

***ÉCOLE DOCTORALE ENERGIE, MATERIAUX,
SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS***

LABORATOIRE : PRISME

THÈSE présentée par :

Thi Thu Nga NGUYEN

soutenue le : **20 février 2015**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Génie Mécanique**

**Approches multi-échelles pour des maçonneries
viscoélastiques**

THÈSE dirigée par :

Alain GASSER

Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Frédéric LEBON

Professeur, Université Aix - Marseille

Frédéric ROGER

Professeur, École des Mines de Douai

JURY :

Frédéric LEBON

Président, Professeur, Université Aix - Marseille

Frédéric ROGER

Professeur, École des Mines de Douai

Damien SOULAT

Professeur, ENSAIT Roubaix

Alain GASSER

Professeur, Université d'Orléans

Amna REKIK

Maître de conférences, Université d'Orléans

Table des matières

Remerciements	7
Introduction	8
1 Modélisations multi-échelles de maçonneries avec joints secs ou saturés	11
1.1 État de l'art de la modélisation d'une maçonnerie	11
1.1.1 Homogénéisation analytique	12
1.1.2 Homogénéisation périodique	13
1.2 Méthodes de modélisation d'un milieu sec	16
1.2.1 Schémas d'homogénéisation classiques	16
Problème d'Eshelby	16
Schéma dilué (DL)	19
Schéma de Mori-Tanaka (MT)	22
Schéma auto-cohérent (AC)	25
Approche de Ponte-Castañeda et Willis (PCW)	26
1.2.2 Approche par motif morphologique	28
Distribution isotrope de microfissures	28
Distribution isotrope transverse de microfissures	30
1.2.3 Comparaison à l'échelle globale des schémas classiques	31
Mortier élastique contenant des pores sphériques	31
Mortier élastique contenant des microfissures à distribution parallèle	32
Mortier élastique contenant des microfissures à distribution aléatoire	32
1.3 Méthodes de modélisation d'un milieu saturé	33
1.3.1 Modèle de Thomsen	33
1.3.2 Modèle de Brown et Korranga	35
1.3.3 Modèle de Shafiro et M. Kachanov	36
1.3.4 Modèle de Kanaun et Levin	39
1.3.5 Comparaison des modèles	42
1.4 Homogénéisation périodique de maçonnerie : Méthode des Éléments Finis (MEF)	44
1.4.1 Sans loi d'interface	44
1.4.2 Avec loi d'interface	47
1.5 Conclusions	48
2 Approche multi-échelle pour une maçonnerie dans différents états	49
2.1 Introduction	49
2.2 Modèles d'interface de l'assemblage brique/ mortier microfissuré	52

2.2.1	Modèles d'interface existants	52
	(i) Étape (a)	53
	(ii) Étape (b)	54
	(iii) Étape (c)	55
2.2.2	Modèles d'interface proposés à l'état sec	55
2.2.3	Modèles d'interface proposés à l'état saturé	58
	(a) Modèle de Thomsen	59
	(b) Modèle de Brown et Korringa (<i>B&K</i>)	59
	(c) Modèle de Shafiro et Kachanov (<i>S&K</i>)	59
2.3	Modèle d'interphase de Kanaun et Levin	61
2.3.1	Cas de fissures à orientation aléatoire	62
2.3.2	Cas de fissures parallèles	62
2.4	Homogénéisation de maçonneries élastiques avec fissures et pores	64
2.4.1	Approche numérique	65
	Homogénéisation de maçonneries à l'état sain (sec et saturé)	65
	Homogénéisation de maçonneries microfissurées (avec ou sans pores) à l'état sec	66
	Homogénéisation de maçonneries microfissurées (avec ou sans pores) à l'état saturé	68
2.4.2	Approche analytique	72
2.5	Conclusions	74
3	Homogénéisation d'une maçonnerie viscoélastique microfissurée	75
3.1	Objectif et démarche	75
3.2	Matériaux viscoélastiques	76
3.2.1	Généralités	77
	Matériau viscoélastique linéaire non vieillissant (v.l.n.v.)	77
	(i) Fonction de fluage	77
	(ii) Fonction de relaxation	78
	(iii) Comportement viscoélastique tridimensionnel	78
	(iv) Comportement non-vieillissant	79
	Démarche d'homogénéisation classique pour un matériau viscoélas- tique hétérogène	79
	(i) Transformée de Laplace-Carson et fonction de fluage dans l'espace symbolique	80
	(ii) Homogénéisation linéaire classique dans l'espace symbolique	81
	(iii) Inversion de la transformée de Laplace-Carson	82
3.2.2	Modèles rhéologiques de mortiers à l'état sain	85
	Modèle de Maxwell (M)	85
	Modèle de Kelvin-Voigt (KV)	86
	Modèle de Burgers (Bu)	87
	Modèle de Maxwell modifié (MM)	88
3.3	Homogénéisation de mortiers v.l.n.v. microfissurés	89
3.3.1	Couplage entre homogénéisation et théorie de Griffith	89
	Identification de modèles rhéologiques existants à court et long termes	91
	Validation du modèle approché	94

3.3.2	Application au mortier microfissuré	97
	Données matériau de mortiers viscoélastiques	97
	Évolutions de la fonction de fluage $\tilde{S}(t, d_c)$ du mortier viscoélastique microfissuré	97
	Temps de fluage	101
3.4	Comportement d'une cellule périodique de maçonnerie viscoélastique microfissurée	101
3.4.1	Cas d'une colonne maçonnée (1-D)	102
	Rigidité effective normale	102
	Influence des paramètres géométriques et matériels	103
	(i) Cas sain	103
	(ii) Cas microfissuré	107
3.4.2	Cas d'un mur maçonné (2-D)	107
	Rigidités d'un mur maçonné	107
	Influence des paramètres géométriques et matériels	111
	(i) Cas sain	111
	(ii) Cas microfissuré :	111
3.4.3	Comparaison des modèles à l'échelle globale	115
	Cas sain	115
	Cas microfissuré	117
3.5	Applications du modèle "E.C-T" à des maçonneries chargées	117
3.5.1	Cas d'une colonne maçonnée (1D)	119
3.5.2	Cas d'un mur maçonné (2D)	120
	Cas sain	124
	Cas microfissuré	127
3.6	Conclusions	133
4	Conclusions et perspectives	135
4.1	Conclusions	135
4.2	Perspectives	136
A	Les bases de calcul tensoriel	138
A.1	Base de $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$	138
A.2	Base de Walpole	138
A.3	Base de $\mathbb{F}$	140
A.4	Base de $\mathbb{P}$	140
B	Tenseur d'Eshelby	142
B.1	Ellipsoïde cylindrique	142
B.2	Ellipsoïde aplati	142
C	Loi d'interface	144
C.1	Analyse asymptotique	144
	C.1.1 Pour l'interface	144
	C.1.2 Pour l'interphase-Modèle de Klarbring (1999)	145
C.2	Modèles d'interface existants	145

D Choix des modèles d'interaction	150
E Modèles rhéologiques	152
E.1 Calcul des modules apparents de compressibilité et de cisaillement	152
E.1.1 Modèle de Maxwell	152
E.1.2 Modèle de Kelvin-Voigt	153
E.1.3 Modèle de Burgers	153
E.1.4 Modèle de Maxwell modifié (MM)	154
E.2 Comportement effectif approché : distribution isotrope des fissures	154
E.2.1 Modèle de Burgers	154
E.2.2 Modèle de Maxwell modifié	157
E.3 Autres modèles rhéologiques	159
E.3.1 Modèle de Maxwell généralisé (MG)	159
E.3.2 Modèle de Kelvin généralisé (KG)	160
E.3.3 Modèle de Ross (Rs)	160
E.3.4 Modèle de l'US Bureau de Réclamation (USBR)	161
F Influence des paramètres sur le comportement global de la maçonnerie selon le modèle "E.C-T"	162
F.1 Cas du mortier S7 à l'état sain (cellule périodique 1D)	162
F.2 Cas d'une cellule périodique 1D avec mortier microfissuré	168
F.3 Cas d'un mur 2D	172
F.3.1 Cas de cellule périodique 2D avec mortier sain	172
F.3.2 Cas microfissuré 2D	174
G Modèles proposés pour le comportement global des maçonneries	176
G.1 Modèle micromécanique : schéma de MT et inversion directe de TLC	176
G.2 Approche numérique : modèle incrémental	179
G.2.1 Forme incrémentale de la loi de MM	182
G.2.2 Validation de la procédure incrémentale sur l'exemple d'une sphère creuse	183
G.2.3 Application à la maçonnerie v.l.n.v. microfissurée	184
H Résultats	186
H.1 Cas d'une colonne maçonnée (1D)	186
H.2 Cas d'un mur maçonné (2D)	186
Bibliographie	195
Liste des tableaux	201
Liste des figures	202

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire PRISME (Laboratoire Pluridisciplinaire de Recherche Ingénierie des Systèmes, Mécanique, Énergétique) à l'Université d'Orléans.

Je tiens tout d'abord à Alain GASSER, mon directeur de thèse, Professeur à l'Université Orléans pour ce sujet de thèse riche et très passionnant, pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser cette thèse ainsi que pour m'avoir aidé à prendre les bonnes décisions concernant ma thèse.

Je voudrais remercier particulièrement Amna REKIK, mon encadrante, Maître de conférence et chercheuse au laboratoire PRISME pour le temps qu'elle m'a consacré, les idées riches ainsi que la confiance qu'elle m'a accordée en me laissant de l'autonomie durant ces trois années de thèse et pour les nombreux conseils qu'elle m'a donnés pour la rédaction de ma thèse.

Mes remerciements vont également à Azeddine KOURTA, directeur du laboratoire PRISME, pour m'avoir accueilli au sein de cette institution, pour l'intérêt qu'il m'a témoigné et que j'ai eu l'honneur de recevoir de son part.

J'exprime toutes mes profondes reconnaissances à Messieurs Frédéric LEBON et Frédéric ROGER qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Ils ont donné des rapports très détaillés, favorables ainsi que des questions intéressantes en ouvrant d'autres perspectives à ma recherche.

Je voudrais remercier chaleureusement messieurs Duc Phi DO et Eric BLOND pour leur gentillesse et leurs encouragements, et tous mes collègues et amis : Aristide, Nicolas, Jean-Emile, Camille, Jean, Audrey, Davina, Amal, Emilie, Selom, Sana et Lucila... du laboratoire PRISME pour des bons moments passés dans une ambiance conviviale.

Je remercie tout particulièrement à Sy Tuan NGUYEN, pour ses suggestions lors de la réalisation de ma thèse. Je tiens aussi à vivement remercier mes merveilleux amis Nicole NOURRY et Toum CAM qui étaient toujours à mes côtés quand j'avais des difficultés dans la vie. Merci à mes amis vietnamiens d'être venus me soutenir. Finalement, je n'oublie pas mon mari Hung et ma fille Uyen, qui m'ont encouragé pour finir ce travail de thèse.

Orléans, au 15 Mai 2015

Introduction générale

La maçonnerie est l'art de bâtir une construction par assemblage de matériaux élémentaires (pierres, briques, agglomérés de béton, ...) liés par divers matériaux (mortier, chaux, ciment, plâtre, ...). Les structures maçonnées sont les plus anciennes structures du génie civil connues mais elles ont encore un avenir certain (qualités d'isolation thermique et phonique, en particulier). La connaissance, la modélisation et la simulation de leur comportement sont indispensables, à la fois pour le renforcement des structures existantes et pour l'amélioration des techniques actuelles.

Comme la maçonnerie est un matériau biphasé composé de briques et de joints avec ou sans mortier, arrangés le plus fréquemment de façon régulière et périodique, ses propriétés mécaniques dépendent des propriétés mécaniques de ses composants et de leur distribution. Nous aborderons successivement les deux types de maçonnerie suivants :

- La maçonnerie classique qui est un matériau biphasé composé de briques et de mortier de $5 - 20\text{mm}$ de largeur et qui constitue une partie des bâtiments ([1–3] par exemple).
- Le garnissage réfractaire qui consiste à assembler des briques à l'aide d'un mortier à joints fins ($< 5\text{mm}$) ou sans mortier pour protéger une structure métallique des produits chauds qu'elle contient dans des réacteurs ([4–6] par exemple).

Dans les industries de la sidérurgie ou de l'énergie, de nombreux réacteurs (comme les poches à acier ou les hauts-fourneaux) ont des garnissages réfractaires maçonnés (Figure 1). Ces structures sont généralement multicouches et multizones. Chacune a une fonction particulière, par exemple, l'isolation ou la protection contre la corrosion, etc. Ces structures peuvent atteindre des températures supérieures à 1650°C , pour lesquelles les matériaux constitutifs des maçonneries (briques et mortier) ont un comportement non linéaire (principalement viscoélastique, avec possibilité de fissuration). De plus, elles sont exposées en surface à des liquides. Aussi, les micro-fissures avec ou sans pores peuvent être saturées ou sèches. Ces fissures peuvent nuire à la durabilité des structures quand elles se propagent. Afin de réaliser une simulation numérique de telles structures, il est nécessaire de modéliser le comportement de ces garnissages maçonnés. Malheureusement, il n'existe pas aujourd'hui d'outils numériques suffisamment puissants pour prédire le comportement des garnissages réfractaires maçonnés avec l'apparition et la propagation de fissures. Par ailleurs, comme ces structures ne sont pas constituées d'un matériau homogène, leur comportement reste très complexe et mal connu. La complexité vient de l'interaction entre ses composants et de l'anisotropie due à la direction des joints.

Le but de cette thèse est de simuler le comportement de la maçonnerie élastique ou viscoélastique, à l'état sain ou endommagé, avec ou sans mortier, en utilisant les données expérimentales disponibles dans la littérature et les travaux sur la maçonnerie périodique, afin de proposer des améliorations de modèles existants. Pour ce faire, une approche en trois étapes est proposée.

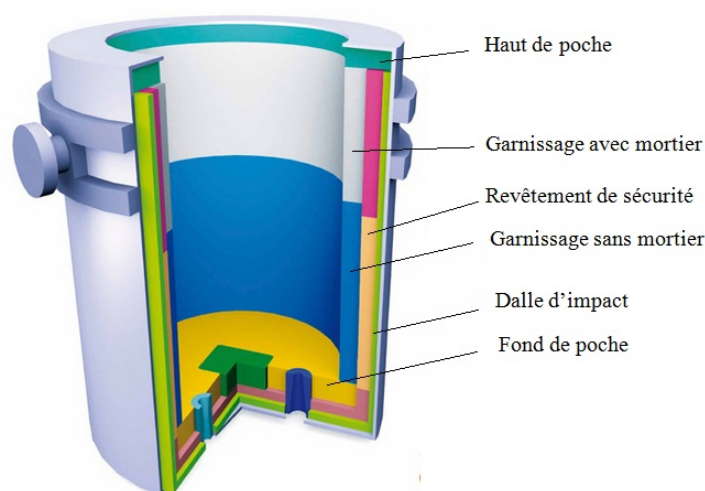


FIGURE 1 – Structure type d'une poche à acier maçonnée, production de l'entreprise Calderys.

Le premier chapitre présente l'état de l'art de la modélisation d'une maçonnerie et la méthode de modélisation d'une maçonnerie régulière dont l'approche périodique est indispensable et irremplaçable par rapport à l'approche non-périodique. Trois approches d'homogénéisation périodique (macroscopique, microscopique et micro-macro) sont présentées et l'approche micro-macro est choisie. Dans la modélisation de la maçonnerie, il est également possible d'introduire un troisième élément - l'interface entre les briques et le mortier, dont l'épaisseur est considérée ou non.

Le deuxième chapitre a pour objectif d'étudier le comportement d'une maçonnerie élastique dans différents états : saine ou micro-fissurée, sèche ou saturée, avec ou sans pores, à partir de l'analyse bibliographique des modèles existants appliqués aux roches ou aux matériaux poreux. Le comportement effectif des cellules de base avec ou sans interface est calculé pour chaque état.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement visco-élastique d'une maçonnerie endommagée. Il commence par l'homogénéisation d'un matériau hétérogène viscoélastique linéaire non-vieillissant qui est réalisée grâce à la transformation de Laplace-Carson. Puis, deux modèles de viscosité (Burgers et Maxwell modifié) sont choisis parmi les modèles rhéologiques pour le comportement du mortier. Une démarche est proposée pour l'homogénéisation d'un mortier viscoélastique micro-fissuré, dont un couplage entre le schéma dilué et la théorie de Griffith est appliqué. Enfin, les résolutions analytique et numérique de problèmes posés directement sur des structures maçonnées 1D et 2D sont développées et comparées à l'échelle microscopique et macroscopique. Deux différentes solutions (numérique ("INC+EF") et une extension analytique de Cecchi et Tralli ("E.C-T")) seront discutées dans ce chapitre. De plus, un couplage entre une inversion directe de la TLC et le schéma de MT ("MT+ITLC") sera également proposée pour homogénéiser le comportement des maçonneries classiques.

Notations

Les notations ci-dessous sont utilisées dans ce mémoire.

$\mathbf{i}$	tenseur identité d'ordre deux	$\mathbb{S}_E$	tenseur d'Eshelby
$\mathbb{I}$	tenseur identité d'ordre quatre	$\mathbb{D}$	tenseur de concentration des contraintes
$\mathbb{J}$	projection sphérique de $\mathbb{I}$	$\mathbb{A}$	tenseur de localisation des déformations
$\mathbb{K}$	projection déviatorique de $\mathbb{I}$	$\mathbb{B}$	tenseur de Biot
$\mathbb{C}$	tenseur de rigidité	$\tilde{\mathbb{C}}$	tenseur de rigidité effective
$\mathbb{S}$	tenseur de souplesse	$\tilde{\mathbb{S}}$	tenseur de souplesse effective
$\mathbf{\Sigma}$	tenseur des contraintes macroscopiques	$\mathbb{P}^0$	tenseur de Hill
$\mathbb{E}$	tenseur des déformations macroscopiques		
σ	contrainte locale	$u(x)$	champ de déplacement
ε	déformation locale	k	module de compressibilité
$\bar{\sigma}$	contrainte macroscopique	μ	module de cisaillement
$\bar{\varepsilon}$	déformation macroscopique	E	module d'Young
C_N	rigidité normale	L_0	largeur du joint de mortier
C_T	rigidité tangentielle	ν	coefficient de Poisson
K^α	($\alpha = h$ ou v) rigidité de l'interphase horizontale ou verticale	η_α^β	coefficient de viscosité déviatorique
Z_N^α	($\alpha = s$ ou d) souplesse normale des fissures	η_α^β	coefficient de viscosité sphérique
Z_T^α	($\alpha = s$ ou d) souplesse tangentielle des fissures	φ^r	fraction volumique de la phase r
N_c	nombre de fissures	φ	fraction volumique des pores ou des fissures
N_p	nombre de pores	ϕ_p	fraction volumique des pores
N	nombre de fissures par unité de volume	ϕ_c	fraction volumique des fissures
a_3	$= c$ rayon des fissures selon l'axe $\vec{y}_3$	e	épaisseur du matériau ou du joint de mortier
a_1	$= a_2 = a$ rayons des fissures dans le plan (y_1, y_2)	e^α	épaisseur horizontale ($\alpha = h$) et verticale ($\alpha = v$) du mortier
τ_α^β	temps de relaxation	V	volume du matériau
d_c	densité de fissures	S	section du matériau
b	rayon des pores	a^b	hauteur de la brique
t	temps	b^b	largeur de la brique
l	demi-longueur de fissures	δ^b	épaisseur de la brique
$\cdot_R$	indice pour la partie ressort	$\cdot_d$	indice pour le milieu sec
$\cdot_M$	indice pour la partie Maxwell	$\cdot_\phi$	indice pour les pores
$\cdot_K$	indice pour la partie Kelvin-Voigt	$\cdot_{d_c}$	indice pour les grandeurs dans l'état microfissuré
$\cdot_f$	indice pour le fluide	$\cdot_s$	indice pour le milieu saturé (cas élastique - chapitre 1,2)
$\cdot_c$	indice pour les fissures	$\cdot_s$	indice pour le milieu sain (cas viscoélastique - chapitre 3)
$\cdot^e$	exposant pour la partie élastique	$\cdot^s$	exposant pour la partie sphérique
$\cdot^v$	exposant pour la partie visqueuse	$\cdot^d$	exposant pour la partie déviatorique
$\cdot^*$	symbole de grandeurs dans l'espace de Laplace-Carson	$\sim$	expression d'une grandeur effective
VER	Volume Élémentaire Représentatif	MMR	Motif Morphologique Représentatif
MEF	Méthode des Éléments Finis	$\dot{a}$	dérivée de a
v.l.n.v.	viscoélastique linéaire non vieillissant	TLC	transformée de Laplace-Carson

Chapitre 1

Modélisations multi-échelles de maçonneries avec joints secs ou saturés

Sommaire

1.1 État de l'art de la modélisation d'une maçonnerie	11
1.1.1 Homogénéisation analytique	12
1.1.2 Homogénéisation périodique	13
1.2 Méthodes de modélisation d'un milieu sec	16
1.2.1 Schémas d'homogénéisation classiques	16
1.2.2 Approche par motif morphologique	28
1.2.3 Comparaison à l'échelle globale des schémas classiques	31
1.3 Méthodes de modélisation d'un milieu saturé	33
1.3.1 Modèle de Thomsen	33
1.3.2 Modèle de Brown et Korringa	35
1.3.3 Modèle de Shafiro et M. Kachanov	36
1.3.4 Modèle de Kanaun et Levin	39
1.3.5 Comparaison des modèles	42
1.4 Homogénéisation périodique de maçonnerie : Méthode des Éléments Finis (MEF)	44
1.4.1 Sans loi d'interface	44
1.4.2 Avec loi d'interface	47
1.5 Conclusions	48

1.1 État de l'art de la modélisation d'une maçonnerie

Le principe de base de l'homogénéisation consiste à remplacer un matériau hétérogène par un matériau homogène de comportement équivalent. La différence entre la maçonnerie et les autres matériaux comme le béton est son comportement orthotrope alors que ses composants sont des matériaux isotropes. Cette section rappelle brièvement les bases de la théorie de l'homogénéisation appliquée aux structures maçonnées dans le cas des arrangements périodiques.

On distingue ici deux approches différentes d'homogénéisation adoptées dans la littérature : l'homogénéisation non-périodique analytique et l'homogénéisation périodique.

1.1.1 Homogénéisation analytique

L'homogénéisation analytique [7–9], proposée pour des milieux hétérogènes à distribution aléatoire, considère la maçonnerie comme un matériau biphasé dont le mortier est la matrice et les briques sont des inclusions de forme ellipsoïdale noyées dans un milieu infini (mortier). Cette approche est bien adaptée aux maçonneries irrégulières et en cas d'élasticité. Pietruszczak et Niu [7] ont utilisé l'homogénéisation en deux étapes pour l'étude des

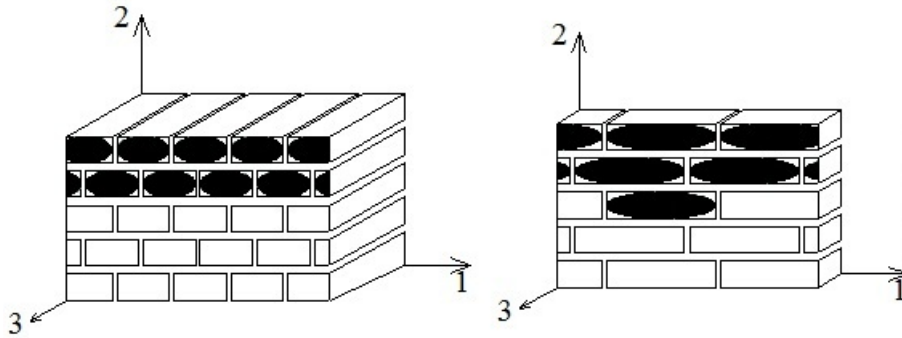


FIGURE 1.1 – Approche "matrice-inclusion" d'après [8].

maçonneries périodiques où la matrice est considérée comme étant la brique et les joints de mortier sont traités comme des interfaces ou des inclusions ellipsoïdales. Dans la première étape, ils ont supposé que les unités de briques forment une matrice homogène uniformément entrecoupée de joints verticaux alignés comme inclusions. La raideur équivalente du milieu peut être trouvée en combinant la solution d'Eshelby pour un cylindre de section elliptique avec la théorie en champs moyens de Mori-Tanaka [10, 11]. Ils ont homogénéisé ce milieu à partir de la première étape et les joints horizontaux continus forment une structure stratifiée dont la raideur effective est trouvée avec la mécanique d'un matériau stratifié. Par ailleurs, Bati et *al.* [8] ont proposé d'assimiler les briques à des cylindres elliptiques alignés comme représenté sur la Fig.1.1. Il a aussi été vérifié que leur méthode suit fidèlement le comportement des maçonneries réelles en réalisant des essais de compression uniaxiale sur des panneaux en maçonnerie bâtis avec des briques élastiques et du mortier de ciment ou de chaux, lorsque l'épaisseur de mortier est petite (3-5 mm). Dans ce modèle, Zhao et Weng [9] ont appliqué la formulation de Mori-Tanaka, ce qui est très similaire à la première étape de Pietruszczak et Niu [7] présentée ci-dessus, alors que les unités de brique, à la place des joints verticaux, sont traitées comme des inclusions noyées dans la matrice de mortier. Cette approche n'a pas pris en compte le motif spécifique de brique et de mortier, ni exploité la périodicité de la géométrie, des contraintes et des déformations, ainsi que d'autres caractéristiques du milieu comme les épaisseurs du mortier selon les différentes directions et elle repose sur l'hypothèse d'un mortier infini, ce qui n'est pas adapté à l'état réel. Toutefois, il est également noté que lorsque la concentration en inclusions de briques est très élevée, la vraisemblance du modèle de cylindre elliptique est validée expérimentalement par rapport aux résultats expérimentaux dans [8]. Les approches ci-dessus n'ont été jusqu'à présent discutées que dans le cas élastique.

1.1.2 Homogénéisation périodique

L'homogénéisation périodique repose classiquement sur trois approches : macroscopique, microscopique et micro-macro.

- La première considère la maçonnerie comme une entité unique à laquelle est associé un comportement homogène identifié à l'aide d'essais réalisés sur des maçonneries de grandes tailles ([12,13] par exemple). Ces essais ne permettent d'identifier des surfaces seuils qu'une fois atteintes en un point de la structure. De plus, il faut prendre en compte l'adoucissement de la contrainte. À ce propos, il est possible de citer les travaux de Lourenço [13], qui considère la maçonnerie comme un matériau orthotrope auquel est associée une surface seuil définie par un critère de Rankine en traction et de Hill en compression, contrairement aux autres recherches qui considèrent la maçonnerie comme un matériau isotrope [14,15].
- L'approche microscopique modélise la maçonnerie comme un milieu hétérogène continu [16,17] ou discret [18,19]. Les briques (rigides ou déformables) sont liées entre elles par des lois d'interaction comme la loi de Signorini pour le contact et une loi de type Coulomb pour le frottement. Les modèles de la méthode continue s'appuient sur la Méthode des Éléments Finis (MEF) et définissent deux à trois phases : brique, mortier et/ou interface. Ces modèles nécessitent la connaissance des forces à rupture en traction, en compression et en cisaillement des différents constituants de la maçonnerie. Ce type d'approche inclut aussi des modèles d'endommagement de type Kachanov [20,21] ou autre [22].
- L'approche micro-macro (ou "upscaling", multi-échelle) définit pour la maçonnerie un Volume Élémentaire Représentatif (VER) modélisé selon l'approche microscopique. Le comportement macro de la maçonnerie est identifié à travers diverses sollicitations appliquées au VER. Cette identification repose sur des techniques d'homogénéisation linéaire et non linéaire. Dans cette approche, il est d'usage de considérer un endommagement qui se propage de façon progressive et contrôlée ou différents états d'endommagement avec des transitions brutales entre eux. Alors, l'homogénéisation périodique s'appuyant sur l'approche micro-macro permet de déterminer la modélisation homogène d'un milieu hétérogène dont le détail d'hétérogénéités ne prend pas en compte les calculs analytiques ou numériques. Ce milieu hétérogène est remplacé par un Milieu Homogène Équivalent (MHE) qui aura les mêmes caractéristiques mécaniques (aux approximations près adoptées par le schéma micromécanique) que le milieu hétérogène de départ.

La modélisation des structures maçonnées à l'échelle macroscopique fait face à un problème majeur dans l'identification des paramètres matériaux inclus dans les lois de comportement. Ces paramètres sont donnés par différents essais et ceux-ci à leur tour dépendent des conditions aux limites mais aussi du facteur d'échelle. La modélisation à l'échelle microscopique permet d'incorporer les comportements des divers constituants et d'accéder à une bonne compréhension du comportement à l'échelle locale, mais elle demande un effort numérique plus important pour des structures de grande taille (selon [23]). De plus, l'identification des paramètres introduits par la loi de Signorini et de Coulomb reste un problème délicat. L'approche micromécanique utilise des calculs numériques sur un VER qui ont de nombreux avantages avec l'adoption d'une technique d'Éléments Finis (EF) par exemple (comme montré dans [23] par exemple) :

- La solution EF se rapproche de la solution réelle pour un maillage raffiné adapté,
 - L'épaisseur des joints de mortier est prise en compte pour l'évaluation des modules homogénéisés,
 - Elle permet de simuler le comportement non-linéaire en particulier en présence de joints de mortier avec des propriétés mécaniques ou des comportements non-linéaires.
- Cette approche a ainsi une grande capacité à reproduire le comportement des maçonneries sans utiliser un maillage trop fin même dans le cas non-linéaire.

Pour les composites réguliers, c'est-à-dire, pour les composites avec des inclusions réparties régulièrement dans la matrice, un modèle périodique a été proposé par de nombreux auteurs [24–26]. Dans le cadre de cette dernière approche, on utilise l'homogénéisation périodique linéaire en champs moyens qui repose sur trois étapes générales [25–29] et qui est à privilégier pour les maçonneries régulières.

Étapes de changement d'échelles :

- la représentation qui précise la description géométrique et mécanique avec des éléments contenus dans un VER,
- la localisation qui consiste à analyser les conséquences locales d'un chargement global en termes de champs de contraintes et de déformations au sein du VER,
- l'homogénéisation qui vise à l'expression du comportement du milieu homogène équivalent.

Tout d'abord, pour l'étape de représentation, il faut choisir la taille d'un VER qui soit suffisamment grande pour satisfaire en même temps la condition pour traiter la structure comme un milieu continu et la condition pour décrire le comportement du VER par une loi homogène. La représentation de chaque brique et de chaque joint est réalisée dans les travaux de Page [18, 30] mais elle est essentiellement inapplicable pour la modélisation d'une grande structure réelle de maçonnerie, de sorte que cette approche ne convient que pour simuler un petit échantillon ou une unité représentative.

Dans l'étape de localisation, le VER est soumis à des conditions de contraintes homogènes (CH) ou de déformations homogènes (DH) sur le contour $\partial\Omega$ du VER.

La dernière étape permet de déduire le tenseur de souplesse effective du milieu hétérogène $\tilde{\mathbb{S}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{D} \rangle$ et le tenseur de rigidité effective $\tilde{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle$ respectivement. Le problème d'homogénéisation du milieu élastique linéaire donne la loi de comportement du matériau hétérogène sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma &= \mathbb{C} : \varepsilon \\ \varepsilon &= \mathbb{S} : \sigma \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\mathbb{C}$ et $\mathbb{S}$ sont respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse ($\mathbb{C} : \mathbb{S} = \mathbb{I}$ où $\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre quatre).

Sous la condition de déformations homogènes (DH), on obtient la loi de comportement homogénéisé élastique linéaire comme suit :

$$\bar{\sigma} = \tilde{\mathbb{C}} : \bar{\varepsilon} \quad (1.2)$$

et celle de la condition de contraintes homogènes (CH) :

$$\bar{\varepsilon} = \tilde{\mathbb{S}} : \bar{\sigma} \quad (1.3)$$

avec

$$\tilde{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle, \quad \tilde{\mathbb{S}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{D} \rangle \quad (1.4)$$

où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{D}$ sont des tenseurs d'ordre quatre, appelés respectivement tenseurs de localisation des déformations et de concentration des contraintes. L'indice $\langle . \rangle$ montre la moyenne du tenseur.

On rappelle ici la notion de cellule de base qui n'est pas définie de manière unique, comme illustré sur la figure (1.2) [24, 31].

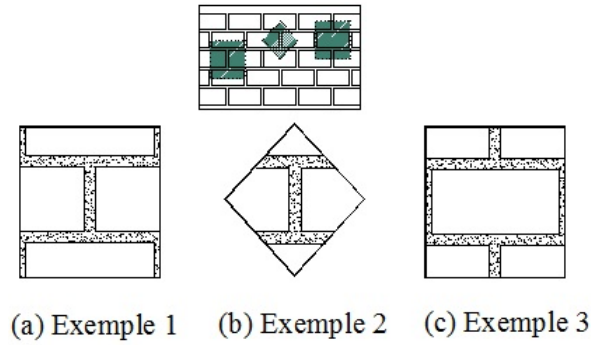


FIGURE 1.2 – Exemples de cellule de base pour maçonnerie de type "running bond".

Extraits de littérature : homogénéisation périodique

Luciano et Sacco (dans [28]) ont appliqué la série de Fourier et les multiplicateurs de Lagrange pour le problème d'homogénéisation des milieux périodiques, caractérisés par une géométrie quelconque d'inclusions, avec ou sans axes orthogonaux de symétrie. Malheureusement, le tenseur de modules effectifs est obtenu à partir du champ de contraintes mais il n'est pas donné sous la forme générale.

Étant donné la complexité géométrique du VER, la maçonnerie a été traitée en tant que continuité élastique. On rappelle ici que l'approche périodique, à privilégier pour les maçonneries régulières, est largement utilisée dans le cas élastique. Cette approche peut être réalisée en deux étapes [25] ou en une seule étape [29]. Pande et *al.* [25] ont été les premiers à développer la méthode d'homogénéisation périodique en utilisant deux étapes d'homogénéisation (voir aussi [23]) pour déterminer les propriétés élastiques d'une maçonnerie où les phases sont supposées isotropes. La première étape correspond à l'homogénéisation d'une seule ligne de briques avec des joints verticaux. La deuxième permet de définir une raideur effective avec la prise en compte des joints horizontaux dans le premier matériau homogénéisé. Lorsque les raideurs sont obtenues par l'égalité des énergies de déformation dans le matériau équivalent et le système étudié, le type d'empilement des briques et du mortier ne peut pas être distingué dans leurs modèles. Gang Wang [29] à son tour a utilisé le concept de cellule de base dans [24] et la méthode d'homogénéisation périodique pour

évaluer la raideur effective de la structure de maçonnerie périodique. En utilisant l'évaluation d'Eshelby combinée à une approche en énergie de déformation, la rigidité effective de la maçonnerie est obtenue de façon analytique par une série infinie et l'exactitude dépend de la valeur N du terme fini.

Une approche analytique qui déduit le comportement effectif d'une cellule périodique 1D, 2D ou 3D, dans le cas élastique ou viscoélastique à l'état sain, est proposée dans les travaux de Cecchi et *al.* [26, 31–36]. En utilisant la technique d'homogénéisation analytique sur un stratifié (cas 1D) ou la technique asymptotique pour la définition du joint de mortier (cas 2D et 3D), cette approche montre son exactitude et son utilité par comparaison avec des essais réels (cas 1D) ou des calculs numériques en 2D ou 3D dans le cas où le mortier est supposé très fin ou de rigidité beaucoup plus faible que les briques.

1.2 Méthodes de modélisation d'un milieu sec

1.2.1 Schémas d'homogénéisation classiques

Problème d'Eshelby

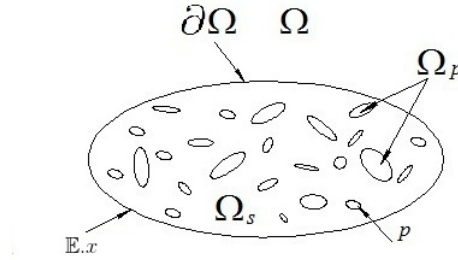


FIGURE 1.3 – Milieu avec réseau de fissures en forme d'ellipse.

