et n'apparaît donc pas dans l'équation (5.124)

$$D^\alpha = C^\alpha = 0. \quad (5.126)$$

Les paramètres de régularisation donnés en (5.123) décrivent le comportement asymptotique des modes de la force retardée par rapport à ℓ dans la jauge de RW et leur expression littérale est identique aux paramètres de régularisation calculés dans la jauge harmonique [101] via une méthode différente. Cette caractéristique résonne avec la prédiction faite par Barack et Ori [53] concernant l'invariance de jauge des paramètres de régularisation que l'on a évoqué à la section précédente. On rappelle que seules les orbites radiales ont le privilège d'avoir accès à la force propre calculée en jauge de RW [53] et que concrètement on peut résumer la régularisation Mode-Sum dans cette jauge en deux étapes : (i) On calcule numériquement les modes de la force retardée en résolvant l'équation de RWZ; (ii) On calcule les paramètres de régularisation et on applique l'équation (5.124). Toutefois, comme on l'a mentionné au chapitre 3, le formalisme de RW n'est valable que pour les modes $\ell \geq 2$. Il n'y a pas d'équation d'onde scalaire pour les modes $\ell = 0$ et $\ell = 1$, il faut donc les calculer autrement ou en trouver (si possible) une expression analytique.

5.2.2 Mode $\ell = 0$

Dans la section 3.3.6 la discussion sur les modes $\ell = 0$ et $\ell = 1$ a déjà été faite. Zerilli [26] a montré que le monopôle $\ell = 0$ était physiquement lié à une variation du paramètre de masse et le dipôle $\ell = 1$ est associé à une variation de moment angulaire du système. Le dipôle est naturellement nul dans le cas radial et peut être annulé dans le cas général

par changement de jauge. Il est donc seulement nécessaire de trouver une expression du monopôle satisfaisante à injecter dans la formule (5.12). Pour une orbite radiale il est possible d'obtenir une solution analytique de $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell=0}$.

En reprenant le changement de jauge $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi_{\ell=0}^\alpha$ considéré à la section 3.3.6 avec

$$\xi_{\ell=0}^\alpha = \left(M_0(t, r), M_1(t, r), 0, 0 \right) Y^{00}, \quad (5.127)$$

la métrique se transforme comme $h_{\alpha\beta}^{(G')} \rightarrow h_{\alpha\beta}^{(G)} + \nabla_\alpha \xi_{\ell=0}^\alpha + \nabla_\beta \xi_{\ell=0}^\alpha$ et les fonctions de perturbation sont reliées à la nouvelle jauge (G') par [133]

$$H_0^{\ell=0(G')} = H_0^{\ell=0(G)} + 2 \frac{\partial}{\partial t} M_0^{(G) \rightarrow (G')} + \frac{2M}{r^2 f(r)} M_1^{(G) \rightarrow (G')}, \quad (5.128)$$

$$H_1^{\ell=0(G')} = H_1^{\ell=0(G)} - f(r)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} M_1^{(G) \rightarrow (G')} + f(r) \frac{\partial}{\partial r} M_1^{(G) \rightarrow (G')}, \quad (5.129)$$

$$H_2^{\ell=0(G')} = H_2^{\ell=0(G)} - 2 \frac{\partial}{\partial r} M_1^{(G) \rightarrow (G')} + \frac{2M}{r^2 f(r)} M_1^{(G) \rightarrow (G')}, \quad (5.130)$$

$$K^{\ell=0(G')} = H^{\ell=0(G)} - \frac{2}{r} M_1^{(G) \rightarrow (G')}. \quad (5.131)$$

Jauge G1 (jauge de Zerilli)

Les deux degrés de liberté de jauge M_0 et M_1 peuvent être exigés tels que $H_1^{\ell=0(G1)} = K^{\ell=0(G1)} = 0$. C'est la jauge de Zerilli [26] que l'on notera (G1) et pour laquelle on trouve

$$\begin{aligned} F_{\text{ret}}^{t\ell=0} = \frac{m_0}{4f(r)^2} & \left[2f'(r)f(r)^2 \dot{r}_p \dot{t}_p^3 \left(H_2^{\ell=0(G1)}(t, r) + H_0^{\ell=0(G1)}(t, r) \right) \right. \\ & - \left(f(r)^3 \dot{t}_p^4 + f(r) \dot{r}_p^2 \dot{t}_p^2 - f(r)^2 \dot{t}_p^2 + \dot{r}_p^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} H_0^{\ell=0(G1)}(t, r) \\ & \left. - f(r) \dot{r}_p \dot{t}_p \left(f(r)^2 \dot{t}_p^2 + \dot{r}_p^2 - 2f(r) \right) \frac{\partial}{\partial r} H_0^{\ell=0(G1)}(t, r) \right] \end{aligned} \quad (5.132)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{ret}}^{r\ell=0} = \frac{m_0}{4f(r)} & \left[2f'(r)f(r)(\dot{r}_p^2 + f(r)\dot{t}_p^2) \left(H_2^{\ell=0(G1)}(t, r) + H_0^{\ell=0(G1)}(t, r) \right) \right. \\ & \left(-f(r)^2 \dot{r}_p^2 \dot{t}_p^2 + f(r)^3 \dot{t}_p^2 - \dot{r}_p^4 - f(r) \dot{r}_p^2 \right) \frac{\partial}{\partial r} H_0^{\ell=0(G1)}(t, r) \\ & \left. - \dot{r}_p \dot{t}_p \left(f(r)^2 \dot{t}_p^2 + \dot{r}_p^2 + 2f(r) \right) \frac{\partial}{\partial t} H_0^{\ell=0(G1)}(t, r) \right] \end{aligned} \quad (5.133)$$

où

$$H_2^{\ell=0(\text{G1})} = 8\pi m_0 \mathcal{E} \frac{1}{rf(r)} Y^{00*}(0,0) \mathcal{H}(r - r_p(t)) , \quad (5.134)$$

$$H_0^{\ell=0(\text{G1})} = 8\pi m_0 \mathcal{E} \left[\frac{1}{rf(r)} - \frac{1}{r_p f(r_p)} - \frac{1}{r_p f(r_p)^3} \left(\frac{dr_p}{dt} \right)^2 \right] Y^{00*}(0,0) \mathcal{H}(r - r_p(t)) . \quad (5.135)$$

Au regard des Figs. 5.9 et 5.11, la jauge de Zerilli (G1) est pathologique en approchant l'horizon et ne sera pas utilisée pour le calcul de l'auto-accélération. Il est cependant possible de définir une autre condition de jauge satisfaisante.

Jauge G2

Les deux degrés de liberté de jauge M_0 et M_1 peuvent être choisis tels que $H_0^{\ell=0(\text{G2})} = H_1^{\ell=0(\text{G2})} = H_2^{\ell=0(\text{G2})} = H^{\ell=0(\text{G2})}$ et $K^{\ell=0(\text{G2})} = 0$. On obtient la solution pour le monopôle de la force retardée qui suit le comportement des modes $\ell \geq 2$ (voir Figs. 5.9 et 5.11)

$$\begin{aligned} F_{\text{ret}}^{\ell=0} = & -\frac{m_0}{2f(r)^2} \left(f(r)\dot{t}_p + \dot{r}_p \right) \left[\left(f(r)^2 \dot{t}_p^3 + f(r)\dot{r}_p \dot{t}_p^2 - f(r)\dot{t}_p + \dot{r}_p \right) \frac{\partial}{\partial t} H^{\ell=0(\text{G2})}(t, r) \right. \\ & + f(r)\dot{r}_p \left(f(r)\dot{t}_p^2 + \dot{r}_p \dot{t}_p - 2 \right) \frac{\partial}{\partial r} H^{\ell=0(\text{G2})}(t, r) \\ & \left. - f'(r) \left(f(r)^2 \dot{t}_p^3 + f(r)\dot{r}_p \dot{t}_p^2 - f(r)\dot{t}_p + \dot{r}_p \right) H^{\ell=0(\text{G2})}(t, r) \right] \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{ret}}^{r\ell=0} = & -\frac{m_0}{2f} \left(f(r)\dot{t}_p + \dot{r}_p \right) \left[\dot{t}_p \left(f(r)\dot{r}_p \dot{t}_p + \dot{r}_p^2 + 2f(r) \right) \frac{\partial}{\partial t} H^{\ell=0(\text{G2})}(t, r) \right. \\ & + \left(f(r)\dot{r}_p^2 \dot{t}_p - f(r)^2 \dot{t}_p + \dot{r}_p^3 + f(r)\dot{r}_p \right) \frac{\partial}{\partial r} H^{\ell=0(\text{G2})}(t, r) \\ & \left. - f'(r)\dot{t}_p \left(f(r)\dot{r}_p \dot{t}_p + \dot{r}_p^2 + 2f(r) \right) H^{\ell=0(\text{G2})}(t, r) \right] \end{aligned} \quad (5.137)$$

avec

$$H^{\ell=0(\text{G2})} = 8\pi m_0 \mathcal{E} \frac{1}{rf(r)} Y^{*00}(0,0) \mathcal{H}(r - r_p(t)) . \quad (5.138)$$

5.2.3 Modes $\ell \gg 0$

En pratique les modes de la force propre seront calculés jusqu'à un ordre ℓ_{max} déterminé (voir le critère sur la détermination de ℓ_{max} à la section 5.5.2). La série s'écrit en réalité

$$F_{\text{self}}^\alpha = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\ell_{\text{max}}} F_{\text{self}}^{\alpha\ell}}_{\text{numérique}} + \underbrace{\sum_{\ell=\ell_{\text{max}}+1}^{\infty} F_{\text{self}}^{\alpha\ell \rightarrow \infty}}_{\text{analytique}} . \quad (5.139)$$

Les modes supérieurs $\ell_{\max}$ seront approchés analytiquement par la quantité $F_{\text{self}}^{\alpha\ell\rightarrow\infty}$ qui correspond en fait à la contribution en $\mathcal{O}(L^{-2})$ contenue dans l'équation (5.122). Concrètement ce terme est calculé en reprenant la procédure de la section 5.2.1 mais en gardant l'ordre supérieur du développement de la fonction de Green à l'équation (5.75). De cette façon on obtient

$$F_{\text{self}}^{t\ell\rightarrow\infty} = \frac{15}{16} \frac{m_0^2 \mathcal{E}}{r_p^2 f(r_p)} \dot{r}_p \left(2r_p \ddot{r}_p - \dot{r}_p^2 \right) L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-4}) , \quad (5.140)$$

$$F_{\text{self}}^{r\ell\rightarrow\infty} = -\frac{15}{16} \frac{m_0^2 \mathcal{E}^2}{r_p^2} \left(\mathcal{E}^2 + \frac{4M}{r_p} - 1 \right) L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-4}) , \quad (5.141)$$

qui permettent de donner un sens aux contributions de la force propre contenus dans les modes d'ordres élevés (où $\dot{r}_p = dr_p/dt$). On ne donnera pas le calcul explicite de (5.140) et de (5.141) car il correspond exactement au calcul effectué à la section 5.2.1, mais pour un ordre supérieur¹. Notons quand même que nous confirmons pour la première fois, par ce calcul, les formules 6a et 6b de [54].

5.3 Résultats

Dans cette section on reprendra le schéma numérique à l'ordre 4 défini dans le chapitre 4 pour lequel la formulation explicite des conditions de saut de la fonction d'onde et de ses dérivées est donnée en annexe B. Contrairement au chapitre 4 où on s'intéressait au rayonnement produit à l'infini, ici on regardera la valeur du champ localement. Il s'agit de résoudre l'équation de RWZ dans le cas d'une orbite radiale et d'extraire la valeur du champ à la position de la particule au cours du mouvement. Ces données nous permettront alors de construire

- les fonctions de perturbations de la métrique retardée à partir des équations (3.96) et (3.95) et leurs dérivées,
- la force retardée calculée à partir des équations (5.119),
- l'auto-accélération régularisée intervenant dans l'équation du mouvement perturbé calculée à partir de l'équation (5.176).

En connaissant maintenant le comportement asymptotique pour de grands modes de toutes les quantités citées précédemment, on pourra tester la robustesse et la validité du code en confrontant les calculs numériques pour de grands modes ℓ aux équations (5.115) et (5.116). De même, en connaissant les paramètres de régularisation (5.123) il sera possible d'appliquer la régularisation Mode-Sum dans la jauge de RW, de calculer la force propre F_{self}^α et l'auto-accélération a_{self} .

¹dans ce cas l'expression du coefficient $\tilde{G}_3^\pm(\mathcal{I})$ suivant le coefficient (5.96) devient horriblement compliquée et longue, assez pour s'en épargner l'écriture dans un document tel que celui-ci

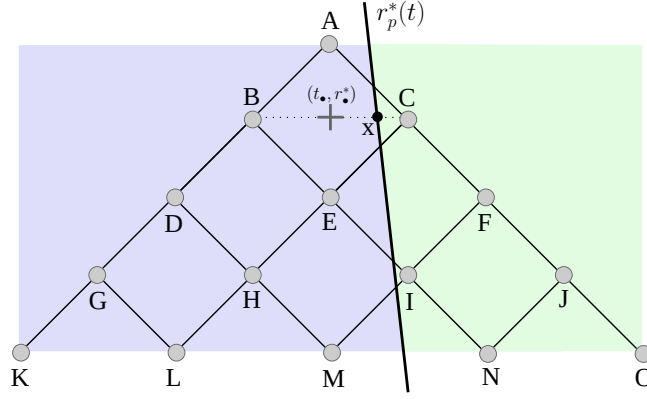


FIGURE 5.5: Stencil utilisé pour l'interpolation de ψ à la position de la particule (t_x, r_x^*) . On considérera 15 points de colocations et 15 relations de saut pour définir les 30 coefficients $p_{(n,m)}^\pm$, $n+m \leq 4$ du polynôme d'interpolation ramené au point central de la cellule (t_0, r_0^*) (voir équation (5.5)).

5.3.1 Fonction d'onde à la position de la particule

L'idée est d'approcher la fonction ψ à la position de la particule (t_x, r_x^*) par un polynôme $P(t, r^*)$ d'ordre 4 en (t, r^*) ramené au point $(t_\bullet, r_\bullet^*)$ (voir Fig. 5.5)

$$\psi(t, r^*) \approx P(t, r^*) = \sum_{n+m \leq 4} \frac{p_{(n,m)}}{n!m!} (r^* - r_\bullet^*)^n (t - t_\bullet)^m, \quad (5.142)$$

Le stencil d'interpolation utilisé contient 15 points répartis dans le cône lumière passé du point A (inclus cette fois-ci) donc $\Delta = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O\}$ (voir Fig. 5.5). Cependant, comme ψ est discontinue en r_p , on cherchera plutôt à approcher $\psi^+(t, r^*)$ et $\psi^-(t, r^*)$ tels que définis dans (4.18) et (4.20) par deux polynômes d'interpolation $P^+(t, r^*)$ et $P^-(t, r^*)$

$$\psi^\pm(t, r^*) \approx P^\pm(t, r^*) = \sum_{n+m \leq 4} \frac{p_{(n,m)}^\pm}{n!m!} (r^* - r_\bullet^*)^n (t - t_\bullet)^m. \quad (5.143)$$

On prendra ensuite $(t, r^*) = (t_x, r_x^*)$ pour enregistrer la valeur de $P^\pm(t_x, r_x^*) \approx \psi^\pm(t_x, r_p^*(t_x))$. Afin de déterminer les 30 coefficients d'interpolation $p_{(n,m)}^\pm$ on possède :

- 15 relations grâce aux points de collocation

$$P^\pm(t_i, r_i^*) = \psi^\pm(t_i, r_i^*) \quad \forall i \in \Delta \quad (5.144)$$

- 15 relations de saut

$$\partial_{r^*}^n \partial_t^m P^+(t_x, r_x) - \partial_{r^*}^n \partial_t^m P^-(t_x, r_x) = \left[\partial_{r^*}^n \partial_t^m \psi \right]_x \quad \forall n, m \mid n+m \leq 4. \quad (5.145)$$

Les coefficients $p_{(n,m)}^\pm$ sont ainsi déterminés de façon unique. Concernant l'erreur d'approximation, on peut estimer que si la fonction ψ est calculée par un schéma d'ordre 4 alors l'interpolation (5.143) permet d'obtenir au mieux une précision d'ordre 1 sur les fonctions de perturbation de la métrique H_1^ℓ et H_2^ℓ qui sont données à partir des dérivées troisième de la fonction ψ .

La Fig. (5.6) donne un exemple de toutes les quantités que le code est capable d'extraire à la position de la particule durant sa chute depuis $r_0/2M = 20$, pour un pas d'intégration $h/2M = 0.005$ et pour les premiers modes de $\ell = 2$ à $\ell = 20$. Ce calcul est un moyen simple de vérifier qualitativement la convergence des modes (courbes en dégradé de couleurs) vers leur valeur asymptotique (courbe en noir) calculée en (5.115) et (5.116). Dans la Fig. (5.7) on vérifie quantitativement le comportement asymptotique des modes de la Fig. (5.6). Par exemple pour les fonctions de perturbations de la métrique retardée, à r_p fixé, $H_{1,2}^{\ell \rightarrow \infty} \propto \kappa L^{-1}$. La droite formée par les points de $\log_{10} |H_{1,2}|$ en fonction de $L = \ell + 1/2$ est bien de pente -1 .

5.3.2 Calcul des perturbations

On rappelle que dans le cas de la chute radiale les modes du champ retardé $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ sont reliés aux fonctions de perturbations de RW H_1^ℓ et H_2^ℓ

$$h_{\alpha\beta}^{\text{ret}\ell} = \begin{pmatrix} f(r)H_2^\ell & H_1^\ell \\ H_1^\ell & f(r)^{-1}H_2^\ell \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}. \quad (5.146)$$

La fonction K^ℓ peut être calculée à partir de la fonction d'onde mais elle n'intervient pas à θ constant. La Fig. 5.8 donne les fonctions de perturbations du champ retardé pour une chute depuis $r_0/2M = 15$ pour les modes de $\ell = 2$ à $\ell = 15$ (courbes en dégradé de couleurs). On observe le comportement asymptotique par rapport à ℓ . Pour des modes d'ordres élevés ($\ell > 10$) on tend vers une limite qui est la quantité $H_{1,2}^{\ell \rightarrow \infty}$ formulée en (5.116a) et (5.116d). Le caractère divergent de la série est inévitable puisque l'on somme une infinité de contributions finies. Le théorème standard qui sous-tend le développement des fonctions en harmoniques sphériques [186] indique qu'une condition suffisante pour une convergence absolue et uniforme du développement en harmoniques sphériques est que la fonction développée soit au moins $\mathcal{C}^2$ sur la sphère à t et r constants. Cette condition n'est manifestement pas satisfaite dans le cas du tenseur de perturbation qui est singulier. Par conséquent, la somme sur toutes les composantes modales diverge.

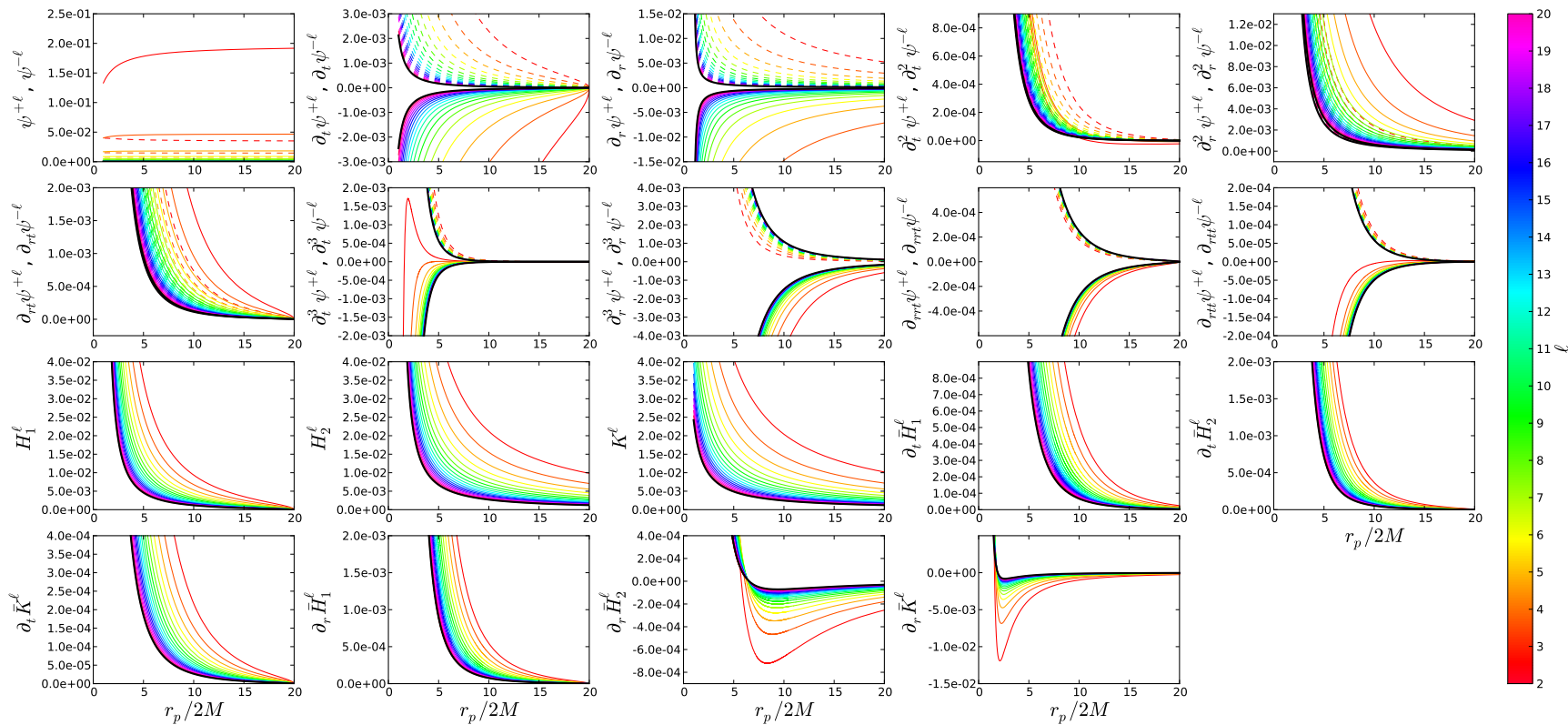


FIGURE 5.6: Calcul de la fonction d'onde et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 à la position de la particule pour une chute initialement au repos depuis la position $r_0/2M = 20$. Sont calculées également, les fonctions de perturbation H_1^{ℓ} et H_2^{ℓ} et leurs dérivées premières. Chaque quantité est donnée pour $\ell = 2$ à 20 (dégradé de couleurs) et on a tracé en noir leur comportement asymptotique donné aux équations (5.115) et (5.116). Les courbes en tirets sont relatives à la partie $r \rightarrow r_p^-$ (exposant "-") et les courbes en traits pleins sont relatives à la partie $r \rightarrow r_p^+$ (exposant "+"). Les données sont en unité $((2M/m_0)\kappa^{-1})$.

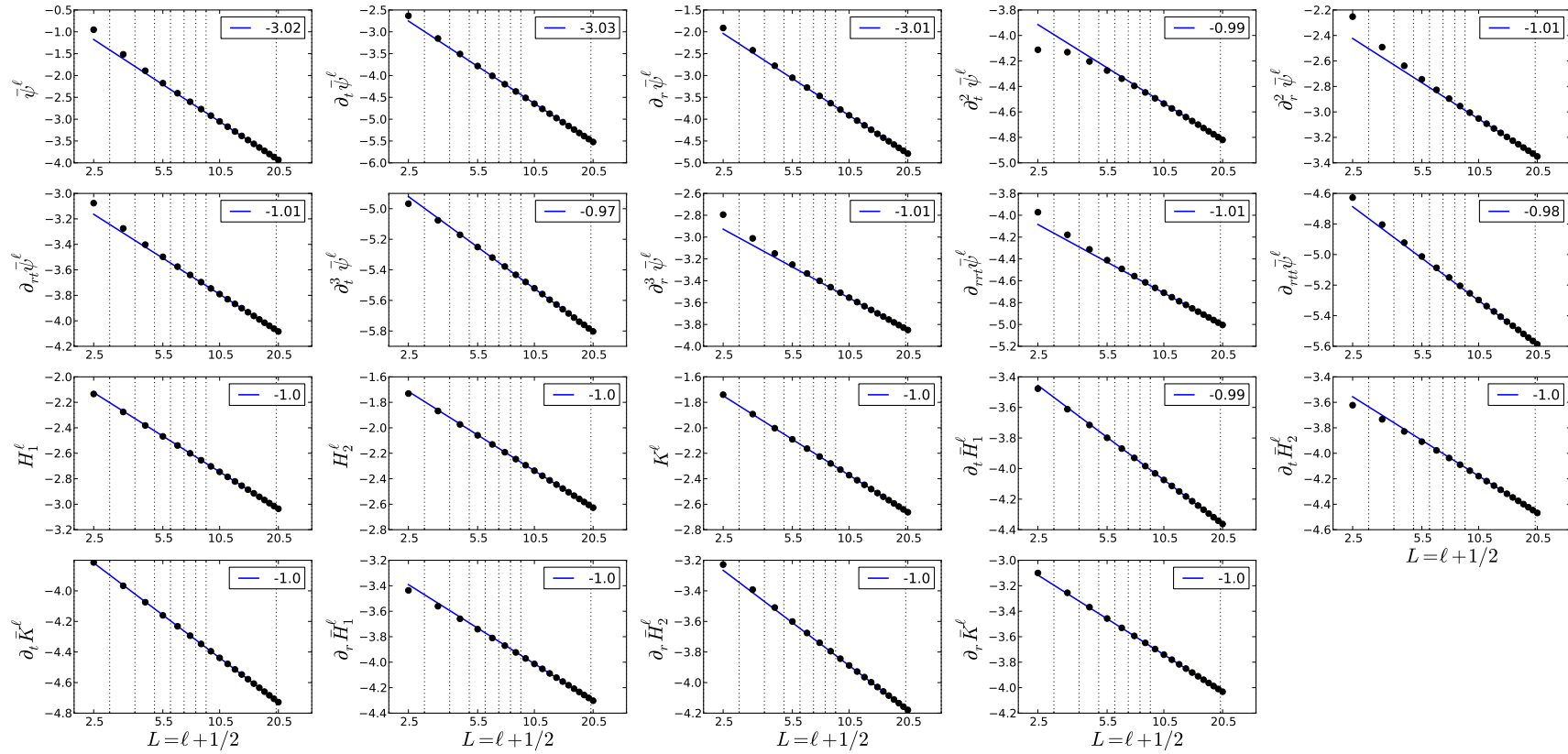


FIGURE 5.7: On vérifie le comportement des quantités calculées dans la Fig. 5.6 par rapport au mode $L = \ell + 1/2$ pour $r_p/2M \approx 10$. En ordonné on a pri le $\log_{10}$ des quantités moyennées en unité $((2M/m_0)\kappa^{-1})$. Par exemple la moyenne de $\psi^{\ell\pm}$ donnera $\bar{\psi}^\ell(r_p) = 1/2 [\psi^{\ell+}(r_p) + \psi^{\ell-}(r_p)]$. En abscisse on a réparti la valeur du mode L . La pente de chaque droite correspond bien à l'ordre dominant donné dans les équations (5.115) et (5.116). (Ce bon accord perdure pour différentes valeurs de r_p).