On rappelle ici brièvement le problème d'Eshelby qui sert de base à la méthode d'homogénéisation des milieux hétérogènes en poro-élasticité linéaire. Le VER de ce matériau occupe le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. La phase solide occupe le domaine Ω_s de frontière $\partial\Omega_s$ tandis que les pores (ou les fissures en forme d'ellipse) occupent le domaine Ω_p de frontière $\partial\Omega_p$, complémentaire de Ω_s dans Ω . Une pression p est considérée dans les pores supposés contenir un fluide. Pour simplifier, on suppose de plus que les pores n'intersectent pas la frontière du VER (voir la figure (1.3)). La fraction volumique des pores sphériques ou des fissures de type elliptique aplati du milieu est définie par la relation :

$$\varphi = \frac{V_p}{V} \quad (1.5)$$

où V et V_p sont respectivement le volume de domaine Ω et Ω_p . On impose une condition de sollicitation en déformation (par exemple) sur le bord $\partial\Omega$ du VER pour déterminer le comportement macroscopique : $u(x) = \mathbb{E}.x$, où $u(x)$ est le champ de déplacement, $\mathbb{E}$ est le tenseur des déformations macroscopiques. La relation entre la moyenne volumique du champ de déformations et la déformation macroscopique imposée constante $\mathbb{E}$ est donnée

par :

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (n \otimes^s u) dS = \mathbb{E} \quad (1.6)$$

où $\otimes^s$ est le produit tensoriel symétrique. Cette relation montre que le champ de déformation locale à l'intérieur du VER peut être considéré comme la superposition d'un champ constant fixé par les conditions aux limites et d'une fluctuation dépendant des propriétés élastiques locales et de l'interaction entre les phrases constitutives du matériau. Le champ de contrainte microscopique s'écrit :

$$\sigma(x) = \mathbb{C}^s : \mathbb{A} : \mathbb{E} - \mathbb{C}^s : \mathbb{A}^* p \quad (1.7)$$

où $\mathbb{C}^s$ est le tenseur de rigidité du domaine solide, $A = A_{ijkl}$ est le tenseur de localisation en déformation d'ordre quatre. $A^* = A_{pq}^* = \delta_{pq} A_{ijpq}$ est le tenseur de localisation en déformation du deuxième ordre. La moyenne du champ de contrainte dans Ω est :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \left(\int_{V_s} \sigma dV + \int_{V_p} -p \mathbb{I} dV \right) = (1 - \varphi) \langle \sigma \rangle^s - \varphi p \mathbb{I} \quad (1.8)$$

où $\langle \sigma \rangle^s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} \sigma dV$ est la moyenne du champ de contrainte dans le domaine solide. En introduisant (1.7) dans (1.8), Σ peut s'écrire sous la forme [37, 38] :

$$\Sigma = \langle \mathbb{C}_{ijkl} : \mathbb{A}_{pqkh} : \bar{\varepsilon}_{kh} \rangle = \tilde{\mathbb{C}} : \mathbb{E} - p \mathbb{B} \quad (1.9)$$

où $\mathbb{B}$ est le tenseur de Biot [39].

Dans le cas de pores secs ($p = 0$), la relation (1.9) s'écrit pour un milieu poreux sec :

$$\Sigma = \tilde{\mathbb{C}} : \mathbb{E} \quad (1.10)$$

avec $\tilde{\mathbb{C}}$ la raideur macroscopique qui est donnée par :

$$\tilde{\mathbb{C}} = (1 - \varphi) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle^s = \mathbb{C}^s (\mathbb{I} - \varphi \langle \mathbb{A} \rangle^p) \quad (1.11)$$

où $\langle \mathbb{A} \rangle^p$ est la moyenne du tenseur de localisation de déformation $\mathbb{A}$ dans les pores secs. Le problème d'Eshelby définit le tenseur de Hill $\mathbb{P}^0$ dans le cas de pores ellipsoïdaux parallèles (voir par exemple [37]) :

$$\mathbb{P}^0 = \mathbb{S}_E : \mathbb{C}_0^{-1} = \mathbb{S}_E : \mathbb{S}^0 \quad (1.12)$$

où $\mathbb{S}^0$ et $\mathbb{C}_0$ sont respectivement les tenseurs de souplesse et de rigidité du milieu infini. $\mathbb{S}_E$ est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur d'Eshelby qui dépend de la forme ellipsoïdale et de l'orientation des pores et de $\mathbb{C}_0$.

On note que :

$$\langle \mathbb{A} \rangle^p = [\mathbb{I} - \mathbb{S}_E]^{-1} \quad (1.13)$$

Si la matrice est un matériau isotrope élastique, $\mathbb{C}_0$ peut être écrit sous la forme :

$$\mathbb{C}_0 = 3k_0 \mathbb{J} + 2\mu_0 \mathbb{K} \quad (1.14)$$

où k_0 , μ_0 sont les modules de compressibilité et de cisaillement du milieu; $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \otimes \delta_{ij}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ sont les projections sur les espaces des tenseurs d'ordre quatre isotropes et

déviatoriques respectivement (voir aussi l'annexe (A.1)).

Dans le cas de pores ellipsoïdaux, $\mathbb{S}_E$ est isotrope transverse. Les composantes du tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}_E$ pour un ellipsoïde cylindrique ($a_3 \rightarrow \infty$) et aplati, sont données respectivement dans les annexes (B.1) et (B.2). Dans ce cas, le tenseur de Hill $\mathbb{P}^0$ (voir (1.12)) est isotrope transverse.

Dans le cas de pores sphériques, $\mathbb{P}^0$ est isotrope parce que $\mathbb{S}_E$ s'écrit dans la base $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$ [37] comme suit :

$$\mathbb{S}_E = \alpha_0 \mathbb{J} + \beta_0 \mathbb{K} \quad (1.15)$$

où les coefficients α_0 et β_0 sont donnés par :

$$\alpha_0 = \frac{3k_0}{3k_0 + 4\mu_0}, \quad \beta_0 = \frac{6(k_0 + 2\mu_0)}{5(3k_0 + 4\mu_0)} \quad (1.16)$$

Si on considère une pression non nulle dans les pores ($p \neq 0$), il faudra prendre en compte l'effet du tenseur de Biot $\mathbb{B}$ donné par :

$$\mathbb{B} = (1 - \varphi) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A}^* \rangle^s + \varphi \mathbb{I} \quad (1.17)$$

On s'intéresse maintenant à la technique d'homogénéisation d'un milieu micro-fissuré sec en se basant sur la théorie d'Eshelby. Le tenseur des rigidités correspondant au cas isotrope transverse d'axe y_1 a cinq constantes indépendantes et est le suivant :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

On suppose que les pores sont ellipsoïdaux aplatis selon la direction e_3 ($a_1 = a_2 = l \gg a_3 = c$) avec la même orientation et la même forme. L'équation de la section transversale est donnée dans l'annexe (B.3). Le tenseur $\mathbb{S}_E$ dans la base de Walpole (cf. Annexe (A.2)) s'écrit (cf. (B.5)) :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_E = & \frac{3}{8(1 - \nu^m)} \pi X \mathbb{E}_1 + \left(1 - \frac{1 - 2\nu^m}{4(1 - \nu^m)} \pi X \right) \mathbb{E}_2 + \frac{7 - 8\nu^m}{16(1 - \nu^m)} \pi X \mathbb{E}_3 \\ & + \left(1 + \frac{\nu^m - 2}{4(1 - \nu^m)} \pi X \right) \mathbb{E}_4 + \frac{\nu^m}{1 - \nu^m} \left(1 - \frac{4\nu^m + 1}{8\nu^m} \pi X \right) \mathbb{E}_5 + \left(1 - \frac{2\nu^m - 1}{8(1 - \nu^m)} \pi X \right) \mathbb{E}_6 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Comme le rapport d'aspect de forme de porosité est infiniment petit $X \ll 1$, on peut appliquer le résultat d'Eshelby pour le problème d'un milieu microfissuré en prenant la limite quand X tend vers 0 [40]. Comme :

$$\lim_{X \rightarrow 0} \langle \mathbb{A} \rangle^p = \lim_{X \rightarrow 0} [\mathbb{I} - \mathbb{S}_E(X)]^{-1} = \infty, \quad (1.20)$$

on utilise alors plutôt la limite de la quantité $X[\mathbb{I} - \mathbb{S}_E(X)]^{-1}$. Le tenseur de concentration de déformation de la fissure est déduit de la relation :

$$\lim_{X \rightarrow 0} X[\mathbb{I} - \mathbb{S}_E(X)]^{-1} = \mathbb{T}(n) \quad (1.21)$$

Comme $\mathbb{S}_E$ est isotrope transverse, le tenseur $\mathbb{T}(n)$ est un tenseur isotrope transverse par rapport à la direction normale à la fissure (i.e. $\vec{e}_3$) qui s'écrit dans la base de Walpole sous la forme (voir [37, 40, 41]) :

$$\mathbb{T}(n) = \frac{4(1 - \nu^m)}{\pi} \left(\frac{1 - \nu^m}{1 - 2\nu^m} \mathbb{E}_2(n) + \frac{1}{1 - 2\nu^m} \mathbb{E}_4(n) + \frac{\nu^m}{1 - 2\nu^m} \mathbb{E}_5(n) \right) \quad (1.22)$$

Partant de la solution du problème d'Eshelby (1.11), on rappelle dans la suite les estimations du tenseur de rigidité homogénéisé obtenu par les estimations de la solution diluée (*DL*), de la méthode auto-cohérente (*AC*), de Mori-Tanaka (*MT*) ainsi que de l'approche de Ponte-Castañeda et Willis (*PCW*) qui sont bien connues dans la littérature.

Schéma dilué (DL)

Pour cette solution, on considère un milieu constitué de N_p pores de formes identiques et d'orientations parallèles avec des interactions négligeables entre les pores. Ainsi, l'estimation du tenseur de localisation pour chaque pore se fait en considérant que $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}_0$. Dans le cas de l'approche en déformation, le domaine Ω est soumis à la même condition au contour $\partial\Omega$: $\mathbb{E}^m = \mathbb{E}$. L'estimation pour le milieu initial s'obtient en superposant les estimations obtenues pour toute la famille de pores. Le tenseur de rigidité effective est donné par :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \sum_{r=m,i} \varphi^r \mathbb{C}^r : \langle \mathbb{A} \rangle^r \quad (1.23)$$

où r est l'indice qui désigne la phase r (m pour matrice et p pour pore). Notons que $\langle \mathbb{A} \rangle = \sum_{r=m,i} \varphi^r \langle \mathbb{A} \rangle^r = \mathbb{I}$. L'équation (1.11) conduit à l'expression suivante du tenseur de rigidité effective selon l'estimation DL :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{DL} = \mathbb{C}_d^m (\mathbb{I} - \varphi \langle \mathbb{A} \rangle^p) \quad (1.24)$$

où $\mathbb{C}_d^m = 3k_d^m \mathbb{J} + 2\mu_d^m \mathbb{K}$ est le tenseur de rigidité du milieu sec avec k_d^m et μ_d^m les modules de compressibilité et de cisaillement du milieu sec.

Dans la suite, plusieurs distributions de porosité (isotrope, isotrope transverse) et de microfissures avec ou sans porosité peuvent être considérées. Pour chacun de ces cas, les estimations des modules effectifs selon le modèle DL seront fournies.

Distribution isotrope de pores sphériques :

En introduisant (1.13) et (1.15) dans (1.24), les modules de compressibilité et de cisaillement homogénéisés pour un milieu isotrope avec des pores sphériques s'écrivent [37] :

$$\tilde{k}_{p-iso}^{DL} = k_d^m \left[1 - \varphi \left(1 + \frac{3k_d^m}{4\mu_d^m} \right) \right], \quad \tilde{\mu}_{p-iso}^{DL} = \mu_d^m \left[1 - 5\varphi \frac{3k_d^m + 4\mu_d^m}{9k_d^m + 8\mu_d^m} \right] \quad (1.25)$$

On note que :

$$\tilde{\nu}_{p-iso}^{DL} = \frac{3\tilde{k}_{p-iso}^{DL} - 2\tilde{\mu}_{p-iso}^{DL}}{2(3\tilde{k}_{p-iso}^{DL} + \tilde{\mu}_{p-iso}^{DL})} \quad (1.26)$$

Dans ce cas, $\varphi = \phi_p$. Les modules effectifs sont :

$$\frac{E_0}{\tilde{E}_{p-iso}^{DL}} = 1 + \phi_p \frac{3(1 - \nu_d^m)[9 - 10\nu_d^{m2} - \nu_d^m(13 - 15\phi_p) - 15\phi_p]}{[2 - 3p + \nu_d^m(-4 + 3\phi_p)][7 - 15\phi_p + 5\nu_d^m(-1 + 3\phi_p)]} \quad (1.27)$$

$$\frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_{p-iso}^{DL}} = 1 + \phi_p \frac{15(1 - \nu_d^m)}{[7 - 15\phi_p + 5\nu_d^m(-1 + 3\phi_p)]} \quad (1.28)$$

Distribution isotrope transverse de microfissures :

On pose la densité de fissures comme suit :

$$d_c = Nl^3 \quad (1.29)$$

où N est le nombre de fissures par unité de volume. Si φ est la fraction volumique des fissures définie par $\varphi = \frac{4\pi}{3}d_cX$, alors, la relation (1.21) s'écrit :

$$\varphi \langle \mathbf{A} \rangle^p = \frac{4\pi}{3}d_c\mathbb{T}(n) \quad (1.30)$$

qui s'écrit aussi dans la base de Walpole sous la forme :

$$\varphi \langle \mathbf{A} \rangle^p = \frac{16(1 - \nu^m)d_c}{3} \left(\frac{1 - \nu^m}{1 - 2\nu^m}\mathbb{E}_2(n) + \frac{1}{2 - \nu^m}\mathbb{E}_4(n) + \frac{\nu^m}{1 - 2\nu^m}\mathbb{E}_5(n) \right) \quad (1.31)$$

pour un tenseur de rigidité du matériau sain de la forme :

$$\mathbb{C}_d^m = \frac{2\mu_d^m}{1 - 2\nu_d^m} [\mathbb{E}_1 + (1 - \nu_d^m)\mathbb{E}_2 + (1 - 2\nu_d^m)(\mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) + \nu_d^m(\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6)] \quad (1.32)$$

Les relations (1.24), (1.31) et (1.32) permettent de déduire le tenseur de rigidité effective du matériau endommagé :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{DL} = \sum_{i=1}^6 c_i^{DL} \mathbb{E}_i \quad (1.33)$$

avec [40] :

$$c_1^{DL} = \frac{2\mu_d^m}{1 - 2\nu_d^m} \left(1 + \frac{32\nu_d^{m2}(\nu_d^m - 1)d_c}{3(1 - 2\nu_d^m)} \right), \quad c_2^{DL} = \frac{2\mu_d^m(1 - \nu_d^m)}{1 - 2\nu_d^m} \left(1 - \frac{16(\nu_d^m - 1)^2d_c}{3(1 - 2\nu_d^m)} \right)$$

$$c_3^{DL} = 2\mu_d^m, \quad c_4^{DL} = 2\mu_d^m \left(1 - \frac{16(\nu_d^m - 1)d_c}{3(1 - 2\nu_d^m)} \right), \quad c_5^{DL} = c_6^{DL} = \frac{2\mu_d^m\nu_d^m}{1 - 2\nu_d^m} \left(1 - \frac{16(\nu_d^m - 1)^2d_c}{3(1 - 2\nu_d^m)} \right)$$

La référence [42] permet d'obtenir les modules d'Young $\tilde{E}_3$ dans la direction perpendiculaire au plan de fissures, $\tilde{E}_1$ et $\tilde{E}_2$ dans les directions du plan de fissures, le coefficient de Poisson et les modules de cisaillement correspondants aux équations (A.13), (A.14) et (A.15) de l'annexe (A.2) :

$$\tilde{E}_3 = c_2 - \frac{2c_5^2}{c_1}, \quad \tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 = \frac{2c_3(c_1c_2 - 2c_5^2)}{(c_1 + c_3)c_2 - 2c_5^2}, \quad \tilde{\nu}_{31} = \frac{c_5}{c_1}, \quad \tilde{\mu}_{12} = \frac{c_3}{2}, \quad \tilde{\mu}_{23} = \frac{\tilde{E}_3}{2(1 + \tilde{\nu}_{23})}$$

Alors les paramètres de l'estimation diluée sont :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3^{DL} &= E_d^m \frac{3(2\nu_d^m - 1) + 16(1 - \nu_d^m)^2 d_c}{3(2\nu_d^m - 1) + 32\nu_d^{m2}(1 - \nu_d^m)d_c}, & \tilde{\nu}_{31}^{DL} &= \nu_d^m \frac{3(2\nu_d^m - 1) + 16(1 - \nu_d^m)^2 d_c}{3(2\nu_d^m - 1) + 32\nu_d^{m2}(1 - \nu_d^m)d_c} \\ \tilde{E}_1^{DL} &= E_2^{DL} = E_d^m, & \tilde{\mu}_{12}^{DL} &= \mu_d^m, & \tilde{\mu}_{23}^{DL} &= \mu_d^m \frac{3(2\nu_d^m - 1) + 16(1 - \nu_d^m)^2 d_c}{3(2\nu_d^m - 1) + 16\nu_d^m(1 - \nu_d^m)d_c} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ils respectent bien l'égalité :

$$\tilde{\nu}_{31}^{DL} / \tilde{E}_3^{DL} = \nu_d^m / E_d^m \quad (1.35)$$

Le tenseur de souplesse du milieu avec des microfissures sèches est :

$$S_{DL}^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_d^m} & -\frac{\nu_d^m}{E_d^m} & -\frac{\nu_d^m}{E_d^m} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_d^m}{E_d^m} & \frac{1}{E_d^m} & -\frac{\nu_d^m}{E_d^m} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_d^m}{E_d^m} & -\frac{\nu_d^m}{E_d^m} & \frac{1}{E_d^m} + Z_N^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_d^m} + Z_T^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_d^m} + Z_T^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_d^m} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

où

$$Z_N^d = \frac{16d_c}{E_d^m} \cdot \frac{(1 - \nu_d^m)(1 + \nu_d^m)(2\nu_d^m - 1)}{3(2\nu_d^m - 1) + 16(1 - \nu_d^m)^2 d_c}, \quad Z_T^d = \frac{16d_c}{\mu_d^m} \cdot \frac{(1 - \nu_d^m)(2\nu_d^m - 1)}{3(2\nu_d^m - 1) + 16(1 - \nu_d^m)^2 d_c} \quad (1.37)$$

L'indice 'd' est donné pour la situation 'sèche' et saine. On trouve que $Z_T^d = 2Z_N^d$.

Cas de fissures parallèles avec des pores sphériques :

Nous proposons une estimation du comportement homogénéisé du milieu poreux avec fissures parallèles en couplant le schéma DL et le processus itératif d'homogénéisation diluée. Tout d'abord, on a un matériau poreux homogénéisé dont les modules effectifs sont indiqués dans (1.27). Ensuite, on applique l'homogénéisation (schéma dilué) sur ce nouveau matériau avec fissures. Le tenseur de souplesse est obtenu en remplaçant E_d^m , μ_d^m et ν_d^m dans (1.36) par $\tilde{E}_{p-iso}^{DL}$, $\tilde{\mu}_{p-iso}^{DL}$ dans (1.27) et $\tilde{\nu}_{p-iso}^{DL}$ dans (1.26), respectivement.

Distribution isotrope de microfissures :

Dans ce cas, $\langle \mathbf{A} \rangle^p$ est la moyenne du tenseur isotrope transverse sur toutes les directions de la normale au plan de fissures et est donnée par la relation suivante :

$$\varphi \langle \mathbf{A} \rangle^p = \frac{4\pi}{3} d_c \langle \mathbb{T}(n) \rangle \quad (1.38)$$

Pour le cas isotrope, [37] a montré que :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_d^m : \left(\mathbb{I} - \frac{4\pi}{3} d_c \langle \mathbb{T}(n) \rangle \right) = \mathbb{C}_d^m : (\mathbb{I} - d_c \mathbb{Q}) \quad (1.39)$$

où

$$\mathbb{Q} = \frac{4\pi}{3} \langle \mathbb{T} \rangle = Q_1 \mathbb{J} + Q_2 \mathbb{K} \quad (1.40)$$

avec [37] :

$$Q_1 = \frac{16(1 - \nu_d^m)}{9(1 - 2\nu_d^m)}, \quad Q_2 = \frac{32(1 - \nu_d^m)(5 - \nu_d^m)}{45(2 - \nu_d^m)} \quad (1.41)$$

En introduisant (1.40) dans (1.39), on peut déduire les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs comme suit :

$$\tilde{k}_{f-iso}^{DL} = k_d^m(1 - Q_1 d_c), \quad \tilde{\mu}_{f-iso}^{DL} = \mu_d^m(1 - Q_2 d_c) \quad (1.42)$$

ou bien :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{f-iso}^{DL} = \mathbb{C}_d^m(1 - Q d_c) \quad (1.43)$$

Le tenseur de souplesse du milieu avec des microfissures sèches est isotrope :

$$\mathbf{S}_{df}^m = \frac{1}{3\tilde{k}^{DL}} \mathbb{J} + \frac{1}{2\tilde{\mu}^{DL}} \mathbb{K} \quad (1.44)$$

Les expressions des modules effectifs sont :

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\tilde{E}_{f-iso}^{DL}} &= 1 + \frac{16d_c(1 - \nu_d^m)[32d_c(5 - \nu_d^m)(1 - \nu_d^m) - 9(1 - 2\nu_d^m)(10 - 3\nu_d^m)]}{[9 - 18\nu_d^m - 16d_c(1 - \nu_d^m)][45(-2 + \nu_d^m) + 32d_c(5 - \nu_d^m)(1 - \nu_d^m)]} \\ \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_{f-iso}^{DL}} &= 1 + \frac{32d_c(5 - \nu_d^m)(1 - \nu_d^m)}{45(2 - \nu_d^m) - 32d_c(5 - \nu_d^m)(1 - \nu_d^m)} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Cas de fissures aléatoires avec des pores sphériques :

Dans ce cas, on applique aussi le processus itératif d'homogénéisation du schéma dilué avec la prise en compte de (1.45), (1.27), et en remplaçant ν_d^m dans (1.45) par $\tilde{\nu}_{p-iso}^{DL}$ dans (1.26).

Schéma de Mori-Tanaka (MT)

Le schéma de MT permet de prendre en compte les interactions entre pores (même si la densité de pores est faible) [43]. Ici, on considère que chaque pore est entouré de la phase solide (matrice) de module $\mathbb{C}^m$ soumise à l'infini à une déformation moyenne $\mathbb{E}^0 = \langle \varepsilon \rangle^m$. La solution du problème d'homogénéisation nous permet d'écrire :

$$\mathbb{E}^0 = \langle \mathbb{A} \rangle^{MT} \mathbb{E} \quad (1.46)$$

avec

$$\langle \mathbb{A} \rangle^{MT} = [(1 - \varphi)\mathbb{I} + \varphi \langle \mathbb{A} \rangle^p]^{-1} \quad (1.47)$$

À partir de ces équations et de (1.23), le tenseur de rigidité effective s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{C}}^{MT} = (1 - \varphi)\mathbb{C}_d^m[(1 - \varphi)\mathbb{I} + \varphi \langle \mathbb{A} \rangle^p]^{-1} = (1 - \varphi)\mathbb{C}_d^m : \mathbb{H} \quad (1.48)$$

où :

$$\mathbb{H} = [(1 - \varphi)\mathbb{I} + \varphi \langle \mathbb{A} \rangle^p]^{-1} \quad (1.49)$$

Dans la suite, on envisage différentes distributions de pores et/ou de fissures.

Distribution isotrope des pores sphériques :

Les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs estimés par ce schéma s'écrivent :

$$\tilde{k}_{p-iso}^{MT} = k_d^m \frac{4(1 - \varphi)\mu_d^m}{3\varphi k_d^m + 4\mu_d^m}, \quad \tilde{\mu}_{p-iso}^{MT} = \mu_d^m \frac{(1 - \varphi)(9k_d^m + 8\mu_d^m)}{9k_d^m(1 + 2\varphi/3) + 8\mu_d^m(1 + 3\varphi/2)} \quad (1.50)$$

On note que :

$$\tilde{\nu}_{p-iso}^{MT} = \frac{3\tilde{k}_{p-iso}^{MT} - 2\tilde{\mu}_{p-iso}^{MT}}{2(3\tilde{k}_{p-iso}^{MT} + \tilde{\mu}_{p-iso}^{MT})} \quad (1.51)$$

Les expressions des modules effectifs sont :

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\tilde{E}_{p-iso}^{MT}} &= 1 + \frac{\phi_p}{1 - \phi_p} \frac{3(1 - \nu_d^m)(9 + 5\nu_d^m)}{2(7 - 5\nu_d^m)} \\ \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_{p-iso}^{MT}} &= 1 + \frac{\phi_p}{1 - \phi_p} \frac{15(1 - \nu_d^m)}{(7 - 5\nu_d^m)} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Distribution isotrope transverse de microfissures :

La limite de la rigidité $\tilde{\mathbb{C}}_{MT}$ quand le rapport d'aspect de forme des ellipses $X \rightarrow 0$ conduit en particulier à $\varphi \rightarrow 0$ et comme $\varphi = \frac{4\pi d_c X}{3}$ alors le tenseur de rigidité effective s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{C}}^{MT} = \mathbb{C}_d^m : \mathbb{H} \quad (1.53)$$

Dans la base de Walpole :

$$\tilde{\mathbb{C}}^{MT} = \sum_1^6 c_i^{MT} \mathbb{E}_i \quad (1.54)$$

En introduisant (1.31) et (1.49) dans (1.48), on obtient [40] :

$$\begin{aligned} c_1^{MT} &= \frac{2\mu_d^m [3 + 16d_c(1 - \nu_d^{m2})]}{16d_c(1 - \nu_d^m)^2 + 3(1 - 2\nu_d^m)}, \quad c_2^{MT} = \frac{6\mu_d^m(1 - \nu_d^m)}{16d_c(1 - \nu_d^m)^2 + 3(1 - 2\nu_d^m)} \\ c_3^{MT} &= 2\mu_d^m, \quad c_4^{MT} = \frac{6\mu_d^m(1 - 2\nu_d^m)}{16d_c(1 - \nu_d^m) - 3(1 - 2\nu_d^m)}, \\ c_5^{MT} &= c_6^{MT} = \frac{6\mu_d^m\nu_d^m}{16d_c(1 - \nu_d^m)^2 + 3(1 - 2\nu_d^m)} = \frac{\nu_d^m}{(1 - \nu_d^m)} c_2^{MT} \end{aligned}$$

Les modules et coefficient de Poisson correspondants sont :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3^{MT} &= E_d^m \frac{3}{3 + 16(1 - \nu_d^{m2})d_c}, \quad \tilde{\nu}_{31}^{MT} = \nu_d^m \frac{3}{3 + 16(1 - \nu_d^{m2})d_c} \\ \tilde{E}_1^{MT} &= E_2^{DL} = E_d^m, \quad \tilde{\mu}_{12}^{MT} = \mu_d^m, \quad \tilde{\mu}_{23}^{MT} = \mu_d^m \frac{3}{3 + 16(1 - \nu_d^m)d_c} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Ils respectent bien l'égalité :

$$\tilde{\nu}_{31}^{MT} / \tilde{E}_3^{MT} = \nu_d^m / E_d^m \quad (1.56)$$

La relation (1.36) avec (1.55) permet d'identifier les paramètres Z_N^d et Z_T^d pour le modèle de MT :

$$Z_N^d = \frac{16d_c}{3E_d^m}(1 - \nu_d^m)(1 + \nu_d^m), \quad Z_T^d = \frac{16d_c(1 - \nu_d^m)}{3\mu_d^m} \quad (1.57)$$

On note que : $Z_T^d = 2Z_N^d$.

Cas de fissures parallèles avec des pores sphériques :

Dans ce cas, l'équation (1.52) donne les modules effectifs du matériau poreux homogénéisé. Appliquons ensuite (1.55) sur ce nouveau matériau, on obtient les modules du matériau poreux et fissuré où E_d^m , μ_d^m et ν_d^m sont remplacés respectivement par $\tilde{E}_{p-iso}^{MT}$ et $\tilde{\mu}_{p-iso}^{MT}$ dans (1.52) et $\tilde{\nu}_{p-iso}^{MT}$ dans (1.51).

Distribution isotrope de microfissures :

Dans ce cas, (1.49) devient :

$$\mathbb{H} = [(1 - \varphi)\mathbb{I} + d_c\mathbb{Q}]^{-1} \quad (1.58)$$

où $\mathbb{Q}$ est donné par (1.41). Les modules effectifs sont :

$$\tilde{k}_{f-iso}^{MT} = \frac{k_d^m}{1 + d_c Q_1}, \quad \tilde{\mu}_{f-iso}^{MT} = \frac{\mu_d^m}{1 + d_c Q_2} \quad (1.59)$$

ou bien :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{f-iso}^{MT} = \frac{\mathbb{C}_d^m}{(1 + \mathbb{Q}d_c)} \quad (1.60)$$

où $\mathbb{Q}$ est défini par (1.40). Autrement, les expressions des modules dans ce cas sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\tilde{E}_{f-iso}^{MT}} &= 1 + \frac{16d_c(1 - \nu_d^{m2})(10 - 3\nu_d^m)}{45(-2 + \nu_d^m)} \\ \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_{f-iso}^{MT}} &= 1 + \frac{32d_c(5 - \nu_d^m)(1 - \nu_d^m)}{45(2 - \nu_d^m)} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Cas de fissures aléatoires avec des pores sphériques :

Dans ce cas, dans un premier temps, l'équation (1.52) donne les modules effectifs du matériau poreux homogénéisé. Appliquons ensuite (1.61) sur ce nouveau matériau homogénéisé, on obtient les modules effectifs du matériau poreux et fissuré. E_d^m , μ_d^m et ν_d^m dans (1.61) sont maintenant remplacés par $\tilde{E}_{p-iso}^{MT}$, $\tilde{\mu}_{p-iso}^{MT}$ dans (1.52) et $\tilde{\nu}_{MT}$ dans (1.51), respectivement.

Schéma auto-cohérent (AC)

L'idée du schéma auto-cohérent, classiquement bien adapté au milieu polycristalin, consiste à supposer que ni la phase solide, ni l'espace poreux ne peuvent être considérés comme la matrice mais que chaque phase réagit comme si elle était disposée dans le milieu homogène équivalent. Ce modèle consiste à placer les grains de la phase considérée dans un milieu homogène équivalent soumis à une contrainte ou à une déformation macroscopique. On affecte alors au milieu homogène équivalent, les propriétés mécaniques effectives du matériau recherché. La phase est donc plongée dans le milieu qui constitue la matrice. Cette méthode prend donc en compte, de manière indirecte, les interactions entre les pores. Toutefois, l'estimation qu'elle donne des caractéristiques mécaniques de la matrice est dans certains cas forcément "sur-évaluée" puisque, dans la réalité, la phase au sein du matériau est entourée d'un certain volume de matrice. La rigidité effective prévue par le schéma AC est $\tilde{\mathbb{C}}^{ac} = \mathbb{C}^0$.

Considérons un milieu microfissuré avec une distribution isotrope des pores sphériques. Avec la relation de moyenne (1.23) et puisque $\langle \mathbb{A}^{ac} \rangle = \mathbb{I}$ est aussi valable pour un milieu poreux avec des pores sphériques, alors :

$$\langle \mathbb{A}^{ac} \rangle = \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{ac} : (\mathbb{C} - \tilde{\mathbb{C}}^{ac})]^{-1} \right\rangle^{-1} = \mathbb{I} \quad (1.62)$$

Cette expression n'est pas explicite car elle fait intervenir l'inconnu $\tilde{\mathbb{C}}^{ac}$. Ce dernier peut s'écrire sous la forme (cf. (1.62)) :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}}^{ac} &= (1 - \varphi) \mathbb{C}_d^m : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{ac} : (\tilde{\mathbb{C}}_d^m - \tilde{\mathbb{C}}^{ac})]^{-1} : \\ &\quad \left\{ (1 - \varphi) [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{ac} : (\mathbb{C}_d^m - \tilde{\mathbb{C}}^{ac})]^{-1} + \varphi [\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{ac}]^{-1} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (1.63)$$

ou encore (cf. (1.63)) :

$$(1 - \varphi)(\mathbb{C}_d^m - \tilde{\mathbb{C}}^{ac}) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{ac} : (\mathbb{C}_d^m - \tilde{\mathbb{C}}^{ac})]^{-1} - \varphi \tilde{\mathbb{C}}^{ac} [\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{ac}]^{-1} = 0 \quad (1.64)$$

Pour le cas de pores secs sphériques, le tenseur $\mathbb{P}^{ac}$ pour un milieu isotrope s'écrit dans la base $\mathbb{J}, \mathbb{K}$ sous la forme :

$$\mathbf{P}^{ac} = \frac{\alpha^{ac}}{3k^{ac}} \mathbb{J} + \frac{\beta^{ac}}{2\mu^{ac}} \mathbb{K} \quad (1.65)$$

où

$$\alpha^{ac} = \frac{3k^{ac}}{3k^{ac} + 4\mu^{ac}}, \quad \beta^{ac} = \frac{6(k^{ac} + 2\mu^{ac})}{5(3k^{ac} + 4\mu^{ac})} \quad (1.66)$$

L'équation (1.64) peut être projetée sur la base $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$ et conduit à un système de deux équations où $\tilde{k}_{ac}$ et $\tilde{\mu}_{ac}$ sont les solutions de ce système.

$$\begin{cases} \tilde{k}^{ac} = k_d^m \frac{1 - \varphi}{1 + \alpha^{ac}(k_d^m - \tilde{k}^{ac})/\tilde{k}^{ac}} \cdot \frac{1}{(1 - \varphi)[1 + \alpha^{ac}(k_d^m - \tilde{k}^{ac})/\tilde{k}^{ac}]^{-1} + \varphi[1 - \alpha^{ac}]^{-1}} \\ \tilde{\mu}^{ac} = \mu_d^m \frac{1 - \varphi}{1 + \beta^{ac}(\mu_d^m - \tilde{\mu}^{ac})/\tilde{\mu}^{ac}} \cdot \frac{1}{(1 - \varphi)[1 + \beta^{ac}(\mu_d^m - \tilde{\mu}^{ac})/\tilde{\mu}^{ac}]^{-1} + \varphi[1 - \beta^{ac}]^{-1}} \end{cases} \quad (1.67)$$

Même si les pores sont sphériques, les relations (1.67) ne sont pas indépendantes car $\tilde{k}^{ac}$ et $\tilde{\mu}^{ac}$ dépendent aussi des modules homogénéisés (cf. (1.66)). Dans le cas d'un milieu poreux sec, (1.67) peut être résolue :

$$\tilde{k}^{ac} = \frac{4\tilde{\mu}^{ac}k_d^m(1-\varphi)}{3\varphi k_d^m + 4\tilde{\mu}^{ac}} \quad (1.68)$$

où $\tilde{\mu}^{ac}$ est la solution de l'équation du second degré suivante :

$$8\mu^2 - \mu[(8-20\varphi)\mu_d^m - (9-3\varphi)k_d^m] - (9-18\varphi)k_d^m = 0 \quad (1.69)$$

C'est pourquoi on ne considère plus ce schéma lorsque le niveau d'endommagement est élevé.

Approche de Ponte-Castañeda et Willis (PCW)

L'estimation de PCW conduit facilement à la formule des modules effectifs lorsqu'elle choisit la matrice comme milieu de référence, puisqu'avec un tel choix on n'a plus à se soucier du tenseur $\mathbb{P}_d$. Les modules effectifs de PCW s'écrivent [38, 42, 44] :

$$\tilde{\mathbb{C}}^{PCW} = \mathbb{C}_d^m - (\mathbb{I} + \mathbb{C}_d^m : \varphi \langle \mathbf{A} \rangle^p : \mathbb{P}_d)^{-1} : \mathbb{C}_d^m : \varphi \langle \mathbf{A} \rangle^p \quad (1.70)$$

où $\langle \mathbf{A} \rangle^p$ est défini par (1.13). On note que $\mathbb{P}_d = \mathbb{S}_{Ed}\mathbb{S}^m$ est le tenseur lié à un ellipsoïde plongé dans un milieu élastique $\mathbb{C}_d^m$. $\mathbb{S}_{Ed}$ est le tenseur d'Eshelby (voir (B.1)) des pores plongés dans le milieu. Le tenseur $\mathbb{P}_d$ de distribution est calculé en fonction de k_d^m , μ_d^m et les rapports w_d , w (qui sont les rapports d'aspects de forme de la cellule extérieure et du pore ellipsoïdal intérieur, respectivement). C'est-à-dire, les pores sont supposés être de forme sphéroïdale, avec un rapport d'aspect w où $w \leq 1$ pour la forme aplatie (cf. figure (1.4)-a) et $w \geq 1$ pour la forme allongée (cf. figure (1.4)-b). Afin d'éviter l'interpénétration des pores, w_d doit suivre les conditions suivantes : $\sqrt{\varphi}.w \leq w_d < w$ pour les pores horizontaux (cf. figure (1.4)-c), $w/\varphi \geq w_d > w$ pour les pores verticaux (cf. figure (1.4)-d) et $w_d = 1$ pour la distribution aléatoire (cf. figure (1.4)-e).

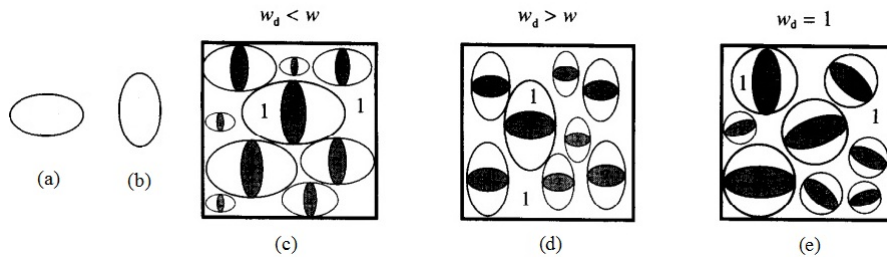


FIGURE 1.4 – Pore de forme aplatie (a), pore de forme allongée (b), distribution isotrope transverse de pores ellipsoïdaux selon la direction horizontale (c), verticale (d) et distribution isotrope de pores ellipsoïdaux (e) d'après [42].

Distribution isotrope des pores sphériques :

Pour les pores sphériques, on a $w_d = 1$ et d'après [42], le tenseur $\mathbb{P}_d$ s'écrit :

$$\mathbb{P}_d = \frac{\alpha_d^m}{3k_d^m} \mathbb{J} + \frac{\beta_d^m}{2\mu_d^m} \mathbb{K} \quad (1.71)$$

où α_d^m et β_d^m sont donnés par :

$$\alpha_d^m = \frac{1 + \nu_d^m}{3(1 - \nu_d^m)}, \quad \beta_d^m = \frac{2(4 - 5\nu_d^m)}{15(1 - \nu_d^m)} \quad (1.72)$$

En introduisant (1.71) et (1.13) dans (1.70), on obtient :

$$\tilde{k}_{p-iso}^{PCW} = k_d^m \frac{2(-1 + 2\nu_d^m) + 2(2 - \nu_d^m)\varphi}{2(-1 + 2\nu_d^m) + (1 + \nu_d^m)\varphi}, \quad \tilde{\mu}_{p-iso}^{PCW} = \mu_d^m \frac{(7 - 5\nu_d^m) + (-23 + 25\nu_d^m)\varphi}{(7 - 5\nu_d^m) + 2(-4 + 5\nu_d^m)\varphi} \quad (1.73)$$

On note aussi que :

$$\tilde{\nu}_{p-iso}^{PCW} = \frac{3\tilde{k}_{p-iso}^{PCW} - 2\tilde{\mu}_{p-iso}^{PCW}}{2(3\tilde{k}_{p-iso}^{PCW} + \tilde{\mu}_{p-iso}^{PCW})} \quad (1.74)$$

Dans ce cas, $\varphi = \phi_p$. Les modules effectifs sont :

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\tilde{E}_{p-iso}^{PCW}} &= 1 + \phi_p \frac{3(1 - \nu_d^m)[9 - 10\nu_d^m(1 + \phi_p) - \nu_d^m(13 - 17\phi_p) - 21\phi_p]}{2[1 - 2p + \nu_d^m(-2 + \phi_p)][7 - 23\phi_p + 5\nu_d^m(-1 + 5\phi_p)]} \\ \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_{p-iso}^{PCW}} &= 1 + \phi_p \frac{15(1 - \nu_d^m)}{[7 - 23\phi_p + 5\nu_d^m(-1 + 5\phi_p)]} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Distribution isotrope transverse de microfissures :

Dans la base de Walpole, $\mathbb{P}_d^m$ s'écrit :

$$\mathbb{P}_d^m = \frac{1}{30\mu_d^m(1 - \nu_d^m)} [2(3 - 5\nu_d^m)\mathbb{E}_1 + (7 - 10\nu_d^m)\mathbb{E}_2 + 2(4 - 5\nu_d^m)(\mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) - (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6)] \quad (1.76)$$

Dans la base de Walpole :

$$\tilde{\mathbb{C}}^{PCW} = \sum_1^6 c_i^{PCW} \mathbb{E}_i \quad (1.77)$$

avec

$$\begin{aligned} c_1^{PCW} &= \frac{2\mu_d^m [45 + 16d_c(7 - 15\nu_d^m)]}{16d_c(7 - 14\nu_d^m + 15\nu_d^m) + 45(1 - 2\nu_d^m)} \\ c_2^{PCW} &= \frac{2\mu_d^m(1 - \nu_d^m)(45 - 128d_c)}{16d_c(7 - 14\nu_d^m + 15\nu_d^m) + 45(1 - 2\nu_d^m)} \\ c_3^{PCW} &= 2\mu_d^m, \quad c_4^{PCW} = \frac{2\mu_d^m[45(1 - 2\nu_d^m) + 16d_c(5\nu_d^m - 7)]}{32d_c(4 - 5\nu_d^m) + 45(1 - 2\nu_d^m)} \\ c_5^{PCW} &= c_6^{PCW} = \frac{2\mu_d^m\nu_d^m(45 - 128d_c)}{16d_c(7 - 14\nu_d^m + 15\nu_d^m) + 45(1 - 2\nu_d^m)} = \frac{\nu_d^m}{(1 - \nu_d^m)} c_2^{PCW} \end{aligned}$$

En utilisant les équations (1.31), (A.13), (A.14) et (A.15), on obtient finalement les modules effectifs suivants :

$$\tilde{E}_3^{PCW} = E_d^m \frac{(128d_c - 45)}{16(15\nu_d^m - 7)d_c - 45}, \quad \tilde{\nu}_{31}^{PCW} = \nu_d^m \frac{(128d_c - 45)}{16(15\nu_d^m - 7)d_c - 45}$$

$$\tilde{E}_1^{PCW} = \tilde{E}_2^{DL} = E_d^m, \quad \tilde{\mu}_{12}^{PCW} = \mu_d^m, \quad \tilde{\mu}_{23}^{PCW} = \mu_d^m \frac{128d_c - 45}{16(15\nu_d^m - 7)d_c - 45} \quad (1.78)$$

On trouve aussi que :

$$\tilde{\nu}_{31}^{PCW} / \tilde{E}_3^{PCW} = \nu_d^m / E_d^m \quad (1.79)$$

Les relations (1.78) et la notation (1.36) permettent d'identifier les paramètres Z_N^d et Z_T^d pour le modèle PCW :

$$Z_N^d = \frac{240d_c(1 - \nu_d^m)^2}{E_d^m(128d_c - 45)}, \quad Z_T^d = 2Z_N^d \quad (1.80)$$

Cas de fissures parallèles avec des pores sphériques :

Dans ce cas, l'équation (1.75) donne les modules effectifs du matériau poreux homogénéisé. Appliquons ensuite (1.78) sur ce nouveau matériau, on obtient les modules effectifs du matériau poreux et fissuré. E_d^m , μ_d^m et ν_d^m dans (1.78) sont maintenant remplacés par $\tilde{E}_{p-iso}^{MT}$, $\tilde{\mu}_{p-iso}^{MT}$ dans (1.75) et $\tilde{\nu}_{p-iso}^{PCW}$ dans (1.74), respectivement.

Distribution isotrope de microfissures :

Pour ce cas, en remplaçant $\varphi \langle \mathbf{A} \rangle^i$ par $d_c \mathbb{Q}$ (voir (1.38)) dans (1.70), on obtient les modules de compression et de cisaillement suivants :

$$\tilde{k}_{f-iso}^{PCW} = k_d^m \frac{1 + Q_1(\alpha_d^m - 1)d_c}{1 + Q_1\alpha_d^m d_c}, \quad \tilde{\mu}_{f-iso}^{PCW} = \mu_d^m \frac{1 + Q_2(\beta_d^m - 1)d_c}{1 + Q_2\beta_d^m d_c} \quad (1.81)$$

Autrement, les expressions des modules effectifs sont :

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\tilde{E}_{f-iso}^{PCW}} &= 1 + \frac{d_c \{3k_d^m Q_2[1 + (-1 + \alpha_d^m)d_c Q_1] + \mu_d^m Q_1[1 + (-1 + \beta_d^m)d_c Q_2]\}}{(3k_d^m + \mu_d^m)[1 + (-1 + \alpha_d^m)d_c Q_1][1 + (-1 + \beta_d^m)d_c Q_2]} \\ \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_{f-iso}^{PCW}} &= 1 + \frac{d_c Q_2}{1 + (-1 + \beta_d^m)d_c Q_2} \end{aligned} \quad (1.82)$$

avec α_d^m et β_d^m définis dans (1.72).

Cas de fissures aléatoires avec des pores sphériques :

Dans ce cas, l'équation (1.75) donne les modules effectifs du matériau poreux homogénéisé. Appliquons ensuite (1.82) sur ce nouveau matériau homogénéisé, on obtient les modules du matériau poreux et fissuré. E_d^m , μ_d^m et ν_d^m dans (1.82) sont maintenant remplacés par $\tilde{E}_{p-iso}^{PCW}$, $\tilde{\mu}_{p-iso}^{PCW}$ dans (1.75) et $\tilde{\nu}_{MT}$ dans (1.74), respectivement.

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{fp-iso}^{PCW} &= \frac{2E_0^m[1 + \nu_0^m(-2 + \varphi) - 2\varphi][1 + (-1 + \alpha_d^m)d_c Q_1]}{3(-1 + 2\nu_0^m)[-2 + \varphi + \nu_0^m(4 + \varphi)](1 + \alpha_d^m d_c Q_1)} \\ \tilde{\mu}_{fp-iso}^{PCW} &= \frac{E_0^m[7 + 5\nu_0^m(-1 + 5\varphi) - 23\varphi][1 + (-1 + \beta_d^m)d_c Q_2]}{2(1 + \nu_0^m)[7 - 8\varphi + 5\nu_0^m(-1 + 2\varphi)](1 + \beta_d^m d_c Q_2)} \end{aligned} \quad (1.83)$$

1.2.2 Approche par motif morphologique

Distribution isotrope de microfissures

La notion de Motif Morphologique Représentatif (MMR) est présentée et développée par A. Zaoui et *al.* [45–48] (cf. figure (1.5)). L'idée est qu'un milieu microfissuré est remplacé

par un volume sphérique (cas de fissures aléatoires) ou ellipsoïdal (cas de fissures parallèles) contenant une fissure unique. Ensuite, ce MMR est plongé dans un milieu homogène infini dont les caractéristiques sont celles du milieu sain (schémas de MT). Sous les conditions aux limites en contraintes ou en déformations planes, les calculs numériques basés sur la Méthode des Eléments Finis (MEF) sont réalisés pas à pas en utilisant l'équation incrémentale de la loi de comportement proposée (cas viscoélastique). Le module de compressibilité effectif du milieu microfissuré est estimé par des approches analytiques classiques telles que le schéma dilué (1.42), de Mori Tanaka (1.59), de Ponte Castenada Willis (1.81). [40]

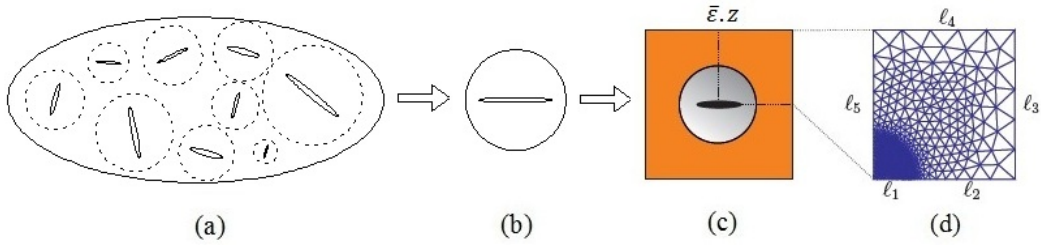


FIGURE 1.5 – Milieu avec des fissures aléatoires (a), MMR (b) et le domaine équivalent de calcul (c) avec le maillage associé (d) d'après [40].

a examiné le milieu microfissuré respectant le modèle viscoélastique effectif de Burgers. Il commence par étudier un milieu élastique microfissuré linéaire où un motif de forme sphérique de rayon R entoure la fissure unique. R satisfait la condition :

$$R^3 = \frac{3l^3}{4\pi d_c}, \quad R > l \quad (1.84)$$

où l est une demi-longueur de fissure. (1.84) donne la valeur maximale de la densité de fissures d_c : $d_c^{max} = 0,238$. Soit Ω un milieu fictif avec une taille suffisamment grande par rapport à la taille du MMR pour éviter les effets de bord. Tout d'abord, on impose un champ de déplacements de la forme $u(x, t) = \bar{\epsilon}_0 \cdot z$ où $\bar{\epsilon}_0 = \bar{\epsilon}_0 \mathbf{i}$. On note que $\bar{\epsilon}_0$ n'est pas égal à $\bar{\epsilon}$ qui est la déformation macroscopique imposée au milieu avec un réseau de fissures. Pour déterminer $\bar{\epsilon}_0$, on suit les démarches indiquées dans [40, 49]. Dans un premier temps, on impose une déformation unitaire sur le bord de Ω . La déformation moyenne est déduite de la relation de moyenne classique corrigée par l'addition d'un terme prenant en compte la déformation des fissures :

$$\bar{\epsilon}_1 = \frac{1}{V} \left(\int_{\Omega_s} \epsilon dV + \sum_i \int_{C_i} [u]_i \otimes^s n_i dS \right) \quad (1.85)$$

où Ω_s est le domaine occupé par la phase solide saine (sans fissures) et $a \otimes^s b = \frac{a \otimes b + b \otimes a}{2}$ pour les deux vecteurs a et b ; C_i et n_i désignent respectivement le contour de la fissure i et le vecteur normal au plan de celle-ci, V étant le volume occupé par le domaine Ω .

La partie à droite de (1.85) est obtenue par la règle de la déformation moyenne classique du milieu sain et la prise d'une pression unité fictive imposée à la lèvres de la fissure. Dans le cas de fissures aléatoires, $\bar{\epsilon}_1$ est de la forme :

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_{tt}^1 (1 - n \otimes n) + \bar{\epsilon}_{nn}^1 n \otimes n \quad (1.86)$$

où n et t sont respectivement la normale et la tangente à la fissure. La déformation volumique moyenne s'écrit :

$$3\bar{\varepsilon}_1 = (2\bar{\varepsilon}_{tt}^1 + \bar{\varepsilon}_{nn}^1) \quad (1.87)$$

La contrainte volumique moyenne s'écrit :

$$3\Sigma_1 = (2\Sigma_{tt}^1 + \Sigma_{nn}^1) \quad (1.88)$$

$\bar{\varepsilon}_0$ est choisie pour assurer que $\bar{\varepsilon}_1$ soit égale à $\bar{\varepsilon}$ selon le schéma de MT. Il est montré que $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}_1$. Le module de compressibilité se déduit de la relation :

$$k(d_c) = \frac{\Sigma}{3\bar{\varepsilon}} \quad (1.89)$$

avec $\Sigma = \bar{\varepsilon}_0 \Sigma_1$.

Le calcul numérique est réalisé sur un quart de cellule périodique avec un MMR grâce à la symétrie dans deux directions $\vec{R}$, $\vec{Z}$. Les conditions aux limites appliquées au bord de cette cellule consistent à (voir figure (1.5-d)) :

- bloquer le déplacement vertical UZ sur l_1 , l_2
- bloquer le déplacement radial UR sur l_5
- imposer le déplacement sur les contours l_3 et l_4 .

Distribution isotrope transverse de microfissures

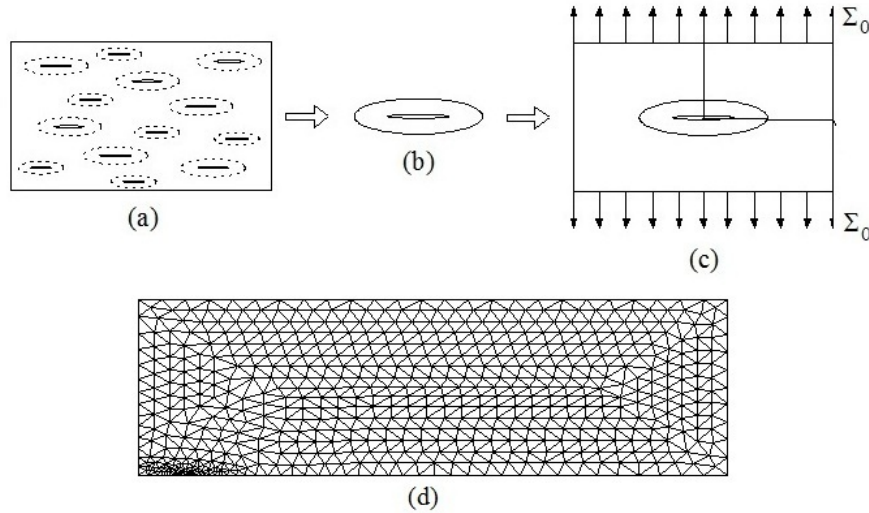


FIGURE 1.6 – Milieu avec des fissures de distribution parallèle (a), MMR (b) et domaine équivalent de calcul (c) avec le maillage associé (d).

Pour une distribution parallèle de fissures, le tenseur de rigidité effective est isotrope transverse avec un module d'Young longitudinal effectif $E_3(d_c)$ donné par des estimations analytiques (dilué (1.34), de Mori Tanaka (1.55), de PCW (1.78)). Dans ce cas, Ω_p est de forme ellipsoïdale avec le rayon R dans le plan de la fissure et R_v selon l'axe de révolution. Ces rayons vérifient la relation :

$$R = l \left(\frac{3}{4\pi d_c} \right)^{1/3} \quad \text{avec } R_v = RX \quad (1.90)$$

où X est le rapport de MMR, $X < 1$ pour un ellipsoïde aplati et $X > 1$ pour celui allongé. Cela dépend de la direction du chargement imposé.

On considère maintenant une poutre en traction uniaxiale avec une contrainte macroscopique $\Sigma e_z \otimes e_z$. Le domaine de calcul est montré dans la figure (1.6)-c, avec des conditions aux limites identiques à celles décrites dans le cas d'un milieu avec fissures de distribution aléatoire. Par ailleurs, Σ_0 est choisi de sorte à assurer que la moyenne des contraintes dans le MMR soit égale à Σ . Si Σ_1 est la contrainte longitudinale moyenne dans le MMR obtenue par le calcul classique, alors $\Sigma_0 = \Sigma/\Sigma_1$ (voir détail dans [40]). Les déformations longitudinale $\bar{\varepsilon}_z$ et latérale $\bar{\varepsilon}_r$ sont déterminées en prenant en compte l'influence des forces nodales fictives comme suit :

$$\bar{\varepsilon}_z = \Sigma_0 \left(\bar{\varepsilon}_{zz} + \frac{1}{\Omega} P_z U_z \right), \quad \bar{\varepsilon}_r = \Sigma_0 \left(\bar{\varepsilon}_{rr} + \frac{1}{\Omega} P_r U_r \right) \quad (1.91)$$

où U_α et P_α sont respectivement les déplacements nodaux et les forces nodales associés à la pression fictive dans la fissure selon les directions $\alpha = z$ ou r . Le coefficient de Poisson effectif est :

$$\tilde{\nu}_{31}(d_c) = -\bar{\varepsilon}_r / \bar{\varepsilon}_z \quad (1.92)$$

1.2.3 Comparaison à l'échelle globale des schémas classiques

Pour évaluer les estimations des modèles classiques diluée, de MT et de PCW, on propose d'effectuer les calculs pour un mortier isotrope avec les données $E^m = 2200$ MPa, $\nu^m = 0,25$ d'après [24].

Mortier élastique contenant des pores sphériques

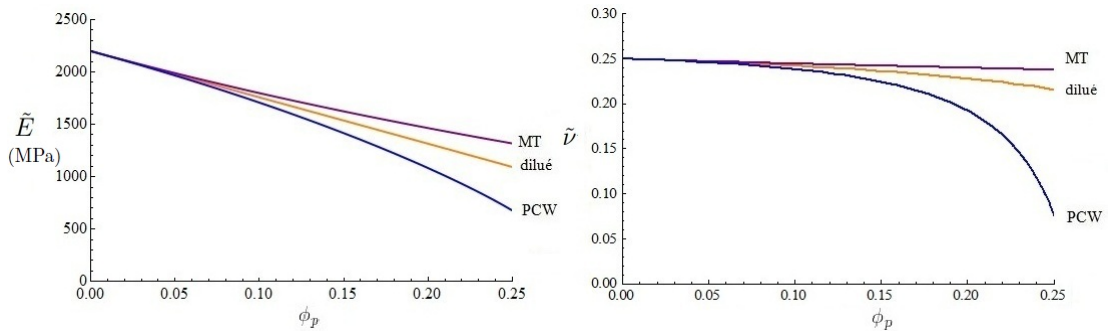


FIGURE 1.7 – Estimations du module d'Young effectif $\tilde{E}^m$ et du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}^m$ d'un mortier élastique avec des pores sphériques en fonction de la fraction volumique des pores.

La figure (1.7) montre que les estimations diluées et de MT ont presque la même allure pour $\phi_p \ll 1$. Par exemple, l'erreur maximale sur les composantes du tenseur de souplesse effective entre les différentes estimations est de l'ordre de 1,6% pour $\phi_p = 0,05$. L'estimation de MT donne toujours des valeurs supérieures à celles du schéma dilué et de PCW. Quand $\phi_p > 0,2$, les estimations de l'approche de PCW sont largement inférieures aux estimations diluées et de MT.

Mortier élastique contenant des microfissures à distribution parallèle

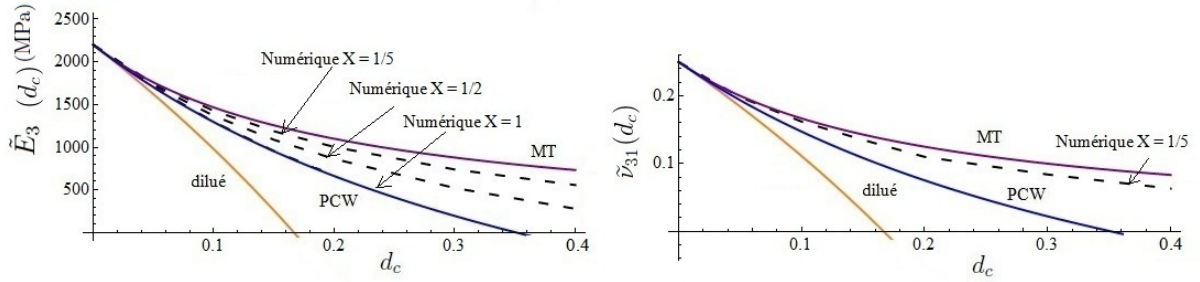


FIGURE 1.8 – Estimations de $\tilde{E}_3$ et de $\tilde{\nu}_{31}$ pour un mortier élastique contenant des microfissures parallèles en fonction de la densité de fissures d_c .

La figure (1.8) montre que les estimations diluées, de MT et de PCW ne sont voisines que pour $d_c \ll 1$ (soit pour $d_c < 0,04$). L'estimation de MT donne toujours des estimations supérieures à celles des deux autres modèles. On remarque que des valeurs négatives sont obtenues quand $d_c \geq 0,35$ pour l'approche de PCW et lorsque $d_c \geq 0,16$ pour l'estimation diluée. Pour cette raison, ces estimations négatives ne sont pas reportées à la figure (1.8). Par contre, l'estimation de MT donne toujours des valeurs positives avec différentes valeurs de d_c qui varient de 0 à 1. L'approche numérique s'approche du résultat de l'estimation de MT quand X tend vers 0. En particulier, on a toujours pour toutes les valeurs de X de l'approche numérique : $\nu_{31}(d_c)/E_3(d_c) = \nu^m/E^m$. Ce résultat est confirmé analytiquement par les équations (1.35), (1.56), (1.79).

Mortier élastique contenant des microfissures à distribution aléatoire

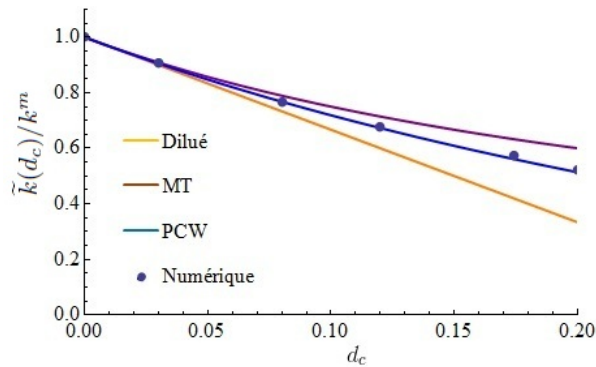
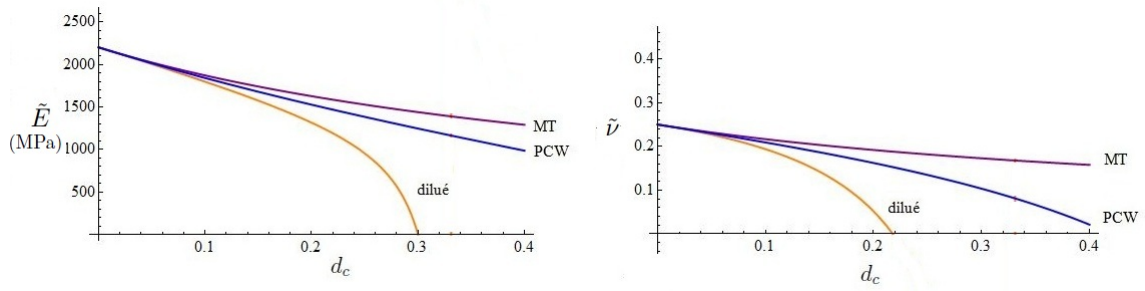


FIGURE 1.9 – Estimation de $\tilde{k}(d_c)/k^m$ pour un mortier élastique contenant des microfissures aléatoires en fonction de la densité de fissures d_c .

On observe, dans la figure (1.9), que le résultat numérique est en bon accord avec l'estimation de PCW. Dans la figure (1.10), on remarque une fois de plus que les estimations sont presque égales quand d_c est petit ($d_c \rightarrow 0$). Par exemple, les composantes des tenseurs de souplesse effectives avec $d_c = 0,1$ présentent une erreur maximale de 7% entre les différentes estimations. De plus, le schéma diluée donne des valeurs infinies pour $\tilde{E}$ et négatives pour $\tilde{\nu}$ pour une certaine valeur de d_c (i.e. $d_c = 0,33$). Cela ne convient pas au comportement réel d'un milieu microfissuré.


 FIGURE 1.10 – Estimations de $\tilde{E}$ et de $\tilde{\nu}$ pour un mortier élastique contenant des microfissures aléatoires.

1.3 Méthodes de modélisation d'un milieu saturé

Dans cette partie, on suppose que les pores sont saturés et qu'une pression p y règne. Des modèles idéalisés du milieu fracturé ont souvent été utilisés dans la littérature en physique des roches pour l'étude de l'élasticité de roches fissurées. Un des modèles les plus simples est celui de Thomsen [50] pour lequel les fractures sont supposées verticales et parallèles intégrées dans un milieu élastique isotrope. Au contraire, la théorie de Brown et Korrington (B&K) [51] n'exige pas de modèle de fissures idéalisées. Le modèle micromécanique de Shafiro et Kachanov (S&K) [52] suppose une distribution aléatoire de fissures et prend en compte l'interaction entre fissures. De son côté, Levin [53] a utilisé le modèle auto-cohérent (AC) pour l'homogénéisation de milieux élastiques avec des fissures à distribution aléatoire.

1.3.1 Modèle de Thomsen

Thomsen [50] a étudié le comportement élastique de milieux contenant une distribution non aléatoire (ici, parallèle) de fissures. Cette théorie développée sous la condition de pressions de pores équilibrées, de pores de forme circulaire et de non-rupture. Rappelons que la souplesse globale d'un matériau avec des microfissures sèches est donnée par (1.36). La souplesse effective d'un matériau avec des microfissures saturées est fournie comme suit :

$$\tilde{S}_{Th}^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_s} & -\frac{\nu_s}{E_s} & -\frac{\nu_s}{E_s} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_s}{E_s} & \frac{1}{E_s} & -\frac{\nu_s}{E_s} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_s}{E_s} & -\frac{\nu_s}{E_s} & \frac{1}{E_s} + Z_N^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_s} + Z_T^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_s} + Z_T^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_s} \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

avec

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1}{E_d} - \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{\phi_p}{k_{\phi_p}} \right)^2}{\phi_t C_t}, \quad -\frac{\nu_s}{E_s} = -\frac{\nu_d}{E_d} - \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{\phi_p}{k_{\phi_p}} \right)^2}{\phi_t C_t} \quad (1.94)$$

$$Z_N^d = \frac{16}{3} \frac{1}{E_d} (1 - \nu_d^2) d_c, \quad Z_N^s = Z_N^d \left(1 - \frac{k_f}{k_0}\right) D_{cp} \quad (1.95)$$

$$Z_T^d = \frac{16}{3} \frac{1}{\mu_d} \frac{1 - \nu_d}{2 - \nu_d} d_c, \quad Z_T^s = Z_T^d \quad (1.96)$$

$$d_c = N_c a^3 / V = N_c a^3 / (e.S) = N a^3, \quad \mu_s = \mu_d, \quad \gamma = \frac{a_3}{a} \quad (1.97)$$

$$D_{cp} = \frac{1}{1 - \frac{k_f}{k_0} + \frac{k_f}{\phi_p + \phi_c} \left(\frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_0} + Z_N^d\right)} \quad (1.98)$$

$$\phi_c = d_c \gamma \frac{4\pi}{3}, \quad \phi_p = \frac{N_p V_p}{V} = N_p \frac{4\pi b^3}{3e.S}, \quad \frac{1}{k_{\phi_p}} = \frac{1}{\phi_p} \left(\frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_0}\right) \quad (1.99)$$

Les indices 'd' et 's' indiquent respectivement la situation "sèche" et "saturée".

E_s, μ_s, ν_s sont respectivement le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu saturé.

E_d, μ_d, ν_d sont respectivement le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu sec supposé isotrope.

Z_N^s, Z_N^d sont respectivement les souplesses normales des fissures saturées et sèches.

Z_T^s, Z_T^d sont respectivement les souplesses tangentielles des fissures saturées et sèches.

D_{cp} est le facteur d'influence du fluide.

De plus, d_c est la densité de fissures. N_c et N_p sont respectivement les nombres de fissures et de pores dans le volume $V = e.S$. On note que e et S sont respectivement l'épaisseur et la section du matériau; a et b sont respectivement les rayons des fissures et des pores et $N_c/(e.S) = N$ est la densité volumique de fissures.

Ici, k_d, k_f et k_0 sont respectivement les modules de compressibilité du milieu sec, du fluide saturant et du milieu minéral (sans pores, sans fissures) qui s'expriment en fonction des coefficients de Lamé ou du module d'Young et du coefficient de Poisson comme suit :

$$k_\alpha = \lambda_\alpha + \frac{2\mu_\alpha}{3} = \frac{E_\alpha}{3(1 - 2\nu_\alpha)} \quad \text{où } \alpha = d, f, 0 \quad (1.100)$$

avec μ_α sont les modules de cisaillement du même milieu.

ϕ_c et ϕ_p sont respectivement les fractions volumiques des fissures et des pores.

$a_1 = a_2 = a = l$ et $a_3 = c$ sont les rayons des fissures respectivement dans le plan (y_1, y_2) et selon l'axe $\vec{y}_3$ (cf. figure (B.2)). Dans le cas de milieux avec fractions volumiques de pores isotropes ϕ_p et de fissures ϕ_c à distributions isotropes transverses (voir (1.99)), on a la relation :

$$\phi_t C_t = \phi_p C_p + \phi_c C_c \quad (1.101)$$

où

$$\phi_p C_p = \left(\frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_0}\right) + \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_0}\right) \phi_p, \quad \phi_c C_c = Z_N^d + \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_0}\right) \phi_c \quad (1.102)$$

avec C_p et C_c les compressibilités des pores isotropes, des fissures en forme de disques et C_t la compressibilité totale.

Si la roche a seulement des fissures (sans pores), le facteur d'influence du fluide est obtenu

pour $\phi_p = 0$ et $K_d = K_0$:

$$D_c = \frac{1}{1 - \frac{k_f}{k_0} + \frac{k_f}{\phi_c} Z_N^d} \quad (1.103)$$

où l'indice "c" indique que seules les fissures sont incluses.

On trouve qu'en cas de milieu sec ($k_f = 0$) et sans pores ($\phi_p = 0$), l'estimation de E_3^{Th} tel que $\frac{1}{E_3^{Th}} = \frac{1}{E_s} + Z_N^s$ devient exactement celle de Mori Tanaka, voir (1.57). Dans le cas d'un milieu fissuré saturé sans pores, E_3^{Th} dépend de d_c et de γ .

1.3.2 Modèle de Brown et Korringtona

Brown et Korringtona (B&K) [51] ont complété la formulation de Gassman [54] pour la substitution de fluide dans les roches isotropes et monominérales, qui ne satisfont pas nécessairement les conditions de micro-homogénéité ou micro-isotropie. C'est-à-dire que contrairement aux travaux de Thomsen (1995), B&K ne font aucune hypothèse sur la force de l'anisotropie ou la symétrie de la roche et n'exigent aucune information sur la forme de la fissure. Les équations de Brown & Korringtona supposent que la roche est 100% saturée.

La souplesse effective du milieu microfissuré et poreux saturé s'écrit comme suit :

$$\tilde{S}_{B\&K}^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_s} & -\frac{\nu_s}{E_s} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_s}{E_s} & \frac{1}{E_s} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{23} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_s} + Z_T^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_s} + Z_T^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_s} \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

avec

$$S_{33} = \frac{1}{E_s} + Z_N^s, \quad S_{23} = -\frac{\nu_s}{E_s} - \frac{\frac{\phi_p}{3k_{\phi_p}} Z_N^d}{\phi_t C_t} \quad (1.105)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_N^s = Z_N^d \left(1 - \frac{k_f}{k_0} + \frac{k_f}{3k_{\phi_p}} \frac{\phi_p}{\phi_t} \right) D_t, \quad Z_T^s = Z_T^d, \quad \mu_s = \mu_d \\ \frac{1}{\phi_t C_t} = \frac{\frac{k_f}{\phi_t}}{1 - \frac{k_f}{k_0} + \frac{k_f}{\phi_p + \phi_c} \left(\frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_0} + \frac{k_d}{k_0} Z_N^d \right)} \\ D_t = \frac{1}{1 - \frac{k_f}{k_0} + \frac{k_f}{\phi_p + \phi_c} \left(\frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_0} + \frac{k_d}{k_0} Z_N^d \right)} \end{array} \right. \quad (1.106)$$

avec E_s et μ_s définis respectivement par (1.94) et (1.97). Pour le cas du milieu microfissuré non-poreux saturé, D_t dans l'équation (1.106) de B&K remplacera le paramètre D_c du modèle de Thomsen (voir (1.103)) et on obtient les tenseurs de souplesse identiques pour les deux modèles. Z_N^d et Z_T^d sont définis par (1.95) et (1.96).