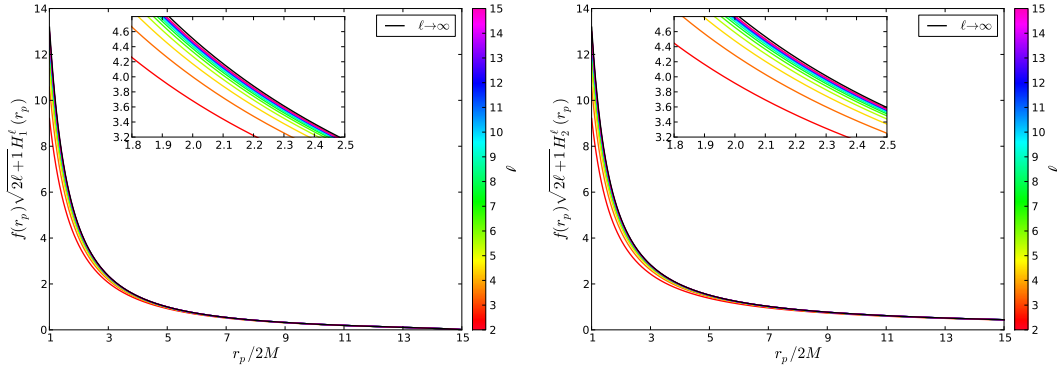


FIGURE 5.8: Chute radiale d'une particule au repos en $r_0/2M = 15$. On trace les fonctions de perturbations H_1^ℓ et H_2^ℓ calculées à la position de la particule $r_p(t)$ pour les modes $\ell = 2$ à $\ell = 15$ (dégradé de couleurs). Le comportement théorique par rapport au mode ℓ est vérifié. On trace en noir $H_1^{\ell \rightarrow \infty}$ et $H_2^{\ell \rightarrow \infty}$ donnés respectivement par (5.116a) et (5.116a).

Régularisation de Riemann-Hurwitz

Si l'on souhaite, à ce niveau, régulariser le champ $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ on peut utiliser la technique Mode-Sum en prenant les termes donnés en (5.116a) et (5.116d) en guise de paramètres de régularisation. Lousto [187][169] a également proposé une méthode pour régulariser le champ, elle fut reprise et étudiée ensuite par Spallicci et Aoudia [188] et consiste à utiliser une généralisation de la fonction ζ de Riemann, appelée communément *fonction de Riemann-Hurwitz* (RH). Au regard du comportement des coefficients de la métrique on considère que $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ peut se décomposer en deux morceaux. Les modes du premier morceau, notés $h_{\alpha\beta}^{\text{reg}\ell}$, tendent rapidement vers zéro quand $\ell \rightarrow \infty$ assurant ainsi la convergence de la somme. Le deuxième morceau génère le comportement limite quand $\ell \rightarrow \infty$ que l'on observe sur la Fig. 5.8 et qui est responsable, par conséquent, de la divergence de la somme. Par exemple pour la composante tt on pourrait écrire

$$\begin{aligned} H_2(t, r) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} H_2^\ell Y^{\ell 0} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} H_2^{\text{reg}\ell} Y^{\ell 0} + \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)^{-\beta} H_2^\infty Y^{\ell 0}, \end{aligned} \quad (5.147)$$

où β est un paramètre à déterminer numériquement de telle manière à ce qu'il assure le comportement limite H_2^∞ de H_2^ℓ quand $\ell \rightarrow \infty$. En faisant appel à la fonction de RH donnée par

$$\zeta(n, m) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + m)^{-n}, \quad (5.148)$$

on régularise le champ à la position de la particule,

$$H_2^{\text{reg}}(t, r_p) = \sum_{\ell=0}^{\infty} H_2^{\text{reg}\ell} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} + 2^{1/2-\beta} \frac{H_2^{\infty}}{4\pi} \zeta(\beta - 1/2, 1/2) . \quad (5.149)$$

Numériquement on obtient $\beta = 1/2$ et le prolongement analytique de la fonction de RH donne $\zeta(0, 1/2) = 0$. Donc par régularisation RH il suffit simplement de soustraire à chaque mode ℓ la valeur asymptotique c'est-à-dire le mode le plus élevé que nous calculons numériquement : $H_2^{\infty} = H_2^{\ell_{\text{max}}}$ tel que

$$H_2^{\text{reg}}(t, r_p) = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\text{max}}} \left[H_2^{\text{ret}\ell}(t, r_p) - H_2^{\ell_{\text{max}}}(t, r_p) \right] Y^{\ell 0} . \quad (5.150)$$

Vu au travers du formalisme Mode-Sum on aurait $D^{\alpha} \propto \zeta(0, 1/2) = 0$, où D^{α} serait le paramètre résiduel lié à la régularisation du champ H_2 tel qu'il a été défini en (2.100). La différence avec une régularisation par Mode-Sum peut être représentée par la quantité $H_2^{\ell_{\text{max}}} - H_2^{\ell \rightarrow \infty}$ qui s'annule quand ℓ_{max} est suffisamment grand. Ainsi, au moins dans le cas d'une orbite radiale, une correspondance peut être faite entre régularisation RH et régularisation Mode-Sum.

5.3.3 Calcul de la force propre gravitationnelle

Comme cela a été discuté dans la section 5.1, la particularité des orbites radiales permettent d'avoir accès à la force propre par régularisation Mode-Sum dans la jauge de RW. Bien évidemment, par symétrie on se focalisera sur F_{self}^t et F_{self}^r , les autres composantes étant nulles $F_{\text{self}}^{\theta} = F_{\text{self}}^{\phi} = 0$. La première étape consiste à calculer la force retardée mode par mode donnée dans sa formulation générale par

$$F_{\text{ret}}^{\alpha} = -\frac{1}{2} m_0 \left(g^{\alpha\beta} + u^{\alpha} u^{\beta} \right) \left(2\nabla_{\delta} h_{\beta\gamma}^{\text{ret}} - \nabla_{\alpha} h_{\gamma\delta}^{\text{ret}} \right) u^{\gamma} u^{\delta} \quad (5.151)$$

où chaque mode est acquis, dans le formalisme de RW, par l'équation (5.119) ,

$$F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell} = -\frac{m_0}{2f} \left[f_0^{\alpha} \left(\frac{\partial H_2^{\ell}}{\partial t} - \frac{df}{dr} H_1^{\ell} \right) + f_1^{\alpha} \left(\frac{\partial H_1^{\ell}}{\partial t} - \frac{df}{dr} H_2^{\ell} \right) + f_2^{\alpha} \frac{\partial H_2^{\ell}}{\partial r} + f_3^{\alpha} \frac{\partial H_1^{\ell}}{\partial r} \right] Y^{\ell 0} . \quad (5.152)$$

On rappelle que les modes du champ retardé $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}\ell}$ sont continus à la position de la particule dans la jauge de RW mais leurs dérivées possèdent un saut et c'est pourquoi le signe $\pm$ est présent dans l'équation (5.152) car la valeur de $F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell}(t, r_p)$ dépend de la direction avec laquelle les dérivées sont prises dans la limite $r \rightarrow r_p(t)$. Dans ce qui suit on s'intéressera à la moyenne de chaque mode

$$F_{\text{ret}}^{\alpha\ell} = \frac{1}{2} \left(F_{\text{ret}+}^{\alpha\ell} + F_{\text{ret}-}^{\alpha\ell} \right) . \quad (5.153)$$

La Fig. 5.9 affiche les 8 premiers modes de la force retardée pour les deux composantes

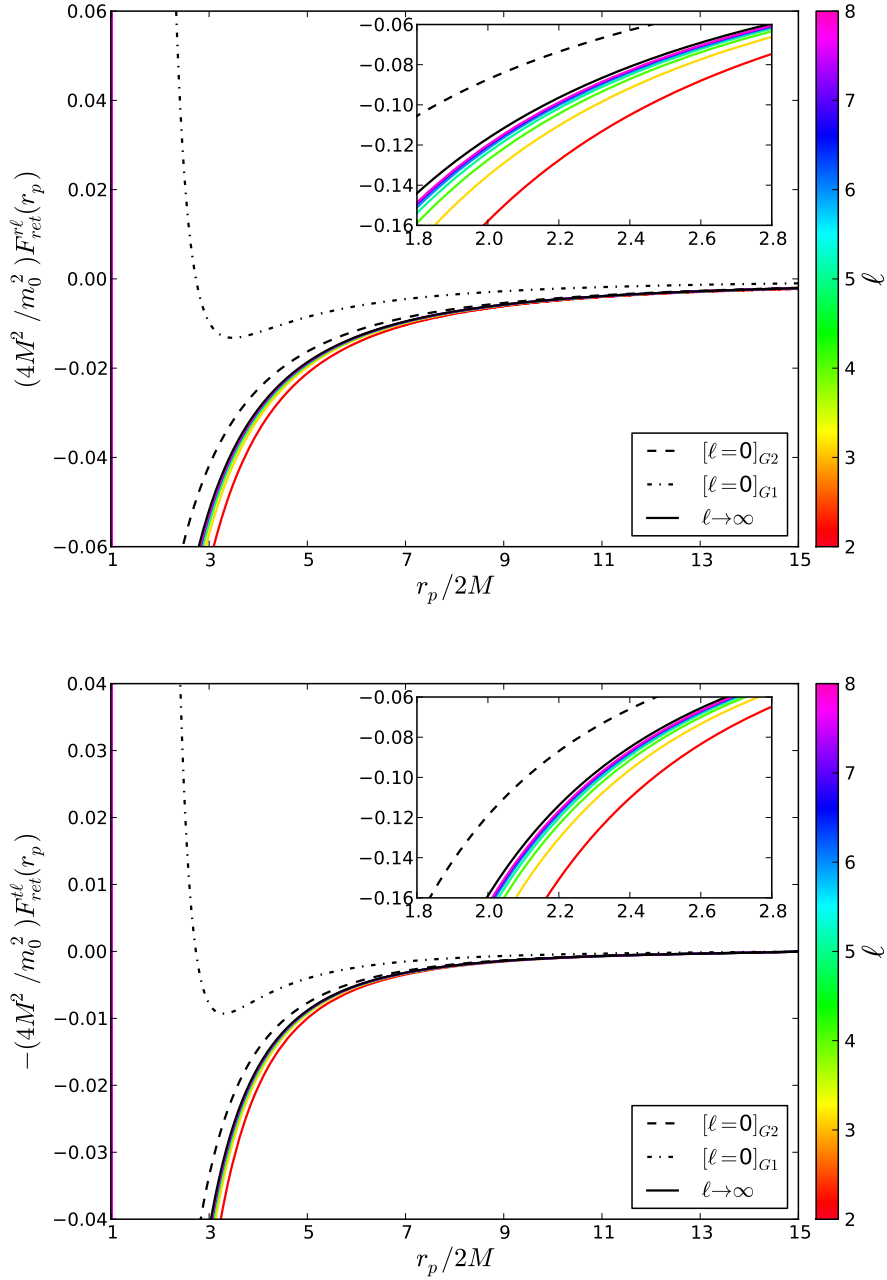


FIGURE 5.9: Chute radiale d'une particule au repos au repos en $r_0/2M = 15$. On trace la force retardée moyenne $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell}$ calculée à la position de la particule $r_p(t)$ pour les modes $\ell = 2$ à $\ell = 8$ (dégradé de couleurs). Le comportement théorique par rapport au mode ℓ est vérifié. On trace en noir $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell \rightarrow \infty} = B^\alpha$ donnés par (5.125) moyenné. En tirets on a tracé le mode $\ell = 0$ pour la jauge G2. On a également tracé en tirets-pointillés le mode $\ell = 0$ dans la jauge G1 pour laquelle le comportement à l'horizon est pathologique et non compatible avec les modes $\ell \geq 2$.

t et r (courbes en dégradé de couleurs) en fonction de la position $r_p(t)$ de la particule durant sa chute depuis $r_0/2M = 15$. Le mode $\ell = 0$ pour les deux jauges introduites dans la partie 5.2.2 est tracé en noir-tirets-pointillés pour la jauge G1 et noir-tirets pour

la jauge G2. On rappelle que $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell=0}$ est donné par (5.132-5.133) pour la jauge G1 et par (5.136-5.137) pour la jauge G2 et que seule la jauge G2 sera considérée pour le calcul de la force propre pour les raisons évoquées dans la partie 5.2.2. Le mode $\ell = 1$ n'est pas présent car on a vu qu'il pouvait être neutralisé par changement de jauge donc $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell=1} = 0$. La courbe noire en trait plein correspond au paramètre B^α qui décrit la forme asymptotique de $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell}$ quand $\ell \rightarrow \infty$ (car $A_+^\alpha = -A_-^\alpha$; voir équation (5.125)). Là aussi le caractère divergent de la série est vérifié car chaque contribution modale est finie et les modes tendent vers un comportement fini donné par B^α .

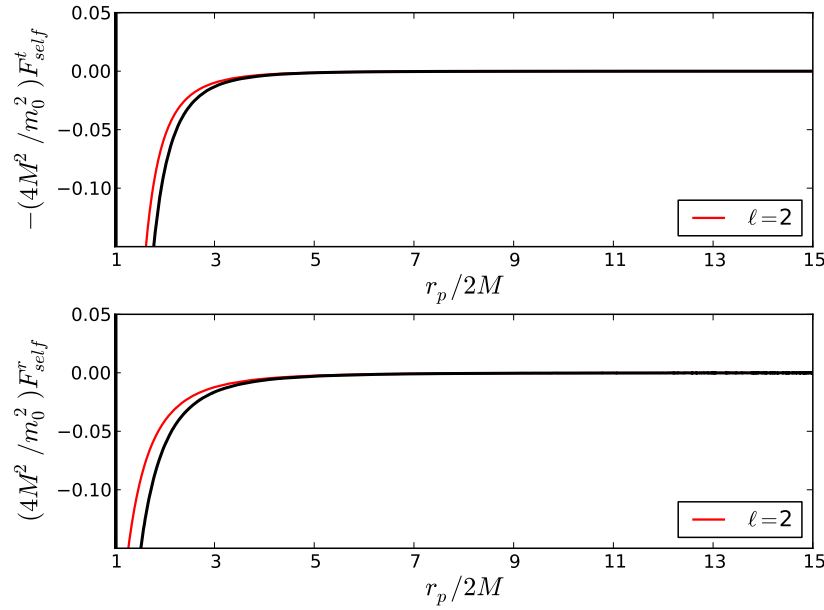


FIGURE 5.10: Après régularisation des modes de la Fig. 5.9, on effectue leur somme puis on ajoute le mode $\ell = 0$ et la contribution analytique des modes supérieurs à $\ell = 8$. Les courbes en noir représentent la force propre donnée par (5.156) pour la composante temporelle F_{self}^t (graphe du haut) et la composante radiale F_{self}^r (graphe du bas). En comparaison on a tracé en rouge le mode quadrupolaire $\ell = 2$ montrant l'importance des modes supérieurs à 2 dans le calcul de la FP.

La valeur de la force propre ne dépend pas du signe " $\pm$ " indiqué dans (5.152) donc on peut garder la moyenne de $F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell}$ pour la régularisation. En reprenant la formule (5.124) de la régularisation Mode-Sum en jauge de RW

$$F_{\text{self}}^{\alpha(\text{RW})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}\pm}^{\alpha\ell(\text{RW})} - A_{\pm}^\alpha L - B^\alpha - C^\alpha L^{-1} \right] - D^\alpha, \quad (5.154)$$

et en considérant les paramètres de régularisation obtenus dans (5.123), on a

$$F_{\text{self}}^\alpha = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[F_{\text{ret}}^{\alpha\ell} - B^\alpha \right], \quad (5.155)$$

où on a enlevé l'exposant (RW). Cette expression assure une convergence en L^{-2} , ce que nous vérifierons dans la Fig. 5.25. En pratique on ne calcule pas un très grand nombre de modes ℓ car cela demande beaucoup de ressources numériques. On s'arrêtera au mode $\ell = \ell_{\max}$ au delà duquel la contribution apportée par le mode suivant est en dessous du seuil d'erreur que l'on s'est fixé (voir section suivante). La contribution des modes supérieurs $\ell_{\max}$ est prise en compte de façon analytique en utilisant la forme asymptotique de la force propre par rapport à L obtenue en (5.140) et (5.141)

$$F_{\text{self}}^{\alpha} = F_{\text{self}}^{\alpha\ell=0} + \underbrace{\sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} F_{\text{self}}^{\alpha\ell}}_{\text{numérique}} + \underbrace{\sum_{\ell=\ell_{\max}+1}^{\infty} F_{\text{self}}^{\alpha\ell \rightarrow \infty}}_{\text{analytique}} . \quad (5.156)$$

La Fig. 5.10 montre la force propre calculée à partir des modes de la force retardée tracés dans la Fig. 5.9 c'est-à-dire pour $\ell_{\max} = 8$. L'exemple est pris pour une chute depuis $r_0/2M = 15$ mais le comportement des composantes de la force propre reste le même quelle que soit la valeur de r_0 . En effet la composante radiale est toujours orientée vers le trou noir ce qui suggère un travail positif de la force durant la chute (nature attractive) et donc que le paramètre d'énergie $\mathcal{E}$ augmente. La variation instantanée d'énergie doit donc être positive ce qui est confirmé par le signe de la composante temporelle de la force propre qui est elle-même reliée à la variation de $\mathcal{E}$ par

$$m_0 \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -F_t^{\text{self}} . \quad (5.157)$$

La Fig. 5.10 peut être comparée à la Fig. 3 de [54], qualitativement le comportement de F_{self}^{α} est cohérent mais contrairement à [54] nos courbes ne souffrent pas des oscillations non physiques qui polluent les premiers instants de la chute. Nous utilisons une trajectoire symétrique pour s'affranchir de ce problème, la première phase de chute est donc exploitable dans nos données (on se référera à la section 5.5.1).

5.4 Résultats : Equation du mouvement

D'après la discussion faite à la section 5.1, l'équation de la trajectoire perturbée peut s'écrire

$$m_0 u^{\alpha} \nabla_{\beta} u^{\beta} = F_{\text{self}}^{\alpha} , \quad (5.158)$$

où $F_{\text{self}}^{\alpha} \sim \mathcal{O}(m_0/M)$ est la force propre calculée dans la jauge de RW au sens vu à la section 5.1. L'équation (5.158) peut être réécrite en temps coordonnée

$$\frac{d^2 r_p}{dt^2} = a_0(r_p, \dot{r}_p) + a_{\text{self}}(r_p, \dot{r}_p) , \quad (5.159)$$

où cette fois ci, la trajectoire $r_p(t)$ n'a pas le même sens que dans l'équation (3.26) où elle décrivait une géodésique de l'espace-temps de fond. Maintenant $r_p(t)$ n'est plus une géodésique mais la trajectoire perturbée. Le terme d'accélération a_0 a la même expression que le membre de droite de (3.26) mais pris en fonction de la trajectoire perturbée r_p et de la vitesse $\dot{r}_p = dr_p/dt$

$$\begin{aligned} a_0(r_p, \dot{r}_p) &= - \left(\Gamma^r_{\alpha\beta} - \dot{r}_p \Gamma^t_{\alpha\beta} \right) \dot{x}_p^\alpha \dot{x}_p^\beta , \\ &= -f(r_p) f'(r_p) \left[1 - \frac{3}{f(r_p)^2} \dot{r}_p^2 \right] , \end{aligned} \quad (5.160)$$

$$a_{\text{self}} = \frac{1}{m_0 \dot{t}_p^2} \left[F_{\text{self}}^r - \frac{\dot{r}_p}{\dot{t}_p} F_{\text{self}}^t \right] . \quad (5.161)$$

Le traitement *auto-consistant* de l'équation (5.159) nécessite de connaître l'auto-accélération, et donc la force propre le long de la trajectoire perturbée à chaque pas de temps. Cependant, le formalisme de régularisation mis en place dans ce chapitre est destiné à des géodésiques de l'espace-temps de fond. En effet, les paramètres de régularisation formulés en (5.123) sont donnés sur une géodésique. On étudiera deux approches possibles pour quantifier l'action de la force propre sur la trajectoire de la particule durant son mouvement.

5.4.1 Approche pragmatique

Dans l'approche pragmatique introduite par Lousto [187][169], on considérera l'équation (5.159) dans sa version linéarisée au premier ordre autour de la géodésique de référence $X^\alpha(\tau)$ solution de

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(X^\alpha) \frac{dX^\beta}{d\tau} \frac{dX^\gamma}{d\tau} = 0 , \quad (5.162)$$

où $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(X^\alpha)$ est la connexion affine associée à la métrique de fond. La trajectoire perturbée repérée par les coordonnées $x_p^\alpha(\tau) = (t, r_p)$ est solution de l'équation (5.158) que l'on réécrit comme

$$\frac{d^2 x_p^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_p^\alpha) \frac{dx_p^\beta}{d\tau} \frac{dx_p^\gamma}{d\tau} = \frac{F_{\text{self}}^\alpha}{m_0} \quad (5.163)$$

et s'écarte de la géodésique de référence d'une quantité $\Delta X^\alpha \propto m_0/M$ telle que

$$x_p^\alpha = X^\alpha + \Delta X^\alpha , \quad (5.164)$$

$$\dot{x}_p^\alpha = \dot{X}^\alpha + \Delta \dot{X}^\alpha , \quad (5.165)$$

$$\ddot{x}_p^\alpha = \ddot{X}^\alpha + \Delta \ddot{X}^\alpha , \quad (5.166)$$

car comme cela a été discuté à la section 2.2.2, le mouvement perturbé reste proche d'une géodésique. En injectant cette décomposition dans (5.163) on a

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(X^\alpha + \Delta X^\alpha \right) + \left(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Delta X^\delta \right) \frac{d}{d\tau} \left(X^\beta + \Delta X^\beta \right) \frac{d}{d\tau} \left(X^\gamma + \Delta X^\gamma \right) = \frac{F_{\text{self}}^\alpha}{m_0} \quad (5.167)$$

que l'on développe à l'ordre 1 en terme de temps coordonné (on utilisera les règles de transformation sur le changement de paramètre affine $d/d\tau = (dt/d\tau)d/dt$ et $d^2/d\tau^2 = (d^2t/d\tau^2)d/dt + (dt/d\tau)^2 d^2/dt^2$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 (\dot{X}^\alpha + \Delta \dot{X}^\alpha) + \ddot{X}^\alpha + \Delta \ddot{X}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma \\ + 2\dot{X}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{X}^\beta + \Delta X^\delta \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma = \frac{F_{\text{self}}^\alpha}{m_0} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.168)$$

En supposant que $\Delta X^\alpha = \sigma^\alpha \Delta R$ avec $\sigma^\alpha := (0, 1)$ on trouve pour la composante temporelle

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \frac{F_{\text{self}}^t}{m_0} \left(\frac{d^2\tau}{dt^2} \right)^2 - \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma - 2\Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{X}^\beta \sigma^\gamma \dot{\Delta R} - \partial_r \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma \Delta R. \quad (5.169)$$

De même pour la composante radiale on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \frac{d}{dt} (R + \Delta R) + \ddot{R} + \Delta \ddot{R} + \Gamma_{\beta\gamma}^r \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma \\ + 2\Gamma_{\beta\gamma}^r \dot{X}^\beta \sigma^\gamma \dot{\Delta R} + \partial_r \Gamma_{\beta\gamma}^r \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma \Delta R = \frac{F_{\text{self}}^r}{m_0} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.170)$$

En injectant (5.169) dans (5.170) on trouve au premier ordre

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \Delta \ddot{R} + \left(\Gamma_{\beta\gamma}^r - \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{R} \right) \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma \\ + \Delta R \left(\partial_r \Gamma_{\beta\gamma}^r - \partial_r \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{R} \right) \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma \\ + \Delta \dot{R} \left(2\Gamma_{\beta\gamma}^r \sigma^\gamma - 2\Gamma_{\beta\gamma}^t \sigma^\gamma \dot{R} - \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{X}^\gamma \right) \dot{X}^\beta = \frac{\dot{t}^2}{m_0} \left[F_{\text{self}}^r(R, \dot{R}) - \dot{R} F_{\text{self}}^t(R, \dot{R}) \right], \end{aligned} \quad (5.171)$$

où $\dot{t} = dt/d\tau = \mathcal{E}/f(R)$. L'équation (5.171) peut encore se réécrire de façon plus compacte

$$\frac{d^2 r_p}{dt^2} = a_0(R, \dot{R}) + a_1(R, \dot{R}) \Delta R + a_2(R, \dot{R}) \Delta \dot{R} + a_{\text{self}}(R, \dot{R}) + \mathcal{O}(\Delta R^2, \Delta \dot{R}^2). \quad (5.172)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0(R, \dot{R}) &= -\left(\Gamma_{\beta\gamma}^r - \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{R}\right) \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma, \\ &= -\frac{1}{2}f(R)f'(R) \left[1 - \frac{3}{f(R)^2} \dot{R}^2\right], \end{aligned} \quad (5.173)$$

$$\begin{aligned} a_1(R, \dot{R}) &= -\left(\partial_r \Gamma_{\beta\gamma}^r - \partial_r \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{R}\right) \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma, \\ &= \frac{2M}{R^3} \left[1 - \frac{3M}{R} - 3 \left(1 - \frac{M}{R}\right) f(R)^{-2} \dot{R}^2\right], \end{aligned} \quad (5.174)$$

$$\begin{aligned} a_2(R, \dot{R}) &= -\left(2\Gamma_{\beta\gamma}^r \sigma^\gamma - 2\Gamma_{\beta\gamma}^t \sigma^\gamma \dot{R} - \Gamma_{\beta\gamma}^t \dot{X}^\gamma\right) \dot{X}^\beta, \\ &= \frac{6M}{R^2} f(R)^{-1} \dot{R}, \end{aligned} \quad (5.175)$$

$$a_{\text{self}}(R, \dot{R}) = \frac{f(R)^2}{m_0 \mathcal{E}^2} \left[F_{\text{self}}^r(R, \dot{R}) - \dot{R} F_{\text{self}}^t(R, \dot{R}) \right]. \quad (5.176)$$

Or d'après (3.26), $\ddot{R} = a_0(R, \dot{R})$ donc à l'ordre 1 on a

$$\Delta \ddot{R} \approx a_1(R, \dot{R}) \Delta R + a_2(R, \dot{R}) \Delta \dot{R} + a_{\text{self}}(R, \dot{R}). \quad (5.177)$$

Cette formulation du mouvement perturbé est dans l'esprit des travaux de Lousto [187][169]. L'expression de $a_1(R, \dot{R})$ est cependant différente chez [187] par rapport à la notre d'un terme $4M/R^3(1 + \dot{R}/f(R)^2)$. Cette remarque est également faite dans [157]. Cependant une autre méthode de calcul permet de trouver (5.177); il s'agit simplement d'effectuer un développement de Taylor de la fonction $\ddot{r}_p(r_p, \dot{r}_p)$, considérée à deux variables, autour du point $(R, \dot{R})$. En ne retenant que l'ordre 1 en ΔR et $\Delta \dot{R}$ on retombe bien sur l'expression de a_1 calculée en (5.174).

La variation d'accélération est alors donnée par (i) l'auto-accélération calculée le long de la géodésique de référence et (ii) le terme $a_1(R, \dot{R}) \Delta R + a_2(R, \dot{R}) \Delta \dot{R}$ qui est en fait le pendant de la déviation géodésique en temps coordonnée. En effet il suffit de reprendre l'équation (5.167) développée au premier ordre et de montrer, après de nombreuses simplifications algébriques, que

$$2\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Delta \dot{X}^\beta \dot{X}^\gamma + \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{X}^\beta \Delta X^\delta \dot{X}^\gamma = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \dot{X}^\beta \Delta X^\gamma \dot{X}^\delta \quad (5.178)$$

auquel cas on obtient bien le terme de déviation géodésique $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \dot{X}^\beta \Delta X^\gamma \dot{X}^\delta$ standard

[128]. Ce même terme est présent dans la formulation de Gralla et Wald [94] du mouvement perturbé au premier ordre en jauge harmonique

$$\frac{D^2 \Delta X^\alpha}{d\tau^2} = -R_{\beta\gamma\delta}{}^\alpha \dot{X}^\beta \Delta X^\gamma \dot{X}^\delta + F_{\text{self}}^{\alpha(H)} . \quad (5.179)$$

La Fig. 5.11 donne les premiers modes de la quantité a_{ret} c'est-à-dire le terme d'accélération

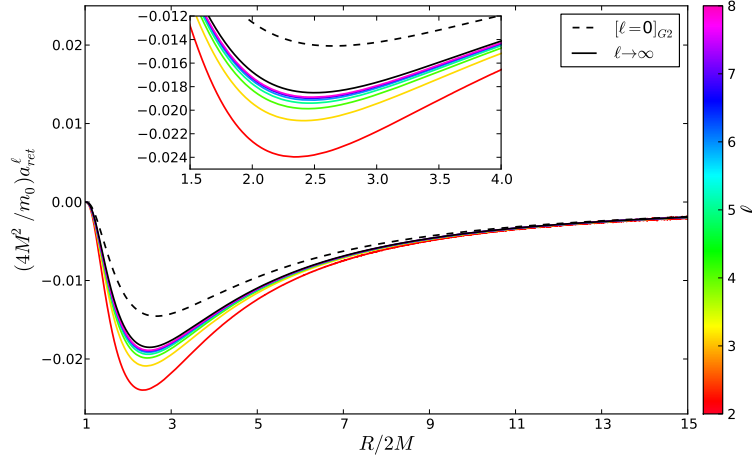


FIGURE 5.11: On trace ici les modes du terme d'accélération (courbes en dégradé de couleurs) calculés à partir des modes de la force retardée donnés dans la Fig. 5.9. La courbe en noire correspond au comportement analytique pour de grands ℓ dont l'expression est donnée à l'équation (5.181). La courbe en tirets correspond au mode $\ell = 0$.

construit à partir de la force retardée calculée le long de la géodésique de référence X^α

$$a_{\text{ret}}^\ell(R, \dot{R}) = \frac{f(R)^2}{m_0 \mathcal{E}^2} \left[F_{\text{ret}}^{r\ell} - \dot{R} F_{\text{ret}}^{t\ell} \right] , \quad (5.180)$$

pour $\ell \geq 0$. Les modes a_{ret}^ℓ ont été calculés pour une chute depuis $r_0/2M = 15$ et tendent vers une valeur asymptotique $B_a(R)$ obtenue analytiquement à partir des paramètres de régularisation B^r et B^t

$$B_a = \frac{f(R)^2}{m_0 \mathcal{E}^2} \left[B^r - \dot{R} B^t \right] = -\frac{m_0 \mathcal{E}}{2R^2} \left[\frac{f(R)}{\mathcal{E}} \right]^3 . \quad (5.181)$$

Le paramètre B_a intervient dans la régularisation de a_{self} tel que

$$a_{\text{self}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\text{self}}^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[a_{\text{ret}}^\ell - B_a \right] . \quad (5.182)$$

Dans la Fig. 5.12 on a tracé les modes $a_{\text{self}}^\ell = a_{\text{ret}}^\ell - B_a$ pour $\ell = 2$ à $\ell = 8$ auxquels on compare les modes déjà tracés dans la Fig. 5.11. On remarque que le critère (nécessaire)

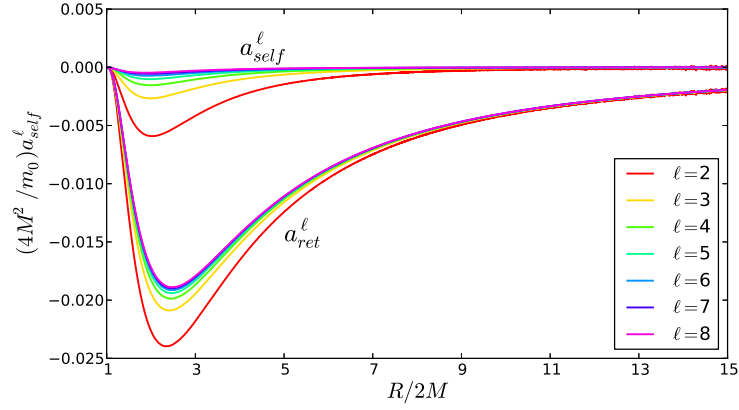


FIGURE 5.12: On compare, dans cette figure, les premiers modes du terme d'accélération non régularisé a_{ret}^ℓ (courbes du haut en dégradé de couleurs) et les modes du terme d'accélération régularisé a_{self}^ℓ (courbes du bas en dégradé de couleurs). On remarque, qu'après régularisation, les a_{self}^ℓ respectent bien le critère de convergence (5.183) validant ainsi la méthode de régularisation et l'exactitude de B_a .

de convergence de la série (5.182) est respecté, à savoir que

$$\text{si } \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\text{self}}^\ell \text{ converge, alors } a_{\text{self}}^\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0. \quad (5.183)$$

Le critère 5.183 est nécessaire pour assurer la régularisation de l'auto-accélération² et sa vérification valide l'expression de B_a . La vitesse de convergence est donnée à la Fig. 5.25 et est discutée à la section 5.5.4. Ce que l'on peut déjà dire concernant l'auto-accélération, c'est qu'elle est dominée par les modes les plus faibles, le mode quadrupolaire $\ell = 2$ représentant à lui tout seul $\sim 55\%$ du total (voir Fig. 5.13).

Comme pour la force propre, en pratique on tronque numériquement la série (5.182) en ℓ_{max}

$$a_{\text{self}} = a_{\text{self}}^{\ell=0} + \underbrace{\sum_{\ell=2}^{\ell_{\text{max}}} a_{\text{self}}^\ell}_{\text{numérique}} + \underbrace{\sum_{\ell=\ell_{\text{max}}+1}^{+\infty} a_{\text{self}}^\ell}_{\text{analytique}} \quad (5.184)$$

où $a_{\text{self}}^{\ell \rightarrow \infty} = f(R)^2 m_0^{-1} \mathcal{E}^{-2} \left[F_{\text{self}}^{r\ell \rightarrow \infty} - \overset{\circ}{R} F_{\text{self}}^{t\ell \rightarrow \infty} \right]$ est le terme analytique exprimé à partir de (5.140) et (5.141) et qui nous permet de tenir compte de la contribution des modes supérieurs à $\ell = 8$

$$a_{\text{self}}^{\ell \rightarrow \infty} = \mathcal{A}_{\text{self}}^\infty L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-4}), \quad (5.185)$$

²Les courbes de a_{self}^ℓ dans la Fig. 5.12 sont en désaccord avec la Fig. 2a[169] où Lousto trace les premiers modes de l'auto-accélération qu'il note C_{ren}^ℓ . On remarque étrangement que C_{ren}^ℓ ne semble pas respecter le critère de convergence (5.183). Par conséquent, nous verrons que les résultats de la Fig. 2b[169] ne seront pas non plus conformes aux nôtres.

avec

$$\mathcal{A}_{\text{self}}^{\infty} = -\frac{15}{16}m_0 \frac{f(R)^2}{R^3 \mathcal{E}^2} \left[\mathcal{E}^2 (4M + R(\mathcal{E}^2 - 1)) + R\dot{R} \left(2R\ddot{R} - \dot{R}^2 \right) \right]. \quad (5.186)$$

La partie analytique de la somme (5.184) est approchée par

$$\sum_{\ell=\ell_{\text{max}}+1}^{+\infty} a_{\text{self}}^{\ell \rightarrow \infty} \approx \mathcal{A}_{\text{self}}^{\infty} \sum_{\ell=\ell_{\text{max}}+1}^{+\infty} (\ell + 1/2)^{-2} = \mathcal{A}_{\text{self}}^{\infty} \Psi^{(1)}(\ell_{\text{max}} + 1) = \mathcal{A}_{\text{self}}^{\infty} \zeta(2, \ell_{\text{max}} + 1) \quad (5.187)$$

où on a utilisé les propriétés de la fonction polygamma $\Psi^{(m)}(x)$ définie comme la dérivée $m + 1$ ème du logarithme népérien de la fonction gamma standard $\Gamma(x)$

$$\Psi^{(m)}(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \ln \Gamma(x) = (-1)^{m+1} m! \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(x + \ell)^{m+1}} \quad \forall m > 0. \quad (5.188)$$

Elle est reliée à la fonction de RH par

$$\frac{\Psi^{(m)}(n)}{(-1)^{m+1} m!} = \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{1}{\ell^{m+1}} = \zeta(m + 1, n). \quad (5.189)$$

Si $\ell_{\text{max}} = 8$ alors on a

$$\Psi^{(1)}(\ell_{\text{max}} + 1) = \Psi^{(1)}(9) = \zeta(2, 9) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1077749}{705600} \approx 0.117512. \quad (5.190)$$

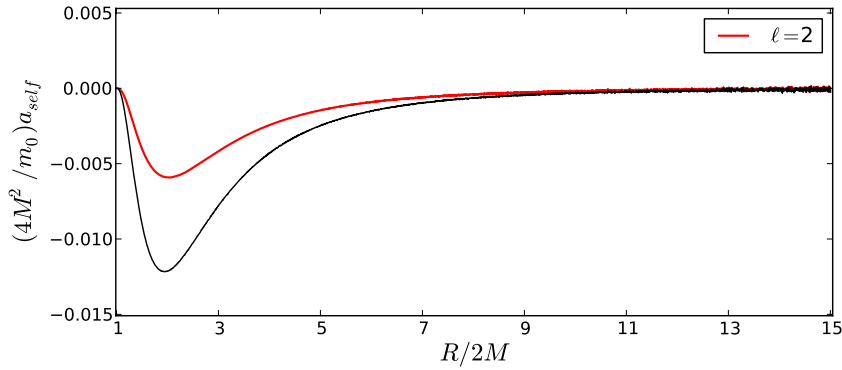


FIGURE 5.13: Une fois que l'on a additionné tous les modes a_{self}^{ℓ} calculés numériquement pour $\ell_{\text{max}} = 8$, on ajoute le mode $\ell = 0$ et la contribution analytique des modes supérieurs à $\ell = 8$. On obtient l'auto-accélération (courbe noire) pour une particule en chute libre depuis une position initiale $r_0/2M = 15$. On a tracé le mode $\ell = 2$ (courbe rouge) qui représente à lui seul $\sim 55\%$ de a_{self} (intégré sur R).

La Fig. 5.13 donne l'auto-accélération a_{self} (courbe en noir) telle qu'elle est calculée dans (5.184) pour $\ell_{\text{max}} = 8$ et pour $r_0/2M = 15$. Le choix de tronquer la série en $\ell_{\text{max}} = 8$ admet une erreur relative inférieur à 0.1% et est justifié à la section 5.5.2. On

remarque que a_{self} est strictement négative sur $R \in [2M, r_0]$ et tend vers une valeur finie à l'horizon. Ce comportement est indépendant de la position initiale de la chute r_0 . La courbe atteint son amplitude maximale en valeur absolue lorsque la particule approche le point où le potentiel de Zerilli est maximal, c'est-à-dire autour de $R \approx 3.1M$. Après ce point, sa dérivée change de signe puis a_{self} tend vers une valeur nulle à l'horizon.

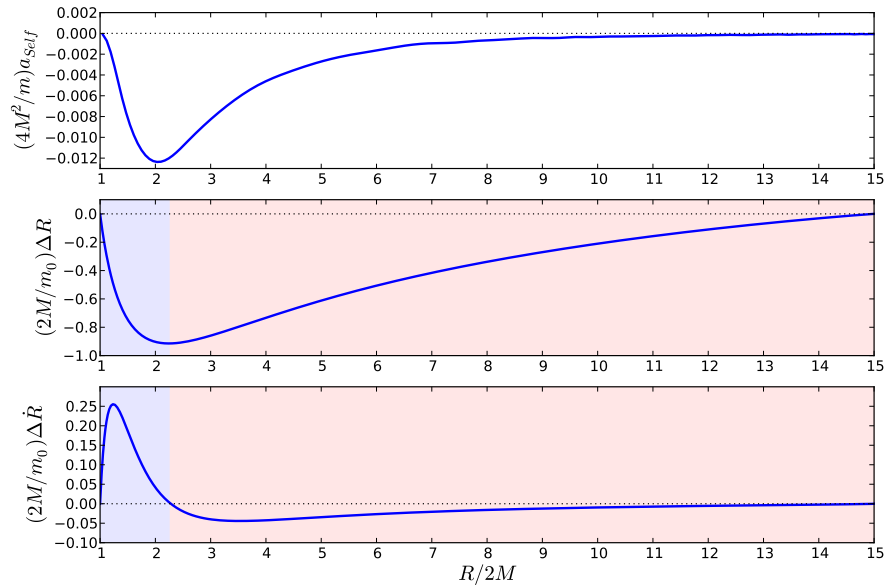


FIGURE 5.14: Solutions de l'EDO (5.177) pour une chute depuis $r_0/2M = 15$ initialement au repos. De haut en bas, le premier graphe correspond à l'auto-accélération a_{self} calculée le long de la géodésique $R(t)$. Dans le second graphe on trace ΔR en fonction de R d'amplitude strictement négative et d'une amplitude de l'ordre du rapport de masse. Dans le dernier graphe, est tracée la variation de vitesse par rapport à l'ordre zéro au mouvement géodésique. On peut remarquer deux régimes dont l'interface correspond au minimum de ΔR (i) la zone en rouge qui correspond à une première phase où la particule gagne de la vitesse par rapport à l'ordre zéro et (ii) la zone bleue où la particule décélère puis rejoint l'ordre zéro en amplitude.

La connaissance de a_{self} le long de la géodésique de référence permet maintenant de résoudre l'équation du mouvement linéarisé (5.177) dont la solution est l'écart orbital ΔR par rapport à R dû à l'action de la force propre sur la particule.

La Fig. 5.14 donne un exemple de solution de l'EDO (5.177) pour une chute depuis $r_0/2M = 15$ initialement au repos. Comme on l'attendait, l'amplitude de l'écart orbital ΔR est de l'ordre du rapport de masse avec un maximum (en valeur absolue) proche de la position où le potentiel de Zerilli est de magnitude maximale ($R \approx 3.1M$). Le terme ΔR est du même signe que a_{self} c'est-à-dire que la particule atteindra plus rapidement l'horizon du trou noir que si elle suivait sa géodésique de référence. Le comportement de la variation de vitesse $\Delta \dot{R}$ par rapport au mouvement géodésique suggère deux régimes dont l'interface correspond au minimum de ΔR

(i) la zone en rouge pour laquelle $\Delta\dot{R} < 0$ qui correspond à une première phase où la particule gagne de la vitesse par rapport à la géodésique. La vitesse d'une particule test en chute libre dans une métrique de Schwarzschild depuis une position r_0 est toujours négative et sa valeur maximale (en valeur absolue, en temps coordonnée) $|\dot{R}|_{\max} = 2(r_0 - 2M)/(3\sqrt{3}r_0) \approx 0.3592$ pour $r_0/2M = 15$. Dans notre exemple $|\Delta\dot{R}|_{\max} \approx 0.03756(m_0/2M)$, la particule voit donc sa vitesse maximale augmentée d'environ $(5m_0/M)\%$ pour $r_0/2M = 15$.

(ii) la zone bleue pour laquelle $\Delta\dot{R} > 0$ où la particule perd de la vitesse par rapport à la géodésique puis tend à retrouver le mouvement géodésique à l'horizon ($\Delta R = \Delta\dot{R} = 0$). Sur ce domaine (zone bleue), le potentiel de Zerilli est de grande amplitude, c'est une zone où la particule va rayonner et perdre de l'énergie sous la forme d'OG, c'est pourquoi elle décélère.

Cette différence de comportement entre (i) et (ii) peut s'expliquer par le fait que durant la chute, l'auto-accélération (purement négative) qui tend à accélérer le mouvement est en compétition avec la déviation géodésique qui tend à rappeler la particule sur la géodésique lorsqu'elle s'écarte de la trajectoire "naturelle" de chute libre.

Dans la Fig. 5.15 on résout l'équation (5.177) pour différentes valeurs de r_0 . On compare l'auto-accélération et la déviation ΔR dans chaque cas. Le comportement de a_{self} et de ΔR ne change pas en fonction de r_0 si ce n'est que l'amplitude de a_{self} diminue légèrement (en valeur absolue) quand r_0 augmente et ΔR augmente (en valeur absolue) de façon significative quand r_0 augmente. En effet pour une chute depuis une position plus importante, la particule rayonne pendant une durée plus longue conduisant à un écart plus important par rapport au mouvement géodésique. On a refait le calcul de la variation de vitesse maximale pour les différentes valeurs de $r_0 = 15, 20, 30, 40$ et noté que $|\Delta\dot{R}|_{\max}$ croît linéairement avec r_0 . En effet, la position pour laquelle une particule test atteint la valeur maximale est $6Mr_0/(r_0 + 4M)$, ce qui reste dans la zone de champ fort où le potentiel de Zerilli est de grande amplitude et où l'effet de la force propre sur le mouvement est le plus important.

On peut essentiellement résumer trois points que l'approche pragmatique permet de mettre en avant :

- La force propre et l'auto-accélération sont dominées par les premiers modes (le mode $\ell = 2$ pouvant représenter plus de 50% du total) mais la contribution des modes supérieurs est essentielle. Le comportement de l'auto-accélération est indépendante de la position initiale, elle est négative et son maximum (en valeur absolue) reste localisé dans la zone de champ fort.
- Les effets de la réaction de radiation dus à la force propre se manifestent essentiellement dans la zone de champ fort, c'est-à-dire où le potentiel de Zerilli est

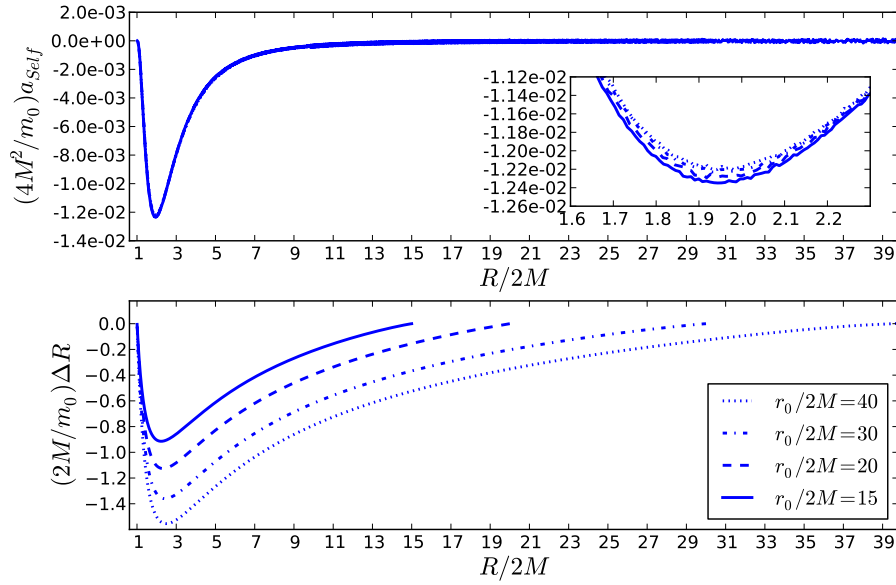


FIGURE 5.15: On résout l'équation (5.177) pour différentes valeurs de $r_0/2M$. On trace dans chaque cas, dans le graphe du haut l'auto-accélération a_{self} en fonction de R et dans le graphe du bas, la déviation ΔR en fonction de R . L'amplitude de a_{self} diminue légèrement quand r_0 augmente et ΔR augmente de façon significative quand r_0 augmente. En effet pour une chute depuis une position plus importante, la particule rayonne pendant une durée plus longue conduisant à un écart plus important avec l'ordre zéro (géodésique).

maximal. On a vu que dans la première phase de chute la particule pouvait gagner de la vitesse par rapport au mouvement géodésique et ensuite perdre de la vitesse jusqu'à l'horizon où le mouvement perturbé et la géodésique de référence se rejoignent.

- L'amplitude de l'écart à la géodésique ΔR est uniquement modulé par le rapport de masse m_0/M et la position initiale de chute r_0 , son comportement restant qualitativement le même ($\Delta R < 0 \forall R$) pour différent r_0 .

L'approche pragmatique permet de construire une trajectoire perturbée à partir de a_{self} calculée sur la géodésique de référence sous la contrainte que $\Delta R \sim \mathcal{O}(m_0/M)$. Si l'on envisage une chute depuis une position initiale très éloignée du trou noir on risque de sortir du domaine de validité de l'équation (5.177) ce qui conduirait à envisager une version à l'ordre 2 de l'équation (5.177) pour garantir une bonne précision. Cette remarque rejoint les arguments de Gralla et Wald [94] qui nous indique que même si on trouve une géodésique de référence proche de notre trajectoire perturbée à un instant t , il arrivera un certain temps t plus grand où l'approximation au premier ordre perturbatif n'est plus valide. Ainsi le formalisme au premier ordre perturbatif n'est valide que pour une fenêtre temporelle réduite. Si l'on souhaite obtenir une meilleure précision sur notre trajectoire perturbée on peut (i) soit décrire le mouvement à l'ordre 2 sur une fenêtre

temporelle plus grande qu'à l'ordre 1 (ii) soit garder une description au premier ordre perturbatif et morceler la durée du mouvement en plusieurs fenêtres temporelles pour lesquelles on change à chaque fois de géodésique de référence. Dans la limite où la largeur des fenêtres temporelles est très petite on peut parler de calcul *auto-consistant*. Cette deuxième suggestion de travail est dans l'esprit de *l'approche osculatrice* que l'on a mis en place dans la section suivante

On ne cherchera pas à calculer des trajectoires pour de grandes valeurs de r_0 , on restera dans les gammes de r_0 vues précédemment. On souhaite uniquement mettre en place un algorithme qui permet de traiter le mouvement de la particule dans l'esprit "auto-consistant" c'est-à-dire prendre en compte l'action de la force propre (ou une valeur approchée) au cours du temps calculée sur la trajectoire perturbée elle-même. Le cadre de la chute radiale permet de tester cette approche dans la jauge de RW grâce à la régularisation Mode-Sum qui donne un sens à la force propre dans cette jauge.

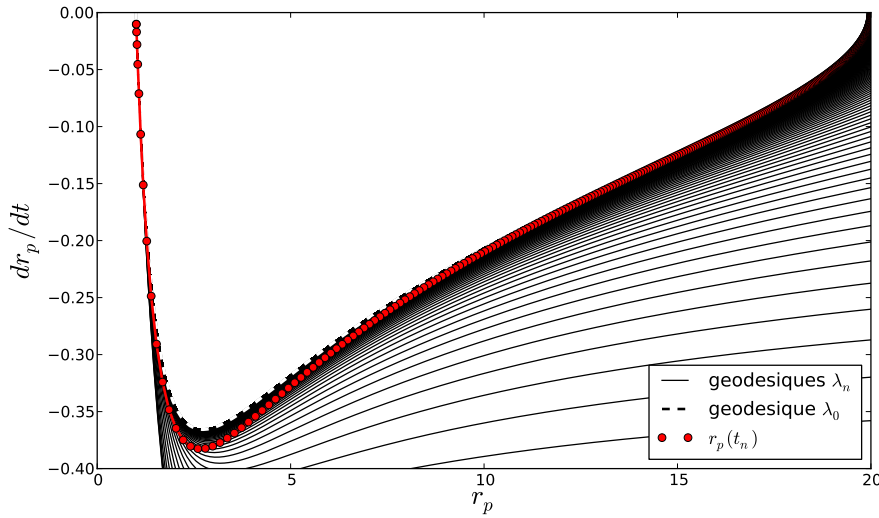


FIGURE 5.16: Illustration de la méthode osculatrice. Au cours de l'évolution, chaque point de la trajectoire perturbée (points rouges) donnée par l'équation du mouvement (5.159) est approché par une géodésique (les courbes noires) tangente à la trajectoire perturbée et passant par ce point. La courbe en pointillés correspond à la géodésique empruntée par une particule test coïncidant initialement avec la trajectoire perturbée en $r_0/2M = 20$.

5.4.2 Approche osculatrice de l'évolution orbitale

Une méthode auto-consistante nécessiterait la résolution de l'équation (5.159)

$$\frac{d^2 r_p}{dt^2} = a_0(r_p, \dot{r}_p) + a_{\text{self}}(r_p, \dot{r}_p) , \quad (5.191)$$

et donc l'évaluation de l'auto-accélération a_{self} sur la trajectoire perturbée empruntée par la particule. Le formalisme de régularisation mis en place dans ce chapitre est destiné

cependant à des trajectoires géodésiques. En effet, les paramètres de régularisation formulés en (5.123) sont donnés sur une géodésique. Il est donc assez naturel de s'orienter vers une méthode osculatrice.

Une géodésique λ décrit une trajectoire $Z^\lambda(t) = (R^\lambda(t), \dot{R}^\lambda(t))$ dans l'espace des phases. La méthode osculatrice consiste à trouver en chacun des points de la trajectoire perturbée $z_p(t_n) = (r_p(t_n), \dot{r}_p(t_n))$ au temps t_n une géodésique λ_n qui passe par $z_p(t_n)$. Ainsi la valeur de l'auto-accélération sur la trajectoire perturbée sera donnée par sa valeur calculée sur la géodésique osculatrice. La méthode osculatrice suppose donc que

$$a_{\text{self}}(r_p(t_n), \dot{r}_p(t_n)) \approx a_{\text{self}}(R^{\lambda_n}(t_n), \dot{R}^{\lambda_n}(t_n)) . \quad (5.192)$$

Dans une version discrétisée, adaptée au traitement numérique, on considérera alors une famille de géodésique λ_n que l'on devra trouver à chaque instant t_n . Avant de décrire la méthode, on introduit une série de notations listées ci-dessous et illustrées géométriquement sur la Fig. 5.17

- λ_n : géodésique passant au temps t_n au point $r_p(t_n)$ à la vitesse $\dot{r}_p(t_n)$.
- $t_n = t_0 + n\delta t$ où t_0 est la date à laquelle $r_p(t_0) = r_0$ et $\delta t = kh$, $k \in \mathbb{N}$.
- $z_p(t_n) = (r_p, \dot{r}_p)(t_n)$: point de la trajectoire perturbée dans l'espace des phases au temps t_n .
- $Z_n^{\lambda_n} = Z^{\lambda_n}(t_n) = (R_n^{\lambda_n}, \dot{R}_n^{\lambda_n})$: point de la géodésique λ_n dans l'espace des phases au temps t_n .
- $R_n^{\lambda_n} = R^{\lambda_n}(t_n)$: position au temps t_n sur la géodésique λ_n
- $\dot{R}_n^{\lambda_n} = \dot{R}^{\lambda_n}(t_n)$: vitesse au temps t_n sur la géodésique λ_n
- $a_{\text{self}}(t_n) = a_{\text{self}}\left(R_n^{\lambda_n}, \dot{R}_n^{\lambda_n}\right)$: Auto-accélération calculée sur la géodésique λ_n au point $Z_n^{\lambda_n}$ au temps t_n .
- $\mathcal{E}_n$: Energie associée à la géodésique λ_n . Elle est directement donnée par les coordonnées du point $z_p(t_n) = Z_n^{\lambda_n}$

$$\mathcal{E}_n = \sqrt{\frac{f(R_n^{\lambda_n})^3}{f(R_n^{\lambda_n})^2 - (\dot{R}_n^{\lambda_n})^2}} . \quad (5.193)$$

- $Z_i^{\lambda_n} = (R_i^{\lambda_n}, \dot{R}_i^{\lambda_n})$: position initiale $R_i^{\lambda_n}$ et vitesse initiale $\dot{R}_i^{\lambda_n}$ nécessaire pour que la géodésique λ_n atteigne le point $z_p(t_n)$ au temps t_n . La vitesse initiale est

reliée à la position initiale et l'énergie via

$$\dot{R}_i^{\lambda_n} = \pm \frac{f(R_i^{\lambda_n})}{\mathcal{E}_n} \sqrt{\mathcal{E}_n^2 - f(R_i^{\lambda_n})}, \quad (5.194)$$

où "±" indique le signe de la vitesse initiale.