Avec la relation (1.106), l'inverse de la capacité totale de stockage est :

$$\frac{1}{\phi_t C_t} = D_t \frac{k_f}{\phi_t} \approx D_{cp} \frac{k_f}{\phi_t} \quad (1.107)$$

Si on prend en compte cette approximation, on peut déduire la matrice de souplesse de B&K pour le milieu microfissuré poreux saturé, à partir de celle de Thomsen comme suit :

$$\tilde{S}_{B\&K}^s = \tilde{S}_{Th}^s + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta & -\Delta & \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

avec

$$\Delta = Z_N^d D_{cp} \frac{k_f}{3k_{\phi_p}} \frac{\phi_p}{\phi_t} \quad (1.109)$$

On trouve qu'en cas de milieu fissuré saturé sans pores ($\phi_p = 0$), l'expression $\tilde{S}_{B\&K}^s$ de B&K devient exactement celle de Thomsen $\tilde{S}_{Th}^s$.

1.3.3 Modèle de Shafiro et M. Kachanov

Shafiro et M. Kachanov (S&K) [52] ont défini les propriétés élastiques effectives d'un solide avec des pores de forme ellipsoïdale remplis de liquide par le tenseur de souplesse effective comme suit :

$$\tilde{S}_{S\&K}^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

Dans la suite, plusieurs formes de cavités et/ou microfissures sont envisagées. On note : V

- volume de la matrice, $V_c^{(k)}$ - volume de la $k^{ième}$ cavité,

κ - compressibilité du fluide, ν_0 - coefficient de Poisson de la matrice,

E_0 - module d'Young de la matrice,

δ_ϕ , δ_c , δ_a - paramètres physiques respectivement des pores, des fissures et des aiguilles (ou pores de forme elliptique avec $\gamma \gg 1$), déterminés par :

$$\delta_\phi = \frac{2}{9} \frac{\kappa E_0 - 3(1 - \nu_0)}{1 - \nu_0}, \delta_c = \gamma \frac{\pi}{4(1 - \nu_0^2)} [\kappa E_0 - 3(1 - 2\nu_0)], \delta_a = \frac{\kappa E_0 - 3(1 - 2\nu_0)}{5 - 4\nu_0} \quad (1.111)$$

γ - paramètre de géométrie des pores (voir (1.97)). La fraction volumique des pores et les densités des fissures sèches/saturées sont respectivement :

$$\phi_p = \frac{1}{V} \sum V_c^{(k)}, \quad \rho = \frac{1}{V} \sum (a^3)^{(k)}, \quad \rho_1 = \frac{1}{V} \sum \left(\frac{a^3}{1 + \delta_c} \right)^{(k)} \quad (1.112)$$

Si les fissures ont le même rayon l , $\rho = Nl^3 = d_c$. On va utiliser cette hypothèse pour l'homogénéisation du comportement du milieu pour plusieurs formes de cavités.

Cas de pores de forme sphérique ($\gamma = 1$)

Le cas le plus simple est celui d'un milieu isotrope contenant seulement des pores. On a $E_1 = E_2 = E_3 = \tilde{E}$, $\mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{12} = \tilde{\mu}$, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \tilde{\nu}$. Les modules effectifs sont :

$$\frac{E_0}{\tilde{E}} = 1 + \phi_p \left[\frac{3(1 - \nu_0)(9 + 5\nu_0)}{2(7 - 5\nu_0)} - \frac{1}{1 + \delta_\phi} \frac{1 - \nu_0}{2} \right] \quad (1.113)$$

$$\frac{\mu_0}{\tilde{\mu}} = 1 + \phi_p \frac{15(1 - \nu_0)}{2(7 - 5\nu_0)} \quad (1.114)$$

Cas de fissures parallèles ($\gamma \ll 1$)

Ici, $E_1 = E_2 = E_0$, $\mu_{31} = \mu_{23}$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_0$, $\nu_{13} = \nu_{23} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31}$, avec :

$$\frac{E_0}{E_3} = 1 + \frac{16}{3} (1 - \nu_0^2) (\rho - \rho_1) \quad (1.115)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_{31}} = 1 + \rho \frac{16}{3} \frac{(1 - \nu_0)}{(2 - \nu_0)}, \quad \mu_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_0)} \quad (1.116)$$

$$\nu_{31} = \frac{3\nu_0}{3 + 16(1 - \nu_0^2)(\rho - \rho_1)} \quad (1.117)$$

On trouve que ces relations donnent la même expression de E_3 que celle estimée par *B&K* et de Thomsen dans le cas d'un milieu fissuré saturé sans pores.

Cas de fissures à orientation aléatoire ($\gamma \ll 1$)

$E_1 = E_2 = E_3 = \tilde{E}$, $\mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{12} = \tilde{\mu}$, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \tilde{\nu}$, avec :

$$\frac{E_0}{\tilde{E}} = 1 + \frac{16}{45} \frac{(1 - \nu_0^2)}{(2 - \nu_0)} [(10 - 3\nu_0)\rho - 3(2 - \nu_0)\rho_1] \quad (1.118)$$

$$\frac{\mu_0}{\tilde{\mu}} = 1 + \frac{16}{45} \frac{(1 - \nu_0)}{(2 - \nu_0)} [(5 - \nu_0)\rho - (2 - \nu_0)\rho_1] \quad (1.119)$$

Cas d'aiguilles parallèles ($\gamma \gg 1$)

$E_1 = E_2$, $\mu_{31} = \mu_{23}$, $\nu_{12} = \nu_{21}$, $\nu_{13} = \nu_{23} = \frac{E_1}{E_3}\nu_{31}$, avec :

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_0}{E_2} = 1 + \phi_p \left[3 - 2\nu_0^2 - \frac{1}{1 + \delta_a} \frac{(2 - \nu_0)^2}{5 - 4\nu_0} \right] \quad (1.120)$$

$$\frac{E_0}{E_3} = 1 + \phi_p \left[1 - \frac{1}{1 + \delta_a} \frac{9}{5 - 4\nu_0} \right] \quad (1.121)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_{31}} = \frac{\mu_0}{\mu_{23}} = 1 + 2\phi_p \quad (1.122)$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \frac{E_1}{E_0} \left[\nu_0 + \phi_p \left(1 - 2\nu_0^2 + \frac{1}{1 + \delta_a} \frac{(2 - \nu_0)^2}{5 - 4\nu_0} \right) \right] \quad (1.123)$$

$$\nu_{31} = \frac{E_3}{E_0} \left[\nu_0 + \phi_p \left(\nu_0 + \frac{1}{1 + \delta_a} \frac{(2 - \nu_0)(4 + \nu_0)}{5 - 4\nu_0} \right) \right] \quad (1.124)$$

Cas d'aiguilles à orientation aléatoire ($\gamma \gg 1$)

$E_1 = E_2 = E_3 = \tilde{E}$, $\mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{12} = \tilde{\mu}$, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \tilde{\nu}$, avec :

$$\frac{E_0}{\tilde{E}} = 1 + \phi_p \frac{1}{15} \left[35 + 4\nu_0 - 16\nu_0^2 - (\Delta_1 + \Delta_2) \frac{1}{1 + \delta_a} \right] \quad (1.125)$$

$$\frac{\mu_0}{\tilde{\mu}} = 1 + \phi_p \frac{1}{15} \left[4(5 - 3\nu_0) - \frac{1 + \nu_0}{5 - 4\nu_0} \frac{1}{1 + \delta_a} \right] \quad (1.126)$$

$$\text{où } \Delta_1 = \frac{[5(2 - \nu_0)(4 - 5\nu_0) + (1 + \nu_0)^2]}{5 - 4\nu_0}, \quad \Delta_2 = \frac{2(1 + \nu_0)^2}{5 - 4\nu_0}.$$

Cas de fissures parallèles avec des pores

$E_1 = E_2$, $\mu_{31} = \mu_{23}$, $\nu_{12} = \nu_{21}$, $\nu_{13} = \nu_{23} = \frac{E_1}{E_3}\nu_{31}$, on a :

$$\frac{E_0}{E_3} = 1 + \frac{16}{3}(1 - \nu_0^2)(\rho - \rho_1) + \phi_p \left[\frac{3(1 - \nu_0)(9 + 5\nu_0)}{2(7 - 5\nu_0)} - \frac{1}{1 + \delta_\phi} \frac{(1 - \nu_0)}{2} \right] \quad (1.127)$$

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_0}{E_2} = 1 + \phi_p \left[\frac{3(1 - \nu_0)(9 + 5\nu_0)}{2(7 - 5\nu_0)} - \frac{1}{1 + \delta_\phi} \frac{(1 - \nu_0)}{2} \right] \quad (1.128)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_{31}} = 1 + \phi_p \frac{15(1 - \nu_0)}{2(7 - 5\nu_0)} + \rho \frac{16}{3} \frac{(1 - \nu_0)}{(2 - \nu_0)}, \quad \mu_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad (1.129)$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \frac{E_2}{E_0} \left[\nu_0 + \phi_p \frac{1 - \nu_0}{2} \left(\frac{3(1 + 5\nu_0)}{7 - 5\nu_0} + \frac{1}{1 + \delta_\phi} \right) \right] \quad (1.130)$$

$$\nu_{31} = \frac{E_1}{E_0} \left[\nu_0 + \phi_p \frac{1 - \nu_0}{2} \left(\frac{3(1 + 5\nu_0)}{7 - 5\nu_0} + \frac{1}{1 + \delta_\phi} \right) \right] \quad (1.131)$$

avec δ_ϕ défini dans (1.111).

Cas de fissures à orientation aléatoire avec des pores

$E_1 = E_2 = E_3 = \tilde{E}$, $\mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{12} = \tilde{\mu}$, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \tilde{\nu}$, avec :

$$\frac{E_0}{\tilde{E}} = 1 + \frac{16}{45} \frac{1 - \nu_0^2}{2 - \nu_0} [(10 - 3\nu_0)\rho - 3(2 - \nu_0)\rho_1] + \phi_p \left[\frac{3(1 - \nu_0)(9 + 5\nu_0)}{2(7 - 5\nu_0)} - \frac{1}{1 + \delta_\phi} \frac{(1 - \nu_0)}{2} \right] \quad (1.132)$$

$$\frac{\mu_0}{\tilde{\mu}} = 1 + \frac{16(1-\nu_0)}{45(2-\nu_0)} [(5-\nu_0)\rho - (2-\nu_0)\rho_1] + \phi_p \frac{15(1-\nu_0)}{2(7-5\nu_0)} \quad (1.133)$$

avec δ_ϕ , ρ , ρ_1 définis dans (1.111) et (1.112).

1.3.4 Modèle de Kanaun et Levin

La théorie de Kanaun et Levin (K&L) [53, 55, 56] permet de déterminer le comportement d'un matériau poreux sous les effets de la pression du fluide dans le cas saturé en utilisant le schéma auto-cohérent pour un Milieu Homogène Équivalent (MHE) [56, 57]. Pour cette méthode, chaque inclusion est supposée isolée, noyée dans le milieu homogène équivalent. Comme évoqué auparavant, ce modèle (AC) prend en compte les interactions entre inclusions. K&L ont aussi supposé que les fissures sont ellipsoïdales saturées en prenant en compte les effets de la pression du fluide. La matrice est isotrope ou isotrope transverse.

Cas de fissures à orientation aléatoire :

La loi de comportement globale est isotrope et s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma = \tilde{\mathbb{C}} : \mathbb{E}, \quad \mathbb{E} = \tilde{\mathbb{S}} : \Sigma; \quad \tilde{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{S}}^{-1} \quad (1.134)$$

où $\mathbb{E}$ est la déformation macroscopique et Σ est la contrainte macroscopique.

$\tilde{\mathbb{C}}$, $\tilde{\mathbb{S}}$ sont respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse élastiques effectives isotropes.

$$\tilde{\mathbb{S}} = \frac{1}{3\tilde{k}}\mathbb{J} + \frac{1}{2\tilde{\mu}}\mathbb{K}, \quad \tilde{\mathbb{C}} = 3\tilde{k}\mathbb{J} + 2\tilde{\mu}\mathbb{K} \quad (1.135)$$

$\tilde{k}$, $\tilde{\mu}$ - modules de compressibilité et de cisaillement effectifs, respectivement, qui sont donnés par :

$$\frac{1}{\tilde{k}} = \frac{1}{k_d^m} + \frac{M_2}{1+j_2}, \quad \frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\mu_d^m} + \frac{2(3M_1+2M_2)}{15(1+j_1)} \quad (1.136)$$

avec

$$j_1 = \frac{2}{15}M_2(d_6 - d_3) + \frac{1}{10}M_1d_5, \quad j_2 = \frac{1}{3}M_2(2d_3 + d_6) \quad (1.137)$$

$$M_1 = \frac{4\bar{\tau}}{\pi\mu(1+2\chi)}, \quad M_2 = \frac{\tau}{\mu} \left(\frac{ak_f}{a_3\mu} + \pi\chi \right)^{-1} \quad (1.138)$$

$$\tau = \frac{4}{3}\pi a^3 n_0, \quad \bar{\tau} = \frac{4}{3}\pi \langle a^3 \rangle n_0 \quad (1.139)$$

$$\chi_1 = \frac{3k_d^m + \mu_d^m}{3k_d^m + 4\mu_d^m}, \quad \chi_2 = \frac{2(3k_d^m + \mu_d^m)}{9k_d^m} \quad (1.140)$$

k_d^m , k_f - module de compressibilité de la matrice sèche (constant) et du fluide.

μ_d^m - module de cisaillement tangent de la matrice sèche.

On note que $\bar{\tau} = \phi_c$ et $\tau = \frac{\phi_c}{\gamma}$. Dans (1.140), $\chi = \chi_1$ dans le cas de déformations planes

(cas de ce travail) et $\chi = \chi_2$ dans le cas de contraintes planes. Le nombre d'inclusions n_0 dans une unité de volume est :

$$n_0 = N = \frac{N_c}{V} = \frac{N_c}{e.S} \quad (1.141)$$

où e et S sont l'épaisseur et la surface de la matrice.

Dans (1.137), d_3 , d_5 , d_6 sont déterminés par :

$$d_3 = -2\mu[(2\chi - 1)f_0 - 2\chi f_1]; d_5 = -4\mu(f_0 + 4\chi f_1); d_6 = -8\mu\chi(f_0 - f_1) \quad (1.142)$$

avec

$$f_0 = \frac{1-g}{2(1-\gamma_1^2)}, f_1 = \frac{1}{4(1-\gamma_1^2)^2} [(2+\gamma_1^2)g - 3\gamma_1^2], g = \frac{\gamma_1^2}{\sqrt{\gamma_1^2-1}} \tan^{-1} \sqrt{\gamma_1^2-1} \quad (1.143)$$

$\gamma_1 = a/a_3 = 1/\gamma$ avec γ un paramètre géométrique des pores donné par (1.97). En reportant l'équation (1.139) dans les relations (1.138), on obtient les estimations suivantes de M_2 et M_1 :

$$M_2 = \frac{C_1}{e}, \quad M_1 = \frac{C_4}{e} \quad (1.144)$$

où

$$C_1 = \frac{4}{3} \frac{N_c \pi a^3 a_3}{S(ak_f + a_3 \mu \pi \chi)}, \quad C_4 = \frac{16}{3} \frac{a^3 N_c}{\mu(1+2\chi)S} \quad (1.145)$$

Puis, en introduisant (1.144) dans (1.136), on obtient :

$$\tilde{k} = \frac{k_d^m(e + C_2)}{e + C_3}, \quad \tilde{\mu} = \frac{15\mu_d^m(e + C_5)}{15e + C_6} \quad (1.146)$$

où

$$\begin{aligned} C_3 &= k_d^m C_1 + C_2; \quad C_6 = 2\mu_d^m(3C_4 + 2C_1) + 2C_1(d_6 - d_3) + \frac{3}{2}C_4 d_5 \\ C_2 &= \frac{1}{3}C_1(2d_3 + d_6), \quad C_5 = \frac{2}{15}C_1(d_6 - d_3) + \frac{1}{10}C_4 d_5 \end{aligned} \quad (1.147)$$

Pour le cas $\gamma_1 = \infty$ et de fissures sèches, $\tilde{k}$ et $\tilde{\mu}$ sont donnés dans [58] :

$$\tilde{k} = k_d^m \left[1 + \frac{\tau k_d^m (3k_d^m + 4\mu_d^m)}{\pi \mu_d^m (3k_d^m + \mu_d^m)} \right]^{-1}, \quad \tilde{\mu} = \mu_d^m \left[1 + \frac{4\tau k_d^m (3k_d^m + 4\mu_d^m)(9k_d^m + 4\mu_d^m)}{15\pi \mu_d^m (3k_d^m + \mu_d^m)(3k_d^m + 2\mu_d^m)} \right]^{-1} \quad (1.148)$$

Avec les relations (1.146) et (1.135), on peut déduire la souplesse comme suit :

$$\tilde{S}_{KL}^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{E}_\nu} & -\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} & -\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}_\nu} & \frac{1}{\tilde{E}} & -\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} & -\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} & \frac{1}{\tilde{E}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\mu}} \end{pmatrix} \quad (1.149)$$

avec

$$\tilde{\nu} = \frac{3\tilde{k} - 2\tilde{\mu}}{2(3\tilde{k} + \tilde{\mu})}, \quad \frac{1}{\tilde{E}} = \frac{1}{9\tilde{k}} + \frac{1}{3\tilde{\mu}} \quad (1.150)$$

Cas de fissures parallèles :

La souplesse s'écrit dans la base de $\mathbb{P}$ (cf. Annexe (A.4)) comme suit :

$$\tilde{S}_{ijkl} = S_{ijkl} + s_5 P_{ijkl}^5 + s_6 P_{ijkl}^6 \quad (1.151)$$

où S_{ijkl} est le tenseur isotrope des souplesses de la matrice élastique sans pores et :

$$s_5 = \frac{4M_1}{4 + M_1 d_5}, \quad s_6 = \frac{M_2}{1 + M_2 d_6} \quad (1.152)$$

où M_1, M_2 sont donnés par (1.144). La souplesse effective S_{ijkl} isotrope peut aussi être présentée dans la base $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$ (cf. Annexe (A.1)) selon 2 tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}$:

$$S_{ijkl} = \frac{1}{3k_d^m} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_d^m} \mathbb{K} \quad (1.153)$$

Dans la base de $\mathbb{F}$ (cf. Annexe (A.3)), $S_{ijkl} = \frac{1}{9k_d^m} \mathbb{F}_2 + \frac{1}{2\mu_d^m} (\mathbb{F}_1 - \frac{1}{3} \mathbb{F}_2)$, $P_{ijkl}^5 = \mathbb{F}_5 - \mathbb{F}_6$ et $P_{ijkl}^6 = \mathbb{F}_6$. Enfin, on obtient le tenseur de souplesse élastique effective du milieu fissuré saturé, dont les fissures sont parallèles :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ijkl} &= \alpha_1 \mathbb{F}_2 + \alpha_2 (\mathbb{F}_1 - \frac{1}{3} \mathbb{F}_2) + s_5 (\mathbb{F}_5 - \mathbb{F}_6) + s_6 \mathbb{F}_6 \\ &= \alpha_2 \mathbb{F}_1 + (\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{3}) \mathbb{F}_2 + s_5 \mathbb{F}_5 + (s_6 - s_5) \mathbb{F}_6 \end{aligned} \quad (1.154)$$

En utilisant la relation (A.21) entre les deux bases $\mathbb{F}$ et $\mathbb{P}$ [56] et la relation d'inversion (A.23), le tenseur de rigidité isotrope transverse $\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{S}_{ijkl}^{-1}$ (voir (1.154)) s'écrit dans la base de $\mathbb{P}$ comme suit :

$$\tilde{C}_{ijkl} = k_1 \mathbb{P}_2 + 2m_1 (\mathbb{P}_1 - \frac{1}{2} \mathbb{P}_2) + l_1 (\mathbb{P}_3 + \mathbb{P}_4) + 4\mu_1 \mathbb{P}_5 + n_1 \mathbb{P}_6 \quad (1.155)$$

avec 5 paramètres :

$$k_1 = \frac{h_6}{2\Delta_f}; \quad m_1 = \frac{1}{2h_2}; \quad l_1 = \frac{-h_3}{\Delta_f}; \quad \mu_1 = \frac{1}{h_5}; \quad n_1 = \frac{2h_1}{\Delta_f} \quad (1.156)$$

où $h_1 = \alpha_1 + \alpha_2/6$, $h_2 = \alpha_2$, $h_3 = h_4 = \alpha_1 - \alpha_2/3$, $h_5 = 2\alpha_1 + s_5$, $h_6 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2/3 + s_6$ et $\Delta_f = 2(h_1 h_6 - h_3 h_4)$. Les cinq paramètres dans (1.155) sont en relation avec les modules élastiques par (A.25), voir Annexe (A.4). Alors, on peut déterminer facilement les modules d'Young et les coefficients de Poisson dans le plan de θ voir (A.26). Un changement de l'équation (A.26) du plan de θ dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées de base (e_1, e_2, e_3) est réalisé. Les calculs dans Mathematica donnent le tenseur de rigidité comme suit :

$$\tilde{S}_{KL}^s = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \quad (1.157)$$

où

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= \mu_d^m \left(1 + \frac{6}{9 - \sqrt{81 - \frac{48k_d^m(1 + 2\mu_d^m s_6)}{\mu_d^m(4 + 4\mu_d^m s_5 + 3k_d^m(s_5 - 2s_6))}}} \right) \\
 C_{1122} &= -\mu_d^m \left(1 - \frac{6}{9 - \sqrt{81 - \frac{48k_d^m(1 + 2\mu_d^m s_6)}{\mu_d^m(4 + 4\mu_d^m s_5 + 3k_d^m(s_5 - 2s_6))}}} \right) \\
 C_{3333} &= \frac{\mu_d^m}{1 + \mu_d^m s_5} \left(1 + \frac{6}{9 - \sqrt{81 - \frac{12k_d^m(1 + 2\mu_d^m s_6)}{\mu_d^m(1 + 3k_d^m s_6)}}} \right) \\
 C_{1133} &= -\frac{\mu_d^m}{1 + \mu_d^m s_5} \left(1 - \frac{6}{9 - \sqrt{81 - \frac{12k_d^m(1 + 2\mu_d^m s_6)}{\mu_d^m(1 + 3k_d^m s_6)}}} \right) \\
 C_{1212} &= \mu_d^m, \quad C_{1313} = \frac{\mu_d^m}{1 + \mu_d^m s_5}
 \end{aligned} \tag{1.158}$$

Pour le cas $\gamma_1 = \infty$ et des fissures sèches, $\tilde{S}_{ijkl}$ est donné dans [58] :

$$\tilde{S}_{ijkl} = S_{ijkl} + \frac{4\bar{\tau}}{\pi\mu_d^m(1 + 2k_d^m)} P_{ijkl}^5 + \frac{\bar{\tau}}{\pi\mu_d^m k_d^m} P_{ijkl}^6 \tag{1.159}$$

L'approche de Levin permet d'homogénéiser un milieu isotrope ou non isotrope contenant des inclusions ellipsoïdales. Dans le cas d'un milieu avec pores et fissures parallèles, on suit deux étapes d'homogénéisation. S_{ijkl} dans (1.151) et (1.159) est obtenu par l'étape 1 présentée dans le cas de fissures aléatoires avec $\gamma_1 = 1$. L'étape 2 détermine $\tilde{S}_{ijkl}$ en utilisant (1.151) ou (1.159).

1.3.5 Comparaison des modèles

Pour évaluer les estimations de Thomsen, de $B\&K$, de $S\&K$ et de $K\&L$, on effectue les calculs pour un mortier avec les données indiquées dans la table (2.1) d'après [59] où $E^m = 2200$ MPa et $\nu^m = 0,25$ d'après [24]. De plus, $\gamma = a_3/a = 0,1$ et $K_f = 2200$ MPa. $\tilde{E}^m$ dans la direction longitudinale sera étudié dans les figures de (1.11) à (1.18).

Mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées sans pores :

Dans ce cas, il n'y a pas de différence entre les estimations de Thomsen, de $B\&K$ et de $S\&K$ et elles sont toujours supérieures à celle de Levin (cf. figures (1.11) et (1.12)). La différence entre l'estimation de Levin et les autres vient du fait que Levin a pris en compte l'influence des vitesses des ondes élastiques qui se propagent dans le milieu fissuré.

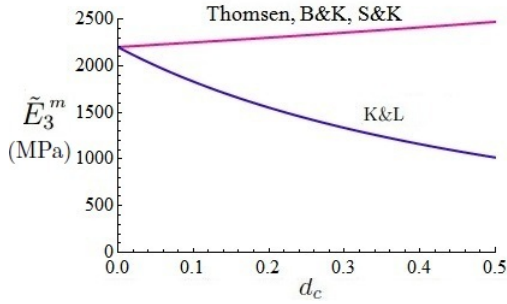


FIGURE 1.11 – Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées sans pores. $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0,25$.

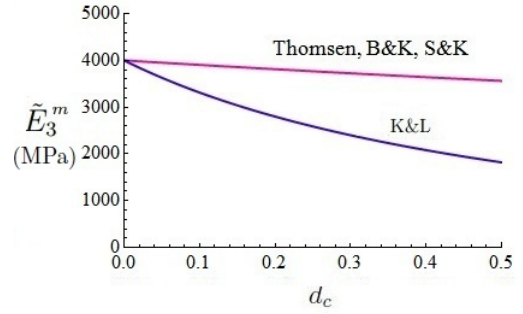


FIGURE 1.12 – Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées sans pores. $E^m=4000$ MPa, $\nu^m = 0,3$.

Mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées avec pores saturés :

On suppose de plus que $\phi_p = 0,05$ pour mieux illustrer la différence entre les estimations (figures (1.13) et (1.14)). Les estimations de *S&K* et de Thomsen sont proches et elles sont

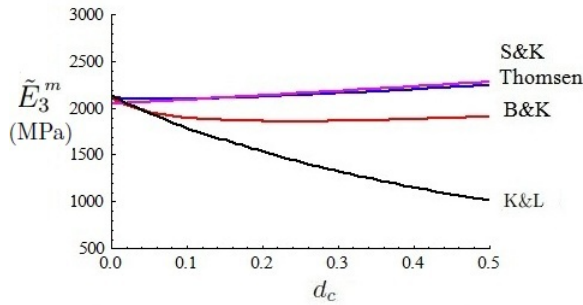


FIGURE 1.13 – Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées avec pores saturés. $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0,25$.

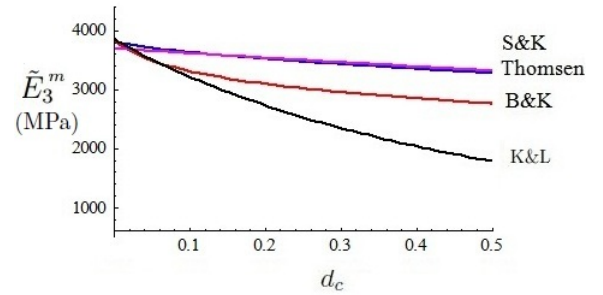


FIGURE 1.14 – Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées avec pores saturés. $E^m = 4000$ MPa, $\nu^m = 0,3$.

quasiment horizontales quand $E^m = k_f$ (cf. figure (1.13)) et décroient quand $E^m > k_f$ (cf. figure (1.14)). L'estimation de Levin donne toujours des valeurs largement inférieures aux estimations des autres modèles.

Mortier élastique contenant des fissures aléatoires saturées sans pores :

Les modèles de Thomsen et de *B&K* ne traitent pas ce cas. La comparaison est faite entre les solutions de *S&K* et de Levin. Les figures (1.15) et (1.16) montrent que les estimations de deux modèles restent néanmoins plus proches quand $E^m > K_f$.

Mortier élastique contenant des fissures aléatoires saturées avec pores saturés :

Les modèles de Thomsen et de *B&K* ne traitent pas ce cas. La comparaison est faite entre les solutions de *S&K* et de Levin. Les figures (1.17) et (1.18) montrent que la différence entre les estimations des deux modèles augmente avec la présence de pores.

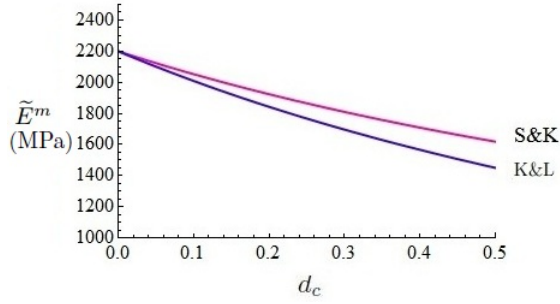


FIGURE 1.15 – Estimation de $\tilde{E}^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures aléatoires saturées sans pores. $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0,25$.

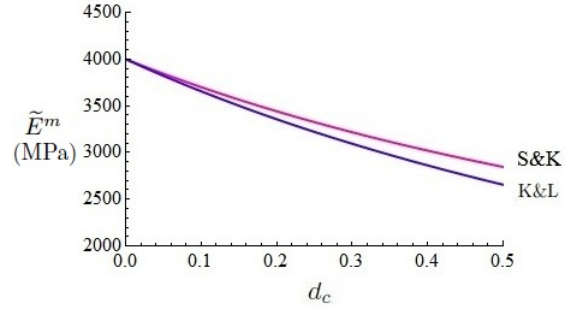


FIGURE 1.16 – Estimation de $\tilde{E}^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures aléatoires saturées sans pores. $E^m = 4000$ MPa, $\nu^m = 0,3$.

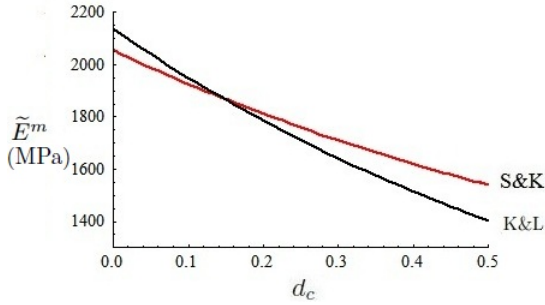


FIGURE 1.17 – Estimation de $\tilde{E}^m$ pour le milieu élastique contenant des fissures aléatoires avec pores, $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0,25$.

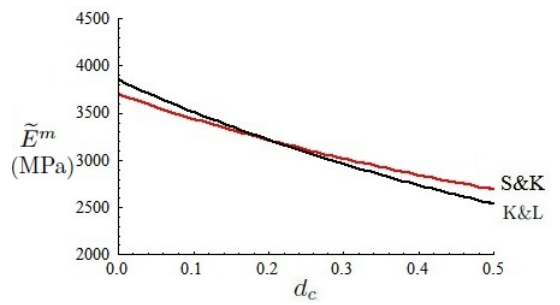


FIGURE 1.18 – Estimation de $\tilde{E}^m$ pour le milieu élastique contenant des fissures aléatoires avec pores, $E^m = 4000$ MPa, $\nu^m = 0,3$.

En conclusion de ces comparaisons, il a été montré pour tous les cas que l'estimation de Levin donne toujours des valeurs inférieures aux autres. Lorsque $k_f = E_m$, l'estimation de Levin du module d'Young effectif $\tilde{E}^m$ dans la direction longitudinale est toujours une fonction décroissante, mais on observe le contraire dans les figures (1.11) et (1.13) pour S&K, Thomsen et B&K et dans la figure (1.17) pour S&K.

1.4 Homogénéisation périodique de maçonnerie : Méthode des Éléments Finis (MEF)

1.4.1 Sans loi d'interface

La méthode d'homogénéisation périodique numérique permet de surmonter toutes les limites des techniques d'homogénéisation présentées précédemment. Le premier auteur à le faire fut Antoine [24]. Par la suite, beaucoup d'auteurs [12, 29, 60, 61] ont utilisé les codes EF pour résoudre ou valider le problème d'homogénéisation. Le calcul numérique [24] sur un VER (sans l'interface) adopte une technique EF permettant de se rapprocher de la solution réelle pour un maillage raffiné adapté où l'épaisseur des joints du milieu est prise en compte.

Dans le domaine élastique, une homogénéisation en une étape par [24] a rigoureusement prescrit les conditions aux limites périodiques, et la modélisation d'une maçonnerie péri-

dique à deux et trois dimensions est bien décrite ([5, 24] par exemple). Comme le VER

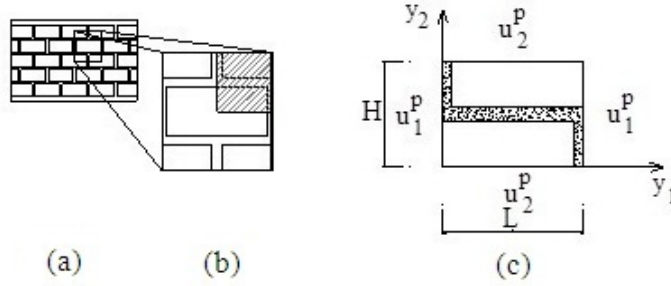


FIGURE 1.19 – Mur maçonné (a), cellule périodique (b) et quart de cellule (c).

est symétrique suivant un, deux ou trois plans, le domaine de calcul peut se réduire à la moitié, ou au quart ou à un huitième de cette cellule de base. Dans le domaine 2D, on utilise comme conditions aux limites imposées au bord d'un quart du VER des déformations homogènes au contour. En appliquant un chargement homogène en déformation au bord du VER, [24] a noté que Σ est la contrainte macroscopique qui lie le champ de contrainte de la cellule de base $\sigma(x)$ et sa surface Ω comme suit :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\Omega} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \sigma dV \quad (1.160)$$

où

$$\langle \sigma \rangle_{\Omega} = \varphi^m \langle \sigma \rangle^m + \varphi^b \langle \sigma \rangle^b \quad (1.161)$$

Avec l'hypothèse de contraintes planes (problème 2D), le tenseur $\tilde{\mathbb{C}}$ n'a que quatre coefficients indépendants à déterminer :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & 0 \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{1212} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{\nu}_{21}\tilde{E}_1 & 0 \\ \tilde{\nu}_{12}\tilde{E}_2 & \tilde{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu}_{12}(1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}) \end{pmatrix} \quad (1.162)$$

$$\text{avec } \tilde{\nu}_{21} = \frac{\tilde{C}_{1122}}{\tilde{C}_{1111}}, \tilde{\nu}_{12} = \frac{\tilde{C}_{2211}}{\tilde{C}_{2222}}, \tilde{C}_{2211} = \tilde{C}_{1122}.$$

Le champ de déplacement dans le VER est :

$$u(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} u_1(\vec{x}) \\ u_2(\vec{x}) \end{Bmatrix} = \varepsilon_{ij}^0 \cdot \vec{x}_0 \quad (1.163)$$

avec ε_{ij}^0 la déformation moyenne du VER (déformation macroscopique) qui s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{11}^0 \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{22}^0 \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{12}^0 \bar{\varepsilon}_{ij}^{(3)} \quad (1.164)$$

où

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.165)$$

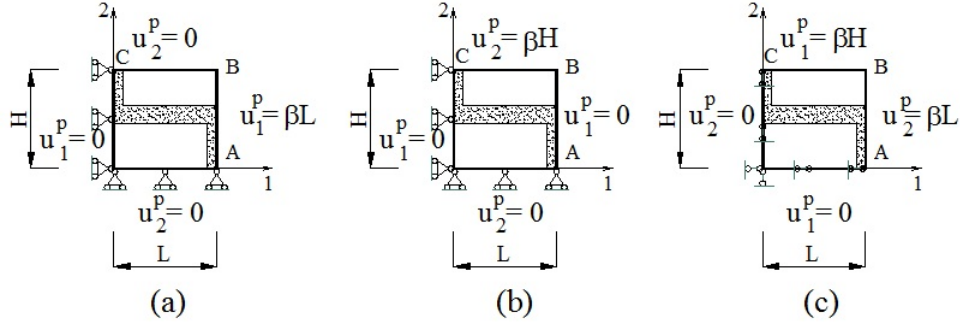


FIGURE 1.20 – Conditions aux limites aux bords du domaine de calcul dans le cas de déformation simple selon y_1 (a), selon y_2 (b), selon y_1 et y_2 (c).