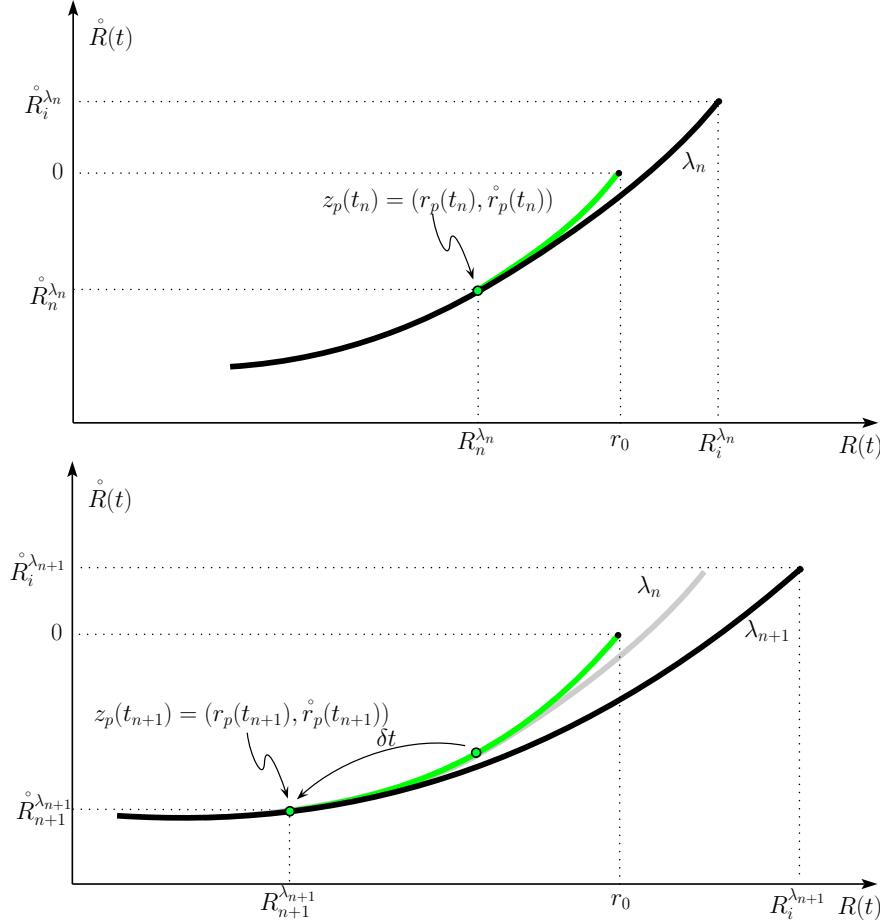


FIGURE 5.17: La méthode osculatrice consiste à trouver en chacun des points de la trajectoire perturbée $z_p(t_n) = (r_p(t_n), \dot{r}_p(t_n))$ (courbe et points verts) au temps t_n une géodésique λ_n (courbe noire dans le graphe du haut et courbe grise dans le graphe du bas) qui passe par $z_p(t_n)$. A partir de a_{self} calculé au point $Z_n^{\lambda_n}$, l'ODE (5.159) donne un nouveau point $z_p(t_{n+1})$ au temps t_{n+1} . En ce nouveau point on cherche à nouveau la géodésique λ_{n+1} telle que $z_p(t_{n+1}) = Z_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$ (courbe noire dans le graphe du bas).

La connaissance de $a_{\text{self}}(t_n)$ à chaque pas de temps t_n permet de résoudre numériquement l'équation du mouvement initialisée par $r_p(t_0) = r_0$ et $\dot{r}_p(t_0) = 0$. On choisira une méthode d'Euler, ce choix étant tout à fait améliorable par la suite. La Fig. 5.18 donne un schéma simplifié du code de calcul. Les principales étapes sont numérotées de 1 à 7 et décrites ci-dessous

1. On initialise les paramètres numériques. m_0 est la masse de la particule, h le pas d'intégration et ℓ_{max} l'ordre de troncature de la somme sur les modes. r_0 est

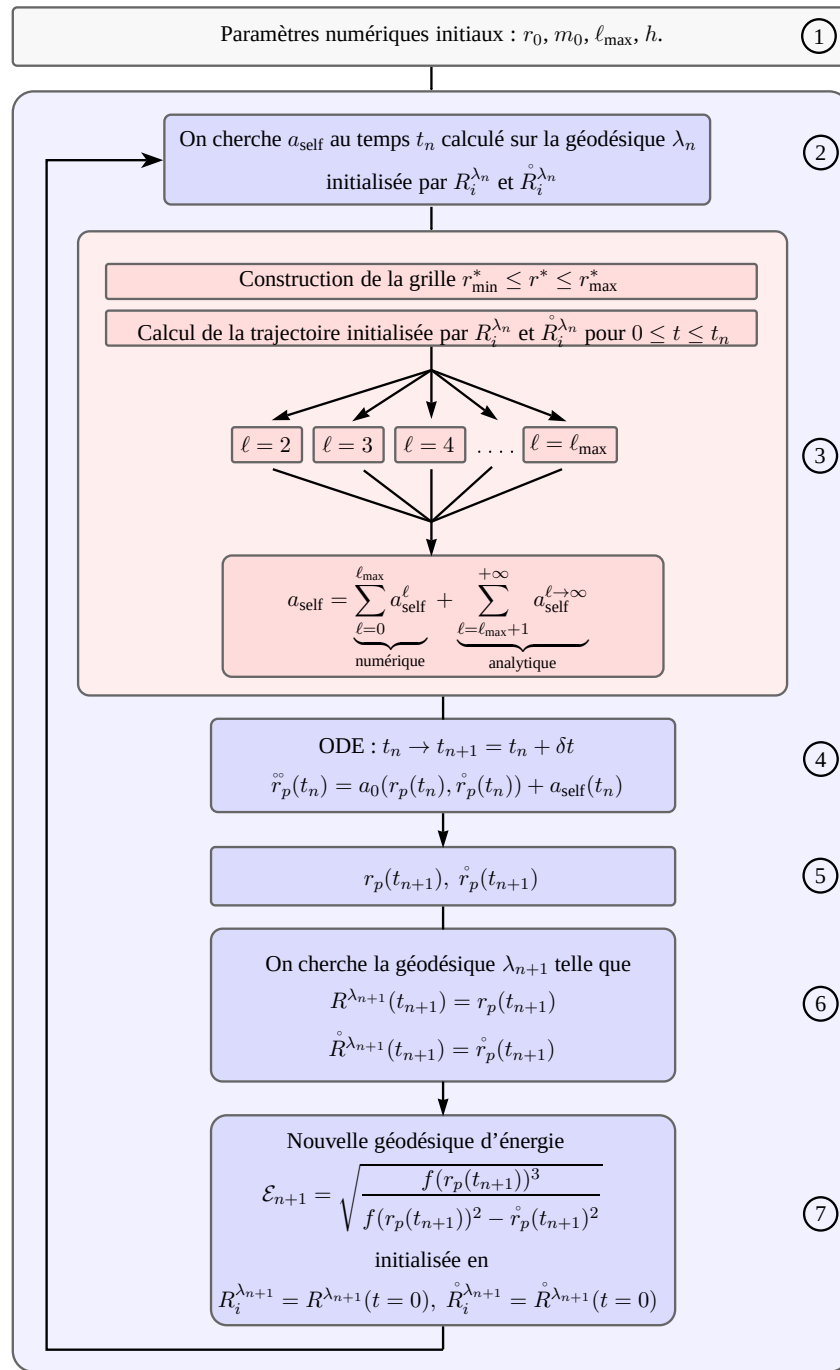


FIGURE 5.18: Schéma simplifié de l'algorithme suivi pour le calcul de la trajectoire perturbée en utilisant la méthode osculatrice. L'encadré en rouge représente la procédure pour le calcul de a_{self} pour un seul point $z_p(n)$ donné à une date t_n donnée. L'encadré en bleu correspond à la procédure itérative qui détermine la géodésique unique passant par le point suivant $z_p(t_{n+1})$.

la position initiale à partir de laquelle la particule commence sa chute avec une vitesse nulle.

2. On entre dans la boucle de résolution de l'équation différentielle (5.159) où à chaque

instant t_n , la quantité a_{self} est calculée sur la géodésique osculatrice λ_n au point $r_p(t_n)$.

3. On discrétise la grille définie par ses bornes $r_{\min}^*$ et $r_{\max}^*$, on calcule la trajectoire λ_n passant à travers notre domaine numérique puis on calcule a_{self} au temps t_n pour différents modes ℓ jusqu'à $\ell = \ell_{\max}$. Pour optimiser le temps de calcul, cette opération multi-modale est distribuée sur plusieurs processeurs. On effectue ensuite la somme sur tous les modes (mode $\ell = 0$ compris) puis on ajoute analytiquement la contribution des modes supérieurs à $\ell_{\max}$.
4. On itère la résolution de l'équation du mouvement par une méthode d'Euler.
5. On obtient la nouvelle position $z_p(t_{n+1}) = (r_p(t_{n+1}), \dot{r}_p(t_{n+1}))$ dans l'espace des phases.
6. On cherche la nouvelle géodésique λ_{n+1} qui passe par le point $z_p(t_{n+1})$ au temps t_{n+1} . Cette géodésique est trouvée par une méthode de Newton modifiée. Le paramètre sortant est la position initiale $R_i^{\lambda_{n+1}} = R^{\lambda_{n+1}}(t=0)$ de λ_{n+1} .
7. La nouvelle géodésique λ_{n+1} est caractérisée par la position initiale $R_i^{\lambda_{n+1}}$ à laquelle la particule "démarré" et son énergie $\mathcal{E}_{n+1}$ donnée par (5.193) qui va conditionner la vitesse initiale $\dot{R}_i^{\lambda_{n+1}} = \dot{R}^{\lambda_{n+1}}(t=0)$ donnée par (5.194).

Tant qu'on n'est pas arrivé à l'horizon on réitère cette procédure (voir Fig. 5.16). Concernant la recherche des géodésiques λ_n , le seul paramètre libre à faire varier est la position initiale $R_i^{\lambda_n}$. La recherche consistera à balayer une gamme de positions initiales $R_i^{\lambda_k}$ puis à évaluer le point $Z^k(t_n)$ correspondant à cette géodésique et enfin à le comparer à la cible $z_p(t_n)$. La méthode de type Newton mise en place sera chargée de minimiser la quantité $|r_p(t_n) - R^{\lambda_k}(t_n)|$ qui devra être inférieure à une valeur arbitraire de 10^{-6} . Lorsque ce critère est validé, la géodésique partant de $R_i^{\lambda_k}$ est bien la géodésique que l'on cherche.

$$|r_p(t_n) - R^{\lambda_k}(t_n)| \leq 10^{-6} \Rightarrow \lambda_n = \lambda_k, \quad (5.195)$$

(voir Fig. 5.19). En général, l'algorithme trouve la géodésique en moins de 5 ou 6 itérations.

Afin de pouvoir comparer les données de l'approche pragmatique à celles de l'approche osculatrice on introduit les quantités suivantes :

$$\Delta r^{\text{prag}} := \Delta R, \quad (5.196)$$

$$\Delta \dot{r}^{\text{prag}} := \Delta \dot{R}, \quad (5.197)$$

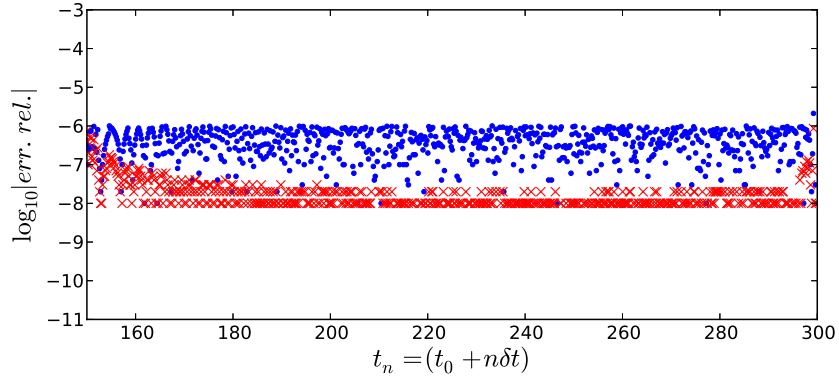


FIGURE 5.19: Erreur relative entre le point $z_p(t)$ de la trajectoire perturbée et le point $Z(t)$ de la géodésique passant par $z_p(t)$ trouvé par l'algorithme. Les points bleus correspondent à $\log_{10} |r_p(t_n) - R^{\lambda_n}(t_n)|$ et les croix rouges à $\log_{10} |\dot{r}_p(t_n) - \dot{R}^{\lambda_n}(t_n)|$

où $\Delta R(t)$ est solution de l'équation (5.172). En comparaison on définit un terme de déviation dans le formalisme osculateur

$$\Delta r^{\text{osc}} := r_p - R^{\lambda_0}, \quad (5.198)$$

$$\Delta \dot{r}^{\text{osc}} := \dot{r}_p - \dot{R}^{\lambda_0}, \quad (5.199)$$

où r_p est la trajectoire perturbée construite à partir de l'algorithme osculateur et $R^{\lambda_0}(t)$ est la première géodésique de référence passant par le point initial $z_p(t_0) = (r_0, 0)$. Dans le premier cas Δr^{prag} correspond à l'écart à l'ordre 1 par rapport au mouvement géodésique et pour lequel a_{self} est calculé le long de cette géodésique de référence. Dans le deuxième cas, Δr^{osc} correspond à l'écart par rapport au mouvement géodésique pour lequel a_{self} est donné en chaque point de la trajectoire perturbée r_p^{osc} par sa valeur calculée sur la géodésique osculatrice.

Dans la Fig. 5.20 on se place dans le cas d'une masse $m_0 = 10^{-5}$ et d'une position initiale $r_0/2M = 15$. On fait la comparaison entre la solution donnée par (5.172) (courbes bleues) et la solution construite à partir de l'algorithme osculateur (courbes rouges). L'organisation de la figure est la même que dans la Fig. 5.14. Dans le graphe du haut, on compare l'amplitude de $a_{\text{self}}^{\text{prag}} := a_{\text{self}}(R)$ déjà donnée à la Fig. 5.13 à l'amplitude de $a_{\text{self}}^{\text{osc}}$ donnée par les valeurs de a_{self} sur les géodésiques osculatrices. La différence absolue entre ces deux quantités est donnée par la courbe noire dont l'amplitude maximale est d'environ 3% en valeur relative. La différence notable est localisée dans la zone de champ fort ($R \lesssim 3$), le minimum de $a_{\text{self}}^{\text{osc}}$ est décalé vers l'horizon par rapport à $a_{\text{self}}^{\text{prag}}$. Il en est de même pour Δr^{osc} et $\Delta \dot{r}^{\text{osc}}$ dont la courbe, dans la zone de champ fort, est décalée vers l'horizon conduisant à un écart relatif également de 3% (courbes noires). Pour $R \gtrsim 3$ toutes les courbes sont respectivement identiques.

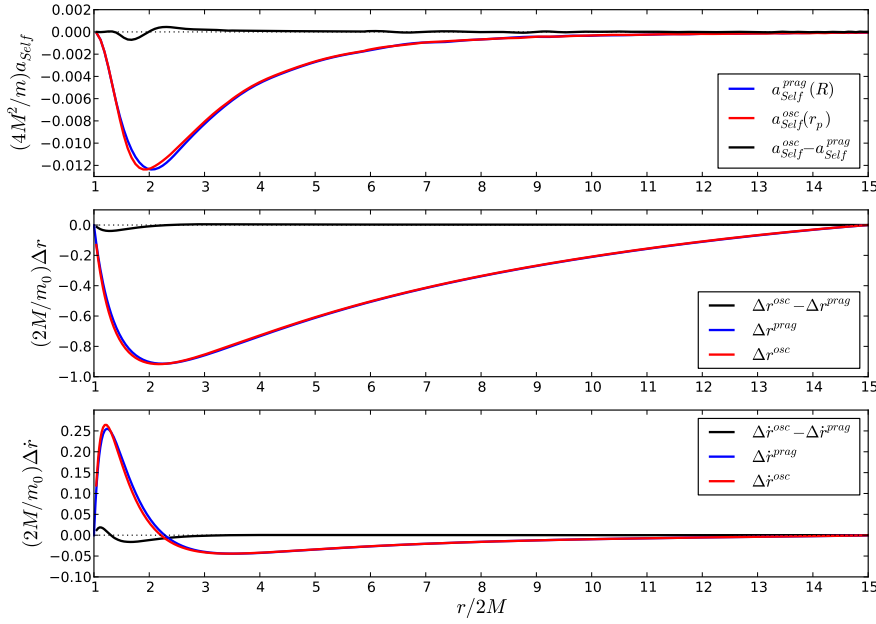


FIGURE 5.20: Comparaison entre la solution pragmatique de la Fig. 5.20 et la solution osculatrice pour $r_0/2M = 15$

La trajectoire perturbée issue de l'algorithme osculateur est en accord avec les données précédemment calculées dans l'approche pragmatique et apportent une correction de l'ordre de 3% par rapport aux trajectoires issues de l'approche pragmatique. Cette correction de quelques pour-cents reste valable pour différentes valeurs de m_0 (les calculs ont été effectués avec les valeurs de m_0 qui apparaissent dans la Fig. 5.21). Ainsi, en première approximation l'approche pragmatique permet d'obtenir une bonne connaissance de la trajectoire perturbée.

5.4.3 Formes d'ondes perturbées

Dans cette section on souhaite en quelque sorte faire le lien entre les calculs effectués dans le chapitre 4 et les calculs de déviation orbitale des sections précédentes. On se propose ici d'évaluer l'effet de la force propre sur les formes d'ondes (FO) et l'énergie rayonnée à l'infini. Pour le calcul de la trajectoire perturbée on utilisera l'algorithme osculateur décrit précédemment. Pour la génération des formes d'ondes on réutilisera le code que l'on a développé au chapitre 4 adapté pour traiter les trajectoires perturbées. La Fig. 5.21 présente les formes d'ondes perturbées (FOP) pour une chute libre depuis une position initiale $r_0/2M = 15$. Les FOP sont superposées dans le graphe du haut pour différentes valeurs de m_0 . Le déphasage Δt_{FO} des FOP (pris au troisième zéro du signal) par rapport à la FO de référence est d'environ $\Delta t_{FO}/2M \approx 1.3(m_0/M)$ soit de l'ordre du rapport de masse m_0/M . Dans le graphe du bas on a tracé la différence

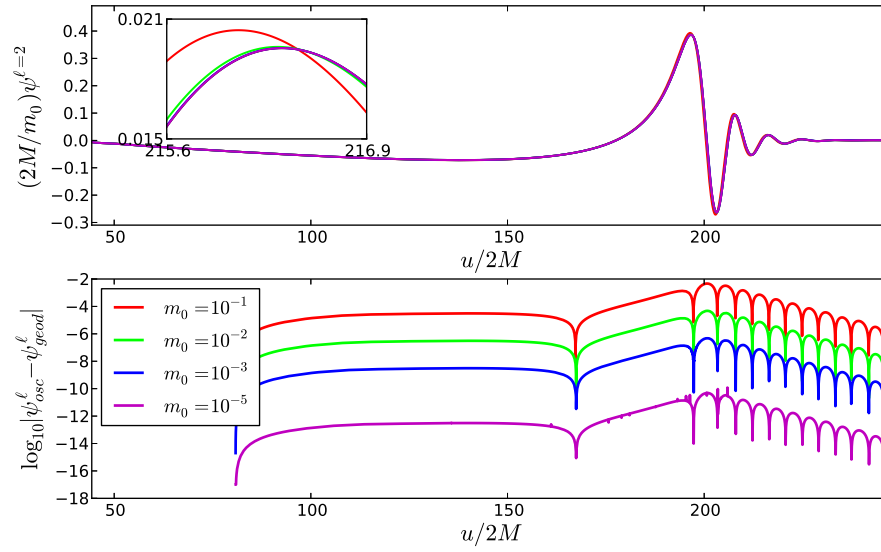


FIGURE 5.21: Formes d'ondes perturbées (graphe du haut) en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ (avec $r_{\text{obs}}^* = 500M$) pour le mode quadrupolaire capturé à l'infini pour une particule en chute libre depuis une position initiale $r_0/2M = 15$. Le calcul est fait pour différentes valeurs de m_0 . Dans le graphe du bas on a tracé la différence absolue, en échelle $\log_{10}$ des formes d'ondes perturbées par rapport aux formes d'ondes générées lorsque la particule suit un mouvement géodésique.

absolue entre les FOP et la FO calculée pour un mouvement géodésique. Le domaine où la différence est maximale ($t \in [175, 250]$) correspond au mouvement dans la zone de champ fort où la particule atteint l'horizon suite à quoi il y a production des MQN. La différence est, à ce niveau, d'ordre inférieur ou égal à $\mathcal{O}(m_0^2/M^2)$. Les mêmes calculs ont été faits dans le cas de $r_0/2M = 40$ et les résultats reportés à la Fig. 5.22. Le déphasage des FOP $\Delta t_{FO}/2M \approx 2.7(m_0/M)$ reste du même ordre de grandeur tout en étant deux fois plus important que pour $r_0/2M = 15$. La différence entre FOP et FO géodésique est visiblement d'ordre inférieur ou égal à $\mathcal{O}(m_0^2/M^2)$ sur le domaine $t \in [350, 450]$.

Connaissant les FOP, on peut en tirer l'énergie rayonnée qui leur est associée. Le Tab. 5.4 compile les valeurs d'énergie pour les deux trajectoires étudiées précédemment ($r_0/2M = 15$ et $r_0/2M = 40$) pour les modes $\ell = 2$ à $\ell = 5$. Dans chaque cas on calcule l'écart en énergie δE_ℓ par rapport à l'énergie rayonnée par une particule suivant une géodésique. Ce calcul est effectué pour trois valeurs différentes de m_0 . On note que δE_ℓ est d'autant plus faible que le rapport de masse m_0/M est petit. Ceci se comprend car $a_{\text{self}} \propto m_0$. De plus, à valeur de m_0 égale, δE_ℓ semble plus important pour $r_0/2M = 40$ que pour $r_0/2M = 15$ puisqu'en effet le rayonnement gravitationnel se produit pendant un temps de chute plus long pour $r_0/2M = 40$. De même l'écart relatif en énergie est d'autant plus important que le mode ℓ est grand. Cependant si l'on somme les modes de $\ell = 2$ à $\ell = 5$, l'écart en énergie totale dépasse 1% pour $m_0 = 10^{-2}$ (qui ne correspond pas à un régime de type EMRI) et reste bien inférieur à 1% pour des masses $m_0 = 10^{-3}$.

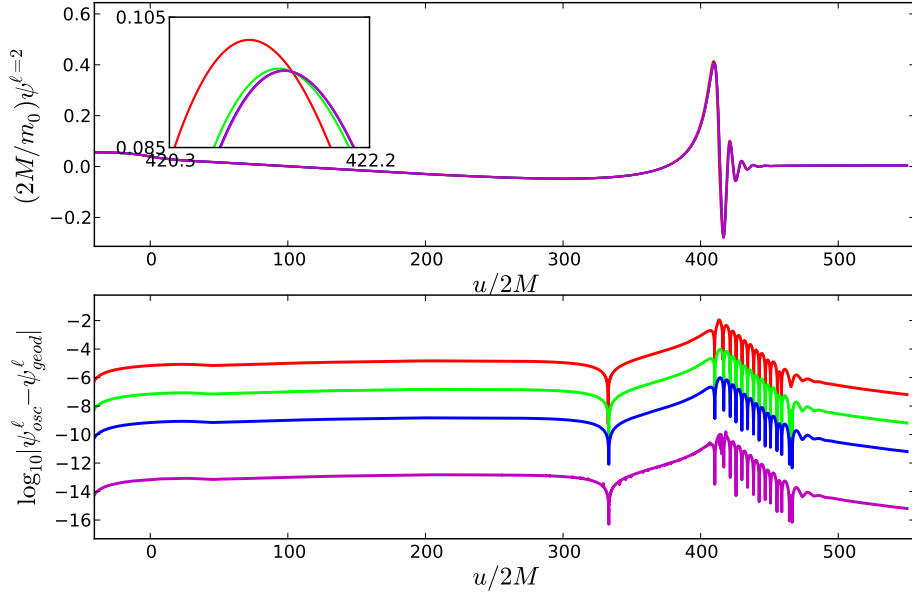


FIGURE 5.22: Formes d'ondes perturbées (graphe du haut) en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ (avec $r_{\text{obs}}^* = 500M$) pour le mode quadrupolaire capturé à l'infini pour une particule en chute libre depuis une position initiale $r_0/2M = 40$. Le calcul est fait pour différentes valeurs de m_0 . Dans le graphe du bas on a tracé la différence absolue, en échelle $\log_{10}$ des formes d'ondes perturbées par rapport aux formes d'ondes générées lorsque la particule suit un mouvement géodésique.

ou $m_0 = 10^{-5}$.

Ainsi pour un système de type EMRI ($m_0 < 10^{-5}$), pour une particule en chute libre, l'écart en énergie reste très négligeable devant le critère (4.109) que nous nous étions fixés sur le calcul de la quantité E . Pour de plus grandes valeurs de m_0 la correction orbitale devient non négligeable et peut être prise en compte. Dans tous les cas, l'écart en énergie est strictement positif ce qui est cohérent avec le fait que le système perd de l'énergie transportée par OG jusqu' à l'observateur lointain.

5.5 Validation du code

5.5.1 Conditions initiales

Dans la section 4.5.1 on a déjà été confronté au choix de condition initiale sur la fonction d'onde, c'est-à-dire le choix sur le contenu gravitationnel initial lorsque la particule est lâchée en $r = r_0$. Même si le fait d'imposer une condition initiale de type Brill-Lindquist permet de générer les modes quasi-normaux de la forme d'onde, la méconnaissance des conditions initiales sur les dérivées de la fonction d'onde (ou sur la dérivée des fonctions de perturbations) induit des oscillations non physiques qui polluent la première phase de chute comme on le remarque sur les Figs. 5.23a et 5.23c ou sur les Figs. 1,2,3 de [54]. On a donc choisi de travailler avec des trajectoires symétriques qui laissent le temps aux

$r_0/2M$	m_0	ℓ	E_ℓ	δE_ℓ	$\delta E_\ell/E_\ell$	$r_0/2M$	m_0	ℓ	E_ℓ	δE_ℓ	$\delta E_\ell/E_\ell$
15	10^{-2}	2	$1.65301.10^{-2}$	$8.2.10^{-5}$	0.50%	40	10^{-2}	2	$1.85187.10^{-2}$	$8.5.10^{-5}$	0.45%
		3	$1.95258.10^{-3}$	$1.67.10^{-5}$	0.85%			3	$2.12044.10^{-3}$	$1.87.10^{-5}$	0.88%
		4	$2.60437.10^{-4}$	$3.14.10^{-6}$	1.21%			4	$2.85501.10^{-4}$	$3.52.10^{-6}$	1.23%
		5	$3.68305.10^{-5}$	$5.81.10^{-7}$	1.58%			5	$4.06409.10^{-5}$	$6.54.10^{-7}$	1.61%
	10^{-3}	2	$1.64562.10^{-2}$	8.10^{-6}	0.05%		10^{-3}	2	$1.85187.10^{-2}$	$8.5.10^{-6}$	0.05%
		3	$1.93750.10^{-3}$	$1.66.10^{-6}$	0.09%			3	$2.10344.10^{-3}$	$1.77.10^{-6}$	0.09%
		4	$2.57592.10^{-4}$	$2.98.10^{-7}$	0.12%			4	$2.82311.10^{-4}$	$3.34.10^{-7}$	0.12%
		5	$3.63100.10^{-5}$	$6.08.10^{-8}$	0.17%			5	$4.00538.10^{-5}$	$6.66.10^{-8}$	0.17%
	10^{-5}	2	$1.64483.10^{-2}$	$8.1.10^{-8}$	$4.5.10^{-4}\%$		10^{-5}	2	$1.85102.10^{-2}$	$8.6.10^{-7}$	$4.6.10^{-4}\%$
		3	$1.93586.10^{-3}$	2.10^{-8}	$1.10^{-3}\%$			3	$2.10169.10^{-3}$	$2.5.10^{-8}$	$1.2.10^{-3}\%$
		4	$2.57296.10^{-4}$	$2.7.10^{-9}$	$1.10^{-4}\%$			4	$2.81975.10^{-4}$	5.10^{-9}	$1.7.10^{-3}\%$
		5	$3.62498.10^{-5}$	$6.6.10^{-10}$	$1.8.10^{-4}\%$			5	$3.99876.10^{-5}$	$3.6.10^{-10}$	$9.10^{-4}\%$

TABLE 5.4: Energie rayonnée pour une chute libre depuis $r_0/2M = 15$ et $r_0/2M = 40$ dans le cas d'une trajectoire perturbée. L'énergie est donnée mode par mode (en unités $(2M/m_0^2)$) puis comparée à sa valeur dans le cas d'un mouvement géodésique via la quantité δE_ℓ . Le calcul est effectué pour trois valeurs différentes de m_0

conditions initiales non physiques de se dissiper avant de considérer la phase de chute $\dot{r}_p \leq 0$ (voir Figs. 5.23b et 5.23d).