Pour déterminer quatre paramètres inconnus dans (1.162), on considère 3 cas de chargement en déformation comme indiqué dans la figure (1.20).

- Cas 1 : Déplacement simple selon $\vec{y}_1$ (voir figure (1.20)-a)

Dans ce cas, $\vec{x}_0 = \begin{Bmatrix} L \\ y \end{Bmatrix}$ et les conditions aux bords du VER s'écrivent :

$$\varepsilon_{11}^0 = \beta; \quad \varepsilon_{22}^0 = 0, \quad \varepsilon_{12}^0 = 0 \quad (1.166)$$

En introduisant (1.166) dans (1.164), on obtient le champ de déformation macroscopique $\varepsilon_{ij}^0 = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Avec (1.163), il est facile d'obtenir le champ de déplacement au bord du VER :

$$u(AB) = \begin{Bmatrix} \beta \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.167)$$

Le champ de contrainte s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} \\ \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{2222} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} \\ \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{2222} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta \cdot \tilde{C}_{1111} \\ \beta \cdot \tilde{C}_{1122} \end{Bmatrix} \quad (1.168)$$

On obtient finalement :

$$\tilde{C}_{1111} = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\beta}, \quad \tilde{C}_{1122} = \frac{\bar{\sigma}_{22}}{\beta} \quad (1.169)$$

- Cas 2 : Déplacement simple selon $\vec{y}_2$ (voir figure (1.20)-b)

Dans ce cas, $\vec{x}_0 = \begin{Bmatrix} x \\ H \end{Bmatrix}$. Les déformations macroscopiques ε^0 et le champ de déplacement au bord du VER sont :

$$\varepsilon_{11}^0 = 0; \quad \varepsilon_{22}^0 = \beta, \quad \varepsilon_{12}^0 = 0 \quad (1.170)$$

$$u(BC) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta \cdot H \end{Bmatrix} \quad (1.171)$$

De la même façon, on obtient :

$$\tilde{C}_{2211} = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\beta}, \quad \tilde{C}_{2222} = \frac{\bar{\sigma}_{22}}{\beta} \quad (1.172)$$

- Cas 3 : Cisaillement simple (voir figure (1.20)-c)

Dans ce cas, $\vec{x}_0 = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$. Les déformations macroscopiques ε^0 et le champ de déplacement au bord du VER sont :

$$\varepsilon_{11}^0 = 0; \quad \varepsilon_{22}^0 = 0, \quad 2\varepsilon_{12}^0 = \beta \quad (1.173)$$

$$u(BC) = \begin{Bmatrix} \beta.H \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad u(AB) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta.L \end{Bmatrix} \quad (1.174)$$

Pour ce cas, on déduit la raideur $\tilde{C}_{1212}$ comme suit :

$$\tilde{C}_{1212} = \frac{\bar{\sigma}_{12}}{\beta} \quad (1.175)$$

En introduisant les équations (1.169), (1.172) et (1.175) dans (1.162), on peut déterminer le tenseur des rigidités.

1.4.2 Avec loi d'interface

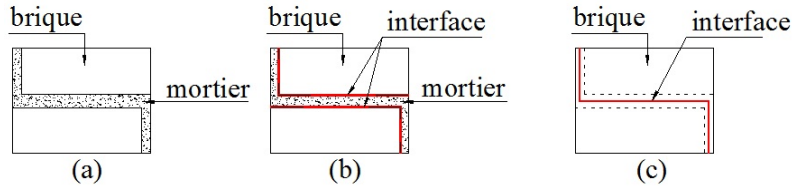


FIGURE 1.21 – Modélisation des structures maçonnées (a) : approche micro-détaillée (b) et approche micro-simplifiée (c)

À partir d'un point de vue du nombre de constituants, des modèles à deux ou trois phases ont été développés [6, 62]. Dans les modèles à trois phases correspondants à une approche micro-détaillée, les briques et le mortier sont représentés par des éléments continus alors que l'interface entre eux est représentée par des éléments discontinus (figure (1.21)-b). Dans les modèles à deux phases, correspondants à une approche micro-simplifiée, les joints ne sont pas représentés puisque les briques sont élargies, et l'interface brique/mortier est reproduite par des éléments discontinus (voir figure (1.21)-c). [63] a montré que la première approche donne des résultats très précis, notamment au niveau local dans le cas de mortiers épais. La deuxième est convenable pour un mortier fin. Dans le cas d'un mortier épais, une certaine précision est évidemment perdue. La méthode numérique EF sera développée dans la thèse en utilisant l'interface entre brique et mortier dans le cas de mortiers épais (cas des maçonneries classiques) et dans le cas de mortiers fins (cas des garnissages réfractaires).

1.5 Conclusions

Dans ce premier chapitre, nous avons rappelé dans un premier temps l'état de l'art de la modélisation d'une maçonnerie. Deux types de méthodes sont décrites : l'approche analytique qui se base sur le problème d'Eshelby pour un milieu sec et sur le problème d'homogénéisation d'un milieu saturé, et l'approche numérique MEF qui utilise le concept de motif morphologique représentatif. Comme l'approche numérique est proche du résultat du modèle analytique de MT dans le cas isotrope transverse, et du modèle analytique de PCW dans le cas isotrope, et que l'estimation de MT apparaît comme un cas limite de l'approche de PCW ($w_d \rightarrow 0$), alors on s'intéresse uniquement à l'estimation de MT dans cette étude. Ensuite, pour le comportement d'un matériau poreux saturé, quatre modèles (Thomsen, *B&K*, *S&K* et *K&L*) sont considérés et comparés. On trouve que les modèles de Thomsen, *B&K* et *K&L* ne sont quasi-identiques que dans le cas de fissures parallèles sans pores. On observe aussi que le modèle de *K&L* donne des estimations de $\tilde{E}^m$ inférieures à celles des autres modèles parce qu'il a pris en compte l'influence des vitesses des ondes élastiques. De plus, le modèle de *K&L* permet de considérer un paramètre géométrique des fissures γ et il donne aussi des estimations analytiques du tenseur de rigidité quand γ tend vers 0 avec des fissures sèches.

Chapitre 2

Approche multi-échelle pour une maçonnerie dans différents états

Sommaire

2.1	Introduction	49
2.2	Modèles d'interface de l'assemblage brique/ mortier microfissuré	52
2.2.1	Modèles d'interface existants	52
2.2.2	Modèles d'interface proposés à l'état sec	55
2.2.3	Modèles d'interface proposés à l'état saturé	58
2.3	Modèle d'interphase de Kanaun et Levin	61
2.3.1	Cas de fissures à orientation aléatoire	62
2.3.2	Cas de fissures parallèles	62
2.4	Homogénéisation de maçonneries élastiques avec fissures et pores	64
2.4.1	Approche numérique	65
2.4.2	Approche analytique	72
2.5	Conclusions	74

2.1 Introduction

La durabilité des structures maçonnées dépend fortement de leur résistance aux efforts de cisaillement conduisant à des interactions entre les constituants de la maçonnerie (briques et mortier) comme montré dans des campagnes expérimentales menées dans [3, 59, 63–65]. Pour mieux comprendre ces phénomènes et expliquer leur influence sur le comportement mécanique global de la maçonnerie, beaucoup de recherches ont porté sur la modélisation et la définition de lois d'interface [3, 66–68]. Dans ces études, les briques peuvent être considérées comme rigides ou déformables. Notons que ces phénomènes d'interaction non élastiques se produisent essentiellement au niveau des discontinuités suivantes :

1. L'interphase [26, 30] (de faible épaisseur) de type :
 - interphase brique/brique où le joint de mortier représente cette interphase
 - interphase mortier/brique où l'interphase fait intervenir une faible épaisseur de la brique et du mortier [54].
2. L'interface [64] (d'épaisseur négligeable) : une ligne de liaison localisée entre la brique et le joint de mortier.

Dans le cadre de notre étude, l'interphase utilisée dans le chapitre (3) est basée sur l'extension des calculs analytiques de Cecchi et Tralli [36]. Dans ce chapitre, on s'intéresse à

trouver la loi d'interface pour un mortier élastique linéaire avec microfissures avec ou sans pores secs ou saturés.

L'homogénéisation périodique de la maçonnerie avec ou sans loi d'interface sera réalisée dans ce chapitre pour des états différents (cf. figure (2.1)). Rappelons que la loi de com-

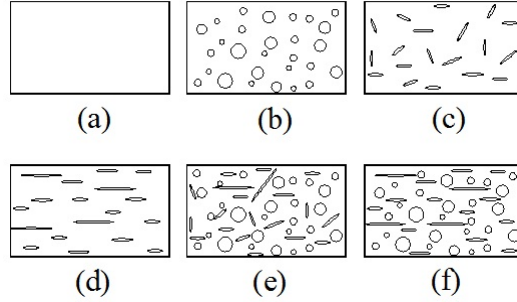


FIGURE 2.1 – États considérés du mortier : Mortier sain sans pores sphériques ou ellipsoïdaux (a), Mortier sain avec pores (b), Mortier avec microfissures à distribution aléatoire et sans pores (c), Mortier avec microfissures à distribution parallèle et sans pores (d), Mortier poreux avec microfissures à distribution aléatoire (e), Mortier poreux avec microfissures à distribution parallèle (f).

portement globale d'un matériau élastique linéaire de symétrie isotrope transverse d'axe $\vec{e}_3$ caractérisée par cinq modules élastiques indépendants, peut se mettre d'après la loi de Hooke généralisée sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{1111}^0 & \bar{S}_{1122}^0 & \bar{S}_{1133}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{1122}^0 & \bar{S}_{1111}^0 & \bar{S}_{1133}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{3311}^0 & \bar{S}_{3311}^0 & \bar{S}_{3333}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{1313}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{1313}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\bar{S}_{1111}^0 - \bar{S}_{1122}^0)/2 \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

D'autre part, la loi de Hooke généralisée fournit la définition suivante du tenseur de souplesse du comportement global :

$$\bar{\mathbb{S}}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_1} & -\frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_1} & -\frac{\bar{\nu}_{31}}{\bar{E}_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & \frac{1}{\bar{E}_1} & -\frac{\bar{\nu}_{31}}{\bar{E}_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_1} & -\frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_1} & \frac{1}{\bar{E}_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\mu}_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\mu}_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \bar{\nu}_{12})}{\bar{E}_1} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Afin de construire une loi d'interface, Page [30] fut un des premiers auteurs à avoir supposé un comportement élastique linéaire pour la brique avec des joints modélisés par des éléments d'interface de comportement non-linéaire dont les rigidités normale et tangentielle sont déterminées par la loi contrainte-déformation. Depuis, les modèles des joints de

mortier se sont complexifiés en introduisant, par exemple, des modèles d'interface élastique couplés à l'endommagement de l'interface [69] ou à l'élasto-plasticité [70] avec un critère de glissement de Coulomb [71, 72]. Le comportement plastique de l'interface est modélisé, quant à lui, à l'aide de critères multi-surfaces qui prennent en compte le comportement en traction, en cisaillement et en compression. On distingue ici deux modèles micromécaniques : les modèles micromécaniques discrets qui considèrent la maçonnerie comme un ensemble d'éléments reliés entre eux par des lois de contact et les modèles micromécaniques continus qui prennent en compte les phénomènes de plasticité et d'endommagement de la maçonnerie. Le modèle discret introduit des lois de contact non-réguliers de type conditions de Signorini [73] ou frottements secs de Coulomb [17, 74–76] ou encore des lois de contact régulier dont le mouvement est décrit par les équations de Newton-Euler [75, 77]. Ces modèles requièrent un grand nombre de paramètres, notamment au niveau des lois de contact, qu'il n'est pas toujours évident de mesurer. Dans l'approche continue, le comportement non-linéaire de la maçonnerie n'est pas retranscrit au travers de lois d'interaction mais par le comportement de différents constituants (briques, mortier, interfaces) [61, 78]. C'est dans cette deuxième catégorie d'approches que s'inscrit ce chapitre.

Pour définir une loi d'interface, on propose de coupler des techniques d'homogénéisation à l'analyse asymptotique [63] selon les deux étapes suivantes :

- Étape 1 : Homogénéisation du comportement du mortier supposé contenir des fissures et pores en se servant des techniques d'homogénéisation disponibles dans la littérature (schémas DL, MT, PCW [37, 38]) pour le cas sec et Levin [53] pour le cas saturé (schémas AC) ou en utilisant le couplage entre les théories de glissement linéaire et de substitution de fluide (modèles de Thomsen [50], B&K [51], S&K [52]) pour le cas saturé. Cette étape permet d'obtenir le milieu homogène équivalent (MHE) au mortier poreux et/ou microfissuré.
- Étape 2 : On suppose que le MHE équivalent au mortier poreux et/ou microfissuré est de faible épaisseur e . Les propriétés mécaniques de l'interface peuvent alors être obtenues à l'aide des techniques d'analyse asymptotique. Ainsi, les rigidités normale C_N et tangentielle C_T de l'interface sont définies comme suit :

$$C_N = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\tilde{C}_L}{e}, \quad C_T = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mu}_L}{e} \quad (2.3)$$

où $\tilde{C}_L = \tilde{C}_{3333}$ et $\tilde{\mu}_L = \tilde{C}_{1313}$ dans le cas considéré d'isotropie transverse d'axe de révolution $\vec{e}_3$. L'annexe (C.1.1) fournit plus de détails sur le développement mathématique conduisant aux expressions (2.3) des rigidités normales et tangentielles de l'interface brique/mortier.

Aussi, les applications basées sur les modèles de Shafiro et Kachanov [52], de Thomsen [50], et de Brown et Korranga [51] permettent de déduire la loi d'interface dans le cas saturé. De son côté, l'estimation du modèle de Mori-Tanaka est adaptée pour l'interface dans le cas sec. Si les limites (2.3) ne sont pas finies à cause d'un problème mathématique, l'analyse asymptotique pour l'interphase (cf. Annexe (C.1.2)) est une alternative raisonnable comme, par exemple le modèle d'interphase de Klarbring [54]. Dans ce cas, le modèle de Levin [53] peut fournir analytiquement la loi d'interphase.

Après avoir trouvé la loi d'interface, nous utilisons une approche micro-macro pour l'homogénéisation périodique de la maçonnerie. Pour la première application, les maçonneries 1D et 2D peuvent être considérées comme un matériau composite périodique à deux phases

supposées élastiques linéaires isotropes (brique, mortier). Pour la deuxième application, on considère une troisième phase : l'interface représentée par des éléments discontinus (cf. section (1.4.2)). La démarche suivie dans ce chapitre est expliquée dans la figure (2.2).

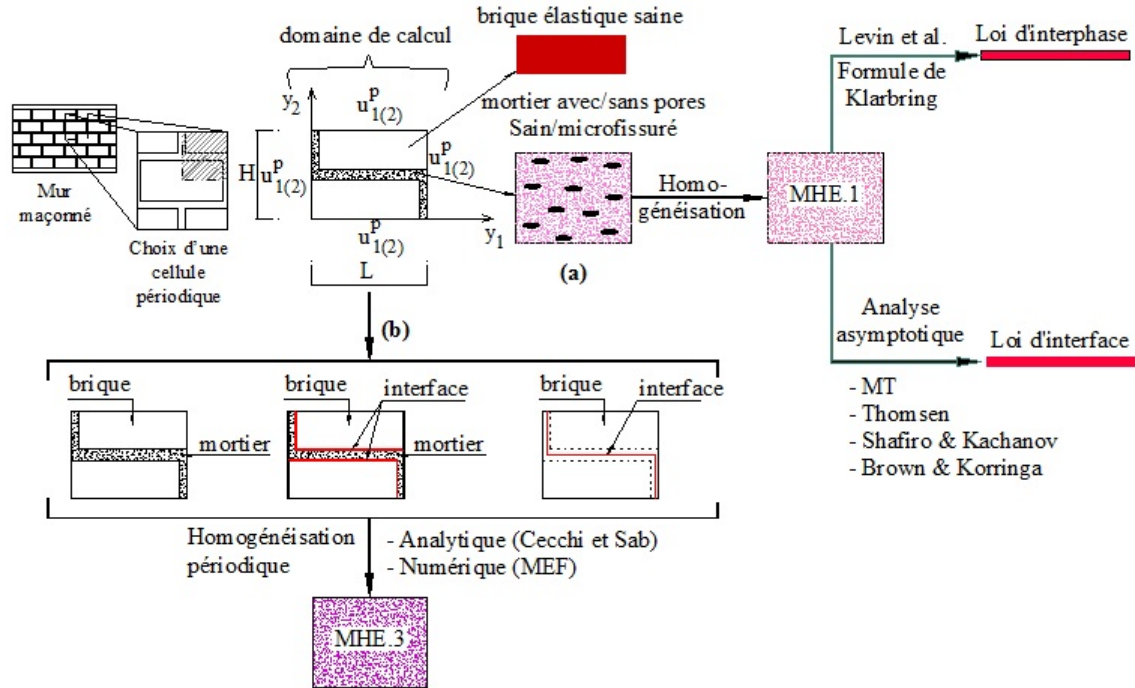


FIGURE 2.2 – Démarche générale suivie pour la définition de la loi d'interface ou interphase (a) et du comportement global de maçonnerie (b).

2.2 Modèles d'interface de l'assemblage brique/ mortier microfissuré

2.2.1 Modèles d'interface existants

De nombreuses analyses sur le comportement des maçonneries considèrent seulement deux matériaux (la brique et le mortier). Néanmoins, les résultats expérimentaux montrent que la rupture intervient souvent à l'interface brique/mortier parce que celle-ci présente la plus faible résistance responsable de l'initiation et de la propagation de fissures [59]. Par cette approche, on peut supposer l'existence d'un troisième matériau, comme étant un mélange de deux phases (brique et mortier), localisé entre elles.

Rekik et al. [59, 63, 64] proposent pour l'interface endommageable une méthodologie qui comprend le couplage entre la théorie de l'homogénéisation, les techniques asymptotiques et la MEF. Dans ces travaux, l'interface apparaît comme un troisième matériau entre brique et mortier et est constituée d'un mélange de brique et de mortier de densité de fissures d_c . Les trois étapes de la méthodologie suivie sont détaillées en [59] (cf. figure (2.3)).

De l'homogénéisation analytique exacte d'un stratifié de deux couches, d'épaisseur égale de brique et mortier ($\varphi_b = \varphi_m = 50\%$), on déduit les propriétés mécaniques de la 3^e phase. Ce schéma se déroule alors en trois étapes :

Premièrement, c'est la définition d'un 1^{er} milieu homogénéisé équivalent (MHE-1) (cf.

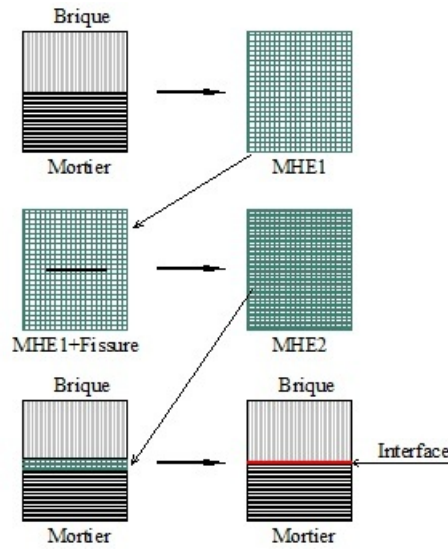


FIGURE 2.3 – Méthodologie multi-échelle d'interface d'après [59].

Fig (2.3)-a). La seconde étape suppose la présence de microfissures dans MHE-1 (cf. Fig (2.3)-b). Le recours au modèle d'homogénéisation de Kachanov [79] permet d'estimer le comportement effectif de MHE-1 microfissuré, définissant ainsi un nouveau MHE noté MHE-2. En supposant que l'épaisseur de MHE-2 tend vers 0 (négligeable) et en utilisant la technique d'analyse asymptotique (cf. Annexe (C.1.1)), il est possible de définir les rigidités normale C_N et tangentielle C_T de cette interface, supposée assurer la liaison entre brique et mortier. Ainsi, le comportement de la maçonnerie brique/mortier/interface est déterminé grâce à la MEF. Il s'en suit le détail des trois étapes de modélisation.

(i) Étape (a)

Les briques et le mortier sont supposés homogènes et isotropes. La loi de comportement locale pour chacun de ces matériaux s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{b,m} = \mathbb{S}_{ijkl}^{b,m} : \sigma_{kl} \quad (2.4)$$

L'homogénéisation analytique appliquée au composite stratifié défini auparavant (cf. figure (2.3)-a) fournit la loi macroscopique suivante :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\mathbb{S}}^0 : \bar{\sigma} \quad (2.5)$$

où $\bar{\mathbb{S}}^0$ est le tenseur isotrope transverse de souplesse, et :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \sum_{r=b,m} \varphi^r \bar{\varepsilon}_{ij}^r = \sum_{r=b,m} \varphi^r \mathbb{S}_{ijkl}^r : \bar{\sigma}_{ij}^r \quad (2.6)$$

avec φ^r la fraction volumique et $\mathbb{S}^r$ le tenseur de souplesse du composant r . Les tenseurs $\bar{\varepsilon}^r$ et $\bar{\sigma}^r$ sont définis par $\bar{\varepsilon}^r = \langle \varepsilon \rangle^r$ et $\bar{\sigma}^r = \langle \sigma \rangle^r$.

Pour déterminer les 5 composantes de $\bar{\mathbb{S}}^0$ (cf. (2.2)), on considère 4 types de chargements comme présentés ci-dessous sur la figure (2.4). Le détail des calculs pour les quatre cas de

chargements est rappelé dans l'annexe (C.2)). Enfin, les modules d'élasticité effectifs du matériau non fissuré MHE-1 s'écrivent comme suit :

$$\bar{E}_1^0 = \frac{1}{\bar{S}_{1111}^0}, \quad \bar{E}_3^0 = \frac{1}{\bar{S}_{3333}^0}, \quad \bar{\nu}_{13}^0 = -\frac{\bar{S}_{1133}^0}{\bar{S}_{1111}^0}, \quad \bar{\mu}_{13}^0 = \frac{1}{2\bar{S}_{1313}^0} \quad (2.7)$$

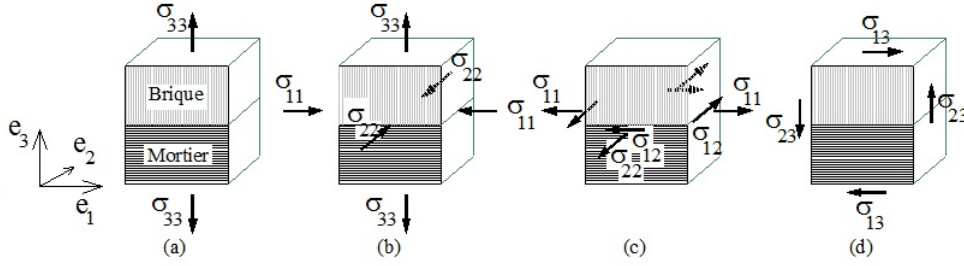


FIGURE 2.4 – Chargements considérés : compression uniaxiale (a), chargement axisymétrique (b), chargement mixte (c) et cisaillement longitudinal (d).

(ii) Étape (b)

Comme indiqué sur la figure (2.3), on suppose que le matériau précédent MHE-1 est fissuré avec la densité de fissures $d_c = \frac{1}{eL_0} \sum_k (l^{(k)})^2$. L_0 et e sont respectivement la largeur et l'épaisseur du joint et $l^{(k)}$ est la demi-longueur de la fissure k .

À l'état sec, le modèle proposé par Kachanov [79] permet d'estimer les propriétés macroscopiques du matériau avec N fissures comme suit :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\mathbb{S}} : \bar{\sigma} = \bar{\mathbb{S}}^0 : \bar{\sigma} + \frac{1}{eL_0} \sum_{k=1}^N (e_3 \otimes \langle b \rangle + \langle b \rangle \otimes e_3)^{(k)} l^{(k)} = (\bar{\mathbb{S}}^0 + \Delta \bar{\mathbb{S}}) : \bar{\sigma} \quad (2.8)$$

où $\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}}^0 + \Delta \bar{\mathbb{S}}$ est le tenseur de souplesse effective et $\bar{\mathbb{S}}^0$ est celui de MHE-1 (cf. équation (C.53)). $\Delta \bar{\mathbb{S}}$ est l'inconnue due à la présence de fissures. $\langle b \rangle^{(k)}$ est la moyenne du vecteur ouverture de fissure (COD) tel que :

$$\langle b \rangle^{(k)} = e_3 \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{B}^{(k)} \quad (2.9)$$

Dans cette expression, $\mathbf{B}^{(k)}$ est le tenseur COD de la fissure k dépendant de $\bar{\mathbb{S}}^0$ et de la longueur de fissure $l^{(k)}$. Pour le cas orthotrope avec des fissures à distribution aléatoire, $\mathbf{B}^{(k)}$ s'écrit :

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}_{11} e_1 \otimes e_1 + \mathbf{B}_{33} e_3 \otimes e_3 + \mathbf{B}_{13} e_1 \otimes e_3 + \mathbf{B}_{31} e_3 \otimes e_1 \quad (2.10)$$

Si la ligne de fissure (k) forme un angle φ avec l'axe $\vec{e}_1$, $\mathbf{B}^{(k)}$ peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{11} &= C(1 - D \cos 2\beta)l \\ \mathbf{B}_{33} &= C(1 + D \cos 2\beta)l \\ \mathbf{B}_{13} &= \mathbf{B}_{31} = CD(\sin 2\beta)l \end{cases} \quad (2.11)$$

avec

$$C = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{\bar{E}_1^0} + \sqrt{\bar{E}_3^0}}{\sqrt{\bar{E}_1^0 \bar{E}_3^0}} \left(\frac{1}{\bar{\mu}_{13}^0} - \frac{2\bar{\nu}_{13}^0}{\bar{E}_1^0} + \frac{2}{\sqrt{\bar{E}_1^0 \bar{E}_3^0}} \right)^{1/2}, \quad D = \frac{\sqrt{\bar{E}_1^0} - \sqrt{\bar{E}_3^0}}{\sqrt{\bar{E}_1^0} + \sqrt{\bar{E}_3^0}} \quad (2.12)$$

β est l'angle moyen d'orientation des fissures. Le modèle de Kachanov [79] exprime les propriétés effectives de MHE-2 comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_1^0} = \frac{1}{1 + 2\rho \sin^2 \beta (B_{11} \cos^2 \varphi + B_{33} \sin^2 \beta - B_{13} \sin 2\beta) \bar{E}_1^0} \\ \frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_3^0} = \frac{1}{1 + 2\rho \cos^2 \beta (B_{11} \sin^2 \beta + B_{33} \cos^2 \beta + B_{13} \sin 2\beta) \bar{E}_3^0} \\ \frac{\bar{\mu}_{13}}{\bar{\mu}_{13}^0} = \frac{1}{1 + \rho (B_{33} \sin^2 2\beta - B_{11} \cos^2 2\beta - B_{13} \sin 4\beta) \bar{\mu}_{13}^0} \\ \frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_1} = \frac{\bar{\nu}_{13}^0}{\bar{E}_1^0} \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans le cas où $\beta = 0$, (2.13) conduit aux propriétés effectives suivantes :

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_1^0, \quad \bar{E}_3 = \frac{\bar{E}_3^0}{1 + 2\rho \mathbf{B}_{nn} \bar{E}_3^0}, \quad \bar{\mu}_{13} = \frac{\bar{\mu}_{13}^0}{1 + \rho \mathbf{B}_{tt} \bar{\mu}_{13}^0}, \quad \bar{\nu}_{13} = \bar{\nu}_{13}^0 \quad (2.14)$$

avec $\mathbf{B}_{nn} = C(1 + D)l$ et $\mathbf{B}_{tt} = C(1 - D)l$.

(iii) Étape (c)

La loi d'interface est donnée sous la forme ([59, 63, 64]) :

$$C_N = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\tilde{C}_{3333}}{e}, \quad C_T = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\tilde{C}_{1313}}{e} \quad (2.15)$$

Les techniques d'analyse asymptotique (cf. Annexe (C.1.1)) conduisent à la formulation des rigidités normale C_N et tangentielle C_T de l'interface par :

$$C_N = \frac{L_0}{2C(1 + D)l^3} = \frac{1}{d_c} \frac{1}{2C(1 + D)}, \quad C_T = \frac{L_0}{4C(1 - D)l^3} = \frac{1}{d_c} \frac{1}{4C(1 - D)} \quad (2.16)$$

$$\text{où } d_c = Nl^3 = \frac{l^3}{L_0}.$$

2.2.2 Modèles d'interface proposés à l'état sec

On note que l'approche indiquée dans la section précédente est en accord avec des résultats expérimentaux valables dans la littérature. Cela montre que la rupture intervient au niveau de l'interface. Les essais ont été menés sur des maçonneries avec joints de mortier d'épaisseur non négligeable [61, 80]. Cependant, pour les structures réfractaires, l'épaisseur du mortier est faible (de 2 à 3 mm) avec une rigidité beaucoup plus faible que celle de la brique. Dans ce cas, il est possible d'assimiler le mortier à une interface comme indiqué sur la figure (2.5)-b. Une autre alternative consiste à modéliser l'ensemble des trois phases : brique/mortier et interface (cf. figure (2.5)-a). Pour les deux cas, (a) et (b), les propriétés

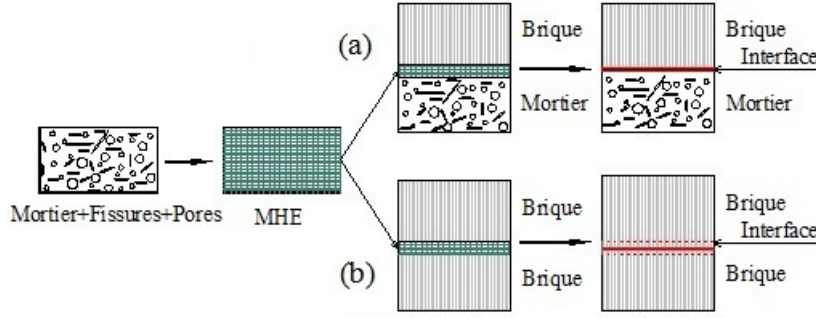


FIGURE 2.5 – Méthodologie multi-échelle d'interface proposée : (a) cas d'un mortier épais, (b) cas d'un mortier fin.

de l'interface découlent de l'application des techniques d'analyse asymptotique au matériau homogène équivalent MHE au mortier microfissuré (poreux ou non). Les propriétés effectives de ce dernier sont estimées à l'aide d'une technique d'homogénéisation. Ainsi, différentes configurations de distribution de pores et de microfissures sont envisagées dans le mortier.

On rappelle que la densité de fissures $d_c = N_c l^3 / (e \cdot S) = N l^3$ (cf. (1.29)) avec $N = N_c / (e \cdot S)$ et la fraction volumique de fissures $\phi_c = 4\pi d_c \gamma / 3$ (cf. (1.99)) sont fonction de l'épaisseur du joint e . Alors, $\tilde{C}_L$ et $\tilde{\mu}_L$ dans les équations (2.3) s'écrivent en fonction de e . Les équations (2.3) ont une limite finie si $\tilde{C}_L/e$ et $\tilde{\mu}_L/e$ possèdent un numérateur d'une puissance en e de degré supérieur à celui du dénominateur.

Dans le cas d'un mortier sec, poreux ou microfissuré, seule l'estimation du schéma de MT satisfait à cette condition. Celle-ci est alors utilisée pour déduire la loi d'interface exprimée ci-dessous selon des différents états du mortier. On rappelle que E_d , μ_d , ν_d sont respectivement le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu sec supposé isotrope.

(i) Cas d'un mortier non-poreux contenant des fissures parallèles

Les équations (1.55), (2.2) et (2.3) conduisent aux raideurs suivantes :

$$\begin{cases} C_N^{c||p} = \frac{3E_d S}{16a^3 N_c (1 - \nu_d^2)} = \frac{1}{d_c} \frac{3E_d}{16e(1 - \nu_d^2)} \\ C_T^{c||p} = \frac{3\mu_d S}{16a^3 N_c (1 - \nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{3\mu_d}{16e(1 - \nu_d)} \end{cases} \quad (2.17)$$

Ceci implique que : $C_N/C_T = 2$.

(ii) Cas d'un mortier poreux (pores sphériques) avec des fissures parallèles

$$\begin{cases} C_N^{c||p} = \frac{3E_d S (7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)}{320a^3 N_c (1 - \nu_d^2)(-4 + 5\nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{3E_d (7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)}{320e(1 - \nu_d^2)(-4 + 5\nu_d)} \\ C_T^{c||p} = \frac{3\mu_d S (7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)}{320a^3 N_c (1 - \nu_d)(-4 + 5\nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{3\mu_d (7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)}{320e(1 - \nu_d)(-4 + 5\nu_d)} \end{cases} \quad (2.18)$$

Ceci implique aussi que : $C_N/C_T = 2$.

(iii) Cas d'un mortier non-poreux avec des fissures à orientation aléatoire

$$\begin{cases} C_N^c = \frac{9E_d S(5 - 2\nu_d)}{16a^3 N_c(1 - \nu_d^2)(5 - \nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{9E_d(5 - 2\nu_d)}{16e(1 - \nu_d^2)(5 - \nu_d)} \\ C_T^c = \frac{45\mu_d S(2 - \nu_d)}{32a^3 N_c(1 - \nu_d)(5 - \nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{45\mu_d(2 - \nu_d)}{32e(1 - \nu_d)(5 - \nu_d)} \end{cases} \quad (2.19)$$

Avec ces relations, il est aisé de déduire que : $\frac{C_N^c}{C_T^c} = \frac{4(5 - 2\nu_d)}{5(2 - \nu_d)} \geq 2$ et $\frac{C_N^c}{C_T^c} = 2$ pour $\nu_d = 0$.

(iv) Cas d'un mortier poreux (pores sphériques) avec des fissures à orientation aléatoire

$$\begin{cases} C_N^{cp} = \frac{9E_d S(7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)(59 - 65\nu_d)}{640a^3 N_c(1 - \nu_d^2)(4 - 5\nu_d)(-31 + 35\nu_d)} \\ \quad = \frac{1}{d_c} \frac{9E_d(7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)(59 - 65\nu_d)}{640e(1 - \nu_d^2)(4 - 5\nu_d)(-31 + 35\nu_d)} \\ C_T^{cp} = \frac{45\mu_0 S(7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)(23 - 25\nu_d)}{1280a^3 N_c(1 - \nu_d)(4 - 5\nu_d)(-31 + 35\nu_d)} \\ \quad = \frac{1}{d_c} \frac{45\mu_0(7 - 5\nu_d)(13 - 15\nu_d)(23 - 25\nu_d)}{1280e(1 - \nu_d)(4 - 5\nu_d)(-31 + 35\nu_d)} \end{cases} \quad (2.20)$$

On trouve que : $\frac{C_N^c}{C_T^c} = \frac{4(59 - 65\nu_d)}{23 - 25\nu_d}$.