5.5.2 Sensibilité à $\ell_{\max}$

Le calcul de la série donnée en (5.184) dépend du paramètre numérique $\ell_{\max}$ qui est le mode le plus élevé que l'on va directement calculer numériquement. Typiquement, plus $\ell_{\max}$ est grand et plus a_{self} tend vers sa valeur réelle (voir Fig. 5.24). L'idée est de choisir $\ell_{\max}$ suffisamment petit pour éviter une trop grande quantité de calculs et suffisamment grand pour que l'erreur sur a_{self} soit acceptable. On choisit $\ell_{\max}$ telle que la contribution apportée par le mode $\ell_{\max}$ à la série tronquée en $\ell_{\max}$ soit inférieure à 0.1%. On quantifie cette contribution par le terme $\Delta \|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\max}}$ qui correspond à l'erreur relative entre la norme L^1 de la série tronquée en $\ell_{\max}-1$ et la série tronquée en $\ell_{\max}$.

$$\Delta \|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\max}} = \frac{\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\max}-1} - \|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\max}}}{\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\max}}}, \quad (5.200)$$

où la norme L^1 est donnée par

$$\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\max}} = \int |a_{\text{self}}| dR. \quad (5.201)$$

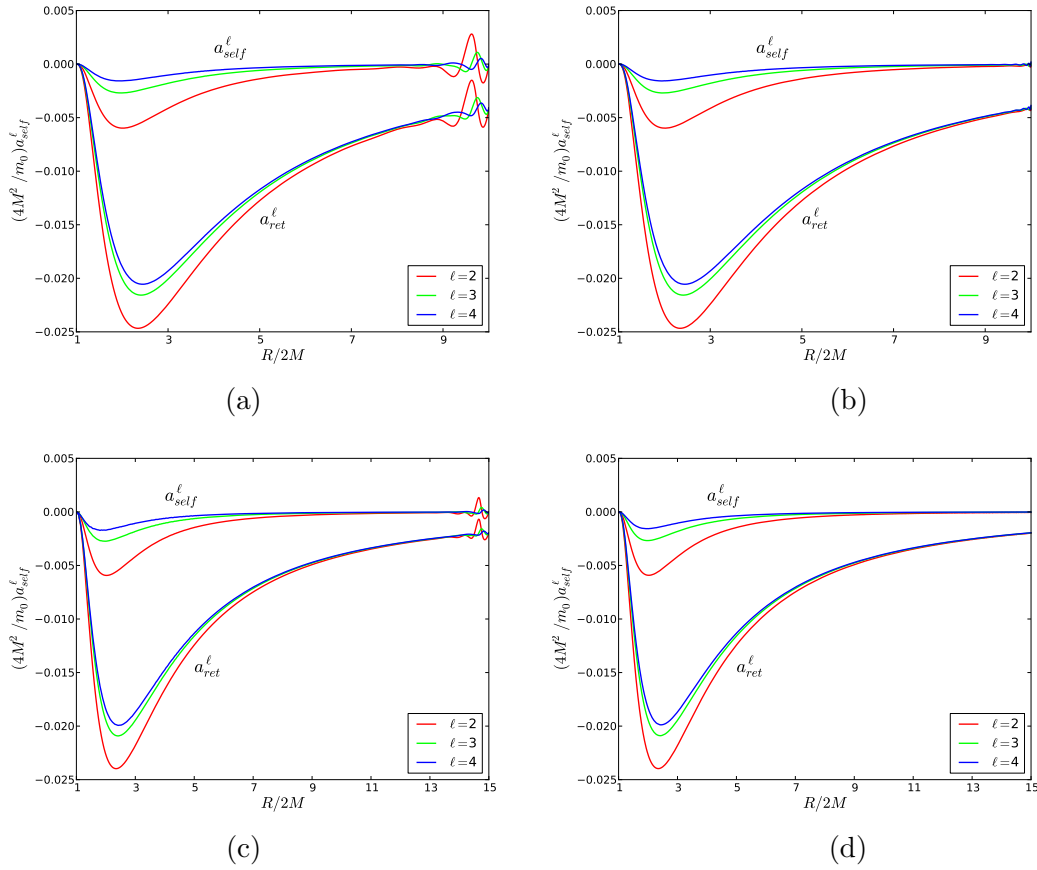


FIGURE 5.23: Les conditions initiales de type Brill-Lindquist imposées en $r = r_0$ induisent des oscillations non physiques qui polluent la première phase de chute. Cela correspond aux graphes (a) et (c) associés respectivement à une chute depuis $r_0/2M = 10$ et $r_0/2M = 15$. Pour pouvoir exploiter la première de chute on utilisera plutôt des trajectoires symétriques puis on considérera seulement la partie des données correspondant à la chute vers le trou noir (la phase de montée laissant le temps aux oscillations non physiques de se dissiper à l'infini). Ce cas de figure est donné dans les graphes (b) et (d) associés respectivement à une chute depuis $r_0/2M = 10$ et $r_0/2M = 15$.

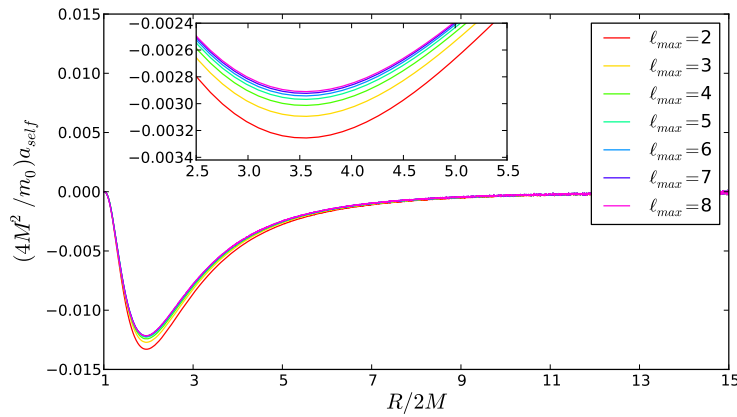


FIGURE 5.24: Auto-accelération a_{self} pour différentes valeurs du paramètre de troncature ℓ_{max} intervenant dans la la série (5.184).

Le Tab. 5.5 donne la valeur de a_{self} en fonction du paramètre de troncature ℓ_{max} de la série (5.184). $\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\text{max}}}$ semble converger vers une valeur finie telle que le critère

$$\Delta\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{\ell_{\text{max}}} \leq 0.1\% \quad (5.202)$$

soit satisfait pour $\ell_{\text{max}} = 8$.

ℓ_{max}	$\ a_{\text{self}}\ _{L^1}^{\ell_{\text{max}}}$	$\Delta\ a_{\text{self}}\ _{L^1}^{\ell_{\text{max}}}$
2	0.03248	—
3	0.03042	6.8%
4	0.02960	2.7%
5	0.02922	1.3%
6	0.02904	0.6%
7	0.02896	0.2%
8	0.02893	0.1%

TABLE 5.5: Estimation de ℓ_{max} pour une précision donnée.

5.5.3 Sensibilité à h

Comme pour le paramètre ℓ_{max} , le paramètre de pas de grille h doit être choisi judicieusement pour ne pas demander un surplus de calcul inutile pour la précision que l'on souhaite. On suivra le même raisonnement qu'avec ℓ_{max} , on considérera le terme

$$\Delta\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{h_k} = \frac{\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{h_{k-1}} - \|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{h_k}}{\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{h_k}}, \quad (5.203)$$

où $\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^{h_k}$ correspond à l'auto-accélération calculée pour $\ell_{\text{max}} = 8$ avec un pas d'intégration $h/2M = h_k$ tel que $h_0 = 0.01$, $h_1 = 0.005$, $h_2 = 0.0025$, $h_3 = 0.001$. On trouve que le critère

$$\Delta\|a_{\text{self}}\|_{L^1}^h \leq 0.1\% \quad (5.204)$$

est satisfait pour $h/2M = 0.001$.

5.5.4 Comportement asymptotique en ℓ

A la section 5.3.1 on a déjà noté que le code respectait bien le comportement asymptotique des quantités telles qu'elles sont données dans les équations quand le nombre ℓ devient grand (voir Fig. 5.7). Afin de valider si la technique de régularisation fonctionne

et que les paramètres de régularisation ont été correctement calculés il peut être judicieux de vérifier le comportement asymptotique de l'auto-accélération (ou de la force propre) par rapport aux modes L .

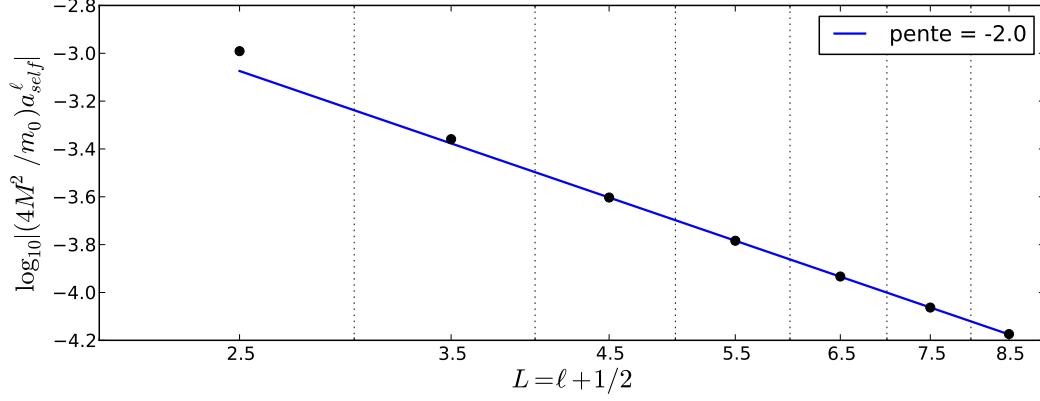


FIGURE 5.25: Vitesse de convergence de la série $a_{\text{self}} = \sum_{\ell} a_{\text{ret}}^\ell - B_a$.

La Fig. 5.25 donne la valeur des modes a_{self}^ℓ en fonction de $L = \ell + 1/2$. La pente de la droite donne la vitesse de convergence de la série $a_{\text{self}} = \sum_{\ell} a_{\text{ret}}^\ell - B_a^\alpha$ qui est bien en $\mathcal{O}(L^{-2})$. (On rappelle que a_{ret}^ℓ est une moyenne telle que $a_{\text{ret}}^\ell = 1/2(a_{\text{ret}+}^\ell + a_{\text{ret}-}^\ell)$). Le bon comportement a été vérifié pour plusieurs valeurs de $R \in [2M, r_0]$ et plusieurs valeurs de $r_0 \geq 10$.

La Fig. 5.26 donne la même vérification pour les composantes de la force propre.

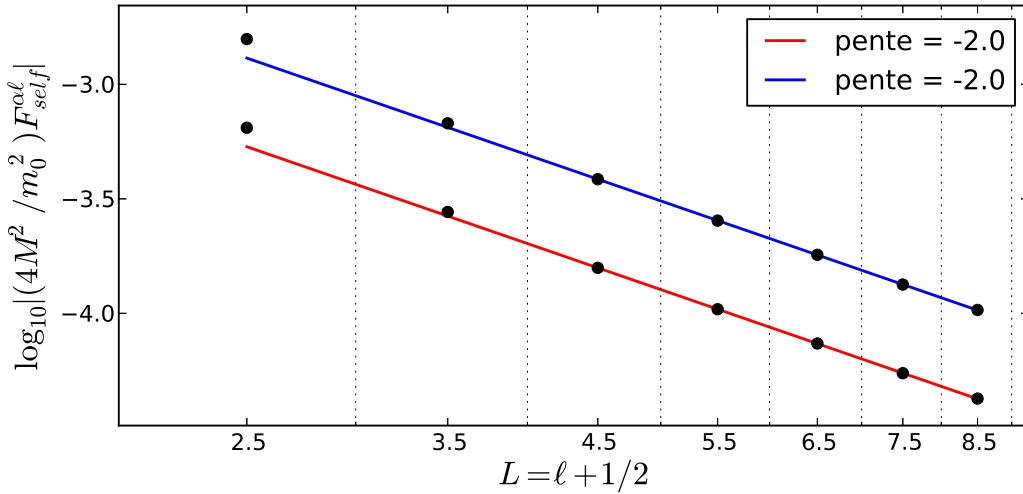


FIGURE 5.26: Vitesse de convergence de la série $F_{\text{self}}^\alpha = \sum_{\ell} F_{\text{ret}}^{\alpha\ell} - B^\alpha$ pour les deux composantes de la force propre t (en rouge) et r (en bleu).

Conclusions

Dans ce travail de thèse nous avons sondé le thème complexe de la modélisation des EMRI et les problèmes conceptuels et mathématiques qu'elle pose. Heureusement de nombreux travaux antérieurs nous proposent aujourd'hui un cadre formel bien défini et accessible. Nous avons traité deux aspects de la modélisation des EMRI.

La première partie, dont les résultats ont été présentés au chapitre 4, a permis d'examiner la génération d'ondes gravitationnelles et leur propagation dans le formalisme de Regge-Wheeler. Nous nous sommes placés dans le cas d'un système constitué d'une particule ponctuelle en orbite autour d'un trou noir de Schwarzschild. L'évolution du champ perturbé peut être ramené à l'équation d'onde de RWZ dont nous avons proposé une méthode d'intégration numérique. Cette méthode exploite la nature non continue de la solution le long de la géodésique en utilisant les conditions de saut de la fonction d'onde et de ses dérivées que nous avons défini analytiquement. Cette méthode a l'avantage de traiter la source comme une vraie distribution sans approximation analytique et sa portabilité à des équations hyperboliques quelconques dont le terme source est singulier est tout à fait envisageable (cet algorithme a d'ailleurs été testé avec succès pour l'équation de Regge-Wheeler dans le cas scalaire). Le produit issu de ce travail est donc un code de calcul d'ordre 2 permettant d'obtenir les formes d'ondes à l'infini et à l'horizon pour chaque mode de perturbation ℓm et pour tous types d'orbites. Les spectres, les flux d'énergie et de moment angulaire calculés à partir de ces formes d'ondes ont été comparées aux données préexistantes issues de techniques de calcul différentes. Nos données apparaissent conformes à la littérature selon les chiffres donnés essentiellement aux Tabs. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6. La précision du code étant validée, une extension au 4ème ordre a été construite pour des orbites radiales afin de l'appliquer au calcul des composantes du tenseur de perturbation qui nécessitent l'évaluation de la dérivée troisième de la fonction d'onde. De plus la résolution de la partie homogène a été perfectionnée et optimisée d'un point de vue purement algorithmique en employant différentes techniques (SSE, parallélisation) sur les unités de calculs dont nous disposons (voir Fig. 4.22).

La seconde partie a été axée sur le calcul de la force propre en jauge de RW pour une particule en chute libre depuis un point fixe sur un trou noir de Schwarzschild et le calcul

de son effet sur le mouvement même de la particule. La première phase de ce travail a consisté à obtenir la force propre gravitationnelle le long d’une géodésique purement radiale. On a d’abord proposé une dérivation des paramètres de régularisation A^α , B^α et C^α en jauge de RW. Ce calcul est basé sur l’analyse locale de la fonction de Green, technique introduite par Barack dans le cas scalaire et en jauge harmonique. Le calcul explicite de cette procédure dans la jauge de RW n’apparaît pas dans la littérature, c’est pourquoi nous l’avons détaillé dans cette thèse au chapitre 5. Les composantes du tenseur de perturbation et de la force retardée ont ensuite été calculées numériquement pour chaque mode $\ell \leq \ell_{\max}$ à l’aide du code d’ordre 4 mis en place précédemment. Une fois régularisée, la force propre est obtenue à mieux de 0.1% et a pu confirmer les courbes de l’unique papier [54] donnant la force propre gravitationnelle en jauge de Regge-Wheeler pour une particule en chute libre. La force propre gravitationnelle intervenant dans l’équation du mouvement au premier ordre perturbatif peut être réécrite en temps coordonnée où le terme d’auto-accélération est relié aux composantes de la force propre par l’équation (5.176). Nous avons montré que le terme d’auto-accélération est essentiellement dominé par les premiers modes (le mode $\ell = 2$ pouvant contribuer à hauteur de 55%) et que la jauge de Zerilli n’est pas bien adaptée pour fournir le mode $\ell = 0$. Nous avons utilisé une autre jauge (notée G2) qui fournit un monopôle bien défini à l’horizon pour compléter la série (5.184) à régulariser.

Nous avons donné deux résolutions possibles pour l’équation du mouvement. L’une est basée sur l’approche pragmatique initialement proposée par Lousto [187]. Elle consiste à linéariser l’équation du mouvement nécessitant l’évaluation de l’auto-accélération (et par conséquent de la force propre) uniquement sur la géodésique. On a montré, contrairement à Lousto [187] que la déviation orbitale était purement négative, d’amplitude $\sim \mathcal{O}(m_0/M)$ et uniquement modulée par le rapport de masse et la position initiale r_0 . Au cours du mouvement on peut également voir que l’écart de vitesse par rapport au mouvement géodésique mettait en exergue deux régimes. Durant la première phase de chute la particule gagne de la vitesse par rapport au mouvement géodésique puis une fois qu’elle entre dans la zone de champ fort (proche du maximum du potentiel de Zerilli) elle décélère par rapport au mouvement géodésique. De plus ce comportement est indépendant de m_0 ou de r_0 .

La deuxième approche que nous avons mise en place pour la résolution de l’équation du mouvement est une approche osculatrice. Cet algorithme a entièrement été développé et consiste à trouver en chacun des points de la trajectoire perturbée une géodésique tangente qui passe en ce point. On suppose alors que la force-propre calculée en ce point peut être approximée par la force propre prise sur la géodésique osculatrice au point considéré. Le code reproduit les résultats de l’approche pragmatique mais cette méthode est plus fidèle à l’esprit ”auto-consistant” puisqu’elle prend vraiment en compte l’action de la force propre à chaque itération. On a pu montrer que la correction sur

la déviation orbitale par rapport à l’approche pragmatique était de l’ordre de quelques pour-cents (3% pour $r_0/2M = 15$) et que les formes d’ondes perturbées étaient corrigées d’un facteur au plus $\sim \mathcal{O}(m_0/M)$. Enfin, l’énergie calculée par évolution orbitale est également corrigée d’une quantité positive qui peut être prise en compte dans le cas de rapports de masses intermédiaires ($m_0 = 10^{-1} - 10^{-2}$). Dans le cas d’un rapport de masse plus faible ($m_0 = 10^{-5}$) cette correction apparaît négligeable devant le critère de précision de 1% que nous avons fixé pour le calcul de l’énergie.

Aborder le problème de l’évolution orbitale dans le cas radial a été un bon exercice pour mettre en place les outils nécessaires pour envisager l’application à des orbites génériques. Même si la chute radiale est d’un intérêt astrophysique moindre qu’un mouvement plan, elle regroupe de nombreuses difficultés intéressantes dans son traitement numérique : non-adiabaticité, zone de champ fort proche de l’horizon, zone de champ faible loin de l’horizon (configuration comparable lorsqu’on a un mouvement sur une orbite très excentrique), cohabitation de deux échelles de temps (temps de chute et temps de propagation des OG). De plus d’un point de vue historique, la chute radiale a souvent été d’un grand intérêt permettant d’exposer ou d’illustrer un concept dans un cadre simplifié tout en étant physiquement pertinent. L’approche pleinement relativiste de la chute radiale, que nous venons d’exposer est, de ce point de vue, bien adaptée pour introduire la notion de force-propre (calculable en jauge de RW assez facilement) et son rôle dans le mouvement orbital d’un système EMRI.

Les travaux présentés sur la résolution de l’équation de RWZ pour le calcul des formes d’ondes ont été rassemblés dans un article en préparation. En addition au contenu nous souhaitons ajouter une étude sur l’influence d’un éventuel troisième corps sur les formes d’ondes. Cet aspect est en cours de développement.

En extension aux résultats présentés au chapitre 5 il est envisagé d’étudier les calculs post-newtoniens dans le cas radial afin d’avoir des données de confrontation fiables notamment sur l’énergie corrigée ou sur une autre quantité invariante de jauge encore à déterminer. Ces travaux sur la chute radiale feront l’objet de deux publications en cours de préparation : l’une propose d’insérer, dans le contexte historique d’étude sur la chute des corps, l’implémentation pleinement relativiste de la chute d’une particule sur un trou noir de Schwarzschild; l’autre, plus technique, détaillera tout le matériel algorithmique mise en place pour traiter l’évolution orbitale dans la jauge de RW.

Les codes de calcul que nous avons développés peuvent encore être optimisés. Il est notamment prévu d’utiliser une technique de compactification spatio-temporelle [180] permettant de réduire considérablement le domaine d’intégration et donc le temps de calcul pour chaque mode. Pour les orbites planes, le portage à une précision d’ordre supérieur à 2 pourrait être envisagé permettant l’accès aux perturbations. Les modes de perturbation étant non continus dans ce cas (contrairement au cas radial) la régularisation

de la force propre n'est pas possible. Cependant les travaux récents de Hopper et Evans [154][155] laissent espérer une technique de correspondance entre jauge de RW et jauge harmonique qui permettraient de calculer la force propre gravitationnelle en jauge harmonique à partir des perturbations calculées en jauge de RW.

Pour finir, ce travail de thèse présenté dans ce document, doit essentiellement être vu comme une estimation du formalisme et des méthodes numériques nécessaires pour acquérir des bases solides avant d'étudier des scénarii astrophysiquement plus approfondis. Cette étude a été présentée à la 16ème rencontre de la communauté CAPRA à Dublin au mois de juillet 2013.

Annexes A

Conditions de sauts : Orbites planes

On liste ici la forme explicite des conditions de saut des fonctions $\psi_{e/o}^{\ell m}$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2. Les conditions de saut sont calculés sur une géodésique repérée par $(R(t), \Phi(t), \Theta(t))$. On considèrera ici que le point "." correspond à la dérivée temporelle d/dt telle que $\dot{R} = dR/dt = f_R/\mathcal{E}\sqrt{\mathcal{E}^2 - f_R^2}$ où on a noté $f_R := f(R)$. On rappelle l'expression de $\lambda = (\ell - 1)(\ell + 2)/2$ et on introduira $K = (\pi m_0 u^t)/(\lambda + 1)$ avec $u^t = dt/d\tau = \mathcal{E}/f_R$, $\Lambda_1(R) = (\lambda R + 3M)$ et $\Lambda_2(R) = \lambda R^2(\lambda + 1)$. On rappelle également les fonctions angulaires

$$X^{\ell m}(\theta, \phi) = 2(\partial_\theta \partial_\phi - \cot \theta \partial_\phi) Y^{\ell m}(\theta, \phi) \quad (\text{A.1})$$

$$W^{\ell m}(\theta, \phi) = (\partial_\theta^2 - \cot \theta \partial_\theta - \sin^{-2} \theta \partial_\phi^2) Y^{\ell m}(\theta, \phi) \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{A}^{\ell m}(\Theta, \Phi) = \left(\dot{\Theta} \sin^{-1} \Theta \partial_\phi - \sin \Theta \dot{\Phi} \partial_\theta \right) Y^{\ell m}(\Theta, \Phi) . \quad (\text{A.3})$$

Ordre 0

$$[\psi_e^{\ell m}] = 8K \frac{R f_R}{\Lambda_1(R)} Y^{\ell m \star} \quad (\text{A.4})$$

$$[\psi_o^{\ell m}] = -\frac{8KR}{\lambda} \mathcal{A}^{\ell m \star} \quad (\text{A.5})$$

Ordre 1

$$\begin{aligned}
[\partial_r \psi_e^{\ell m}] &= 8K \frac{R f_R (2\dot{R} \dot{u}^t + \ddot{R} u^t)}{u^t \Lambda_1 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} - 8K \frac{\dot{R}^2 \left[\lambda R^2 \left(\lambda + 1 + \frac{2M}{R} \right) + 3M^2 \right]}{R \Lambda_1^2 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} \\
&+ 8K \frac{f_R^2 \left[\lambda R^2 \left(\lambda + 1 + \frac{4M}{R} \right) + 9M^2 \right]}{R \Lambda_1^2 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} - 8K \frac{\dot{\Phi}^2 R^2 f_R^2}{\Lambda_1 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} \quad (A.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- 4K \frac{\dot{\Phi}^2 R f_R}{\lambda (\dot{R}^2 - f_R^2)} W^{\ell m \star} \\
[\partial_r \psi_o^{\ell m}] &= - \frac{8K}{\lambda (\dot{R}^2 - f_R^2)} \left[\frac{R \dot{R}}{u^t} \frac{d}{dt} (\mathcal{A}^{\ell m \star} u^t) + (f_R^2 + \dot{R}^2) \mathcal{A}^{\ell m \star} \right] \quad (A.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_t \psi_e^{\ell m}] &= 8K \frac{R f_R}{\Lambda_1} \frac{d}{dt} Y^{\ell m \star} - 8K \frac{R f_R (\dot{R}^2 + f_R^2) \dot{u}^t}{u^t \Lambda_1 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} - 8K \frac{R f_R \dot{R} \ddot{R}}{\Lambda_1 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} \\
&+ 8K \frac{\dot{R}^3 (R(\lambda + 1) + M)}{R \Lambda_1 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} - 8K \frac{\dot{R} f_R^2 (R(\lambda + 1) + 3M)}{R \Lambda_1 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} \quad (A.8) \\
&+ 8K \frac{\dot{\Phi}^2 \dot{R} R^2 f_R^2}{\Lambda_1 (\dot{R}^2 - f_R^2)} Y^{\ell m \star} + 4K \frac{\dot{\Phi}^2 \dot{R} R f_R}{\lambda (\dot{R}^2 - f_R^2)} W^{\ell m \star}
\end{aligned}$$

$$[\partial_t \psi_o^{\ell m}] = \frac{8K f_R^2}{\lambda (\dot{R}^2 - f_R^2)} \left[\frac{R}{u^t} \frac{d}{dt} (\mathcal{A}^{\ell m \star} u^t) + 2\dot{R} \mathcal{A}^{\ell m \star} \right] \quad (A.9)$$

Ordre 2

$$\begin{aligned}
[\partial_r^2 \psi_e^{\ell m}] = & -\frac{4m_0\pi f_R^3 \Lambda_1^{-1}}{\lambda(\lambda+1)(\dot{R}^2 - f_R^2)^3} \left[2f_R^{-2} \lambda R^4 \dot{R}^4 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 4\lambda R^4 \dot{R}^2 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \right. \\
& + 2f_R^2 \lambda R^4 u^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 4f_R^{-2} \lambda R^4 \dot{R}^4 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 4f_R^2 \lambda R^4 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4f_R^{-2} \lambda R^4 \dot{R}^3 \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 4\lambda R^4 \dot{R} \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 4\lambda R^2 (\lambda R + R + M) \dot{R}^5 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4f_R^{-1} \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R}^3 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 8f_R^{-1} \lambda R^2 (\lambda R + R + 2M) \dot{R}^3 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4f_R \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 4f_R \lambda R^2 (\lambda R + R + 3M) \dot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 6f_R^{-2} \lambda R^4 \dot{R}^4 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4\lambda R^4 \dot{R}^2 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 2f_R^2 \lambda R^4 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 16\lambda R^4 \dot{R} \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4\Lambda_1^{-1} \lambda R^2 (\Lambda_2 - 3MR + 3M^2) \dot{R}^5 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 4f_R^{-1} \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R}^3 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 8f_R^{-1} \Lambda_1^{-1} \lambda R^2 (\Lambda_2 + 8\lambda MR + 21M^2) \dot{R}^3 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 4f_R \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4f_R \lambda R^2 (\lambda R + R + 5M) \dot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 4f_R^{-2} \lambda R^4 \dot{R}^3 \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4\lambda R^4 \dot{R} \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 6f_R^{-2} \lambda R^4 \dot{R}^2 \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 2\lambda R^4 \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2\Lambda_1^{-1} \lambda R^2 (\Lambda_2 - 3MR + 3M^2) \dot{R} \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 6f_R^{-1} \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R}^2 \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4f_R^{-1} \Lambda_1^{-1} \lambda R^2 (\Lambda_2 + 4\lambda MR + 9M^2) \dot{R}^2 \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R \lambda R^2 (\lambda R + R + 5M) \ddot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4\Lambda_1^{-2} \lambda R (\lambda^3 R^3 + \lambda^2 R^3 + 3\lambda^2 MR^2 + 9\lambda M^2 R + 9M^3) \dot{R}^6 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4f_R^{-2} \Lambda_1^{-2} \lambda (3\lambda R^2 \Lambda_2 + \lambda^2 MR^3 (8-5\lambda) + \lambda M^2 R^2 (48-29\lambda) + M^3 R (45-129\lambda) - 153M^4) \dot{R}^4 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4f_R^{-2} \Lambda_1^{-1} \dot{\Phi}^2 \lambda R^4 (\lambda R + 2\lambda M + 6M) \dot{R}^4 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 8f_R^{-1} \dot{\Phi} \dot{\Phi} \lambda R^5 \dot{R}^3 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4\Lambda_1^{-2} \lambda (3\lambda R^2 \Lambda_2 + \lambda^2 MR^3 (9-4\lambda) + \lambda M^2 R^2 (51-14\lambda) + M^3 R (45-60\lambda) - 54M^4) \dot{R}^2 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4\Lambda_1^{-1} \dot{\Phi}^2 \lambda R^3 (\lambda R^2 - 3\lambda MR + 6MR - 15M^2) \dot{R}^2 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} - 8f_R \dot{\Phi} \dot{\Phi} \lambda R^5 \dot{R} u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 4f_R^2 \Lambda_1^{-2} \lambda (3\lambda^2 R^4 (\lambda+1) + \lambda^2 MR^3 (2-\lambda) + \lambda M^2 R^2 (12-\lambda) + M^3 R (9+3\lambda) - 54M^4) u^t \dot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4f_R^2 \dot{\Phi}^2 \lambda MR^3 u^t \dot{Y}^{\ell m \star} + 2f_R^{-2} \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^4 \dot{R}^3 u^t \dot{W}^{\ell m \star} - 2\Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^4 \dot{R} u^t \dot{W}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R^{-2} \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^4 \dot{R}^3 u^t \dot{W}^{\ell m \star} - 2\Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^4 \dot{R} u^t \dot{W}^{\ell m \star} - 3f_R^{-2} \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^4 \dot{R}^2 \ddot{R} u^t \dot{W}^{\ell m \star} \\
& - \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^4 \ddot{R} u^t \dot{W}^{\ell m \star} + 2\Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^3 \dot{R}^4 u^t \dot{W}^{\ell m \star} + 4f_R^{-2} \Lambda_1 \dot{\Phi} \dot{\Phi} R^4 \dot{R}^3 u^t \dot{W}^{\ell m \star} \\
& \left. - 2f_R^{-1} \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 R^2 (R-5M) \dot{R}^2 u^t \dot{W}^{\ell m \star} - 4\Lambda_1 \dot{\Phi} \dot{\Phi} R^4 \dot{R} u^t \dot{W}^{\ell m \star} - 2f_R \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 MR^2 u^t \dot{W}^{\ell m \star} \right] \quad (A.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_r^2 \psi_o^{\ell m}] = & -\frac{8m_0\pi}{\lambda(\lambda+1)(\dot{R}^2 - f_R^2)^3} \left[R^4 \mathcal{A}^{\ell m \star} (\dot{R}^4 - f_R^4) \ddot{u}^t \right. \\
& - f_R^2 \mathcal{A}^{\ell m \star} R \dot{R} (3R^3 \ddot{R} + 4R^2 - 14MR + 12M^2) \dot{u}^t \\
& - \mathcal{A}^{\ell m \star} R \dot{R}^3 (R^3 \ddot{R} - 2R^2 - 2MR + 12M^2) \dot{u}^t + 2\mathcal{A}^{\ell m \star} R^3 \dot{R}^5 \dot{u}^t + 2\dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{R}^4 \dot{u}^t \\
& - 2f_R^4 \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{u}^t - 2f_R^2 \mathcal{A}^{\ell m \star} \dot{R}^2 (3R^3 \ddot{R} - 2\lambda R^2 - 2R^2 + 4\lambda MR + 10MR - 12M^2) \dot{u}^t \\
& - f_R^2 \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R \dot{R} (3R^3 \ddot{R} + 4R^2 - 14MR + 12M^2) \dot{u}^t \\
& - 2f_R^4 \mathcal{A}^{\ell m \star} (R^3 \ddot{R} + R^2 (\lambda+1) - 2MR (2+\lambda) + 4M^2) \dot{u}^t \\
& - \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R \dot{R}^3 (R^3 \ddot{R} - 2R^2 - 2MR + 12M^2) \dot{u}^t + 2\dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^3 \dot{R}^5 \dot{u}^t + \ddot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{R}^4 \dot{u}^t \\
& \left. - 2f_R \mathcal{A}^{\ell m \star} R (\lambda R + R - 12M) \dot{R}^4 \dot{u}^t - f_R^4 \ddot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{u}^t \right] \quad (A.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_r \partial_t \psi_o^{\ell m}] = & \frac{8f_R m_0 \pi}{\lambda(\lambda+1) \left(\dot{R}^2 - f_R^2 \right)^3} \left[2f_R R^4 \dot{R} \mathcal{A}^{\ell m \star} \left(\dot{R}^2 - f_R^2 \right) \ddot{u}^t - f_R \mathcal{A}^{\ell m \star} R \dot{R}^2 \left(3R^3 \ddot{R} + 4R^2 - 18MR + 20M^2 \right) \ddot{u}^t \right. \\
& - f_R^3 \mathcal{A}^{\ell m \star} R \left(R^3 \ddot{R} + R^2 - 4MR + 4M^2 \right) \ddot{u}^t + \mathcal{A}^{\ell m \star} R^2 (5R - 4M) \dot{R}^4 \ddot{u}^t + 4f_R \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{R}^3 \ddot{u}^t \\
& - 4f_R^3 \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{R} \ddot{u}^t - 2f_R^3 \mathcal{A}^{\ell m \star} \dot{R} \left(3R^3 \ddot{R} + R^2 (\lambda+1) - 2MR(2+\lambda) + 4M^2 \right) \ddot{u}^t \\
& - f_R \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R \dot{R}^2 \left(3R^3 \ddot{R} + 4R^2 - 18MR + 20M^2 \right) \ddot{u}^t - f_R^3 \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R \left(R^3 \ddot{R} + R^2 - 4MR + 4M^2 \right) \ddot{u}^t \\
& - 2f_R \mathcal{A}^{\ell m \star} \dot{R}^3 \left(R^3 \ddot{R} - 2R^2 (\lambda+1) + 2MR(3+2\lambda) - 4M^2 \right) \ddot{u}^t - 2f_R^3 \ddot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{R} \ddot{u}^t \\
& \left. - 2\mathcal{A}^{\ell m \star} R (\lambda R + R - 8M) \dot{R}^5 \ddot{u}^t + \dot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^2 (5R - 4M) \dot{R}^4 \ddot{u}^t + 2f_R \ddot{\mathcal{A}}^{\ell m \star} R^4 \dot{R}^3 \ddot{u}^t \right] \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_r \partial_t \psi_e^{\ell m}] = & \frac{4m_0 \pi \Lambda_1^{-2}}{\lambda(\lambda+1) \left(\dot{R}^2 - f_R^2 \right)^3} \left[2f_R \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R} \left(\dot{R}^2 - f_R^2 \right)^2 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \right. \\
& + 8f_R^3 \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R} \left(\dot{R}^2 - f_R^2 \right) \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R \Lambda_1 \lambda R^4 \ddot{R} \left(\dot{R}^4 - f_R^4 \right) \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2\lambda R^2 (\Lambda_2 + 6\lambda MR + 6MR + 3M^2) \dot{R}^6 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + 2f_R^2 \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 2f_R^2 \lambda R^2 (\Lambda_2 + 12MR(\lambda+1) + 9M^2) \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 2f_R^4 \lambda R^2 (\Lambda_2 - 2MR(\lambda+3) + 3M^2) \dot{R}^2 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R^6 \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R^6 \lambda R^2 (\Lambda_2 + 4\lambda MR + 9M^2) \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R}^5 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4f_R^3 \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R}^3 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + 6f_R^5 \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R} \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 12f_R^3 \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R}^2 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + 6f_R^5 \Lambda_1 \lambda R^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2\lambda R^2 (\Lambda_2 + 2\lambda MR + 3M^2) \dot{R}^6 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + 2f_R^2 \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 2f_R^2 \lambda R^2 (\Lambda_2 + 24\lambda MR + 12MR + 45M^2) \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 2f_R^4 \lambda R^2 (\Lambda_2 - 2\lambda MR - 12MR + 15M^2) \dot{R}^2 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R^6 \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R^6 \lambda R^2 (\Lambda_2 + 4\lambda MR + 9M^2) \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R^5 \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R} \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + 2f_R \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R}^3 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + 6f_R^3 \Lambda_1 \lambda R^4 \dot{R} \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2\lambda R^2 (\Lambda_2 + 2\lambda MR + 3M^2) \dot{R}^5 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 2f_R^2 \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R}^3 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4f_R^2 \Lambda_1 \lambda R^2 (\lambda R + R + 3M) \dot{R}^3 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} - 6f_R^4 \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 \lambda R^5 \dot{R} \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R^4 \lambda R^2 (\Lambda_2 + 10\lambda MR + 6MR + 15M^2) \dot{R} \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 2\lambda R (\Lambda_2 + 2\lambda MR + 3M^2) \dot{R}^7 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R \lambda (3\lambda^2 R^3 + 3\lambda R^3 - 4\lambda^2 MR^2 + 6\lambda MR^2 - 24\lambda M^2 R + 15M^2 R - 48M^3) \dot{R}^5 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R \dot{\Phi}^2 \lambda R^4 (\lambda R + 2\lambda M + 6M) \dot{R}^5 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + 4f_R^2 \Lambda_1 \dot{\Phi} \ddot{\Phi} \lambda R^5 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 2f_R^3 \lambda (3\lambda^2 R^3 + 3\lambda R^3 - 2\lambda^2 MR^2 + 4\lambda MR^2 + 8\lambda M^2 R + 9M^2 R + 30M^3) \dot{R}^3 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 12f_R^3 \Lambda_1 \dot{\Phi}^2 \lambda MR^3 \dot{R}^3 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& + 2f_R^5 \lambda (\lambda^2 R^3 + \lambda R^3 - 2\lambda MR^2 + 12\lambda M^2 R - 3M^2 R + 24M^3) \dot{R} \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 2f_R^5 \dot{\Phi}^2 \lambda R^3 (\lambda R^2 + 6MR - 6M^2) \dot{R} \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} \\
& - 4f_R^6 \Lambda_1 \dot{\Phi} \ddot{\Phi} \lambda R^5 \ddot{u}^t \ddot{Y}^{\ell m \star} + f_R \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} - f_R^5 \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} \\
& + f_R \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} - f_R^5 \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} - f_R \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^4 \ddot{R} \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} \\
& - 3f_R^3 \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^4 \ddot{R} \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} + \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^3 \ddot{R}^5 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} + 2f_R \Lambda_1^2 \dot{\Phi} \ddot{\Phi} \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} \\
& \left. + 6f_R^2 \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 MR^2 \dot{R}^3 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} - f_R^5 \Lambda_1^2 \dot{\Phi}^2 \dot{R}^3 \ddot{R} \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} - 2f_R^5 \Lambda_1^2 \dot{\Phi} \ddot{\Phi} \dot{R}^4 \ddot{u}^t \ddot{W}^{\ell m \star} \right] \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

Annexes B

Conditions de sauts : Orbites radiales

On liste ici la forme explicite des conditions de saut de la fonction ψ^ℓ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 4 pour une orbite radiale repérée par $R(t)$. On considèrera ici que le point ”.” correspond à la dérivée temporelle d/dt telle que $\dot{R} = f(R)/\mathcal{E}\sqrt{\mathcal{E}^2 - f(R)}$. On rappelle l'expression de $\lambda = (\ell - 1)(\ell + 2)/2$ et l'expression de $\kappa = 8\pi m_0 Y^{\ell 0} = 8\pi m_0 \sqrt{(2\ell + 1)/4\pi}$.

Ordre 0

$$[\psi^\ell] = \frac{\kappa \mathcal{E} R}{(\lambda + 1)(3M + \lambda R)} \quad (\text{B.1})$$

Ordre 1

$$[\partial_t \psi^\ell] = -\frac{\kappa \mathcal{E} R \dot{R}}{(2M - R)(3M + \lambda R)} \quad (\text{B.2})$$

$$[\partial_r \psi^\ell] = \frac{\kappa \mathcal{E} [6M^2 + 3M\lambda R + \lambda(\lambda + 1)R^2]}{(\lambda + 1)(2M - R)(3M + \lambda R)^2} \quad (\text{B.3})$$

Ordre 2

$$[\partial_r^2 \psi^\ell] = -\frac{\kappa \mathcal{E} [3M^3(5\lambda - 3) + 6M^2\lambda(\lambda - 3)R + 3M\lambda^2(\lambda - 1)R^2 - 2\lambda^2(\lambda + 1)R^3]}{(\lambda + 1)(2M - R)^2(3M + \lambda R)^3} \quad (\text{B.4})$$

$$\left[\partial_t \partial_r \psi^\ell \right] = \frac{\kappa \mathcal{E} (3M^2 + 3M\lambda R - \lambda R^2) \dot{R}}{(2M - R)^2 (3M + \lambda R)^2} \quad (\text{B.5})$$

$$\left[\partial_t^2 \psi^\ell \right] = -\frac{\kappa \mathcal{E} M}{R^2 (3M + \lambda R)} \quad (\text{B.6})$$

Ordre 3

$$\left[\partial_r^3 \psi^\ell \right] = \frac{\kappa \mathcal{E}}{R (\lambda + 1) (2M - R)^3 (3M + \lambda R)^4} \left[81 (\lambda + 1) M^5 + 9R (19\lambda^2 + 18\mathcal{E}^2 \lambda + 3\lambda + 18\mathcal{E}^2) M^4 + 9R^2 \lambda (7\lambda^2 + 24\mathcal{E}^2 \lambda - 14\lambda + 24\mathcal{E}^2 + 3) M^3 + 3R^3 \lambda^2 (7\lambda^2 + 36\mathcal{E}^2 \lambda - 11\lambda + 36\mathcal{E}^2 + 18) M^2 + 3R^4 \lambda^3 (8\mathcal{E}^2 \lambda - 7\lambda + 8\mathcal{E}^2 - 1) M + 2R^5 \lambda^3 (\lambda + 1) (\mathcal{E}^2 \lambda + 3) \right]$$

$$\left[\partial_t \partial_r^2 \psi^\ell \right] = \frac{-\kappa \mathcal{E} \dot{R}}{R (2M - R)^3 (3M + \lambda R)^3} \left[27M^4 + 6R (5\lambda + 9\mathcal{E}^2 - 3) M^3 + 3R^2 \lambda (5\lambda + 18\mathcal{E}^2 - 6) M^2 + 6R^3 \lambda^2 (3\mathcal{E}^2 - 2) M + 2R^4 \lambda^2 (\mathcal{E}^2 \lambda + 1) \right]$$

$$\left[\partial_t^2 \partial_r \psi^\ell \right] = \frac{\kappa \mathcal{E}}{R^3 (2M - R) (3M + \lambda R)^2} \left[39M^3 + 9R (3\lambda + 2\mathcal{E}^2 - 2) M^2 + R^2 \lambda (4\lambda + 12\mathcal{E}^2 - 13) M + 2R^3 \lambda^2 (\mathcal{E}^2 - 1) \right]$$

$$\left[\partial_t^3 \psi^\ell \right] = \frac{-\kappa \mathcal{E} \dot{R}}{R^3 (2M - R) (3M + \lambda R)} \left[9M^2 + 2R (2\lambda + 3\mathcal{E}^2 - 2) M + 2R^2 \lambda (\mathcal{E}^2 - 1) \right] \quad (\text{B.7})$$

Ordre 4

$$\begin{aligned} \llbracket \partial_r^4 \psi^\ell \rrbracket = & \frac{-3\kappa\mathcal{E}}{R^2(\lambda+1)(2M-R)^4(3M+R\lambda)^5} \left[567(\lambda+1)M^7 + 162R(\lambda+1)(6\lambda \right. \\ & + 16\mathcal{E}^2 - 5)M^6 + 6R^2(139\lambda^3 + 738\mathcal{E}^2\lambda^2 - 123\lambda^2 + 162\mathcal{E}^4\lambda + 441\mathcal{E}^2\lambda \\ & - 171\lambda + 162\mathcal{E}^4 - 297\mathcal{E}^2 + 27)M^5 + 12R^3\lambda(21\lambda^3 + 252\mathcal{E}^2\lambda^2 - 85\lambda^2 + \\ & 135\mathcal{E}^4\lambda - 24\lambda + 135\mathcal{E}^4 - 252\mathcal{E}^2 + 18)M^4 + 3R^4\lambda^2(21\lambda^3 + 344\mathcal{E}^2\lambda^2 - \\ & 95\lambda^2 + 360\mathcal{E}^4\lambda - 340\mathcal{E}^2\lambda + 100\lambda + 360\mathcal{E}^4 - 684\mathcal{E}^2 + 24)M^3 + 2R^5\lambda^3 \\ & (88\mathcal{E}^2\lambda^2 - 47\lambda^2 + 180\mathcal{E}^4\lambda - 260\mathcal{E}^2\lambda + 25\lambda + 180\mathcal{E}^4 - 348\mathcal{E}^2 - 24)M^2 \\ & + 2R^6\lambda^4(6\mathcal{E}^2\lambda^2 + 30\mathcal{E}^4\lambda - 53\mathcal{E}^2\lambda + 23\lambda + 30\mathcal{E}^4 - 59\mathcal{E}^2 + 11)M + \\ & \left. 4R^7\lambda^4(\lambda+1)(\mathcal{E}^4\lambda - 2\mathcal{E}^2\lambda - 2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \llbracket \partial_t \partial_r^3 \psi^\ell \rrbracket = & \frac{3\kappa\mathcal{E}\dot{R}}{R^2(2M-R)^4(3M+R\lambda)^4} \left[135M^6 + 27R(7\lambda + 32\mathcal{E}^2 - 6)M^5 + 3R^2 \right. \\ & (35\lambda^2 + 396\mathcal{E}^2\lambda - 75\lambda + 108\mathcal{E}^4 - 144\mathcal{E}^2 + 18)M^4 + R^3\lambda(35\lambda^2 + \\ & 612\mathcal{E}^2\lambda - 120\lambda + 432\mathcal{E}^4 - 594\mathcal{E}^2 + 72)M^3 + R^4\lambda^2(140\mathcal{E}^2\lambda - 45\lambda + \\ & 216\mathcal{E}^4 - 306\mathcal{E}^2 + 36)M^2 + 2R^5\lambda^3(6\mathcal{E}^2\lambda + 24\mathcal{E}^4 - 35\mathcal{E}^2 + 9)M + \\ & \left. 2R^6\lambda^3(2\mathcal{E}^4\lambda - 3\mathcal{E}^2\lambda - 1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \llbracket \partial_t^2 \partial_r^2 \psi^\ell \rrbracket = & \frac{-\kappa\mathcal{E}}{R^4(2M-R)^2(3M+R\lambda)^3} \left[1431M^5 + 6R(251\lambda + 234\mathcal{E}^2 - 210)M^4 + \right. \\ & 9R^2(59\lambda^2 + 160\mathcal{E}^2\lambda - 148\lambda + 36\mathcal{E}^4 - 66\mathcal{E}^2 + 30)M^3 + 6R^3\lambda(10\lambda^2 + \\ & 82\mathcal{E}^2\lambda - 79\lambda + 54\mathcal{E}^4 - 102\mathcal{E}^2 + 48)M^2 + 2R^4\lambda^2(28\mathcal{E}^2\lambda - 27\lambda + 54\mathcal{E}^4 \\ & - 105\mathcal{E}^2 + 52)M + 12R^5\lambda^3(\mathcal{E}^2 - 1)^2 \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \llbracket \partial_t^3 \partial_r \psi^\ell \rrbracket = & \frac{\kappa\mathcal{E}\dot{R}}{R^4(2M-R)^2(3M+R\lambda)^2} \left[243M^4 + 3R(61\lambda + 132\mathcal{E}^2 - 64)M^3 + 3R^2 \right. \\ & (12\lambda^2 + 92\mathcal{E}^2\lambda - 49\lambda + 36\mathcal{E}^4 - 48\mathcal{E}^2 + 12)M^2 + 2R^3\lambda(24\mathcal{E}^2\lambda - 15\lambda + \\ & 36\mathcal{E}^4 - 51\mathcal{E}^2 + 14)M + 6R^4\lambda^2(\mathcal{E}^2 - 1)(2\mathcal{E}^2 - 1) \left. \right] \end{aligned}$$

$$[\partial_t^4 \psi^\ell] = \frac{-\kappa \mathcal{E}}{R^6 (3M + R\lambda)} \left[189M^3 + 2R(36\lambda + 84\mathcal{E}^2 - 77) M^2 + 6R^2 (\mathcal{E}^2 - 1) (10\lambda + 6\mathcal{E}^2 - 5) M + 12R^3 \lambda (\mathcal{E}^2 - 1)^2 \right]$$

Liste des figures

1.1	La position des points bleus représente l'effet d'une OG plane décrite par $h_+ \cos[\omega(t-z)]$ sur un cercle contenu dans le plan transverse à la propagation. La configuration initiale de chaque cliché est donnée par les points gris. De gauche à droite, $\omega(t-z)$ prend les valeurs $N\pi$	7
1.2	La position des points bleus représente l'effet d'une OG plane décrite par $h_\times \cos[\omega(t-z)]$ sur un cercle contenu dans le plan transverse à la propagation. La configuration initiale de chaque cliché est donnée par les points gris. De gauche à droite, $\omega(t-z)$ prend les valeurs $N\pi$	8
2.1	Support des fonctions de Green retardé (à gauche) et avancé (à droite) dans un espace-temps plat. On a représenté le cône de lumière en x dont le point d'intersection avec la ligne d'univers (courbe en noir) en x' . Le support des fonctions de Green se réduit à ce seul point d'intersection (point cerclé de rouge). Le temps retardé τ_{ret} et le temps avancé τ_{adv} correspondent aux dates pour lesquelles le cône de lumière de x coupe la ligne d'univers.	23
2.2	La contribution directe au vecteur potentiel en un point x est la partie qui se propage le long du cône de lumière passé de x depuis le point d'intersection entre le cône de lumière passé de x et la ligne d'univers. La contribution diffusée, en revanche, est la partie des radiations qui se propagent à l'intérieur du cône de lumière passé de x et qui proviennent de tous les points occupés par la particule dans le passé jusqu'au point (exclu) qu'elle occupe au temps retardé τ_{ret}	26
2.3	On considère ici deux corps en interaction gravitationnelle. Le système est asymétrique tel que $M \gg m_0$. L'origine du repère est pris au centre de masse des deux corps. Les vecteurs $\mathbf{R}$ et $\mathbf{r}$ indiquent la position respective du corps de masse M et du corps de masse m_0 ; $\mathbf{x}$ de norme $ \mathbf{x} $ est le vecteur position d'un point quelconque de l'espace.	28
2.4	Illustration de l'ambiguïté de jauge. La projection de la ligne d'univers γ_{g+h} d'une particule inertielle dans un espace-temps de métrique $g+h$ dans l'espace-temps de fond g n'est pas unique. La ligne d'univers γ_g dépend de la jauge, c'est-à-dire du choix du système de coordonnées x^α sachant que tout changement infinitésimal $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha$ conduit à un changement de jauge.	33

- 3.1 Exemple de la forme du potentiel effectif $\mathcal{V}(\mathcal{L}, r_p)$ tracé en rouge pour une orbite d'énergie $\mathcal{E}$ et de moment angulaire $\mathcal{L}$. Dans le cas choisi, la valeur du couple $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ contraint l'orbite à suivre un mouvement lié entre $r = r_{\min}$ et $r = r_{\max}$. Le maximum et minimum local du potentiel défini un état instable et stable que peut atteindre une orbite en faisant varier les valeurs de $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ (voir la description des différents types d'orbites). En bleu on a tracé le potentiel newtonien dont le comportement est très différent dans la zone de champ fort, proche de l'horizon. 54
- 3.2 On a représenté ici l'espace des paramètres orbitaux (e, p) pour les orbites liées d'un espace-temps de Schwarzschild. La région $p > 6 + 2e$ où les orbites stables sont possibles est colorée en bleu. Dans la région non colorée ($p < 6 + 2e$) il n'y a pas d'orbites stables possibles, seulement des trajectoires instables conduisant au plongeon. La droite d'équation $e_{\text{sep}} = 1/2(p - 6)$ est nommée separatrix et marque l'interface entre les deux régions. Des orbites stables dans le voisinage de la separatrix conduisent à des orbites de type zoom-whirl. Le point $(e, p) = (0, 6)$ correspond à la dernière orbite circulaire stable ou ISCO. 57
- 3.3 Potentiels V_e^ℓ en bleu et V_o^ℓ en rouge pour le mode $\ell = 2$. Le potentiel V_e^ℓ atteint son maximum autour de $r \approx 3.1M$ puis tend vers zéro à l'horizon. Le domaine où le potentiel tend vers son maximum ($r/2M \lesssim 4$) correspond à la zone de champ fort où les effets relativistes de perturbations de la métrique sont les plus significatifs. Loin de l'horizon ($r/2M > 10$) le potentiel est de faible amplitude. 74
- 4.1 L'espace-temps discrétisé est une grille numérique à pas décalés où deux nœuds sont spatialement séparés par $2\Delta r^*$ et deux tranches de temps espacées par Δt (bien entendu, le maillage utilisé en pratique est bien plus fin que celui tracé dans la figure ci-dessus). La ligne d'univers passe à travers certaines cellules où la solution ψ n'est pas continue. Deux types de cellules sont à discriminer, les cellules vides qui ne rencontrent jamais la particule et pour lesquelles on peut envisager un schéma numérique classique aux différences finies et les cellules coupées par la trajectoire où les différences finies sont inopérantes à cause de la discontinuité. 89
- 4.2 Echantillon du maillage au voisinage de la trajectoire. On range les points dans différents ensembles afin de formaliser l'algorithme que nous utilisons. On notera Ω_+ l'ensemble des points situés "à droite" de la trajectoire (les points verts sur la figure) et Ω_- l'ensemble des points situés "à gauche" de la trajectoire (les points bleus sur la figure). Les points cerclés de rouge définissent l'ensemble des points appartenant au cône de lumière passée du point A (exclus). 90
- 4.3 Géométrie d'une cellule vide, c'est-à-dire jamais occupée par la particule durant son mouvement. Les nœuds sont spatialement séparés par $2\Delta r^*$ et deux tranches de temps espacées par Δt . Seuls les points A , B et E sont nécessaires pour résoudre l'équation de RWZ homogène via un schéma aux différences finies en $\mathcal{O}(\Delta r^{*4}, \Delta t^4)$ (voir l'équation (4.54)). . . 91
- 4.4 Stencil utilisé pour la résolution de l'équation de RWZ homogène. Les points indiqués par des croix ne sont pas des points du maillage mais sont utilisés pour construire le schéma d'ordre 4 donné dans l'équation (4.59). . 92