À partir des équations pour différents cas de mortier, on constate, quelle que soit la configuration considérée, que les raideurs C_N et C_T ne dépendent pas du nombre de pores N_p mais dépendent non-linéairement de $d_c = N_c a^3 / (e^h S)$. Les équations de (2.17) à (2.20) montrent clairement que la densité de pores ϕ_p n'est pas dans ces équations, mais elle influence les estimations de C_N et C_T si on les prend en compte. Les évolutions des raideurs

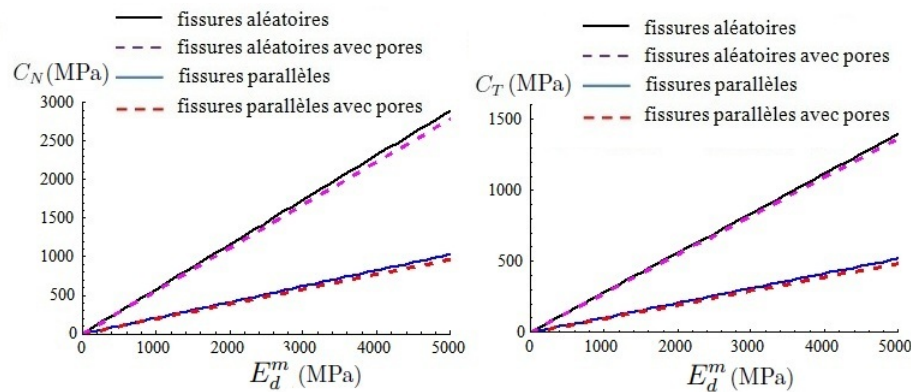


FIGURE 2.6 – Évolutions des raideurs d'interface C_N et C_T (en MPa) en fonction de E_d (en MPa) ($d_c = 0, 1$, $\nu_d = 0, 3$ et $e^h = 10mm$).

de la figure (2.6) confirment que les valeurs de C_N et C_T dépendent linéairement de E_d . Par ailleurs, sans avoir d'estimations de la porosité, on obtient des valeurs plus élevées dans le cas non-poreux comparé au cas poreux : ce qui est bien conforme au fait que les porosités augmente la souplesse du matériau.

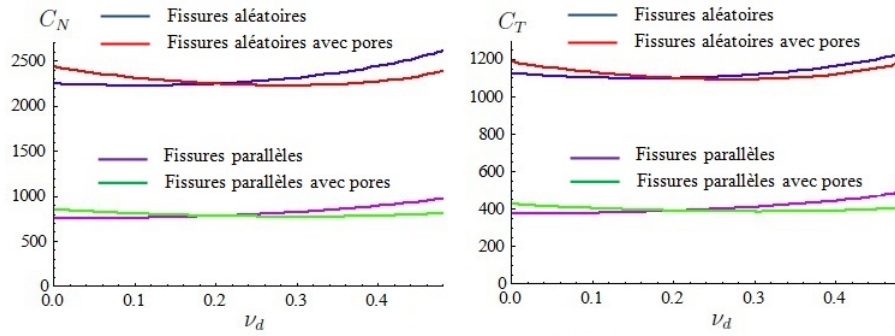


FIGURE 2.7 – Évolutions des raideurs d'interface C_N et C_T (en MPa) en fonction de ν_d ($d_c = 0, 1$, $E_d = 4000$ MPa et $e^h = 10mm$).

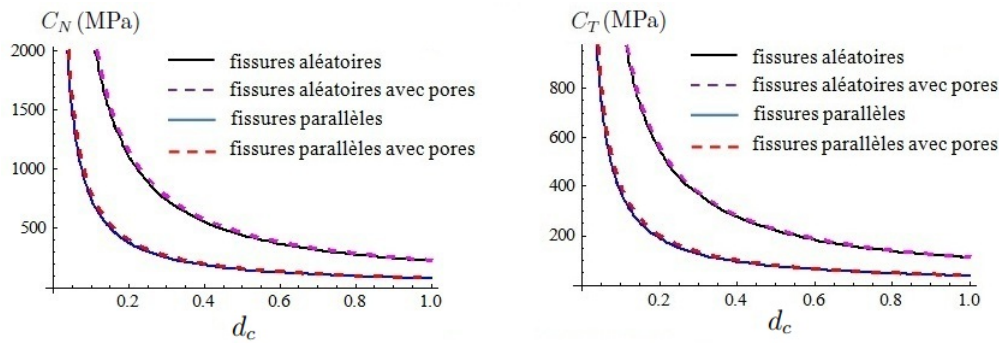


FIGURE 2.8 – Évolutions des raideurs d'interface C_N et C_T (en MPa) en fonction de d_c ($\nu_d = 0, 1$; $E_d = 4000$ MPa et $e^h = 10mm$).

Par contre, les évolutions des raideurs d'interface C_N et C_T en fonction de ν_d présentées sur la figure (2.7) montrent que les raideurs C_N et C_T ne sont pas linéairement dépendantes de ν_d . Dans le cas d'un mortier poreux, les raideurs d'interface croissent quand $\nu_d < 0, 2$, décroissent quand $\nu_d > 0, 2$ et restent constantes quand $\nu_d = 0, 2$.

La figure (2.8) montre les évolutions non-linéaires des raideurs d'interface C_N et C_T en fonction de d_c . Les valeurs baissent rapidement dans l'intervalle $[0; 0, 2]$. Au-delà de cet intervalle, C_N et C_T tendent lentement vers 0. En comparant les états avec ou sans pores, le cas poreux donne des raideurs en fonction de d_c un peu plus élevées que celles du cas non-poreux, malgré que nous ne connaissons pas la densité de pores. De plus, l'erreur absolue entre ces deux cas reste constante quand d_c change de valeur (6% d'erreur dans le cas de fissures parallèles avec/sans pores, 4% pour des fissures aléatoires avec/sans pores). Le cas de fissures parallèles donne toujours des valeurs de C_N et C_T beaucoup plus petites que pour le cas de fissures aléatoires.

2.2.3 Modèles d'interface proposés à l'état saturé

Afin d'estimer le comportement effectif d'un mortier avec des pores et/ou des microfissures saturées, on propose d'appliquer les approches de Thomsen [50], de Brown et Korrington [51] et de Shafiro et Kachanov [52] (cf. section (1.3)). Les raideurs d'interface sont déterminées comme montré dans l'équation (2.3). Dans la suite, les raideurs d'interface sont déduites suivant ces modèles pour différents cas de mortier. Notons que k_d , k_f et k_0 sont les modules

de compressibilité respectivement du milieu sec, du fluide saturant et du milieu minéral. μ_d et μ_0 sont les modules de cisaillement respectivement du milieu sec et du milieu minéral.

(a) Modèle de Thomsen

(i) Cas d'un mortier non-poreux avec des fissures parallèles

$$\begin{cases} C_N^{c||} = \frac{3S}{16a^3N_c} \left(\frac{4k_0k_f}{\gamma\pi(k_0 - k_f)} + \frac{E_d}{(1 - \nu_d^2)} \right) = \frac{1}{d_c} \frac{3}{16e} \left(\frac{4k_0k_f}{\gamma\pi(k_0 - k_f)} + \frac{E_d}{(1 - \nu_d^2)} \right) \\ C_T^{c||} = \frac{3\mu_0S(2 - \nu_d)}{16a^3N_c(1 - \nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{3\mu_0(2 - \nu_d)}{16e(1 - \nu_d)} \end{cases} \quad (2.21)$$

où $\gamma = a_3/a$.

(ii) Cas d'un mortier poreux avec des fissures parallèles

$$\begin{cases} C_N^{c||p} = \frac{3S}{16} \left(\frac{4k_0k_f}{\pi(a^2a_3N_c + b^3N_p)(k_0 - k_f)} + \frac{E_d}{a^3N_c(1 - \nu_d^2)} \right) \\ = \frac{1}{d_c} \frac{3}{16e} \left(\frac{4k_0k_f\phi_c}{\gamma\pi(k_0 - k_f)(\phi_c + \phi_p)} + \frac{E_d}{(1 - \nu_d^2)} \right) \\ C_T^{c||p} = \frac{3\mu_0S(2 - \nu_d)}{16a^3N_c(1 - \nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{3\mu_0(2 - \nu_d)}{16e(1 - \nu_d)} \end{cases} \quad (2.22)$$

(b) Modèle de Brown et Korringa ($B\&K$)

(i) Cas d'un mortier non-poreux avec des fissures parallèles

$$\begin{cases} C_N^{c||} = \frac{3S}{16a^3N_c} \left(\frac{4k_dk_f}{\gamma\pi(k_0 - k_f)} + \frac{E_d}{(1 - \nu_d^2)} \right) = \frac{1}{d_c} \frac{3}{16e} \left(\frac{4k_dk_f}{\gamma\pi(k_0 - k_f)} + \frac{E_d}{(1 - \nu_d^2)} \right) \\ C_T^{c||} = \frac{3\mu_dS(2 - \nu_d)}{16a^3N_c(1 - \nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{3\mu_d(2 - \nu_d)}{16e(1 - \nu_d)} \end{cases} \quad (2.23)$$

(ii) Cas d'un mortier poreux avec des fissures parallèles

$$\begin{cases} C_N^{c||p} = \frac{3S}{16} \left(\frac{4k_dk_f}{\pi(a^2a_3N_c + b^3N_p)(k_0 - k_f)} + \frac{E_d}{a^3N_c(1 - \nu_d^2)} \right) \\ = \frac{1}{d_c} \frac{3}{16e} \left(\frac{4k_dk_f\phi_c}{\gamma\pi(k_0 - k_f)(\phi_c + \phi_p)} + \frac{E_d}{(1 - \nu_d^2)} \right) \\ C_T^{c||p} = \frac{3\mu_dS(2 - \nu_d)}{16a^3N_c(1 - \nu_d)} = \frac{1}{d_c} \frac{3\mu_d(2 - \nu_d)}{16e(1 - \nu_d)} \end{cases} \quad (2.24)$$

Si $k_d = k_0$ et $\mu_d = \mu_0$, on retrouve les résultats fournis par le modèle de Thomsen (cf. équations (2.21) et (2.22)).

(c) Modèle de Shafiro et Kachanov ($S\&K$)

(i) Cas d'un mortier non-poreux contenant des fissures parallèles

$$\begin{cases} C_N^{c||} = \frac{3S}{16a^3N_c} \left(\frac{4k_0}{\gamma\pi(k_0\kappa - 1)} + \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)} \right) = \frac{1}{d_c} \frac{3}{16e} \left(\frac{4k_0}{\gamma\pi(k_0\kappa - 1)} + \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)} \right) \\ C_T^{c||} = \frac{3\mu_0S(2 - \nu_0)}{16a^3N_c(1 - \nu_0)} = \frac{1}{d_c} \frac{3\mu_0(2 - \nu_0)}{16e(1 - \nu_0)} \end{cases} \quad (2.25)$$

Si on suppose que la compressibilité du fluide est l'inverse du module de compressibilité du fluide ($\kappa = \frac{1}{k_f}$), ce modèle conduit à une estimation de raideur normale C_N identique à celle prévue par le modèle de Thomsen (cf. (2.21)-a). Pour des densités de pores et de fissures négligeables ($E_d = E_0$, $\mu_d = \mu_0$ et $\nu_d = \nu_0$), les estimations de Thomsen (2.21), de $B\&K$ (2.23) et de $S\&K$ (2.25) sont très proches. Désormais, on utilise $\kappa = \frac{1}{k_f}$ pour tous les autres cas.

(ii) Cas d'un mortier poreux avec des fissures parallèles

$$\begin{cases} C_N^{c||p} = \frac{3k_0(1-2\nu_0).A.B.S}{4\pi(1-\nu_0^2)4N_c a^3 a_3 A(-1+2\nu_0)(k_0-k_f) + 5N_p b^3 B[k_0(-1+2\nu_0) + k_f(1-\nu_0)]} \\ C_T^{c||p} = \frac{3\mu_0 S(2-\nu_0)(7-5\nu_0)}{2(1-\nu_0)[8a^3 N_c(7-5\nu_0) + 15b^3 N_p \pi(2-\nu_0)]} \end{cases} \quad (2.26)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= [8k_0(-1+2\nu_0) + k_f(1-\nu_0)(3-5\nu_0)], \\ B &= [4ak_f(-1+\nu_0^2) + 3a_3\pi(k_0-k_f)(-1+2\nu_0)] \end{aligned}$$

Les raideurs $C_N^{c||p}$ et $C_T^{c||p}$ dans (2.26) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{C_N^{c||p}} = \frac{1}{\frac{3}{16d_c e} \left(\frac{4k_0}{\gamma\pi(k_0\kappa-1)} + \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} \right)} + \frac{1}{\frac{3k_0 S A(1-2\nu_0)}{20b^3 N_p \pi [k_0(1-2\nu_0) + k_f(-1+\nu_0)]}} \\ \frac{1}{C_T^{c||p}} = \frac{1}{\frac{16ed_c(1-\nu_0)}{3\mu_0 S(2-\nu_0)} + \frac{10b^3 N_p \pi(1-\nu_0)}{\mu_0 S(7-5\nu_0)}} = \frac{1}{C_T^c} + \frac{1}{C_T^p} \end{cases} \quad (2.27)$$

où C_T^p est la raideur d'interface dans le cas d'un mortier poreux sans fissures, voir (2.28). Remarquons que l'estimation de Shafiro et Kachanov est toujours plus élevée que celles prévues par Thomsen (cf. (2.21) et (2.24)) et par $B\&K$ (cf. (2.27)). L'expression de C_T prévue par le modèle de $S\&K$ dépend des paramètres N_c et N_p , alors que celle issue des modèles de Thomsen et $B\&K$ dépend uniquement de N_c . Notons que Shafiro et Kachanov traitent d'autres configurations de fissures et de densité de pores présentées ci-dessous :

(iii) Cas de pores de forme sphérique

$$\begin{cases} C_N^p = \frac{3k_0 S(7-5\nu_0) [k_f(1-\nu_0) + 2k_0(1-2\nu_0)]}{4b^3 N_p \pi(1+\nu_0) [k_f(1-\nu_0)(1+5\nu_0) + k_0(1-2\nu_0)(9+5\nu_0)]} \\ C_T^p = \frac{\mu_0 S(7-5\nu_0)}{10b^3 N_p \pi(1-\nu_0)} \end{cases} \quad (2.28)$$

(iv) Cas de fissures à orientation aléatoire

$$\begin{cases} C_N^c = \frac{135k_0 S(2-\nu_0) [4ak_f(1-\nu_0^2) + 3a_3\pi(k_0-k_f)(1-2\nu_0)]}{16a^3 N_c(1+\nu_0)^2 [16ak_f(1-\nu_0^2) + 3a_3\pi(k_0-k_f)(1-2\nu_0)(10-3\nu_0)]} \\ C_T^c = \frac{15\mu_0 S(2-\nu_0) [4ak_f(1-\nu_0^2) + 3a_3\pi(k_0-k_f)(1-2\nu_0)]}{16a^3 N_c(1-\nu_0) [4ak_f(1-\nu_0^2) + a_3\pi(k_0-k_f)(1-2\nu_0)(5-\nu_0)]} \end{cases} \quad (2.29)$$

(v) Cas de fissures à orientation aléatoire et de pores sphériques

$$\begin{cases} \frac{1}{C_N^{cp}} = \frac{1}{C_N^p} + \frac{1}{C_N^c} \\ \frac{1}{C_T^{cp}} = \frac{1}{C_T^p} + \frac{1}{C_T^c} \end{cases} \quad (2.30)$$

où $C_N^p, C_N^c, C_T^p, C_T^c$ sont les rigidités normales et tangentielles de l'interface définies auparavant (cf. équations (2.28), (2.29)).

Les figures (2.9) et (2.10) montrent les estimations des modèles de Thomsen, de *B&K* et de *S&K* d'un mortier avec des fissures parallèles ou aléatoires. Le mortier initial est supposé sain et sec ($E_d = E_0$). Dans le cas de fissures parallèles avec pores, les estimations des C_N des modèles de Thomsen et de *B&K* sont identiques et plus élevées que celles prédites par le modèle de *S&K*. Dans le cas de fissures parallèles sans pores, les estimations des trois modèles sont identiques. On note que la valeur de C_T ne dépend pas de k_f dans le cas d'un mortier avec fissures parallèles. Dans le cas de fissures aléatoires, C_N et C_T évoluent avec k_f et tendent vers une asymptote (cf. figure (2.10)).

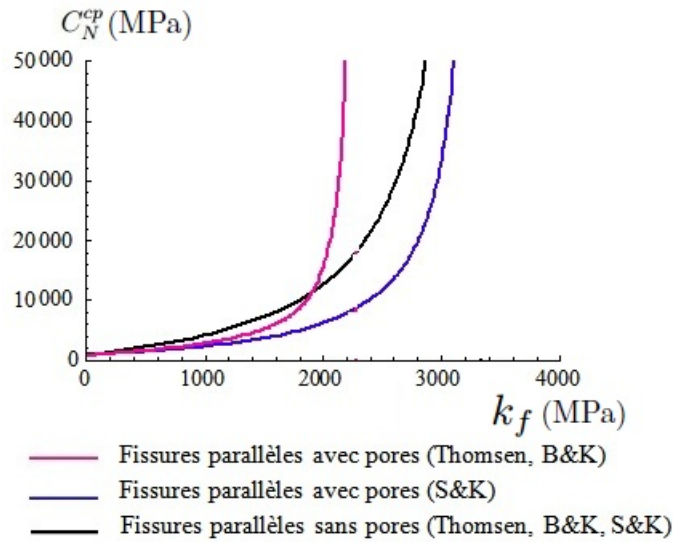


FIGURE 2.9 – Estimation des modèles de Thomsen, *B&K* et *S&K* de la raideur C_N en fonction de la compressibilité du fluide k_f dans le cas d'une distribution isotrope transverse de microfissures saturées pour $d_c = 0,1$ et $\phi_p = 0,05$. Les propriétés élastiques du mortier sain et sec sont données dans la table (2.1).

2.3 Modèle d'interphase de Kanaun et Levin

En présence de fissures, on propose de déterminer la raideur d'interphase par l'estimation de Kanaun et Levin. Nous allons considérer deux cas de fissures.

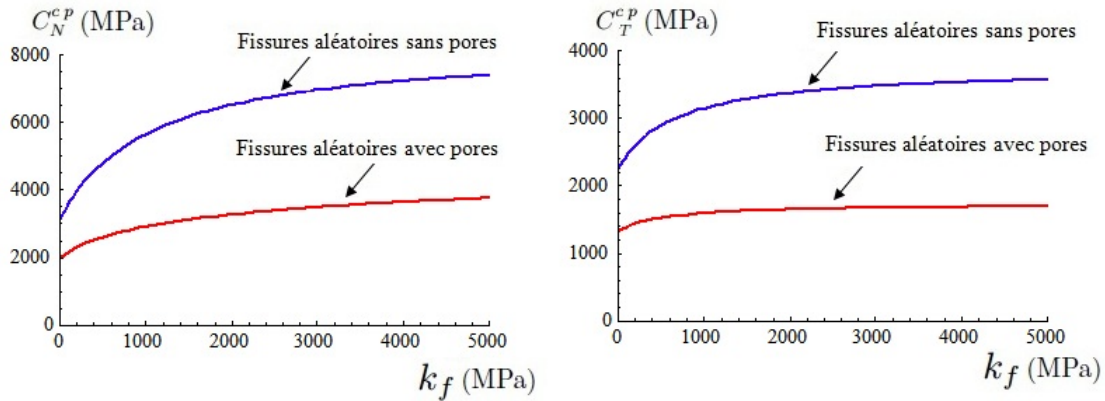


FIGURE 2.10 – Évolutions des estimations de $S\&K$ des raideurs C_N et C_T en fonction du module de compressibilité du fluide k_f dans le cas de distribution isotrope de microfissures saturées. $d_c = 0,1$ et $\phi_p = 0,05$. Les propriétés élastiques du mortier sain et sec sont données dans la table (2.1).

2.3.1 Cas de fissures à orientation aléatoire

À partir des équations constitutives de Klarbring, dans un milieu isotrope, le tenseur de raideur d'interface $\mathbb{K}$ a deux composantes et les propriétés effectives (1.146) donnent :

$$\tilde{C}_{3333} = \tilde{k} + \frac{4}{3}\tilde{\mu} = \frac{k(e + C_2)}{e + C_3} + \frac{20\mu(e + C_5)}{15e + C_6}, \quad \tilde{C}_{1313} = \tilde{\mu} = \frac{15\mu(e + C_5)}{15e + C_6} \quad (2.31)$$

Les valeurs de C_2 , C_3 , C_5 et C_6 sont données dans (1.147). On obtient finalement la loi d'interphase, voir détails dans l'Annexe (C.1) :

$$\mathbb{K} = \frac{1}{e^h} \begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & K'' \end{bmatrix} = \frac{1}{e^h} \begin{bmatrix} \frac{k(e + C_2)}{e + C_3} + \frac{20\mu(e + C_5)}{15e + C_6} & 0 \\ 0 & \frac{15\mu(e + C_5)}{15e + C_6} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Avec $\tilde{\lambda} = \tilde{k} - 2\tilde{\mu}/3$, on peut réécrire $\mathbb{K}$ sous la forme :

$$K^h = \frac{1}{e^h} \left(\tilde{\mu}\mathbb{I} + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right), \quad K^v = \frac{1}{e^v} \left(\tilde{\mu}\mathbb{I} + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right) \quad (2.33)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normale à l'interphase, $\tilde{k}$ et $\tilde{\mu}$ sont les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs, $\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre quatre.

2.3.2 Cas de fissures parallèles

Dans un milieu isotrope transverse, l'expression du tenseur d'élasticité peut s'écrire sous la forme classique (1.157). Pour déterminer les rigidités du joint dans les directions normales et transversales, on s'intéresse à C_{3333} et C_{1313} :

$$K' = C_{3333}, \quad K'' = C_{1313} = \frac{\mu}{1 + \mu s_5} \quad (2.34)$$

où C_{3333} et C_{1313} sont donnés dans (1.158) et s_5 dans (1.152). Retournons à l'estimation globale de Cecchi et Tralli du tenseur de rigidité d'une cellule maçonnerie périodique à l'état sain (3.116) : on peut obtenir celle de la maçonnerie fissurée en utilisant les estimations de

K' et K'' de Levin. On trouve aussi qu'avec cette approche, on peut prendre en compte l'influence de la forme des fissures avec le changement du paramètre γ . Suite à cette réflexion, le cas d'une l'interface viscoélastique avec microfissures peut être considéré et développé en perspective.

Maintenant nous considérons les estimations des modèles pour le milieu sec (MT) ou saturé (Thomsen, $B\&K$, $S\&K$ et $K\&L$) pour différents états de joint (sain, fissuré isotrope ou fissuré isotrope transverse) en fonction de ϕ_p et d_c .

La figure (2.11) montre que, toutes les estimations de C_N et C_T dépendent fortement de ϕ_p . Les estimations de Thomsen et $B\&K$ pour la raideur C_N (ou K') sont toujours plus élevées que celles prévues par $S\&K$ et $K\&L$. Les estimations de la raideur C_T (ou K'') par les modèles de Thomsen, $B\&K$ et $K\&L$ sont quasi-identiques et plus élevées que celle de modèle de $S\&K$. Les figures (2.12) et (2.13) montrent que dans le cas d'état

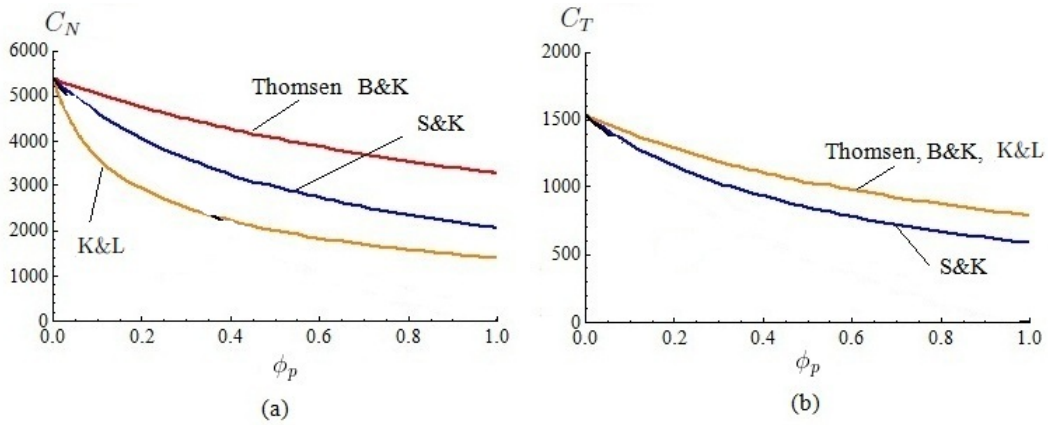


FIGURE 2.11 – A l'état sain : comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de ϕ_p (équation (2.35)). Les propriétés élastiques du mortier sain et sec sont données dans la table (2.1), $k_f = 2200$ MPa.

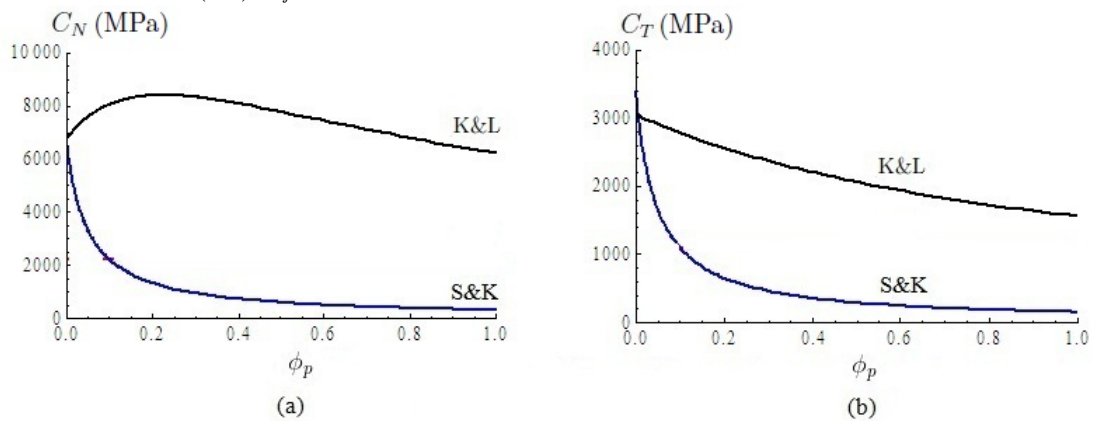


FIGURE 2.12 – Distribution isotrope de fissures ($d_c = 0,1$, $\gamma = 0,1$, $k_f = 2200$ MPa, table (2.1)) : comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de ϕ_p .

saturé, les estimations de Thomsen, $B\&K$, $S\&K$ et $K\&L$ sont décroissantes à l'exception de l'estimation de $S\&K$ de C_N qui croît avec l'augmentation de la fraction volumique des pores ϕ_p pour une distribution parallèle de fissures (figure (2.13)). La figure (2.14)

montre que le modèle de $K\&L$ donne des raideurs K' et K'' qui dépendent faiblement de l'augmentation de d_c contrairement aux autres modèles dont les estimations décroissent sensiblement avec d_c et sont quasi-nulles pour $d_c = 1$.

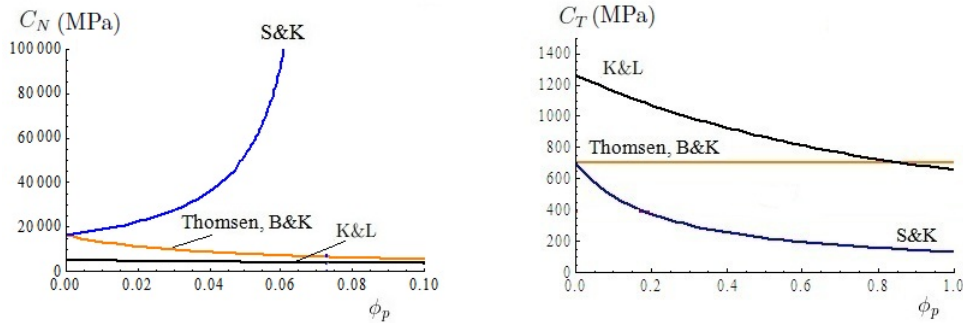


FIGURE 2.13 – Distribution isotrope transverse de fissures ($d_c = 0, 1$, $\gamma = 0, 1$, $k_f = 2200$ MPa, table (2.1)) : comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de ϕ_p .

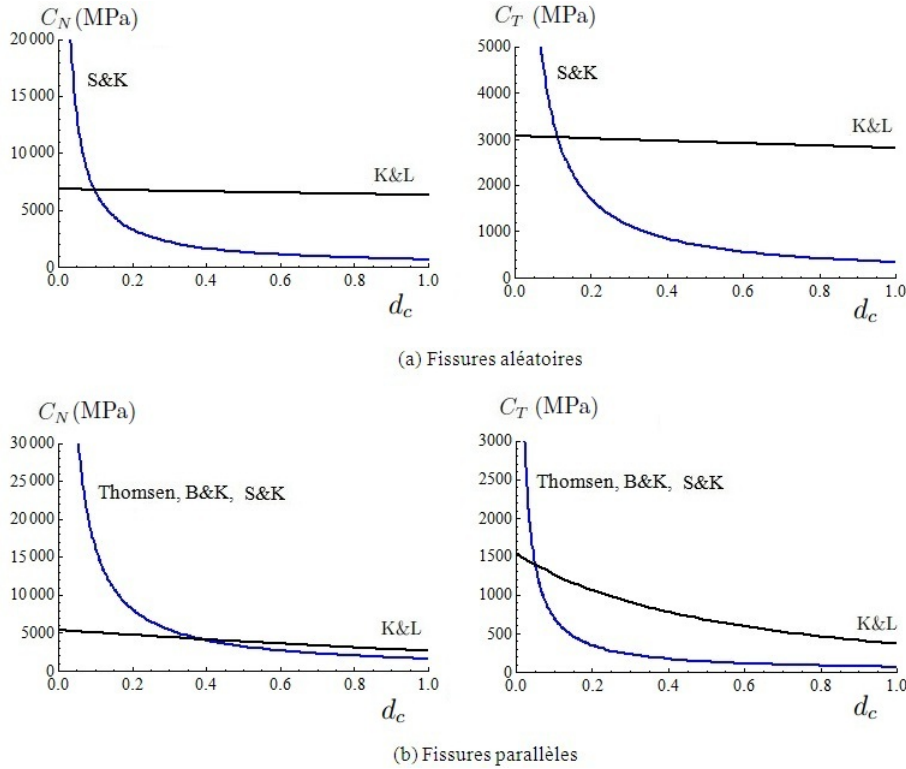


FIGURE 2.14 – Comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de d_c ($\gamma = 0, 1$, $k_f = 2200$ MPa, table (2.1)).

2.4 Homogénéisation de maçonneries élastiques avec fissures et pores

Les applications numériques et analytiques de ce problème sur une maçonnerie périodique seront réalisées et comparées au travail en présence de fissures. À présent, on considère un mur maçonné avec les propriétés du mortier et des briques données dans la table (2.1).

Les briques font $250 \times 120 \times 55 \text{ mm}^3$ de dimension et le mortier a une épaisseur de 10 mm. Le chargement est un déplacement de pas $\Delta\varepsilon = +5,0 \cdot 10^{-6}$ mm sur le bord CB (voir figure (1.20)) selon la direction $\vec{y}_2$. Dans un second temps, on peut appliquer deux méthodes d'homogénéisation analytique ou numérique. La première est la solution proposée dans les travaux de Cecchi et *al.* [26]. La deuxième utilise directement l'homogénéisation périodique avec la MEF (cf. [24]) sur un quart de la cellule de base (voir la figure (1.21-b)) où l'interface brique/mortier est définie par des éléments discontinus situés entre les deux matériaux. L'homogénéisation périodique sans/avec loi d'interface est réalisée pour chaque cas d'état du mortier.

Parties	E (MPa)	ν
Brique ($b^b \times a^b \times \delta^b = 250 \times 55 \times 120 \text{ mm}^3$)	12800	0,3
Mortier ($e^h = e^v = e^m = 10 \text{ mm}$)	4000	0,3

TABLE 2.1 – Propriétés élastiques du mortier et des briques d'après [59]

2.4.1 Approche numérique

Homogénéisation de maçonneries à l'état sain (sec et saturé)

- Dans le cas d'un mortier sain sans pores, les rigidités normale et tangentielle de l'interface (cf. (2.3)) restent constantes car les modules $\tilde{C}_L$ et $\tilde{\mu}_L$ ne dépendent pas de l'épaisseur du mortier. Dans ce cas :

$$C_N = \tilde{C}_L = k^m + 4\mu^m/3, \quad C_T = \mu^m \quad (2.35)$$

- Dans le cas d'un mortier avec pores ($\phi_p = 0,05$) : à l'état sec, on peut utiliser les estimations des schémas DL, MT, PCW pour homogénéiser le comportement du mortier poreux. Pour les rigidités normale et tangentielle de l'interface, seul le schéma de MT peut s'adapter pour les estimer selon la méthode montrée dans la section (2.2.2). Comme montré sur la figure (1.7), les estimations des schémas sont voisines. On utilise le schéma de MT pour faire des comparaisons des valeurs C_N et C_T (voir leurs expressions dans (2.35)). À l'état saturé, le mortier est encore isotrope selon l'estimation de Thomsen (voir (1.93)), de *B&K* (voir (1.104)) et de Kachanov (voir (1.113)). On choisit l'estimation de *S&K* pour faire les calculs numériques. Les caractéristiques du matériau sont données dans la table (2.2).

Les résultats obtenus avec Cast3m sont présentés sur les figures (2.15) et (2.16). Il est possible de trouver un comportement quasi-linéaire quand on utilise l'interface (figure (2.15)). Les rigidités avec l'interface sont toujours plus faibles que celles sans l'interface. La figure (2.16) montre que l'approche sans interface donne des cartes de contrainte locale quasi-identiques. Au contraire, l'approche avec interface montre clairement la différence entre les états du mortier : le cas poreux donne une contrainte plus faible que le cas non-poreux. Le cas saturé présente un risque de rupture à l'interface verticale comme celle-ci présente une concentration de contrainte.

Cas	Modèles	$\tilde{E}^m$	$\tilde{\nu}^m$	$\tilde{\mu}^m$	C_N	C_T	K'	K''
Pores secs	DL	3598	0,293	1392	—	—	—	—
	PCW	3576	0,291	1385	—	—	—	—
	MT	3618	0,294	1398	4793	1398	—	—
Pores saturés	Thomsen	3829	0,304	1468	5211	1468	—	—
	B&K	3829	0,304	1468	5211	1468	—	—
	S&K	3700	0,30	1468	4981	1468	—	—
	K&L	3635	0,238	1468	—	—	3850	1468

TABLE 2.2 – Propriétés élastiques (en MPa) du mortier sain avec pores secs ou saturés

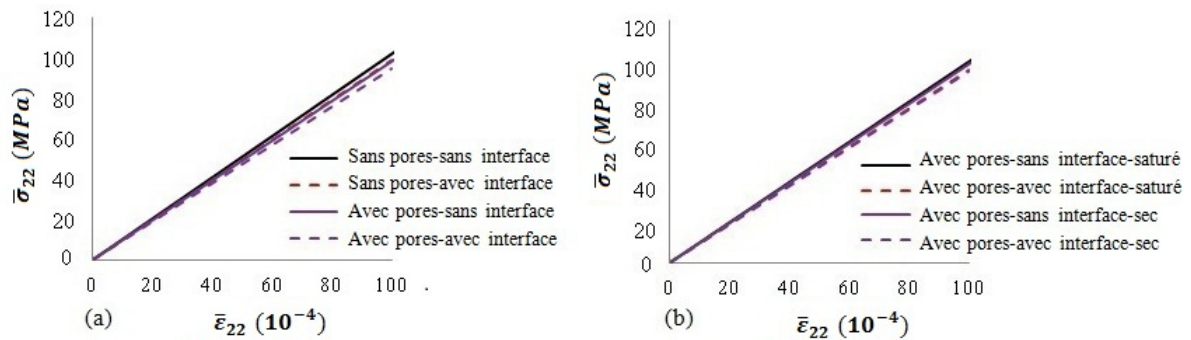


FIGURE 2.15 – Comparaison des courbes contrainte-déformation d'une cellule périodique maçonnée avec mortier sain et briques élastiques : cas d'un mortier sec avec ou sans pores (a) et cas d'un mortier poreux : sec ou saturé (b).

Homogénéisation de maçonneries microfissurées (avec ou sans pores) à l'état sec

- Cas d'un mortier avec microfissures aléatoires ($d_c = 0,1$) avec ou sans pores ($\phi_p = 0,05$) : l'estimation de MT est choisie et C_N et C_T sont déterminés par (2.19) en cas de fissures aléatoires sans pores, ou par (2.20) en cas de fissures aléatoires avec pores. Les données se trouvent dans la table (2.3).