4.5	Dans le cas d'un schéma numérique à l'ordre 1, seuls les points A , B , C et E sont utiles. Dans ce cas la ligne d'univers coupe les cellules selon quatre configurations possibles (i), (ii), (iii) et (iv).	95
4.6	Dans le cas d'un schéma numérique à l'ordre 2, le stencil doit être étendu par rapport à la Fig. 4.5. Dans ce cas la ligne d'univers coupe les cellules selon quatre configurations possibles (i), (ii), (iii) et (iv).	97
4.7	Dans le cas d'un schéma numérique à l'ordre 4, le stencil doit encore être étendu par rapport à la Fig. 4.6. Dans le cas d'orbites génériques la ligne d'univers coupe maintenant le stencil selon huit configurations possibles. Seule une configuration est représentée ici.	98
4.8	Etude de la sensibilité des formes d'ondes à la dispersion du paquet d'ondes initial pour $r_0 = 200M$. Pour les premières valeurs de σ la quasi totalité du paquet d'ondes est réfléchi par le potentiel V^ℓ , le coefficient de transmission est très faible et seules les basses fréquences du contenu initial sont présentes dans le spectre (à gauche). Pour $\sigma \lesssim 4$, le spectre semble se décaler vers les hautes fréquences et les formes d'ondes font apparaître les oscillations quasi-normales, signe que le contenu initial a interagi avec le potentiel et qu'une partie des ondes a été transmise. Ainsi, plus σ diminue et plus le spectre sera piqué autour de la fréquence du MQN. Le spectre a été calculé à partir du signal en pointillé pour ne prendre que la contribution des MQN.	100
4.9	Evolution d'un paquet d'ondes ψ^ℓ sur la grille (t, r^*) pour $\ell = 2$ et pour deux valeurs de σ . Les valeurs de gris codent l'amplitude de ψ^ℓ sur la grille. On a fixé $r_0/2M = 100$ c'est pourquoi, dans les deux cas (a) et (b), pour $t/2M < 100$, le paquet d'ondes initial se propage librement dans une région où la valeur du potentiel est faible. En (a) $\sigma = 5$, le coefficient de transmission du potentiel est faible et la totalité des ondes sont réfléchies en direction de l'observateur. En (b) $\sigma = 1$, il y a transmission d'une partie des ondes en direction du trou noir (partie $(t > 200M, r^* < 1.9M)$) et une réflexion en direction de l'observateur sous la forme de modes quasi normaux (partie $(t > 200M, r^* > 1.9M)$). La courbe rouge correspond au signal enregistré par l'observateur en $r_{\text{obs}}^* = 500M$	101
4.10	Etude de la sensibilité des formes d'ondes (à droite) à la position initiale du paquet d'ondes pour $\sigma = 1$. La structure du spectre (à gauche) évolue pour différentes valeurs de r_0 . L'allure multi-piquée pour $r_0 = 40M$ à $r_0 = 20M$ est interprétée comme l'interférence des ondes initiales tombant sur le trou noir et celles qui sont en même temps réfléchies par le potentiel. Pour des r_0 proches de l'horizon, le spectre est essentiellement dominé par la fréquence fondamentale des MQN. Les spectres ont été calculés à partir du signal en pointillé (débutant au troisième zéro) pour ne prendre que la contribution des MQN.	102
4.11	Test de convergence appliqué au calcul de la forme d'onde quadrupolaire $\ell = 2$ (en haut à gauche) pour un paquet d'ondes initialement localisé en $r_0 = 200M$ et pour un paramètre $\sigma = 1$. En bas à gauche on a tracé la différence $\psi_h^\ell - \psi_{h_\infty}^\ell$ en valeur absolue et à droite la norme infinie de cette quantité pour différentes valeurs du pas d'intégration $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.0025$ avec $h_\infty = 0.001$. La pente confirme la convergence à l'ordre 2 de l'algorithme.	103
4.12	Formes d'ondes et spectres en énergie associés pour $\ell = 2$ et pour différentes valeurs de la position initiale r_0 la particule.	106

- 4.13 Formes d'ondes et spectres associés pour les modes $\ell = 2, 3, 4, 5$ pour $r_0 = 10M$ en (a) et $r_0 = 2.2M$ en (b). Dans le cas (a) il y a une forte interférence entre les OG initiales, les OG d'accélération et les MQN donnant un spectre de plus en plus complexe et modulé quand on augmente ℓ . Dans le cas (b), les OG initiales sont localisées à l'intérieur de la barrière potentielle, c'est pourquoi le rayonnement d'accélération est négligeable puisque la particule est absorbée par le trou noir presque instantanément. Les OG initiales déforment l'horizon qui devient dynamique et commence à rayonner ses fréquences quasi-normales en formant un spectre piqué autour de la fréquence fondamentale des MQN qui augmente avec ℓ 108
- 4.14 Forme d'onde et son spectre associé pour $\ell = 2$ et $r_0 = 40M$ dans le cas de deux conditions initiales différentes. L'une est de type Brill-Lindquist (spectre et courbe en noir) l'autre est une condition initiale nulle où la particule suit une trajectoire symétrique en partant de $r_i = 2.2M$ avec une vitesse initiale $v_i \approx 0.086$, arrive en $r_0 = 40M$ avec une vitesse nulle puis entame sa chute vers le trou noir. 109
- 4.15 Quatre orbites étudiées dans cette section. L'orbite (a) correspond aux paramètres orbitaux $(e, p) = (0, 7.9456)$, l'orbite (b) est associée à $(e, p) = (0.188917, 7.50478)$, l'orbite (c) correspond à $(e, p) = (0.764124, 8.75455)$ et l'orbite (d) à $(e, p) = (1.0, 8.001)$ 109
- 4.16 La fonction $\psi_e^{\ell m}$ pour le mode quadrupolaire $(\ell, m) = (2, 2)$ et les paramètres orbitaux $(e, p) = (0.5, 7.2)$ est tracée pour différentes données initiales : ψ_{null} est une condition initiale nulle, ψ_{Gauss} une condition initiale gaussienne, ψ_{MP} une condition initiale de type Martel et Poisson [160] et $\psi_{triangle}$ une condition initiale triangulaire. En imposant une condition initiale non physique dans le cas d'une orbite liée, la forme d'onde est polluée durant les premières périodes par des oscillations non physiques qui se dispersent à l'infini. Une fois les oscillations initiales dissipées, la forme d'onde converge vers la forme d'onde physique générée par le système. 111
- 4.17 La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (en rouge) oscille à deux fois la fréquence orbitale et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (en bleu) oscille à la fréquence orbitale $\Omega_\phi = M^{-1}p^{-3/2}$ avec $p = 7.9456$. . 112
- 4.18 La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (haut) et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (bas) sont obtenus en fonction du temps retardé $u = t - r_{obs}^*$ pour une orbite circulaire de paramètres orbitaux $(e, p) = (0, 7.9456)$. La partie réelle est tracée en trait plein rouge et la partie imaginaire en pointillés noirs. Le déphasage entre les deux parties réelle et imaginaire est de $\Delta u = \frac{\pi}{2}m^{-1}\Omega^{-1} = \frac{\pi}{2}m^{-1}Mp^{3/2}$. La courbe bleue dans le graphe du haut correspond à la trajectoire de la particule en fonction du temps coordonné et l'observateur est situé en $r_{obs}^* = 1500M$. 113
- 4.19 La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (haut) et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (bas) sont obtenus en fonction du temps retardé $u = t - r_{obs}^*$ pour une orbite circulaire de paramètres orbitaux $(e, p) = (0.188917, 7.50478)$. La partie réelle est tracée en trait plein rouge et la partie imaginaire en pointillés noirs. La courbe bleue dans le graphe du haut correspond à la trajectoire de la particule en fonction du temps coordonné et l'observateur est situé en $r_{obs}^* = 1500M$ 115

- 4.20 La forme d'ondes paire pour le mode quadrupolaire $(\ell, m)=(2, 2)$ (haut) et le mode impair $(\ell, m)=(2, 1)$ (bas) sont obtenus en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ pour une orbite parabolique de paramètres orbitaux $(e, p) = (1.0, 8.001)$. La partie réelle est tracée en trait plein rouge et la partie imaginaire en pointillés noirs. La courbe bleue dans le graphe du haut correspond à la trajectoire parabolique de la particule en fonction du temps coordonné. La particule entame une trajectoire quasi-circulaire entre $t/2M \approx 450M$ et $t/2M \approx 530M$ puis est éjectée à l'infini. On est dans un cas d'orbite de type zoom-whirl. L'observateur est situé en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ 117
- 4.21 Test de convergence appliqué au calcul de la forme d'onde quadrupolaire $(\ell, m) = (2, 2)$ (en haut à gauche) pour une orbite elliptique $(e, p) = (0.5, 7.2)$. En bas à gauche on a tracé la différence $\psi_h^\ell - \psi_{h_\infty}^\ell$ en valeur absolue et à droite la norme infinie de cette quantité pour différentes valeurs du pas d'intégration $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$ avec $h_\infty = 0.0025$. La pente indique un ordre de convergence inférieur à 2 à cause de la présence de la particule compacte. Les courbes en trait plein sont relatives à la partie réelle de la forme d'ondes et les courbes tracées en pointillés sont relatives à la partie imaginaire de la forme d'onde. 118
- 4.22 Speedup par rapport à la routine de référence ("Ref.") en fonction des techniques utilisées. La mention "opt." désigne certaines optimisations liées au traitement des tableaux contenant les valeurs de ψ . "SSE" désigne l'implémentation de l'unité SSE (*Streaming S.I.M.D. Extensions* avec SIMD pour *Single Instruction on Multiple Data*) permettant d'effectuer des opérations simultanées faisant intervenir des données dans deux registres différents. "parall." fait référence à la parallélisation openMP et "CUDA" la parallélisation sur GPU. 119
- 5.1 On dénotera par $x'_p(\tau) = (t'_p, r'_p)$ un point quelconque de la ligne d'univers γ suivi par la particule et par $x_p = (t_p, r_p) = x'_p(\tau = 0)$ le point où l'on évalue la force propre. Le point $x = (t, r)$ indiquera un point pris dans le voisinage de x_p en lequel on évaluera initialement le champ $\psi(x)$ 126
- 5.2 La fonction de Green réduite $\hat{G}(x, x'_p)$ a support dans le cône de lumière futur de x'_p (zone grisée) donc $\hat{G}(u < u'_p, v) = 0$ (zone bleue) et $\hat{G}(u, v < v'_p) = 0$ (zone rouge). 128
- 5.3 Représentation géométrique des variables neutres utilisées dans l'analyse locale de $g(x, x'_p)$. En gris on a indiqué le support de la fonction de Green qui correspond à l'ensemble des points x appartenant au futur chronologique de x'_p 132
- 5.4 La valeur de la dérivée (5.65) dépendra de la façon dont on prend la limite à droite $r \rightarrow r_p^+$ ou à gauche $r \rightarrow r_p^-$ du point d'évaluation. En effet si $r \rightarrow r_p^-$ (configuration de gauche sur la figure) le terme faisant intervenir $\delta(v - v'_p)$ dans (5.65) sera nul. De même si $r \rightarrow r_p^+$ (configuration de droite sur la figure) le terme faisant intervenir $\delta(u - u'_p)$ dans (5.65) sera nul. 135
- 5.5 Stencil utilisé pour l'interpolation de ψ à la position de la particule (t_x, r_x^*) . On considérera 15 points de colocations et 15 relations de saut pour définir les 30 coefficients $p_{(n,m)}^\pm$, $n+m \leq 4$ du polynôme d'interpolation ramené au point central de la cellule (t_0, r_0^*) (voir équation (5.5)). 152

- 5.6 Calcul de la fonction d'onde et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 à la position de la particule pour une chute initialement au repos depuis la position $r_0/2M = 20$. Sont calculées également, les fonctions de perturbation H_1^ℓ et H_2^ℓ et leurs dérivées premières. Chaque quantité est donnée pour $\ell = 2$ à 20 (dégradé de couleurs) et on a tracé en noir leur comportement asymptotique donné aux équations (5.115) et (5.116). Les courbes en tirets sont relatives à la partie $r \rightarrow r_p^-$ (exposant "-") et les courbes en traits pleins sont relatives à la partie $r \rightarrow r_p^+$ (exposant "+"). Les données sont en unité $((2M/m_0)\kappa^{-1})$ 154
- 5.7 On vérifie le comportement des quantités calculées dans la Fig. 5.6 par rapport au mode $L = \ell + 1/2$ pour $r_p/2M \approx 10$. En ordonné on a pri le $\log_{10}$ des quantités moyennées en unité $((2M/m_0)\kappa^{-1})$. Par exemple la moyenne de $\psi^{\ell\pm}$ donnera $\overline{\psi}^\ell(r_p) = 1/2 [\psi^{\ell+}(r_p) + \psi^{\ell-}(r_p)]$. En abscisse on a réparti la valeur du mode L . La pente de chaque droite correspond bien à l'ordre dominant donné dans les équations (5.115) et (5.116). (Ce bon accord perdure pour différentes valeurs de r_p). 155
- 5.8 Chute radiale d'une particule au repos en $r_0/2M = 15$. On trace les fonctions de perturbations H_1^ℓ et H_2^ℓ calculées à la position de la particule $r_p(t)$ pour les modes $\ell = 2$ à $\ell = 15$ (dégradé de couleurs). Le comportement théorique par rapport au mode ℓ est vérifié. On trace en noir $H_1^{\ell \rightarrow \infty}$ et $H_2^{\ell \rightarrow \infty}$ donnés respectivement par (5.116a) et (5.116a). 156
- 5.9 Chute radiale d'une particule au repos au repos en $r_0/2M = 15$. On trace la force retardée moyenne $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell}$ calculée à la position de la particule $r_p(t)$ pour les modes $\ell = 2$ à $\ell = 8$ (dégradé de couleurs). Le comportement théorique par rapport au mode ℓ est vérifié. On trace en noir $F_{\text{ret}}^{\alpha\ell \rightarrow \infty} = B^\alpha$ donnés par (5.125) moyenné. En tirets on a tracé le mode $\ell = 0$ pour la jauge G2. On a également tracé en tirets-pointillés le mode $\ell = 0$ dans la jauge G1 pour laquelle le comportement à l'horizon est pathologique et non compatible avec les modes $\ell \geq 2$ 158
- 5.10 Après régularisation des modes de la Fig. 5.9, on effectue leur somme puis on ajoute le mode $\ell = 0$ et la contribution analytique des modes supérieurs à $\ell = 8$. Les courbes en noir représentent la force propre donnée par (5.156) pour la composante temporelle F_{self}^t (graphe du haut) et la composante radiale F_{self}^r (graphe du bas). En comparaison on a tracé en rouge le mode quadrupolaire $\ell = 2$ montrant l'importance des modes supérieurs à 2 dans le calcul de la FP. 159
- 5.11 On trace ici les modes du terme d'accélération (courbes en dégradé de couleurs) calculés à partir des modes de la force retardée donnés dans la Fig. 5.9. La courbe en noire correspond au comportement analytique pour de grands ℓ dont l'expression est donnée à l'équation (5.181). La courbe en tirets correspond au mode $\ell = 0$ 164
- 5.12 On compare, dans cette figure, les premiers modes du terme d'accélération non régularisé a_{ret} (courbes du haut en dégradé de couleurs) et les modes du terme d'accélération régularisé a_{self} (courbes du bas en dégradé de couleurs). On remarque, qu'après régularisation, les a_{self}^ℓ respectent bien le critère de convergence (5.183) validant ainsi la méthode de régularisation et l'exactitude de B_a 165

- 5.13 Une fois que l'on a additionné tous les modes a_{self}^ℓ calculés numériquement pour $\ell_{\text{max}} = 8$, on ajoute le mode $\ell = 0$ et la contribution analytique des modes supérieurs à $\ell = 8$. On obtient l'auto-accélération (courbe noire) pour une particule en chute libre depuis une position initiale $r_0/2M = 15$. On a tracé le mode $\ell = 2$ (courbe rouge) qui représente à lui seul $\sim 55\%$ de a_{self} (intégré sur R). 166
- 5.14 Solutions de l'EDO (5.177) pour une chute depuis $r_0/2M = 15$ initialement au repos. De haut en bas, le premier graphe correspond à l'auto-accélération a_{self} calculée le long de la géodésique $R(t)$. Dans le second graphe on trace ΔR en fonction de R d'amplitude strictement négative et d'une amplitude de l'ordre du rapport de masse. Dans le dernier graphe, est tracée la variation de vitesse par rapport à l'ordre zéro au mouvement géodésique. On peut remarquer deux régimes dont l'interface correspond au minimum de ΔR (i) la zone en rouge qui correspond à une première phase où la particule gagne de la vitesse par rapport à l'ordre zéro et (ii) la zone bleue où la particule décélère puis rejoint l'ordre zéro en amplitude. 167
- 5.15 On résout l'équation (5.177) pour différentes valeurs de $r_0/2M$. On trace dans chaque cas, dans le graphe du haut l'auto-accélération a_{self} en fonction de R et dans le graphe du bas, la déviation ΔR en fonction de R . L'amplitude de a_{self} diminue légèrement quand r_0 augmente et ΔR augmente de façon significative quand r_0 augmente. En effet pour une chute depuis une position plus importante, la particule rayonne pendant une durée plus longue conduisant à un écart plus important avec l'ordre zéro (géodésique). 169
- 5.16 Illustration de la méthode osculatrice. Au cours de l'évolution, chaque point de la trajectoire perturbée (points rouges) donnée par l'équation du mouvement (5.159) est approché par une géodésique (les courbes noires) tangente à la trajectoire perturbée et passant par ce point. La courbe en pointillés correspond à la géodésique empruntée par une particule test coïncidant initialement avec la trajectoire perturbée en $r_0/2M = 20$ 170
- 5.17 La méthode osculatrice consiste à trouver en chacun des points de la trajectoire perturbée $z_p(t_n) = (r_p(t_n), \dot{r}_p(t_n))$ (courbe et points verts) au temps t_n une géodésique λ_n (courbe noire dans le graphe du haut et courbe grise dans le graphe du bas) qui passe par $z_p(t_n)$. A partir de a_{self} calculé au point $Z_n^{\lambda_n}$, l'ODE (5.159) donne un nouveau point $z_p(t_{n+1})$ au temps t_{n+1} . En ce nouveau point on cherche à nouveau la géodésique λ_{n+1} telle que $z_p(t_{n+1}) = Z_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$ (courbe noire dans le graphe du bas). . . . 172
- 5.18 Schéma simplifié de l'algorithme suivi pour le calcul de la trajectoire perturbée en utilisant la méthode osculatrice. L'encadré en rouge représente la procédure pour le calcul de a_{self} pour un seul point $z_p(t_n)$ donné à une date t_n donnée. L'encadré en bleu correspond à la procédure itérative qui détermine la géodésique unique passant par le point suivant $z_p(t_{n+1})$ 173
- 5.19 Erreur relative entre le point $z_p(t)$ de la trajectoire perturbée et le point $Z(t)$ de la géodésique passant par $z_p(t)$ trouvé par l'algorithme. Les points bleus correspondent à $\log_{10} |r_p(t_n) - R^{\lambda_n}(t_n)|$ et les croix rouges à $\log_{10} |\dot{r}_p(t_n) - \dot{R}^{\lambda_n}(t_n)|$ 175
- 5.20 Comparaison entre la solution pragmatique de la Fig. 5.20 et la solution osculatrice pour $r_0/2M = 15$ 176

5.21	Formes d'ondes perturbées (graphe du haut) en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ (avec $r_{\text{obs}}^* = 500M$) pour le mode quadrupolaire capturé à l'infini pour une particule en chute libre depuis une position initiale $r_0/2M = 15$. Le calcul est fait pour différentes valeurs de m_0 . Dans le graphe du bas on a tracé la différence absolue, en échelle $\log_{10}$ des formes d'ondes perturbées par rapport aux formes d'ondes générées lorsque la particule suit un mouvement géodésique.	177
5.22	Formes d'ondes perturbées (graphe du haut) en fonction du temps retardé $u = t - r_{\text{obs}}^*$ (avec $r_{\text{obs}}^* = 500M$) pour le mode quadrupolaire capturé à l'infini pour une particule en chute libre depuis une position initiale $r_0/2M = 40$. Le calcul est fait pour différentes valeurs de m_0 . Dans le graphe du bas on a tracé la différence absolue, en échelle $\log_{10}$ des formes d'ondes perturbées par rapport aux formes d'ondes générées lorsque la particule suit un mouvement géodésique.	178
5.23	Les conditions initiales de type Brill-Lindquist imposées en $r = r_0$ induisent des oscillations non physiques qui polluent la première phase de chute. Cela correspond aux graphes (a) et (c) associés respectivement à une chute depuis $r_0/2M = 10$ et $r_0/2M = 15$. Pour pouvoir exploiter la première de chute on utilisera plutôt des trajectoires symétriques puis on considérera seulement la partie des données correspondant à la chute vers le trou noir (la phase de montée laissant le temps aux oscillations non physiques de se dissiper à l'infini). Ce cas de figure est donné dans les graphes (b) et (d) associés respectivement à une chute depuis $r_0/2M = 10$ et $r_0/2M = 15$	180
5.24	Auto-accélération a_{self} pour différentes valeurs du paramètre de troncature ℓ_{max} intervenant dans la la série (5.184).	180
5.25	Vitesse de convergence de la série $a_{\text{self}} = \sum_{\ell} a_{\text{ret}}^{\ell} - B_a$	182
5.26	Vitesse de convergence de la série $F_{\text{self}}^{\alpha} = \sum_{\ell} F_{\text{ret}}^{\alpha\ell} - B^{\alpha}$ pour les deux composantes de la force propre t (en rouge) et r (en bleu).	182

Liste des tableaux

2.1	Tableau récapitulatif des propriétés des différentes fonctions de Green et fonctions introduites pour le calcul du potentiel retardé dans le cas d'un espace-temps courbe. Dans chaque cas, les potentiels vecteurs associés dépendent de l'histoire de la particule durant l'intervalle données par les courbes rouges. Le temps retardé τ_{ret} et le temps avancé τ_{adv} correspondent aux dates pour lesquelles le cône de lumière de x coupe la ligne d'univers (courbe noire). $\mathcal{I}^+(x')$ correspond à l'ensemble des événements situés dans le passé chronologique de x' . De même $\mathcal{I}^+(x')$ est l'ensemble des événements appartenant au futur chronologique de x'	27
3.1	Ce tableau indique la correspondance entre notre notation et celle de Zerilli utilisée dans [26]. L'indice i de la première ligne suit l'ordre dans lequel les HST sont définies dans [26]. La seconde ligne fait le lien entre nos multipôles et les fonctions de perturbations définies par Regge et Wheeler [23]. La troisième ligne fait le lien entre les notations sur les fonctions utilisées dans le développement du tenseur énergie-impulsion et la dernière ligne sur les HST.	67
4.1	Energie rayonnée pour une chute libre depuis r_0	108
4.2	Orbite circulaire $(e, p) = (0, 7.9456)$. Le flux d'énergie $\mathring{E}_{\ell m}^\infty$ (en unités M^2/m_0^2) pris en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ est calculé pour différents modes ℓm avec $\ell \leq 5$. La première colonne liste nos résultats, la seconde ceux de Poisson [178], la troisième ceux de Martel [145], la quatrième ceux de Barack et Lousto [176], et la dernière ceux de Sopuerta et Laguna [152]. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.	113
4.3	Orbite circulaire $(e, p) = (0, 7.9456)$. Le flux de moment angulaire $\mathring{L}_{\ell m}^\infty$ (en unités M/m_0^2) pris en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ est calculé pour différents modes ℓm avec $\ell \leq 5$. La première colonne liste nos résultats, la seconde ceux de Poisson [178], la troisième ceux de Martel [145] et la dernière ceux de Sopuerta et Laguna [152]. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.	114
4.4	Cas de deux orbites elliptiques $(e, p) = (0.188917, 7.50478)$ et $(0.764124, 8.75455)$. Le flux d'énergie (en unités M^2/m_0^2) et de moment angulaire $\mathring{L}_{\ell m}^\infty$ (en unités M/m_0^2) pris en $r_{\text{obs}}^* = 1500M$ sont moyennés sur 5 périodes orbitales et calculés pour différents modes ℓm avec $\ell \leq 5$. Nos résultats (troisième colonne) sont comparés à ceux de Cutler et al. [126], Martel [145] et Sopuerta et Laguna [152]. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.	115

4.5	Orbite elliptique (0.764124, 8.75455). On compare ici nos résultats (deuxième et quatrième colonnes) à ceux de Hopper et Evans [154] sur les flux d'énergie (en unités M^2/m_0^2) et de moment angulaire (en unités M/m_0^2) à l'infini moyennés pour chaque mode ℓ sur 5 périodes. Chaque mode ℓ est obtenu en sommant toutes les contributions venant des modes m tel que $(\overset{\circ}{E}_\ell^\infty, \overset{\circ}{L}_\ell^\infty) = \sum_{m=-\ell}^\ell (\overset{\circ}{E}_{\ell m}^\infty, \overset{\circ}{L}_{\ell m}^\infty)$. Les nombres entre crochets indiquent l'écart en valeur absolue.	116
4.6	Orbites paraboliques ($e = 1, p \approx 8$). Les valeurs d'énergie (en unité M/m_0^2) et de moment angulaire (en unité m_0^{-2}) rayonnés à l'infini et absorbés à l'horizon sont calculées pour deux valeurs de p proches de la separatrix puis comparées aux données de Martel [145] et de Sopuerta et Laguna [152].	116
5.1	Reproduction du tableau 1 de [184] qui donne la solution de l'équation de Bessel généralisée $\partial_{XY}g + g = S$ pour un terme source S dépendant lui même d'une fonction de Bessel.	134
5.2	Coefficients de Taylor $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 L^{-1} + \Gamma_2 L^{-2} + \mathcal{O}(L^{-3})$ quand Γ est une des quantités listées dans (5.84)	139
5.3	Liste des variables neutres utilisées et leurs expressions en fonction de L et des variables standards.	140
5.4	Energie rayonnée pour une chute libre depuis $r_0/2M = 15$ et $r_0/2M = 40$ dans le cas d'une trajectoire perturbée. L'énergie est donnée mode par mode (en unités $(2M/m_0^2)$) puis comparée à sa valeur dans le cas d'un mouvement géodésique via la quantité δE_ℓ . Le calcul est effectué pour trois valeurs différentes de m_0	179
5.5	Estimation de $\ell_{\max}$ pour une précision donnée.	181

Liste des publications

P. Ritter, A. Spallicci, S. Aoudia, S. Cordier. Fourth order indirect integration method for black hole perturbations: even modes, *Class. Q. Grav.* 28:134012, 2011
[arXiv:1102.2404](#).

A. Spallicci, P. Ritter, S. Jubertie, S. Cordier, S. Aoudia. Towards a self-consistent orbital evolution for EMRIs in 9th LISA Symposium, 21-25 May 2012 Paris, ASP Conference Series, Vol. 467, G. Auger, P. Binétruy and E. Plagnol Eds., Astronomical Society of the Pacific, 221, [arXiv:1209.1969](#).

S. Aoudia, P. Ritter, A. Spallicci. Source-free integration method for black hole perturbations: Generic orbits - submitted to *Phys. Rev. D*

En préparation :

A fully relativistic radial fall

After an historical account on radial fall, we examine the effect of the self-force on the motion. As radial fall is patently non-adiabatic, the analysis requires a self-consistent, *iterative*, approach for which the geodesic is continuously corrected by the self-force. For a small mass falling into a non-rotating black hole, we determine the differences between the motion under self-force in the full metric (background plus perturbations) without and with self-consistent orbital evolution. The results are applicable to the Regge-Wheeler and de Donder (harmonic) gauges.

Evolution of radial fall into a Schwarzschild-Droste black hole

The most emblematic non-adiabatic problem in gravitation is represented by radial fall. The proper computation of radial fall requires a self-consistent, i.e. iterative, approach for which the geodesic is continuously corrected by the self-force. Our code implements an iterative osculating method to trace the perturbed motion in the background metric. The self-force computation is performed in the Regge-Wheeler gauge where the metric perturbation is given by the Regge-Wheeler-Zerilli equation solved on the base of our previous paper Ritter et al. 2011.

Bibliographie

- [1] J. H. Taylor, L. A. Fowler, and P. M. McCulloch, *Nat.*, 277:437, 1979.
- [2] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, *Astrophys. J.*, 253:908, 1982.
- [3] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, *Astr. Soc. Pac. Conf. Ser.*, 328:25, 2005, [arXiv:astro-ph/0407149](#).
- [4] Site internet de VIRGO, <http://ego-gw.it>.
- [5] Site internet du LIGO, <http://www.ligo.caltech.edu>.
- [6] G. Hobbs, A. Archibald, Z. Arzoumanian, D. Backer, M. Bailes, N. D. R. Bhat, M. Burgay, S. Burke-Spolaor, D. Champion, I. Cognard, W. Coles, J. Cordes, P. Demorest, G. Desvignes, R. D. Ferdman, L. Finn, P. Freire, M. Gonzalez, J. Hessels, A. Hotan, G. Janssen, F. Jenet, A. Jessner, C. Jordan, V. Kaspi, M. Kramer, V. Kondratiev, J. Lazio, K. Lazaridis, K. J. Lee, Y. Levin, A. Lommen, D. Lorimer, R. Lynch, A. Lyne, R. Manchester, M. McLaughlin, D. Nice, S. Osłowski, M. Pilia, A. Possenti, M. Purver, S. Ransom, J. Reynolds, S. Sanidas, J. Sarkissian, A. Sesana, R. Shannon, X. Siemens, I. Stairs, B. Stappers, D. Stinebring, G. Theureau, R. van Haasteren, W. van Straten, J. P. W. Verbiest, D. R. B. Yardley, and X. P. You, *Class. Q. Grav.*, 27:084013, 2010, [arXiv:0911.5206](#).
- [7] Site internet de eLISA, <http://www.elisascience.org>.
- [8] F. Eisenhauer, R. Genzel, T. Alexander, R. Abuter, T. Paumard, T. Ott, A. Gilbert, S. Gillessen, M. Horrobin, S. Trippe, H. Bonnet, C. Dumas, N. Hubin, A. Kaufer, M. Kissler-Patig, G. Monnet, S. Ströbele, T. Szeifert, A. Eckart, R. Schödel, and S. Zucker, *Astrophys. J.*, 628:246, 2005, [arXiv:astro-ph/0502129](#).
- [9] A. M. Ghez, G. Duchêne, K. Matthews, S. D. Hornstein, A. Tanner, J. Larkin, M. Morris, E. E. Becklin, S. Salim, T. Kremenek, D. Thompson, B. T. Soifer, G. Neugebauer, and I. McLean, *Astrophys. J.*, 586:L127, 2003, [arXiv:astro-ph/0302299](#).
- [10] A. M. Ghez, S. Salim, S. D. Hornstein, A. Tanner, J. R. Lu, M. Morris, E. E. Becklin, and G. Duchene, *Astrophys. J.*, 620:744, 2005, [arXiv:astro-ph/0306130](#).