Cas	Modèles	$\tilde{E}^m$	$\tilde{\nu}^m$	$\tilde{\mu}^m$	C_N	C_T
Fissures aléatoires sans pores sèches	Dilué	3255	0,227	1327	—	—
	PCW	3355	0,252	1340	—	—
	MT	3409	0,261	1352	2315	1118
Fissures aléatoires avec pores sèches	Dilué	2930	0,222	1198	—	—
	PCW	2998	0,245	1204	—	—
	MT	3083	0,255	1228	2227	1093

TABLE 2.3 – Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures aléatoires avec ou sans pores à l'état sec.

- Cas d'un mortier avec microfissures parallèles ($d_c = 0,1$) avec ou sans pores ($\phi_p = 0,05$) : voir la table (2.4). On note que C_N et C_T de l'estimation de MT sont donnés par (2.17) en cas de fissures parallèles sans pores et par (2.18) en cas de fissures parallèles avec pores. Les résultats sont montrés dans les figures (2.17) et (2.19).

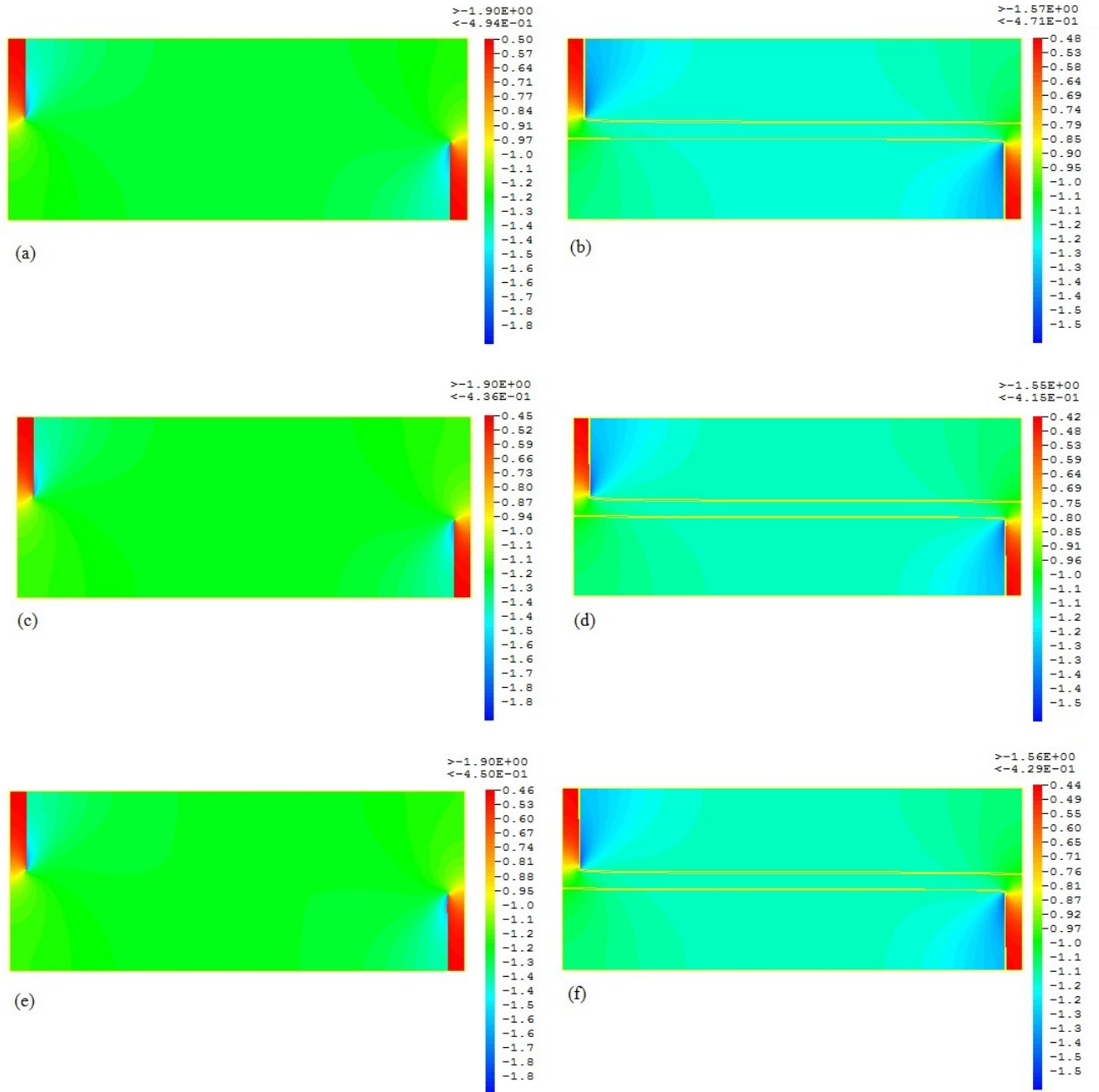


FIGURE 2.16 – Cartes de la contrainte locale σ_{22} d'une maçonnerie à l'état sain soumise à une compression selon la direction y_2 : cas d'un mortier sans pores sans loi d'interface (a), cas d'un mortier sans pores et avec loi d'interface (b), cas d'un mortier avec pores secs sans loi d'interface (c), cas d'un mortier avec pores secs et avec loi d'interface (d), cas d'un mortier avec pores saturés sans loi d'interface (e), cas d'un mortier avec pores saturés avec loi d'interface (f).

Cas	Modèles	$\tilde{E}_L^m$	$\tilde{E}_N^m$	$\tilde{\nu}^m$	$\tilde{\mu}_L^m$	$\tilde{\mu}_N^m$	C_N	C_T
Fissures parallèles sèches sans pores	Dilué	1667	4000	0,125	741	1538	—	—
	PCW	2383	4000	0,179	1011	1538	—	—
	MT	2693	4000	0,202	1120	1538	824	412
Fissures parallèles + pores secs	Dilué	1519	3598	0,123	676	1392	—	—
	PCW	2126	3576	0,173	906	1384	—	—
	MT	2518	3809	0,194	1053	1471	770	385

TABLE 2.4 – Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures parallèles avec ou sans pores à l'état sec

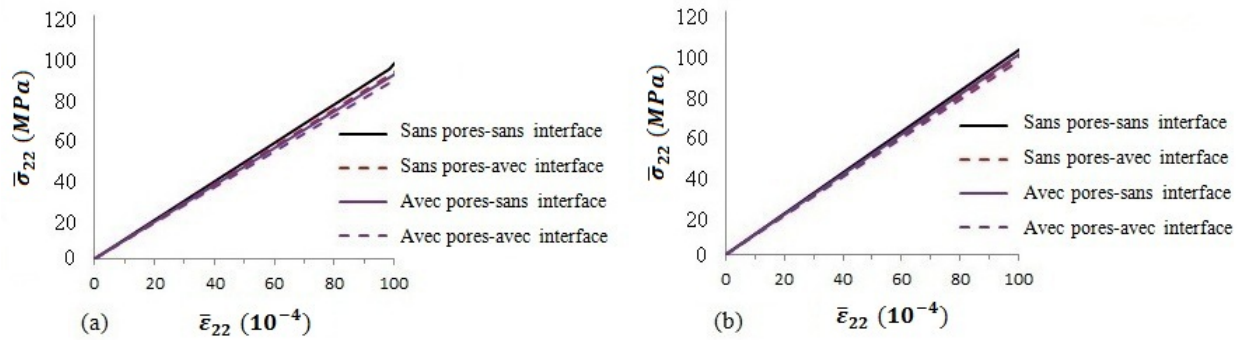


FIGURE 2.17 – Comparaison des courbes contrainte -déformation d'une cellule périodique maçonnée dans le cas d'un mortier microfissuré sec (avec ou sans pores) et briques élastiques : cas de fissures aléatoires (a) et cas de fissures parallèles (b).

Homogénéisation de maçonneries microfissurées (avec ou sans pores) à l'état saturé

- Cas d'un mortier avec microfissures aléatoires saturées ($d_c = 0,1$) avec ou sans pores saturés ($\phi_p = 0,05$) : seuls deux modèles ($S\&K$ et Levin) traitent ce cas, voir les caractéristiques dans la table (2.5).

Cas	Modèles	$\tilde{E}^m$	$\tilde{\nu}^m$	$\tilde{\mu}^m$	C_N	C_T	K'	K''
Fissures aléatoires saturées sans pores	$S\&K$	3700	0,3	1472	6644	3405	—	—
	Levin	3656	0,297	1409	—	—	6796	3049
Fissures aléatoires saturées avec pores saturés	$S\&K$	3442	0,3	1408	3223	1656	—	—
	Levin	3543	0,310	1334	—	—	6705	3032

TABLE 2.5 – Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures aléatoires saturées avec ou sans pores, $k_f = 2200$ MPa, $a_3/a = 0,1$.

- Cas de fissures parallèles saturées ($d_c = 0,1$) avec ou sans pores saturés ($\phi_p = 0,05$) : voir la table (2.6). On note que les estimations de $B\&K$, Thomsen et $S\&K$ montrent les mêmes résultats que si on ne prend pas en compte les pores.

Les résultats sont montrés dans les figures (2.18) et (2.20).

Cas	Modèles	$\tilde{E}_L^m$	$\tilde{E}_N^m$	$\tilde{\nu}^m$	$\tilde{\mu}_L^m$	$\tilde{\mu}_N^m$	C_N	C_T	K'	K''
Fissures parallèles saturées sans pores	Thomsen (<i>B&K</i> , <i>S&K</i>)	3904	4000	0,293	1261	1538	16272	700	—	—
	Levin	3370	3968	0,289	1307	1489	—	—	5082	1265
Fissures parallèles saturées avec pores saturés	Thomsen (<i>B&K</i>)	3635	3728	0,270	1193	1468	7866	700	—	—
	<i>S&K</i>	3618	3700	0,317	1214	1404	51921	575	—	—
	Levin	2266	3157	0,273	858	1240	—	—	5089	1257

TABLE 2.6 – Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures parallèles avec ou sans pores à l'état saturé, $k_f = 2200$ MPa, $a_3/a = 0,1$.

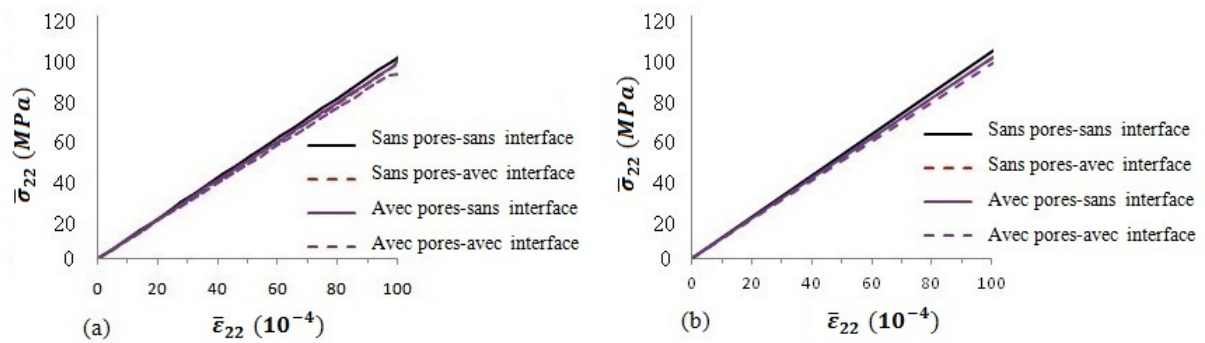


FIGURE 2.18 – Comparaison des courbes contrainte -déformation dans le cas d'un mortier microfissuré saturé avec ou sans pores saturés et briques élastiques : cas de fissures aléatoires (a) et cas de fissures parallèles (b).

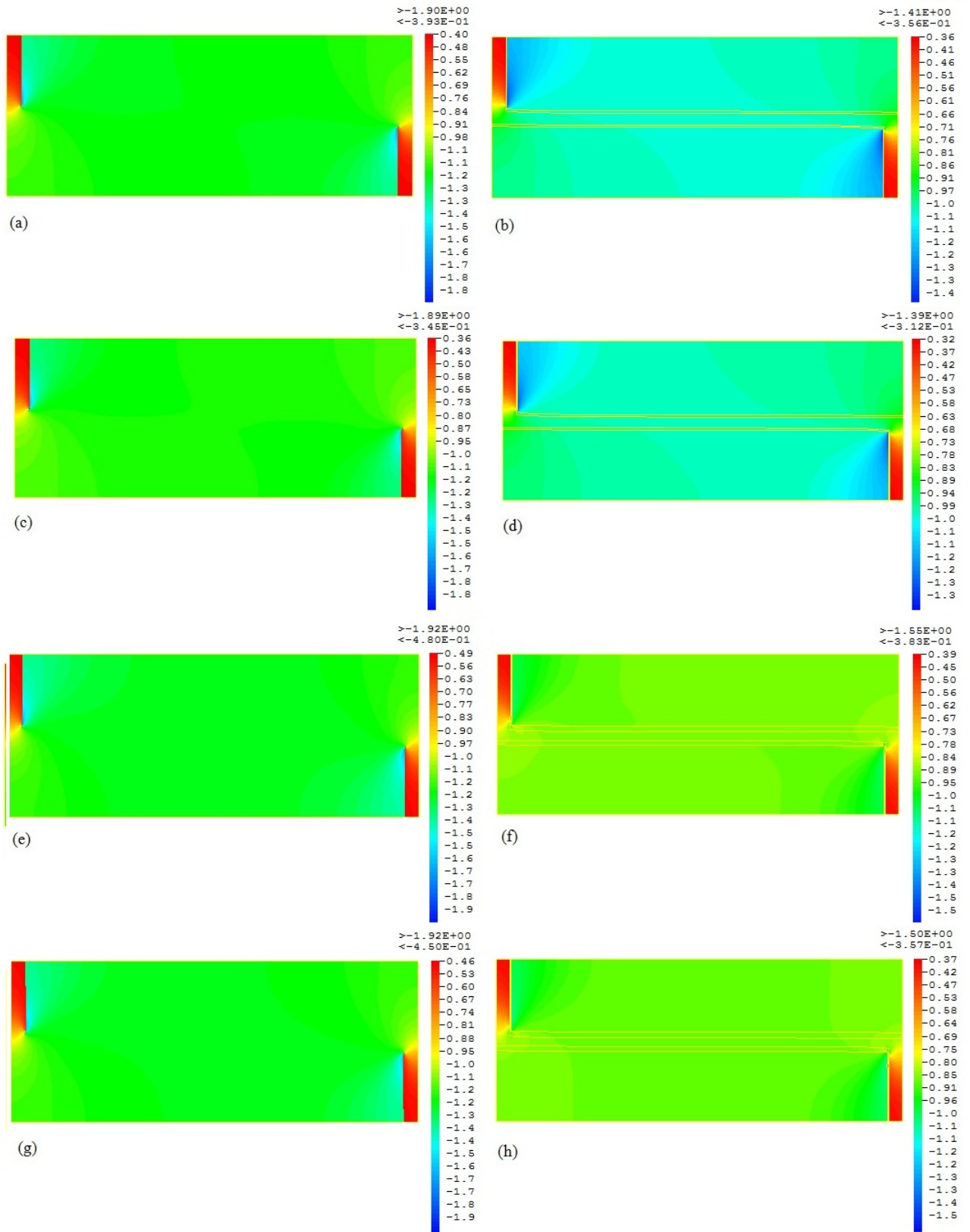


FIGURE 2.19 – Carte de la contrainte locale σ_{22} d'une maçonnerie à l'état fissuré sec soumise à une compression selon la direction y_2 : (a) cas d'un mortier fissuré isotrope sec sans pores sans loi d'interface, (b) cas d'un mortier fissuré isotrope sec sans pores avec loi d'interface, (c) cas d'un mortier fissuré isotrope sec avec pores sans loi d'interface, (d) cas d'un mortier fissuré isotrope sec avec pores et interface, (e) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec sans pores sans loi d'interface, (f) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec sans pores avec loi d'interface, (g) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec avec pores sans loi d'interface, (h) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec avec pores et interface.

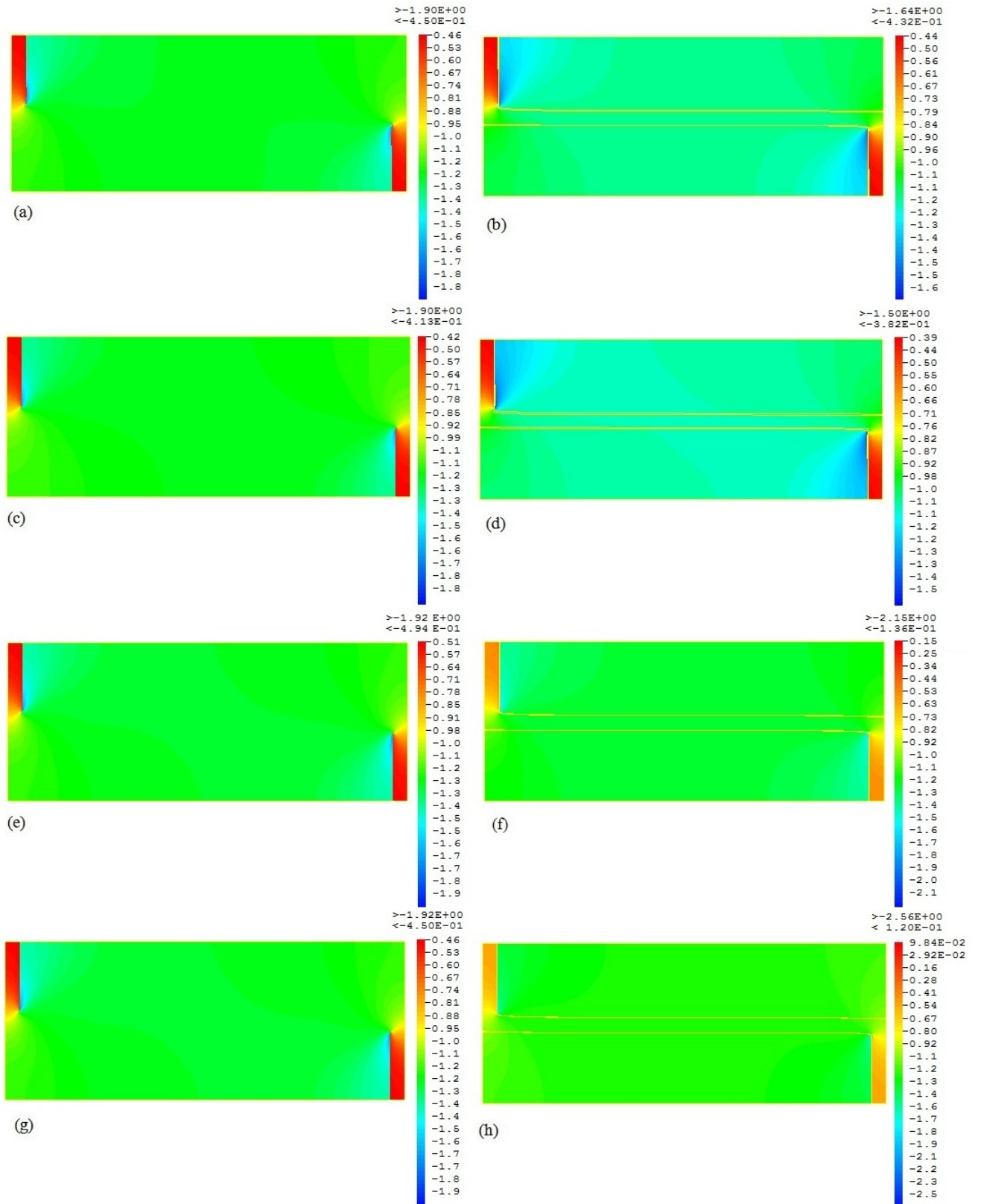


FIGURE 2.20 – Carte de la contrainte locale σ_{22} à l'état fissuré saturé soumise à une compression selon la direction y_2 : (a) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé sans pores sans loi d'interface, (b) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé sans pores avec loi d'interface, (c) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé avec pores saturés sans loi d'interface, (d) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé avec pores saturés et interface, (e) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé sans pores sans loi d'interface, (f) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé sans pores avec loi d'interface, (g) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé avec pores saturés sans loi d'interface, (h) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé avec pores saturés et interface.

2.4.2 Approche analytique

Pour traiter le problème d'homogénéisation d'une maçonnerie élastique microfissurée, il est intéressant d'appliquer le modèle d'interphase de Kanaun et Levin à l'expression de la rigidité effective d'une cellule périodique proposée par Cecchi et Sab [26]. Le remplacement des expressions de K' et K'' (voir page (259) de [26]) par les formules (2.32) pour la loi d'interface avec fissures aléatoires et (2.34) pour le cas de fissures parallèles conduit à des estimations globales qui évoluent quasi-linéairement en fonction de d_c (cf. figure (2.21)) mais dans le cas de fissures aléatoires les valeurs sont quasi constantes. Dans le cas de fissures aléatoires, l'état poreux donne des valeurs de modules effectifs toujours plus faibles (l'erreur maximale est de 0,4% pour E_2) alors que dans le cas de fissures parallèles, l'état poreux donne des valeurs plus élevées pour des faibles valeurs de d_c (i.e. $d_c < 0,1$) et plus faibles au-delà de cet intervalle. La densité de pores ϕ_p a moins d'influence dans le cas de fissures parallèles. En fixant d_c à 0,1, nous étudions l'influence du ratio $\gamma = a_3/a$ sur les

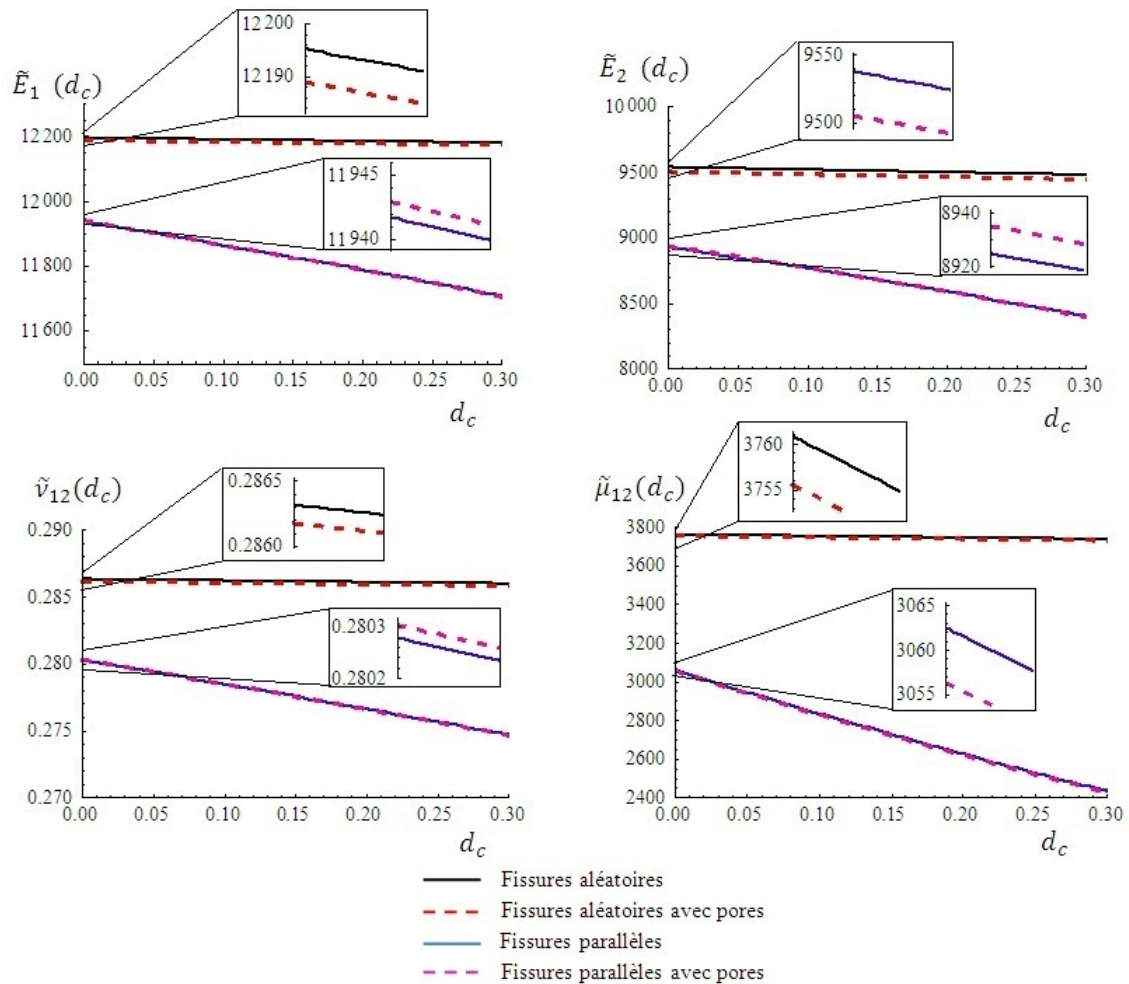


FIGURE 2.21 – Évolutions des modules de rigidité en fonction de d_c (en MPa), cas d'un mortier avec des fissures aléatoires ou parallèles avec ou sans pores, $a_3/a = 0,1$.

modules de rigidité effectifs de la maçonnerie avec mortier microfissuré dans deux cas : distribution isotrope ou isotrope transverse des fissures. La densité de pores est supposée

nulle. La figure (2.22) montre des tendances d'évolutions opposées des modules de rigidité dans les deux cas (fissures aléatoires et parallèles). Avec l'augmentation de γ , dans le cas de fissures aléatoires, les modules de rigidité décroissent faiblement (la forme des fissures a une faible influence dans ce cas) alors que ceux dans le cas de fissures parallèles croissent clairement (la forme des fissures a une forte influence dans ce cas). La table (2.7) montre les

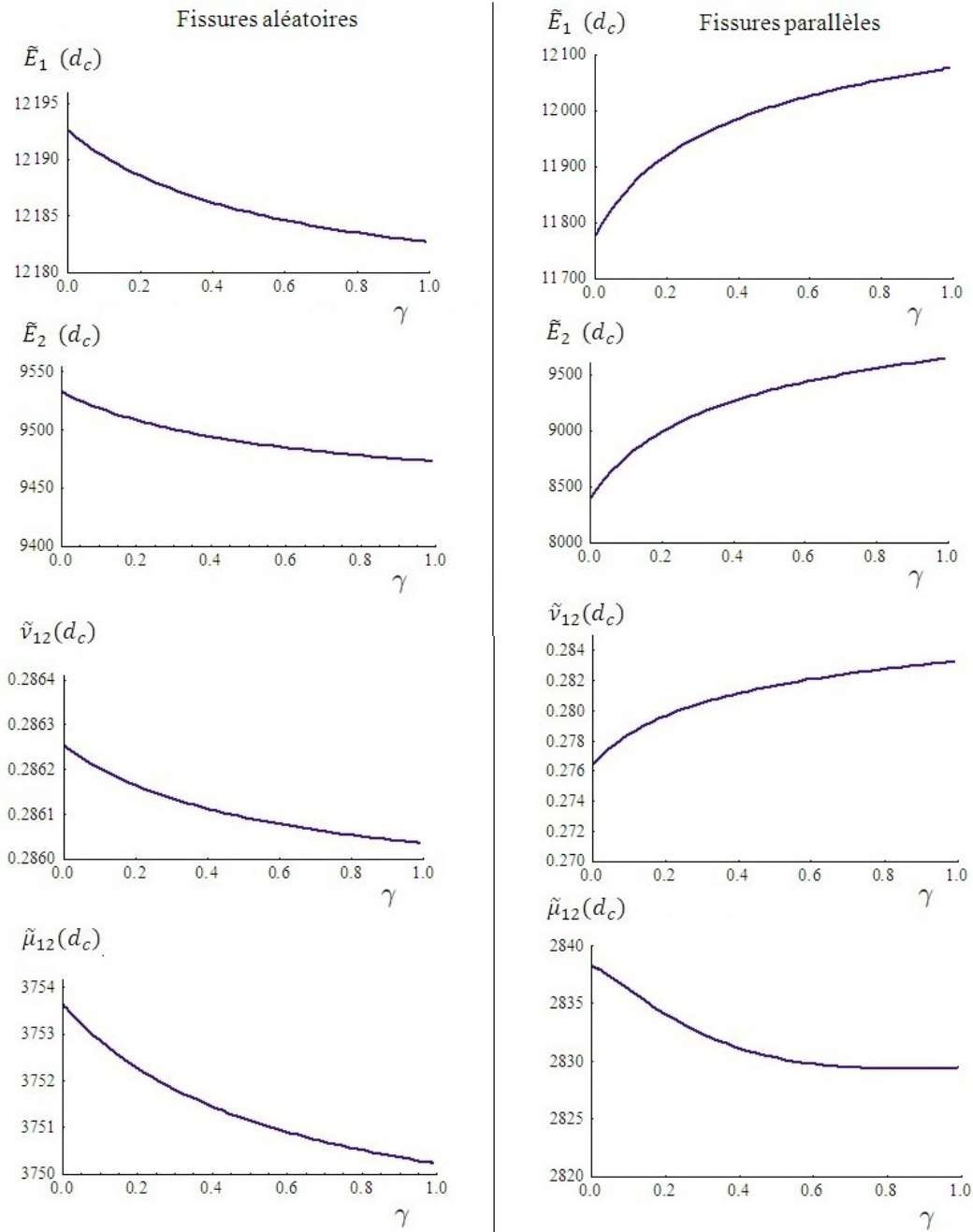


FIGURE 2.22 – Évolutions des modules de rigidité en fonction de γ , cas d'un mortier non poreux avec des fissures aléatoires ou parallèles, $d_c = 0, 1$.

valeurs des modules d'élasticité $\tilde{E}_1^m$, $\tilde{E}_2^m$, $\tilde{\mu}_{12}^m$ et le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}_{12}^m$ pour différents cas de mortier microfissuré saturé selon les approches analytique et numérique. L'erreur maximale observée entre ces cas est de moins de 18%.

Cas	Approches	$\tilde{E}_1^m$	$\tilde{E}_2^m$	$\tilde{\nu}_{12}^m$	$\tilde{\mu}_{12}^m$
Distribution isotrope de fissures sans pores	Analytique (Levin+ Cechi et Sab)	12190	9518	0,28	3753
	Numérique sans interface (<i>S&K</i> , table (2.5))	10599	9216	0,25	3410
	Numérique avec interface (<i>S&K</i> , table (2.5))	10488	8834	0,24	3292
Distribution isotrope de fissures avec pores	Analytique (Levin+ Cechi et Sab)	12184	9486	0,28	3748
	Numérique sans interface (<i>S&K</i> , table (2.5))	10488	8967	0,25	3305
	Numérique avec interface (<i>S&K</i> , table (2.5))	10272	8253	0,23	3086
Distribution parallèle de fissures sans pores	Analytique (Levin+ Cechi et Sab)	11866	8768	0,27	2836
	Numérique sans interface (Thomsen, table (2.6))	10674	9474	0,26	3236
	Numérique avec interface (Thomsen, table (2.6))	10617	9301	0,25	2789
Distribution parallèle de fissures avec pores	Analytique (Levin+ Cechi et Sab)	11867	8772	0,27	2829
	Numérique sans interface (Thomsen, table (2.6))	10559	9207	0,25	3154
	Numérique avec interface (Thomsen, table (2.6))	10455	8879	0,24	2788

TABLE 2.7 – Propriétés élastiques (en MPa) du mortier à l'état saturé, $k_f = 2200$ MPa, $a_3/a = 0,1$ (pour l'estimation de Levin) et $d_c = 0,1$.

On remarque que des contraintes élevées sont observées sur l'interface verticale.

2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous nous sommes penchés sur les estimations de l'interface entre brique et mortier (cas de mortier épais) ou l'interphase entre les briques (cas de mortier fin). Un couplage entre des techniques d'homogénéisation et l'analyse asymptotique est proposé pour déduire la loi d'interface dans le cas où l'épaisseur du mortier est plus faible que celle des briques. À l'état sec, seul le modèle de MT fournit la loi d'interface car les autres modèles (DL, PCW, AC) ne satisfont pas la condition (2.3). Les comparaisons des expressions de C_N et C_T en fonction de E_d , ν_d et d_c ont été réalisées et on remarque une grande différence entre les deux cas de distribution de fissures. À l'état saturé, les expressions de C_N et C_T sont prévues par les modèles de Thomsen, *B&K* (cas de fissures parallèles avec ou sans pores) et *S&K* (cas de fissures aléatoires ou parallèles avec ou sans pores). On trouve que k_f influence beaucoup les valeurs de C_N et C_T . Pour la loi d'interphase, le modèle de Klarbring et *al.* [81, 82] a été utilisé et développé dans le cas microfissuré selon le modèle de *K&L*. Les comparaisons des expressions de C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de *K&L*) en fonction de ϕ_p et d_c montrent des différences entre ces estimations. Le comportement global d'une cellule périodique élastique maçonnerie avec différents états de mortier a ensuite été étudié en utilisant des approches numérique et analytique. Les résultats numériques obtenus montrent que si l'interface est utilisée, le comportement effectif reste quasi-linéaire et on peut prédire un risque de rupture qui intervient au niveau de l'interface. Les résultats analytiques basés sur l'expression de Cecchi et Sab montrent que le comportement effectif d'une maçonnerie avec mortier microfissuré peut être estimé en utilisant l'estimation d'interphase de *K&L*.

Chapitre 3

Homogénéisation d'une maçonnerie viscoélastique microfissurée

Sommaire

3.1	Objectif et démarche	75
3.2	Matériaux viscoélastiques	76
3.2.1	Généralités	77
3.2.2	Modèles rhéologiques de mortiers à l'état sain	85
3.3	Homogénéisation de mortiers v.l.n.v. microfissurés	89
3.3.1	Couplage entre homogénéisation et théorie de Griffith	89
3.3.2	Application au mortier microfissuré	97
3.4	Comportement d'une cellule périodique de maçonnerie viscoélastique microfissurée	101
3.4.1	Cas d'une colonne maçonnée (1-D)	102
3.4.2	Cas d'un mur maçonné (2-D)	107
3.4.3	Comparaison des modèles à l'échelle globale	115
3.5	Applications du modèle "E.C-T" à des maçonneries chargées	117
3.5.1	Cas d'une colonne maçonnée (1D)	119
3.5.2	Cas d'un mur maçonné (2D)	120
3.6	Conclusions	133

3.1 Objectif et démarche

Ce chapitre a pour objectif l'évaluation des propriétés effectives et locales d'une maçonnerie viscoélastique microfissurée. C'est une extension de l'étude menée par Cecchi et Tralli initialement prévue pour des maçonneries à l'état sain à des maçonneries avec des joints de mortier viscoélastiques linéaires non vieillissants et microfissurés.

La distribution des fissures est supposée isotrope. Pour simplifier cette étude, les briques sont supposées saines avec un comportement élastique linéaire. Le comportement viscoélastique linéaire du mortier peut être décrit par différents modèles rhéologiques - de type Maxwell, Kelvin-Voigt, Ross, Feng, Burgers, Maxwell modifié - comme indiqué dans les travaux de Choi et *al.* [83] et Seven Igoul et *al.* [84]. La pertinence du modèle proposé aux échelles locale et globale est évaluée en menant une comparaison entre ses estimations et celles issues d'une homogénéisation périodique numérique dans le cas d'une maçonnerie (1-D ou 2-D) viscoélastique microfissurée. L'homogénéisation périodique numérique ou de

référence est menée à l'aide de la MEF et d'une formulation incrémentale associée à la loi de comportement viscoélastique du mortier. Pour le modèle proposé, la démarche générale consiste à procéder en deux étapes.