- [11] A. M. Ghez, S. Salim, N. N. Weinberg, J. R. Lu, T. Do, J. K. Dunn, K. Matthews, M. R. Morris, S. Yelda, E. E. Becklin, T. Kremenek, M. Milosavljevic, and J. Naiman, *Astrophys. J.*, 689:1044, 2008, [arXiv:0808.2870](#).
- [12] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott, *Astrophys. J.*, 692:1075, 2009, [arXiv:0810.4674](#).
- [13] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel, A. Eckart, N. Mouawad, and T. Alexander, *Astrophys. J.*, 596:1015, 2003, [arXiv:astro-ph/0306214](#).
- [14] L. Ferrarese and D. Merritt, *Astrophys. J.*, 539:L9, 2000, [arXiv:astro-ph/0006053](#).
- [15] P. Amaro-Seoane, S. Aoudia, S. Babak, P. Binétruy, E. Berti, A. Bohé, C. Caprini, M. Colpi, N. J. Cornish, K. Danzmann, J.-F. Dufaux, J. Gair, O. Jennrich, P. Jetzer, A. Klein, R. N. Lang, A. Lobo, T. Littenberg, S. T. McWilliams, G. Nelemans, A. Petiteau, E. K. Porter, B. F. Schutz, A. Sesana, R. Stebbins, T. Sumner, M. Vallisneri, S. Vitale, M. Volonteri, and H. Ward, *Phys. Rev. D*, 61:061502, 2012, [arXiv:1201.3621](#).
- [16] C. Hopman and T. Alexander, *Astrophys. J.*, 645:L133, 2006, [arXiv:astro-ph/0603324](#).
- [17] M. A. Gürkan and C. Hopman, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 379:1083, 2007, [arXiv:0704.2709](#).
- [18] J. R. Gair, L. Barack, T. Creighton, C. Cutler, S. L. Larson, E. S. Phinney, and M. Vallisneri, *Class. Q. Grav.*, 21:1595, 2004, [arXiv:gr-qc/0405137](#).
- [19] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.*, 11:237, 1963.
- [20] B. Carter, *Phys. Rev. Lett.*, 26:331, 1971.
- [21] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, 31:161, 1973.
- [22] J. Lense and Thirring H., *Phys. Zeit.*, 19:156, 1918.
- [23] T. Regge and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, 108:1063, 1957.
- [24] F. J. Zerilli, *Phys. Rev. Lett.*, 24:737, 1970.
- [25] F. J. Zerilli, *J. Math. Phys.*, 11:2203, 1970.
- [26] F. J. Zerilli, *Phys. Rev. D*, 2:2141, 1970, Errata, in *Black holes*, Les Houches 30 July - 31 August 1972, Edited by C. DeWitt, B. DeWitt, Gordon and Breach Science, New York, 1973.

- [27] Y. Mino, M. Sasaki, and T. Tanaka, *Phys. Rev. D*, 55:3547, 1997, [arXiv:gr-qc/9606018](#).
- [28] T. C. Quinn and R. M. Wald, *Phys. Rev. D*, 56:3381, 1997, [arXiv:gr-qc/9610053](#).
- [29] L. Barack and A. Ori, *Phys. Rev. D*, 61:061502(R), 2000, [arXiv:gr-qc/9912010](#).
- [30] D. Hilbert, *Nachr. Ges. Wis. Göttingen Math. Phys. Kl.*, 395, 1915.
- [31] G. Ricci-Curbastro, *Atti R. Inst. Veneto*, 63:1233, 1904.
- [32] B. Riemann, *Mémoire pour l'Académie de Paris*, 1861, *Gesammelte mathematische werke und wissenschaftlicher nachlass*, B.G. Teubner, Leipzig, 1892.
- [33] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 844, 1915.
- [34] H. Minkowski, *Nachr. Ges. Wis. Göttingen Math. Phys. Kl.*, 53, 1908.
- [35] H. Poincaré, *Comptes Rendus Ac. Sci. Paris*, 140:1504, 1905.
- [36] L. V. Lorenz, *Philos. Mag.*, 34:287, 1867.
- [37] T. de Donder. *La gravifique Einsteinienne*. Gauthier-Villar, Paris, 1921.
- [38] T. de Donder. *The mathematical theory of relativity*. M.I.T. Press, Cambridge, 1927.
- [39] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General Relativity*. Cambridge Univ. Press, New York, 2006.
- [40] R. A. Isaacson, *Phys. Rev.*, 166:1263, 1968.
- [41] R. A. Isaacson, *Phys. Rev.*, 166:1272, 1968.
- [42] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 154, 1918.
- [43] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 688, 1916.
- [44] J. Droste, *Versl. Kon. Akad. Wet. (Amsterdam)*, 25:460, 1916.
- [45] W. de Sitter, *Mon. Not. R. A. S.*, 76:699, 1916.
- [46] W. de Sitter, *Mon. Not. R. A. S.*, 77:155, 1916.
- [47] C. Cutler, T. A. Apostolatos, L. Bildsten, L. S. Finn, É. É. Flanagan, D. Kennefick, D. M. Markovic, A. Ori, E. Poisson, G. J. Sussman, and K. S. Thorne, *Phys. Rev. Lett.*, 70:2984, 1993, [arXiv:astro-ph/9208005](#).
- [48] L. Blanchet and G. Faye, *Phys. Lett. A*, 271:58, 2000, [arXiv:gr-qc/0004009](#).

- [49] L. Blanchet and G. Faye, *Phys. Rev. D*, 63:062005, 2001, [arXiv:gr-qc/0007051](#).
- [50] L. Blanchet, *Living Rev. Relativity*, 9, 2006, <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-4>.
- [51] L. Blanchet, In *Mass and motion in general relativity*, page 125, Edited by L. Blanchet, A. Spallicci and B. Whiting, Vol. 162, Springer, Berlin, 2011.
- [52] V. Moncrief, *Ann. Phys. New York*, 88:323, 1974.
- [53] L. Barack and A. Ori, *Phys. Rev. D*, 64:124003, 2001, [arXiv:gr-qc/9912010](#).
- [54] L. Barack and C. O. Lousto, *Phys. Rev. D*, 66:061502(R), 2002, [arXiv:gr-qc/0205043](#).
- [55] L. Barack and N. Sago, *Phys. Rev. D*, 75:064021, 2007, [arXiv:gr-qc/0701069](#).
- [56] M. V. Berndtson, 2007, PhD Thesis (University of Colorado at Boulder), [arXiv:0904.0033](#).
- [57] S. Akcay, *Phys. Rev. D*, 83:124026, 211, [arXiv:1012.5860](#).
- [58] L. Barack and N. Sago, *Phys. Rev. D*, 81:084021, 2010, [arXiv:1002.2386](#).
- [59] S. Detweiler, *Phys. Rev. D*, 77:124026, 2008, [arXiv:0804.3529](#).
- [60] L. Blanchet, S. Detweiler, A. Le Tiec, and B. F. Whiting, *Phys. Rev. D*, 81:084033, 2010, [arXiv:1002.0726](#).
- [61] M. Favata, *Phys. Rev. D*, 83:024027, 2011, [arXiv:1008.4622](#).
- [62] L. Barack and N. Sago, *Phys. Rev. D*, 83:084023, 2011, [arXiv:1101.3331](#).
- [63] A. Le Tiec, A. H. Mroué, L. Barack, A. Buonanno, H. P. Pfeiffer, N. Sago, and A. Taracchini, *Phys. Rev. Lett.*, 107:141101, 2011, [arXiv:1106.3278](#).
- [64] A. Buonanno and T. Damour, *Phys. Rev. D*, 59:084006, 1999, [arXiv:gr-qc/9811091](#).
- [65] A. Buonanno and T. Damour, *Phys. Rev. D*, 62:064015, 2000, [arXiv:gr-qc/0001013](#).
- [66] T. Damour and A. Nagar, In *Mass and motion in general relativity*, page 125, Edited by L. Blanchet, A. Spallicci and B. Whiting, Vol. 162, Springer, Berlin, 2011, [arXiv:0906.1769](#).
- [67] A. Buonanno, G. B. Cook, and F. Pretorius, *Phys. Rev. D*, 75:124018, 2007, [arXiv:gr-qc/0610122](#).

- [68] F. Pretorius, In *Relativistic Objects in Compact Binaries: From Birth to Coalescence*, Edited by M. Colpi, P. Casella, V. Gorini and U. Moschella, A. Possenti, Vol. 359, Springer, 2009, [arXiv:0710.1338](#).
- [69] A. Le Tiec, E. Barausse, and A. Buonanno, *Phys. Rev. Lett.*, 108:131103, 2012, [arXiv:1111.5609](#).
- [70] S. A. Farrell, N. A. Webb, D. Barret, O. Godet, and J. M. Rodrigues, *Nat.*, 460:73, 2009, [arXiv:1001.0567](#).
- [71] O. Godet, B. Plazolles, T. Kawaguchi, J.-P. Lasota, D. Barret, S. A. Farrell, V. Braito, M. Servillat, N. Webb, and N. Gehrels, *Astrophys. J.*, 752:34, 2012, [arXiv:1204.3461](#).
- [72] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 167:148, 1938.
- [73] B. S. Dewitt and R. W. Brehme, *Ann. Phys. (New York)*, 9:220, 1960.
- [74] M. Abraham, *Ann. Phys. (Leipzig)*, 10:105, 1903.
- [75] H. A. Lorentz. *Theory of Electrons*. B. G. Teubner, Leipzig, 1909.
- [76] S. Detweiler and B. F. Whiting, *Phys. Rev. D*, 67:024025, 2003, [arXiv:gr-qc/0202086](#).
- [77] E. Poisson, A. Pound, and I. Vega, *Living Rev. Relativity*, 14, 2011, <http://www.livingreviews.org/lrr-2011-7>.
- [78] J. Larmor, *Phil. Trans. R. Soc.*, 185:719, 1894, *ibid.* 186:695, 1895; 190:205, 1897.
- [79] J. Jackson. *Classical electrodynamics*. J. Wiley & Sons, New York, 1975.
- [80] J.C Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. McMillan and co., London, 1873.
- [81] G. Green, *J. Reine Ang. Math., J. Crelle*, 39:73, 1850; *ibid.*, 44:356, 1852; *ibid.*, 47:161, 1854.
- [82] C. Huygens. *Traité de la lumière*. Pieter van der, Leiden, 1690.
- [83] J. G. Cramer, *Rev. Mod. Phys.*, 58:647, 1986.
- [84] L. D. Landau and E. M. Lifshits. *The classical theory of fields*. Pergamon, Oxford, 1962.
- [85] É. É. Flanagan and R. M. Wald, *Phys. Rev. D*, 54:6233, 1996, [arXiv:gr-qc/9602052](#).
- [86] E. Poisson, 1999, [arXiv:gr-qc/9912045](#).

- [87] J. M. Hobbs, *Ann. Phys. (New York)*, 47:141, 1968.
- [88] S. Detweiler and E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 69:084019, 2004, [arXiv:gr-qc/0312010](#).
- [89] A. Spallicci, In *Mass and motion in general relativity*, page 125, Edited by L. Blanchet, A. Spallicci and B. Whiting, Vol. 162, Springer, Berlin, 2011, [arXiv:1005.0611](#).
- [90] C. Ricci, In *Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna*, vol. III, p. 3, Tipografia del Seminario, Padova, 1888.
- [91] L. Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, 5:11, 1902.
- [92] S. Detweiler, *Class. Q. Grav.*, 22:S681, 2005, [arXiv:gr-qc/051004](#).
- [93] R. Geroch and J. Traschen, *Phys. Rev. D*, 36:1017, 1987.
- [94] S. E. Gralla and R. M. Wald, *Class. Q. Grav.*, 25:205009, 2008, Corrigendum, *ibid.* 28, 159501, 2011, [arXiv:0806.3293](#).
- [95] J. Ehlers and R. Geroch, *Ann. Phys. (New York)*, 309:232, 2004.
- [96] S. Detweiler and B. F. Whiting, *Int. J. Mod. Phys. D*, 12:1709, 2003.
- [97] Y. Mino, H. Nakano, and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.*, 108:1039, 2002, [arXiv:gr-qc/0111074](#).
- [98] L. Barack and A. Ori, *Phys. Rev. D*, 67:024029, 2003, [arXiv:gr-qc/0209072](#).
- [99] H. Nakano, N. Sago, and M. Sasaki, *Phys. Rev. D*, 68:124003, 2003, [arXiv:gr-qc/0308027](#).
- [100] N. Sago, L. Barack, and S. Detweiler, *Phys. Rev. D*, 78:124024, 2008, [arXiv:0810.2530](#).
- [101] L. Barack, Y. Mino, H. Nakano, A. Ori, and M. Sasaki, *Phys. Rev. Lett.*, 88:091101, 2002, [arXiv:gr-qc/0111001](#).
- [102] L. Barack and A. Ori, *Phys. Rev. Lett.*, 90:111101, 2003, [arXiv:gr-qc/0212103](#).
- [103] S. Detweiler, E. Messaritaki, and B. F. Whiting, *Phys. Rev. D*, 67:104016, 2003, [arXiv:gr-qc/0205079](#).
- [104] L. Barack, *Class. Q. Grav.*, 26:213001, 2009, [arXiv:0908.1664](#).
- [105] B. Carter, *Phys. Rev.*, 174:1559, 1968.

- [106] Y. Mino, *Phys. Rev. D*, 67:084027, 2003, [arXiv:gr-qc/0302075](#).
- [107] Y. Mino, *Prog. Theor. Phys.*, 113:733, 2005, [arXiv:gr-qc/0506003](#).
- [108] Y. Mino, *Class. Q. Grav.*, 22:S717, 2005, [arxiv:gr-qc/0506002](#).
- [109] Y. Mino, *Prog. Theor. Phys.*, 115:43, 2006, [arXiv:gr-qc/0601019](#).
- [110] Y. Mino, *Phys. Rev. D*, 77:044008, 2008, [arXiv:0711.3007](#).
- [111] S. Drasco and S. A. Hughes, *Phys. Rev. D*, 73:024027, 2006, [arxiv:gr-qc/0509101](#).
- [112] A. Pound, E. Poisson, and B. G. Nickel, *Phys. Rev. D*, 72:124001, 2005, [arXiv:gr-qc/0509122](#).
- [113] A. Pound and E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 77:044013, 2008, [arxiv:0708.3033](#).
- [114] E. A. Huerta and J. R. Gair, *Phys. Rev. D*, 79:084021, 2009, Erratum, *ibid.* 84:049903, 2011, [arXiv:0812.4208](#).
- [115] P. Amaro-Seoane, J. R. Gair, M. Freitag, M. C. Miller, I. Mandel, C. J. Cutler, and S. Babak, *Class. Q. Grav.*, 24:R113, 2007, [arXiv:astro-ph/0703495](#).
- [116] T. Hinderer and É. É. Flanagan, *Phys. Rev. D*, 78:064028, 2008, [arXiv:0805.3337](#).
- [117] K. Schwarzschild, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 189, 1916.
- [118] J. Droste, *Kon. Ak. Wetensch. Amsterdam*, 25:163, 1916, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam* 19, 197, 1917].
- [119] B. F. Schutz. *A first course in general relativity (Sec. Edition)*. Cambridge Univ. Press., 2009.
- [120] E. Kretschmann, *Annalen der Physik*, 353:907–942, 943–982, 1915.
- [121] M. D. Kruskal, *Phys. Rev.*, 119:1743, 1960.
- [122] H. Weyl, *Ann. Phys. (Leipzig)*, 54:117, 1917.
- [123] D. Hilbert, *Nachr. Ges. Wis. Göttingen Math. Phys. Kl.*, 53, 1917.
- [124] W. Killing, *J. Reine Angew. Math.*, 109:121, 1892.
- [125] C. Darwin, *Proc. R. Soc. London Ser. A.*, 263:39, 1961.
- [126] C. Cutler, D. Kennefick, and E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 50:3816, 1994.
- [127] N. Warburton, L. Barack, and N. Sago, *Phys. Rev. D*, 87:084012, 2013, [arXiv:1301.3918](#).

- [128] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [129] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.*, 52:299, 1980.
- [130] J. Mathews, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 10:768, 1962.
- [131] H. Nakano and K. Ioka, *Phys. Rev. D*, 76:084007, 2007, [arXiv:0708.0450](#).
- [132] C. O. Lousto and H. Nakano, *Class. Q. Grav.*, 26:015007, 2009, [arXiv:0804.3824](#).
- [133] R. J. Gleiser, C. O. Nicasio, R. H. Price, and J. Pullin, 325:41, 2000, [arXiv:gr-qc/9807077](#).
- [134] U. H. Gerlach and U. K. Sengupta, *Phys. Rev. D*, 19:2268, 1979.
- [135] U. H. Gerlach and U. K. Sengupta, *Phys. Rev. D*, 22:1300, 1980.
- [136] C. Gundlach and J. M. Martín-García, *Phys. Rev. D*, 61:084024, 2000, [arXiv:gr-qc/9906068](#).
- [137] J. M. Martín-García and C. Gundlach, *Phys. Rev. D*, 64:024012, 2001, [arXiv:gr-qc/0012056](#).
- [138] O. Sarbach and M. Tiglio, *Phys. Rev. D*, 64:084016, 2001, [arXiv:gr-qc/0104061](#).
- [139] C. A. Clarkson and R. K. Barrett, *Class. Q. Grav.*, 20:3855, 2003, [arXiv:gr-qc/0209051](#).
- [140] A. Nagar, G. Díaz, Jo. A. Pons, and J. A. Font, *Phys. Rev. D*, 69:124028, 2004, [arXiv:gr-qc/0403077](#).
- [141] A. Nagar and L. Rezzolla, *Class. Q. Grav.*, 22:R167, 2005, [arXiv:gr-qc/0502064](#).
- [142] K. Martel and E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 71:104003, 2005, [arXiv:gr-qc/0502028](#).
- [143] C. T. Cunningham, R. H. Price, and V. Moncrief, *Astrophys. J.*, 224:643, 1978.
- [144] C. O. Lousto and R. H. Price, *Phys. Rev. D*, 55:2124, 1997, [arXiv:gr-qc/9609012](#).
- [145] K. Martel, *Phys. Rev. D*, 69:044025, 2004, [arXiv:gr-qc/0311017](#).
- [146] E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 70:084044, 2004, [arXiv:gr-qc/0407050](#).
- [147] J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich, and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.*, 8:2155, 1967.
- [148] C. O. Lousto, *Class. Q. Grav.*, 22:S569, 2005, [arXiv:gr-qc/0501088](#).
- [149] L. Barack, A. Ori, and N. Sago, *Phys. Rev. D*, 78:084021, 2008, [arXiv:0808.2315](#).

- [150] P. Cañizares and C. F. Sopuerta, *Phys. Rev. D*, 79:084020, 2009, [arXiv:0903.0505](#).
- [151] P. Cañizares, C. F. Sopuerta, and J. L. Jaramillo, *Phys. Rev. D*, 82:044023, 2010, [arXiv:1006.3201](#).
- [152] C. F. Sopuerta and P. Laguna, *Phys. Rev. D*, 73:044028, 2006, [arXiv:gr-qc/0512028](#).
- [153] R. Haas, *Phys. Rev. D*, 75:124011, 2007, [arXiv:0704.0797](#).
- [154] S. Hopper and C. R. Evans, *Phys. Rev. D*, 82:084010, 2010, [arXiv:1006.4907](#).
- [155] S. Hopper and C. R. Evans, 2012, [arXiv:1210.7969](#).
- [156] S. E. Field, J. S. Hesthaven, and S. R. Lau, *Class. Q. Grav.*, 26:165010, 2009, [arXiv:0902.1287](#).
- [157] S. Aoudia and A. D. A. M. Spallicci, *Phys. Rev. D*, 83:064029, 2011, [arXiv:1008.2507](#).
- [158] C. O. Lousto and R. H. Price, *Phys. Rev. D*, 56:6439, 1997, [arXiv:gr-qc/9705071](#).
- [159] C. O. Lousto and R. H. Price, *Phys. Rev. D*, 57:1073, 1998, [arXiv:gr-qc/9708022](#).
- [160] K. Martel and E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 66:084001, 2002, [arXiv:gr-qc/0107104](#).
- [161] C. O. Lousto, *Class. Q. Grav.*, 22:S543, 2005, [arXiv:gr-qc/0503001](#).
- [162] P. Ritter, A. D. A. M. Spallicci, S. Aoudia, and S. Cordier, *Class. Q. Grav.*, 28:134012, 2011, [arXiv:1102.2404](#).
- [163] S. Chandrasekhar and S. Detweiler, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 344:441, 1975.
- [164] E. W. Leaver, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 402:285, 1985.
- [165] E. W. Leaver, *Astrophys. J.*, 291:L33, 1985.
- [166] A. Bachelot and A. Motet-Bachelot. *Nonlinear hyperbolic problems: theoretical, applied, and computational aspects*, vol. 43 of *Notes on numerical fluid mechanics (NNFM)*. Vieweg, Braunschweig, 1993.
- [167] M. Davis, R. Ruffini, W. H. Press, and R. H. Price, *Phys. Rev. Lett.*, 27:1466, 1971.
- [168] R. Ruffini V. Ferrari, *Phys. Lett. B*, 98:381, 1981.
- [169] C. O. Lousto, *Class. Q. Grav.*, 18:3989, 2001, [arXiv:gr-qc/0010007](#).
- [170] C. W. Misner, *Phys. Rev.*, 118:1110, 1960.

- [171] R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.*, 4:938, 1963.
- [172] D. R. Brill and R. W. Lindquist, *Phys. Rev.*, 131:471, 1963.
- [173] E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 47:1497, 1993.
- [174] C. Cutler, L. S. Finn, E. Poisson, and G. J. Sussman, *Phys. Rev. D*, 47:1511, 1993.
- [175] R. Fujita, W. Hikida, and H. Tagoshi, *Prog. Theor. Phys.*, 121:843, 2009, [arXiv:0904.3810](#).
- [176] L. Barack and C. O. Lousto, *Phys. Rev. D*, 72:124026, 2005, [arXiv:gr-qc/0510019](#).
- [177] A. Nagar, T. Damour, and A. Tartaglia, *Class. Q. Grav.*, 24:S109, 2007, [arXiv:gr-qc/0612151](#).
- [178] E. Poisson, *Phys. Rev. D*, 52:5719, 1995, Erratum and Addendum in *Phys. Rev. D*, 55:7980, 1997., [arXiv:gr-qc/9505030](#).
- [179] A. Spallicci, P. Ritter, S. Jubertie, S. Cordier, and S. Aoudia, in 9th LISA Symposium, 21-25 May 2012 Paris, ASP Conference Series, Vol. 467, G. Auger, P. Binétruy and E. Plagnol Eds., Astronomical Society of the Pacific, 221, 2011.
- [180] A. Zenginoğlu, *Class. Q. Grav.*, 27:045015, 2010, [arXiv:0911.2450](#).
- [181] P. Diener, I. Vega, B. Wardell, and S. Detweiler, *Phys. Rev. Lett.*, 108:191102, 2012, [arXiv:1112.4821](#).
- [182] N. Warburton, S. Akcay, L. Barack, J. R. Gair, and N. Sago, *Phys. Rev. D*, 85:061501, 2012, [arXiv:1111.6908](#).
- [183] K. A. Lackeos and L. M. Burko, *Phys. Rev. D*, 86:084055, 2012, [arXiv:1206.1452](#).
- [184] L. Barack, *Phys. Rev. D*, 62:084027, 2000, [arXiv:gr-qc/0005042](#).
- [185] L. Barack, *Phys. Rev. D*, 64:084021, 2001, [arXiv:gr-qc/0105040](#).
- [186] R. Courant and D. Hilbert, In *Methods of mathematical physics*, page 513, Vol. 1, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [187] C. O. Lousto, *Phys. Rev. Lett.*, 84:S251, 2000, [arXiv:gr-qc/9912017](#).
- [188] A. D. A. M. Spallicci and S. Aoudia, *Class. Q. Grav.*, 21:S563, 2004, [arXiv:gr-qc/0309039](#).

Patxi RITTER

Ondes gravitationnelles et calcul de la force propre pour un astre compact en mouvement autour d'un trou noir super-massif

Résumé :

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation des ondes gravitationnelles et du mouvement relativiste associés aux systèmes binaires à grand rapport de masses (Extreme Mass Ratio Inspiral - EMRI). Ces systèmes sont formés d'un trou noir super massif autour duquel gravite un objet compact de masse stellaire. Dans le formalisme de la théorie perturbative des trous noirs, on développe une méthode numérique qui calcule les formes d'ondes produites par une particule ponctuelle en orbite autour d'un trou noir de Schwarzschild. Il s'agit de résoudre l'équation d'onde de Regge-Wheeler-Zerilli dans le domaine temporel dont la solution, invariante de jauge, peut être reliée aux modes de polarisation, à l'énergie et au moment cinétique emporté par les ondes gravitationnelles. En réaction à l'énergie et au moment perdu, la trajectoire de la particule est affectée au cours du temps. Dans le cadre du formalisme de MiSaTaQuWa, on calcule la force propre agissant sur une particule, initialement au repos, est en chute libre sur un trou noir de Schwarzschild. Nous montrons comment cette quantité est définie dans la jauge de Regge-Wheeler par le biais de la régularisation mode-sum. L'effet de la force propre sur le mouvement de la particule est ensuite pris en compte de façon itérative et auto-consistante grâce à un algorithme utilisant une méthode d'orbites osculatrices que nous avons développé. Nous quantifions cet effet en calculant soit la déviation orbitale par rapport au mouvement géodésique, soit les formes d'ondes perturbées et l'énergie rayonnée associée.

Mots clés : Onde gravitationnelle, trou noir, réaction de radiation, force propre, EMRI

Gravitational waves and self-force computation for a compact object around a super-massive black hole

Abstract :

This thesis focuses on modelling the gravitational waves and the relativistic motion associated to Extreme Mass Ratio Inspiral (EMRI) systems. These systems consist of a stellar mass compact object gravitationally captured by a super-massive black hole. In black hole perturbation theory, we further develop a numerical method which computes waveforms generated by a point mass particle orbiting a Schwarzschild black hole. The Regge-Wheeler-Zerilli wave equation is solved in time domain. The gauge invariant solution is related to the polarisation modes, the energy and the angular momentum carried by the gravitational waves. In reaction to the energy and the moment lost, the trajectory is modified all along. In the MiSaTaQuWa formalism, we compute the self-force acting upon a point particle which is initially at rest, and then falling into a Schwarzschild black hole. We show how this quantity is defined in the Regge-Wheeler gauge by using the mode-sum regularisation technique. We take into account the self-force effect on the motion of the particle by using an iterative and osculating orbit method conceived herein. We quantify the orbital deviation with respect to the geodesic motion, but also the perturbed wave forms and the associated radiated energy.

Keywords : Gravitational waves, black hole, radiation reaction, self-force, EMRI



Laboratoire de Physique et Chimie de
l'Environnement et de l'Espace

Laboratoire de Mathématiques, Analyse,
Probabilités, Modélisation d'Orléans