En première étape, il s'agit d'appliquer l'homogénéisation au mortier viscoélastique microfissuré. Cette étape permet d'évaluer la déformation globale induite par la partie saine du matériau et la contribution des microfissures présentes dans celui-ci. Afin de pouvoir se servir des résultats de la mécanique linéaire de la rupture (théorie de Griffith [85]), nous avons intérêt à passer du comportement viscoélastique réel au comportement élastique symbolique associé, en utilisant la transformée de Laplace-Carson (TLC) [86–89]. Dans l'espace symbolique, il est possible d'utiliser les expressions disponibles dans la littérature du saut ou discontinuité de déplacement induit par la présence d'une fissure. De plus, en supposant que le saut de déplacement dépend linéairement de la contrainte macroscopique, il sera possible de définir un comportement effectif linéaire pour le mortier viscoélastique microfissuré [90]. Le passage de l'espace symbolique à l'espace des temps réels repose classiquement sur des méthodes d'inversion numériques approchées comme la méthode de collocation classique [91], optimisée [92] ou la méthode "multi-data" [93]. Une inversion analytique directe de la TLC à l'aide de l'intégrale de Bromwich $f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f^*(p)}{p} e^{pt} dp$ n'est possible que pour certains cas simples. Il est alors intéressant de chercher à approcher, au moins à court et long termes, la rigidité (ou souplesse) effective symbolique par celle associée à un modèle rhéologique prédéfini ou existant. Par exemple, si le mortier à l'état sain se comporte selon le modèle rhéologique de Maxwell modifié, on cherchera à approcher le comportement effectif symbolique du mortier microfissuré par le même modèle. Après validation de cette approximation, l'inversion directe de la TLC de la rigidité effective apparente sera possible. Cette étape permettra d'exprimer le comportement effectif (fonction de fluage) du mortier viscoélastique fissuré dans l'espace des temps réels.

La seconde étape consiste à étendre les expressions analytiques des rigidités effectives proposées par Cecchi et Tralli [36] basées sur l'homogénéisation analytique d'un stratifié (cas 1D) et le modèle de Cecchi et Sab [26, 32] (cas 2D) à une maçonnerie périodique (1-D, 2-D) présentant des microfissures dans le mortier viscoélastique considéré.

Le principe de la démarche décrite ci-dessus peut être menée avec ou sans prise en compte des interactions entre microfissures. Dans cette étude, cette démarche est menée en supposant la non propagation des fissures.

3.2 Matériaux viscoélastiques

Que ce soit en fluage ou en relaxation, la réponse à une sollicitation d'un matériau viscoélastique dépend du temps. En viscoélasticité linéaire, on peut associer une loi de comportement à un matériau qui permet de calculer la réponse à une histoire de sollicitation donnée.

3.2.1 Généralités

Matériau viscoélastique linéaire non vieillissant (v.l.n.v.)

(i) Fonction de fluage

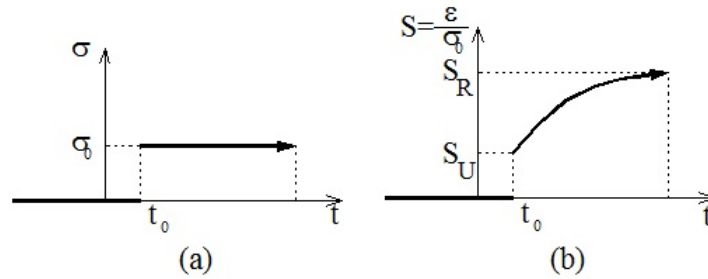


FIGURE 3.1 – Fonction de fluage (b) d'un matériau v.l.n.v. en réponse à un chargement en contrainte constante σ_0 pour $t \geq t_0$ (a).

Nous aborderons surtout le phénomène de fluage du mortier qui se passe soit à température ambiante, soit à hautes températures, à court et long termes. La situation de hautes températures se présente pour les garnissages réfractaires maçonnés, par exemple dans des hauts fourneaux ou des poches à acier. Les déformations différées induites par le fluage conduisent à des microfissures. Pour un matériau viscoélastique, l'essai de fluage consiste à appliquer un champ de contrainte unidimensionnel à amplitude constante et à décélérer l'évolution de la déformation en fonction du temps. La contrainte uniaxiale appliquée varie en fonction du temps comme suit :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H_{t_0}(t) \quad (3.1)$$

où $H_{t_0}(t)$ est la fonction de Heaviside appliquée à l'instant t_0 :

$$H_{t_0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq t_0 \\ 0, & \text{si } t < t_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ce cas, la fonction de fluage $S(t) = S(t_0, t, \sigma_0)$ du matériau v.l.n.v. est définie par :

$$S(t_0, t, \sigma_0) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.3)$$

où $S(t_0, t, \sigma_0)$ est nulle si $t < t_0$ et est croissante sinon ($t \geq t_0$). En général, un matériau viscoélastique soumis de manière instantanée à une contrainte constante σ_0 (très inférieure à la limite élastique), présentera une déformation instantanée élastique ϵ_{el} suivie d'une déformation anélastique ϵ_{an} croissante durant l'intervalle de temps d'application de cette contrainte et qui tendra vers une valeur limite ϵ_{tot} . La fonction de fluage $S(t)$ (c.f. figure (3.1)) peut alors s'écrire sous la forme :

$$S(t) = S_R - (S_R - S_U)e^{-t/\tau_\sigma} \quad (3.4)$$

avec τ_σ le temps de fluage, $S_U = \epsilon_{el}/\sigma_0$ la souplesse instantanée ou non relaxée et $S_R = \epsilon_{tot}/\sigma_0$ la souplesse relaxée. A l'arrêt de la contrainte, si l'on attend suffisamment longtemps, la déformation revient progressivement à 0. Il n'y a donc pas de déformation permanente.

(ii) Fonction de relaxation

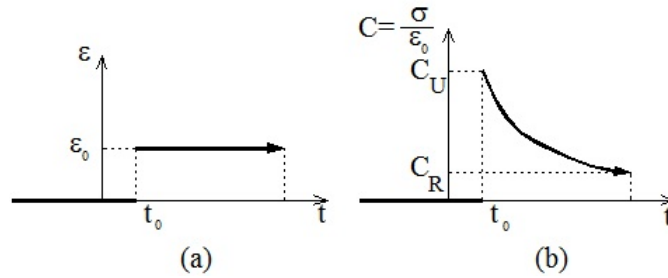


FIGURE 3.2 – Fonction de relaxation (b) d'un matériau v.l.n.v. en réponse à un chargement en déformation constante ε_0 pour $t \geq t_0$ (a).

Si la sollicitation imposée est une déformation constante à partir d'un instant initial t_0 :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H_{t_0}(t) \quad (3.5)$$

alors la réponse du matériau en contrainte sera décroissante avec le temps à partir d'une valeur instantanée $\sigma_0 = C_U \varepsilon_0$ et tendra vers une valeur limite ou asymptotique σ_∞ quand $t \gg t_0$ (cf. figure (3.2)). La réponse à un essai de relaxation est l'histoire de la contrainte axiale $\sigma(t)$ telle que :

$$C(t_0, t, \sigma_0) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (3.6)$$

où $C(t_0, t, \sigma_0)$ est la fonction de relaxation nulle pour $t < t_0$ et décroissante pour $t \geq t_0$. Elle peut donc s'exprimer comme suit :

$$C(t) = C_R - (C_U - C_R)e^{-t/\tau_\varepsilon} \quad (3.7)$$

avec τ_ε le temps de relaxation de la contrainte à déformation constante, $C_U = \sigma_0/\varepsilon_0$ le module instantané et $C_R = \sigma_\infty/\varepsilon_0$ le module relaxé.

(iii) Comportement viscoélastique tridimensionnel

Dans un cadre général tridimensionnel, le problème de fluage (équations (3.1) et (3.3)) peut se réécrire sous la forme tensorielle [94] :

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_0 H_{t_0}(t) \\ \varepsilon(t) = \mathbb{S}(t_0, t) : \sigma_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Le problème de relaxation (équations (3.5) et (3.6)) se réécrit :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_0 H_{t_0}(t) \\ \sigma(t) = \mathbb{C}(t_0, t) : \varepsilon_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

En supposant que la déformation instantanée est linéaire élastique, les fonctions de fluage et de relaxation doivent vérifier la relation :

$$\mathbb{S} : \mathbb{C} = \mathbb{I} \quad (3.10)$$

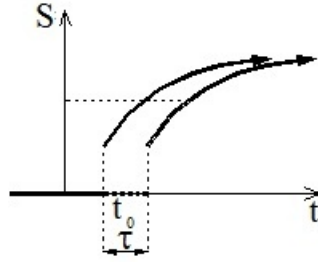


FIGURE 3.3 – Fonction de fluage d'un matériau v.l.n.v.

(iv) Comportement non-vieillissant

Un matériau viscoélastique est considéré comme non-vieillissant si ses propriétés mécaniques ne varient pas avec le temps (figure (3.3)). Dans ce cas, les tenseurs de fluage $\mathbb{S}$ et de relaxation $\mathbb{C}$ ne dépendent que d'une seule variable temporelle correspondant au temps passé depuis le moment d'application de la sollicitation :

$$\begin{cases} \mathbb{S}(t_0, t) = \mathbb{S}(t_0 + \tau, t + \tau) = \mathbb{S}(t - t_0) \\ \mathbb{C}(t_0, t) = \mathbb{C}(t_0 + \tau, t + \tau) = \mathbb{C}(t - t_0) \end{cases} \quad (3.11)$$

Si de plus le comportement v.l.n.v. est isotrope, les fonctions de relaxation et de fluage peuvent s'écrire respectivement sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbb{C}(t) = 3k(t)\mathbb{J} + 2\mu(t)\mathbb{K} \\ \mathbb{S}(t) = \frac{1}{3k(t)}\mathbb{J} + \frac{1}{2\mu(t)}\mathbb{K} \end{cases} \quad (3.12)$$

où $k(t)$ et $\mu(t)$ sont les fonctions de relaxation sphérique et déviatorique en réponse respectivement à une compression isotrope et à un cisaillement simple. $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}$ sont respectivement les projections sphérique et déviatorique sur les espaces des tenseurs d'ordre quatre, définis par la relation (A.1).

Démarche d'homogénéisation classique pour un matériau viscoélastique hétérogène

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire isotrope non-vieillissant est formellement identique à celle d'un matériau élastique linéaire isotrope associé dans l'espace symbolique (de Laplace-Carson). Classiquement, l'évaluation du comportement effectif d'un composite hétérogène v.l.n.v. repose sur trois étapes :

- Passage de l'espace des temps réels à l'espace symbolique, pendant lequel il y a conversion du problème viscoélastique en un problème élastique symbolique en utilisant le principe de correspondance,
- Homogénéisation linéaire dans l'espace symbolique, qui se traduit par la détermination du comportement effectif symbolique à l'aide des outils d'homogénéisation linéaire clas-

siques,

- Inversion de la transformée de Laplace, qui se caractérise par l'inversion analytique exacte (directe) ou approchée du comportement homogénéisé symbolique afin d'obtenir l'expression de la fonction de relaxation ou de fluage globale du milieu hétérogène en question.

(i) Transformée de Laplace-Carson et fonction de fluage dans l'espace symbolique

La TLC permet de convertir un problème de matériau viscoélastique linéaire non vieillissant en un problème d'élasticité linéaire symbolique [88, 89, 95]. La TLC d'une fonction f de la variable réelle t notée $f^*(p)$, avec p variable complexe, est définie par :

$$f^*(p) = p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \quad (3.13)$$

Cette transformée vérifie des propriétés intéressantes et en particulier les théorèmes liés à la valeur initiale (le court terme) et à la valeur finale (le long terme) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f^*(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t), \quad \lim_{p \rightarrow 0} f^*(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad (3.14)$$

Selon le principe de superposition de Boltzmann, la loi de comportement locale s'écrit :

$$\sigma(t) = \int_0^t \mathbb{C}(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \mathbb{S}(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (3.15)$$

où $\mathbb{C}(t)$ et $\mathbb{S}(t)$ sont respectivement les tenseurs de fonction de relaxation et de fluage (cf. (3.12)). Nous nous limiterons aux cas pour lesquels les histoires de contraintes et de déformations sont identiquement nulles pour t négatif et peuvent présenter des discontinuités en $t=0$. Dans ce cas, les relations (3.15) se réécrivent :

$$\sigma(t) = \int_0^t \mathbb{C}(t - \tau) d\varepsilon(\tau) + \mathbb{C}(t)\varepsilon(0), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \mathbb{S}(t - \tau) d\sigma(\tau) + \mathbb{S}(t)\sigma(0) \quad (3.16)$$

Si le produit de convolution est désigné par $\otimes$, alors (3.16) devient :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\mathbb{C} \otimes \varepsilon)(t) = \int_0^t \frac{d\mathbb{C}(\tau)}{d\tau} \varepsilon(t - \tau) d\tau + \mathbb{C}(0) \cdot \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) &= (\mathbb{S} \otimes \sigma)(t) = \int_0^t \frac{d\mathbb{S}(\tau)}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau + \mathbb{S}(0) \cdot \sigma(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si pour tout instant t , les tenseurs $\mathbb{S}(t)$ et $\mathbb{C}(t)$ sont symétriques, alors :

$$\mathbb{S} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{S} = H\mathbb{I} \quad (3.18)$$

où H est la fonction de Heaviside (cf. équation (3.2)).

Pour la suite, afin de simplifier les notations, nous utiliserons l'exposant "*" sans le complexe (p) pour tous les calculs menés dans l'espace symbolique de LC. Dans cet espace, les relations (3.17)-(a) et (b) s'écrivent :

$$\sigma^* = \mathbb{C}^* \varepsilon^* \text{ et } \varepsilon^* = \mathbb{S}^* \sigma^* \quad (3.19)$$

avec

$$\mathbb{C}^* \mathbb{S}^* = \mathbb{S}^* \mathbb{C}^* = \mathbb{I} \quad (3.20)$$

L'isotropie des tenseurs $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{S}^*$ permet de les écrire sous la forme :

$$\mathbb{C}^* = 3k^* \mathbb{J} + 2\mu^* \mathbb{K}, \quad \mathbb{S}^* = \frac{1}{3k^*} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu^*} \mathbb{K} \quad (3.21)$$

où k^* et μ^* représentent les modules apparents respectivement de compressibilité et de cisaillement. Le coefficient de Poisson apparent ν^* peut être aussi déterminé en fonction de k^* et μ^* par la relation classique valable en élasticité linéaire :

$$\nu^* = \frac{3k^* - 2\mu^*}{6k^* + 2\mu^*} \quad (3.22)$$

Moyennant la loi de Hooke généralisée, la loi de comportement en fluage (3.19)-(b) peut s'écrire sous la forme [94] :

$$\varepsilon^* = \frac{1 + \nu^*}{E^*} \sigma^* - \frac{\nu^*}{E^*} \text{tr}(\sigma^*) \mathbf{i} \quad (3.23)$$

où $\mathbf{i}$ est le tenseur identité d'ordre deux, E^* est le module d'Young apparent déterminé par la relation classique valable en élasticité linéaire :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{9k^*} + \frac{1}{3\mu^*} \quad (3.24)$$

Pour un essai de fluage uniaxial selon la direction normale n , la contrainte symbolique est :

$$\sigma^* = \sigma_0 \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (3.25)$$

et la déformation symbolique ((3.19)-b et (3.23)) devient :

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{nn}^* n \otimes n + \varepsilon_{tt}^* (\mathbf{i} - n \otimes n) \quad (3.26)$$

avec

$$\varepsilon_{nn}^* = \frac{\sigma_0}{E^*}, \quad \varepsilon_{tt}^* = -\frac{\nu^*}{E^*} \sigma_0 \quad (3.27)$$

La fonction de fluage $S(t)$ est définie par la relation $\varepsilon_{nn}^* = S^* \sigma_0$. Les relations (3.24) et (3.19)-b permettent alors d'exprimer la fonction du fluage apparente S^* en fonction du module d'Young symbolique E^* :

$$S^* = \frac{1}{E^*} = \frac{1}{9k^*} + \frac{1}{3\mu^*} \quad (3.28)$$

(ii) Homogénéisation linéaire classique dans l'espace symbolique

On suppose que les phases constitutives d'un composite hétérogène ont un comportement v.l.n.v. Localement, dans l'espace de LC, le comportement moyen de ces phases s'écrit :

$$\sigma_r^* = \mathbb{C}_r^* \varepsilon_r^*, \quad \varepsilon_r^* = \mathbb{S}_r^* \sigma_r^* \quad (3.29)$$

Par ailleurs, les lois de localisation s'écrivent :

$$\sigma(t) = (\mathbb{D} \otimes \Sigma)(t) , \varepsilon(t) = (\mathbb{A} \otimes \bar{\varepsilon})(t) \quad (3.30)$$

où $\mathbb{D}$ et $\mathbb{A}$ sont les tenseurs de concentration des contraintes et de localisation des déformations.

Les moyennes par phase des relations (3.30) s'écrivent :

$$\sigma_r(t) = (\mathbb{D}_r \otimes \Sigma)(t) , \varepsilon_r(t) = (\mathbb{A}_r \otimes \bar{\varepsilon})(t) \quad (3.31)$$

La TLC appliquée à (3.31) conduit à :

$$\sigma_r^* = \mathbb{D}_r^* \otimes \Sigma^* , \varepsilon_r^* = \mathbb{A}_r^* \otimes \bar{\varepsilon}^* \quad (3.32)$$

où

$$\begin{cases} \Sigma^* &= \langle \sigma_r^* \rangle &= \langle \mathbb{C}_r^* \varepsilon_r^* \rangle &= \langle \mathbb{C}_r^* \mathbb{A}_r^* \rangle \bar{\varepsilon}^* &= \tilde{\mathbb{C}}^* \bar{\varepsilon}^* \\ \bar{\varepsilon}^* &= \langle \varepsilon_r^* \rangle &= \langle \mathbb{S}_r^* \sigma_r^* \rangle &= \langle \mathbb{S}_r^* \mathbb{D}_r^* \rangle \Sigma^* &= \tilde{\mathbb{S}}^* \Sigma^* \end{cases} \quad (3.33)$$

Le système d'équations (3.33) permet alors de déduire les tenseurs de relaxation (rigidité) et de fluage (souplesse) effectifs dans l'espace de LC :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{C}}^* &= \langle \mathbb{C}_r^* \mathbb{A}_r^* \rangle &= \sum_{r=b,m} \varphi_r \mathbb{C}_r^* \mathbb{A}_r^* \\ \tilde{\mathbb{S}}^* &= \langle \mathbb{S}_r^* \mathbb{D}_r^* \rangle &= \sum_{r=b,m} \varphi_r \mathbb{S}_r^* \mathbb{D}_r^* \end{cases} \quad (3.34)$$

où φ_r est la fraction volumique de la phase (r).

(iii) Inversion de la transformée de Laplace-Carson

L'inversion directe de la transformée de Laplace-Carson par la méthode analytique de Bromwich [45] s'effectue par le biais d'une intégrale dans le plan complexe :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f^*(p)}{p} e^{pt} dp \quad (3.35)$$

où le nombre réel a est choisi de sorte que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que a doit être supérieur à la partie réelle de toute singularité de $f^*(p)$ et à l'infini.

Pour exprimer le comportement dans l'espace des temps réels, il est nécessaire d'inverser la fonction $f^*(p)$. Les tenseurs de relaxation et de retard dans l'espace temporel seront déduits en utilisant une des méthodes d'inversion. Dans la littérature, en plus de la méthode d'inversion directe ("exacte") de Bromwich qui n'est pas toujours aisée à appliquer, différentes méthodes analytiquement ou numériquement approchées, plus ou moins complexes, ont été proposées comme alternatives à l'intégrale de Bromwich permettant d'effectuer cette inversion.

* Méthodes analytiques approchées [45]. Parmi celles-ci, on peut citer :

- **Méthode semi-analytique [96]** : cette méthode permet de ramener la forme complexe de $f^*(p)$ à une forme irréductible pour accéder à l'inversion de la transformée. Il s'agit

de définir des fonctions composées qui sont obtenues par un changement de variable adéquat.

D'abord, c'est la simplification de la recherche (qui permet de ramener la formule complexe à celle irréductible) et la localisation des temps caractéristiques macroscopiques. Ensuite, la construction analytique de l'asymptote du fluage à long terme est réalisée. Cette procédure permet de séparer la complexité de la forme irréductible qui peut être inversée par la TLC. Après quelques manipulations algébriques, on obtient une autre forme de $f^*(p)$: $f^*(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ où $P(p)$ est un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme $Q(p)$ qui peut s'écrire comme suit :

$$Q(p) = \prod_{i=1}^k (p - p_i)^{m_i}, \quad \sum_{i=1}^k m_i = n \quad (3.36)$$

où les scalaires p_i sont les racines de degré m_i du polynôme $Q(p)$ de degré n . Il est possible de décomposer $f^*(p)$ en fractions rationnelles simples :

$$f^*(p) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_j^i}{(p - p_i)^j} \right) \quad (3.37)$$

où A_j^i est le résidu tel que :

$$A_j^i = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d^{m_i-j}}{dp^{m_i-j}} L_i(p) \quad (3.38)$$

avec

$$L_i(p) = (p - p_i)^{m_i} f^*(p) \quad (3.39)$$

Dans ce cas, la fonction $f(t)$, inverse de $f^*(p)$, s'écrit :

$$f(t) = \sum_{i=1}^k e^{p_i t} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} A_j^i \right) \quad (3.40)$$

Dans le cas particulier où toutes les racines de $Q(p)$ sont des racines distinctes (d'ordre k), $f(t)$ prend la forme simplifiée suivante [86] :

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \frac{P(p_i)}{Q'(p_i)} e^{p_i t} \quad (3.41)$$

où Q' est la dérivée de Q (cf. (3.36)).

- **Méthode analytique approchée** [90] : elle propose d'approcher le comportement v.l.n.v. effectif symbolique par le même modèle que celui des temps réels. Cette solution peut être considérée comme la borne supérieure de la solution exacte. Les paramètres du comportement viscoélastique de la matrice sont déterminés grâce aux théorèmes de la valeur initiale et finale de la TLC :

$$f_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} f^*(p), \quad f_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} f^*(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (3.42)$$

Cette méthode sera appliquée ultérieurement à un mortier microfissuré en fluage (section (3.3.1)).

* Méthodes numériques. Parmi celles-ci, on peut citer :

- **Méthode de collocation classique** [91, 97, 98] : c'est une approche largement utilisée qui repose sur une discrétisation du spectre caractéristique en une somme de raies discrètes dont il faut déterminer les intensités et les positions en minimisant l'écart entre la fonction temporelle originale et son approximation. Ainsi, elle propose [91] d'approcher la fonction $f(t)$ par la série de Prony :

$$\mathbb{C}(t) = \int_0^\infty \mathbb{C}(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \cong \hat{\mathbb{C}}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}_i e^{-t/\tau_i} \quad (3.43)$$

où $\mathbb{C}(\tau)$ est le spectre de relaxation du matériau et les coefficients $\mathbb{C}_i$ sont les intensités respectives de la fonction $\mathbb{C}(t)$. La détermination de ces coefficients $\mathbb{C}_i$ et des temps τ_i de la série s'effectue en minimisant l'erreur quadratique Δ entre les fonctions exactes et approchées. Pour la fonction de relaxation, on a :

$$\Delta = \int_0^\infty [\mathbb{C}(t) - \hat{\mathbb{C}}(t)]^2 dt \quad (3.44)$$

avec $\frac{\partial \Delta}{\partial \mathbb{C}_i} = 0$ et $\frac{\partial \Delta}{\partial \tau_i} = 0$. Cette minimisation conduit au système d'équations [91] :

$$\mathbb{C}^*(p) \big|_{p_i} = \hat{\mathbb{C}}^*(p) \big|_{p_i}, \quad \frac{d\mathbb{C}^*(p)}{dp} \big|_{p_i} = \frac{d\hat{\mathbb{C}}^*(p)}{dp} \big|_{p_i} \quad (3.45)$$

avec $p_i = \frac{1}{\tau_i}$, $i = [1, n]$ et n le nombre de points.

- **Méthode de collocation optimisée** [99] : elle définit pour chaque composante i un tenseur de rigidité viscoélastique. Un choix préalable des points p_i correspond à la première égalité qui conduit à un système linéaire permettant de déterminer les coefficients. Les deux égalités obtenues forment un système non linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues. Le système non linéaire peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation sous contraintes :

$$\begin{cases} \min_{\mathbb{C}_i, \tau_i} \left[\sum_{i=1}^n \left(\mathbb{C}^*(p_i) - \hat{\mathbb{C}}^*(p_i) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\mathbb{C}^*(p)}{dp} \big|_{p_i} - \frac{d\hat{\mathbb{C}}^*(p)}{dp} \big|_{p_i} \right)^2 \right] \\ \text{avec } \mathbb{C}_i \geq 0, \quad t_1 \leq \tau_i \leq t_2 \text{ et } \sum_{i=1}^n \mathbb{C}_i = \mathbb{C}^e \end{cases} \quad (3.46)$$

où $\mathbb{C}^e$ est le module élastique. De plus, les coefficients $\mathbb{C}_i$ doivent être positifs, les temps de collocation τ_i doivent être compris dans un intervalle $[t_1, t_2]$ et la fonction de relaxation doit être égale au module élastique en $t = 0$.

- **Méthode multi-data** : d'après les travaux de Cost et *al.* [87, 93], la TLC de la fonction approchée de la fonction de relaxation $\mathbb{C}(t)$ dans (3.43) s'écrit :

$$\mathbb{C}^{ap*}(p) = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right)^{-1} \quad (3.47)$$

Les coefficients $\mathbb{C}_i$ sont déterminés par la minimisation de l'erreur quadratique Δ_{Cost} :

$$\Delta_{Cost} = \sum_{j=1}^m [\mathbb{C}^*(p_j) - \mathbb{C}^{ap*}(p_j)]^2 \quad (3.48)$$

où :

$$\mathbb{C}^*(p_j) = \mathbb{C}^*(p) \mid_{p_j} \text{ et } \mathbb{C}^{ap*}(p_j) = \mathbb{C}^{ap*}(p) \mid_{p_j} \quad (3.49)$$

m est un nombre arbitraire de points de données à considérer. En combinant (3.47) avec (3.48), on obtient :

$$\Delta_{Cost} = \sum_{j=1}^m \left[\mathbb{C}^*(p_j) - \sum_{i=1}^n \mathbb{C}_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p_j} \right)^{-1} \right]^2 \quad (3.50)$$

En minimisant l'erreur quadratique par rapport à τ_k , on obtient :

$$\frac{\partial \Delta_{Cost}}{\partial \tau_k} = -2 \sum_{j=1}^m \left[\mathbb{C}^*(p_j) - \sum_{i=1}^n \mathbb{C}_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p_j} \right)^{-1} \right] \left[\left(1 + \frac{1}{\tau_k \cdot p_j} \right)^{-1} \right] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.51)$$

Ceci conduit à :

$$\sum_{j=1}^m \mathbb{C}^*(p_j) \left[\left(1 + \frac{1}{\tau_k \cdot p_j} \right)^{-1} \right] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbb{C}_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p_j} \right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{1}{\tau_k \cdot p_j} \right)^{-1} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.52)$$

La relation (3.52) est un système de n équations à n inconnues $\mathbb{C}_i$.

3.2.2 Modèles rhéologiques de mortiers à l'état sain

Pour décrire le comportement v.l.n.v. d'un mortier sain à l'ambiante, plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés : Maxwell [100], Kelvin-Voigt [100], Ross [83, 100], Burgers [101], Maxwell modifié [83], Maxwell généralisé [102, 103], Kelvin-Voigt généralisé [96] et USBR [104]. Dans cette section, on rappelle les principaux modèles (les plus simples) et ceux couramment utilisés pour modéliser le mortier. La description d'autres modèles se trouve en annexe (E.3).

Modèle de Maxwell (M)

Le modèle de Maxwell est un des modèles les plus simples représenté par l'assemblage en série d'un ressort et d'un amortisseur (figure (3.4)-a). La loi de comportement dans ce cas s'écrit :

$$\dot{\epsilon} = \mathbb{S}_M^e \dot{\sigma} + \mathbb{S}_M^v \sigma \quad (3.53)$$

Les tenseurs de rigidité élastique $\mathbb{C}_M^e$ et visqueuse $\mathbb{C}_M^v$ (3.54) sont supposés isotropes. Ils peuvent être exprimés en fonction des 4 constantes matériaux : les modules de compressibilité k_M^e , de cisaillement μ_M^e de la partie élastique (ressort) et les coefficients de viscosité des parties sphérique η_M^s et déviatorique η_M^d de la partie visqueuse (amortisseur).

$$\mathbb{C}_M^e = 3k_M^e \mathbb{J} + 2\mu_M^e \mathbb{K}, \quad \mathbb{C}_M^v = \eta_M^s \mathbb{J} + \eta_M^d \mathbb{K} \quad (3.54)$$

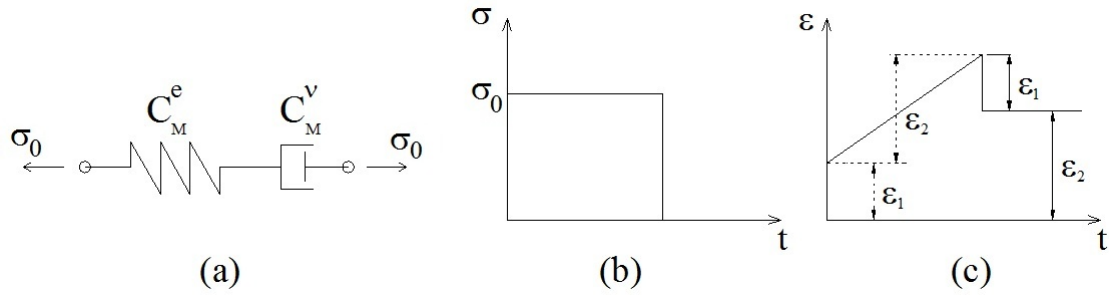


FIGURE 3.4 – Modèle rhéologique de Maxwell (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type Maxwell sous l'effet d'une contrainte constante σ_0 (b).

Les tenseurs de souplesse élastique $\mathbb{S}_M^e$ et visqueuse $\mathbb{S}_M^v$ associés s'écrivent respectivement :

$$\mathbb{S}_M^e = \frac{1}{3k_M^e} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_M^e} \mathbb{K}, \quad \mathbb{S}_M^v = \frac{1}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{1}{\eta_M^d} \mathbb{K} \quad (3.55)$$

Dans l'espace symbolique, la fonction de fluage de ce modèle S_M^* se déduit de la relation (3.28) où k^* et μ^* sont donnés dans (E.7) (cf. Annexe (E.1.1)) par :

$$S_M^* = \frac{1}{9k_M^e} + \frac{1}{3\mu_M^e} + \left(\frac{1}{3\eta_M^s} + \frac{2}{3\eta_M^d} \right) \frac{1}{p} \quad (3.56)$$

Dans l'espace des temps réels, elle s'écrit :

$$S_M(t) = \frac{1}{9k_M^e} + \frac{1}{3\mu_M^e} + \left(\frac{1}{3\eta_M^s} + \frac{2}{3\eta_M^d} \right) t \quad (3.57)$$

Le modèle de Maxwell indique que le fluage augmente linéairement avec le temps ce qui ne se produit pas réellement pour des structures en béton ou en maçonnerie puisque le taux de fluage diminue avec le temps. Notons que les temps de relaxation de ce modèle sont :

$$\tau_M^s = \frac{\eta_M^s}{3k_M^e}, \quad \tau_M^d = \frac{\eta_M^d}{2\mu_M^e} \quad (3.58)$$

Modèle de Kelvin-Voigt (KV)

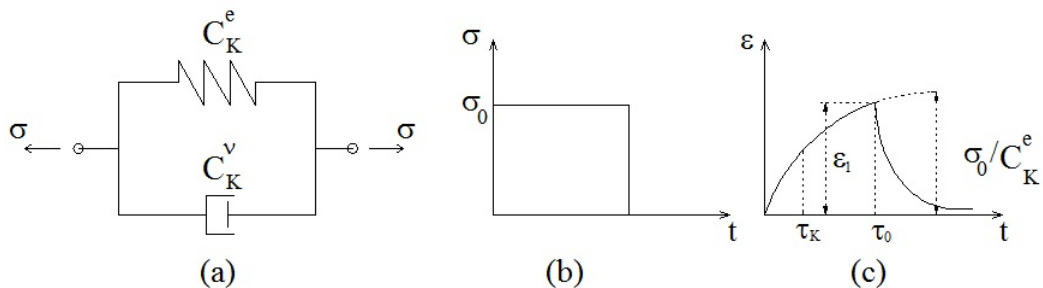


FIGURE 3.5 – Modèle de KV (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type KV à une contrainte constante σ_0 (b).

Ce modèle est l'association en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur (figure (3.5)-a). Sa loi de comportement est :

$$\sigma = \mathbb{C}_K^e \varepsilon + \mathbb{C}_K^v \dot{\varepsilon} \quad (3.59)$$

Les tenseurs de rigidité élastique et visqueuse de ce modèle sont donnés respectivement par :

$$\mathbb{C}_K^e = 3k_K^e \mathbb{J} + 2\mu_K^e \mathbb{K}, \quad \mathbb{C}_K^\nu = \eta_K^s \mathbb{J} + \eta_K^d \mathbb{K} \quad (3.60)$$

où k_K^e et μ_K^e sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement du modèle de KV, η_K^s et η_K^d sont les coefficients respectivement de viscosité sphérique et déviatorique. Dans l'espace de LC, la fonction de fluage S_{KV}^* se déduit de la relation (3.28) où k^* et μ^* sont donnés dans (E.12) (cf. Annexe (E.1.2)) par :

$$S_{KV}^* = \frac{1}{9(k_K^e + p\frac{\eta_K^s}{3})} + \frac{1}{3(\mu_K^e + p\frac{\eta_K^d}{2})} \quad (3.61)$$

Dans l'espace des temps réels, elle s'exprime par :

$$S_{KV}(t) = \frac{1}{9k_K^e} (1 - e^{-t/\tau_K^s}) + \frac{1}{3\mu_K^e} (1 - e^{-t/\tau_K^d}) \quad (3.62)$$

où τ_K^s et τ_K^d sont les temps de relaxation respectivement de la partie sphérique et déviatorique du modèle de KV :

$$\tau_K^s = \frac{\eta_K^s}{3k_K^e}, \quad \tau_K^d = \frac{\eta_K^d}{2\mu_K^e} \quad (3.63)$$

On remarque que le modèle de KV est incapable de reproduire la déformation élastique instantanée car cette composante est absente de la formule (3.62).

Modèle de Burgers (Bu)

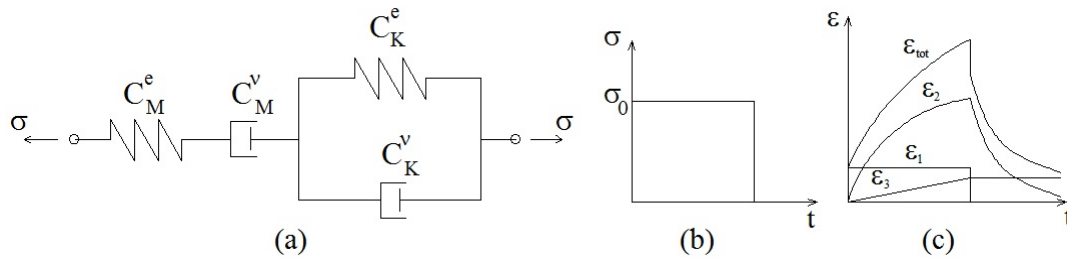


FIGURE 3.6 – Modèle de Burgers (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type "Bu" à une contrainte constante σ_0 (b).

Plusieurs travaux [90, 101, 105–108] ont fait appel au modèle de Burgers pour modéliser le comportement du béton et du mortier. Ce modèle qui est une combinaison en série des modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt semble être approprié pour la modélisation du comportement des matériaux cimentaires. La loi de comportement de ce modèle s'écrit :

$$(\mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^\nu) \sigma + (\mathbb{I} + \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^e + \mathbb{C}_K^\nu : \mathbb{S}_M^\nu) \dot{\sigma} + (\mathbb{C}_K^\nu : \mathbb{S}_M^e) \ddot{\sigma} = \mathbb{C}_K^e \dot{\epsilon} + \mathbb{C}_K^\nu \ddot{\epsilon} \quad (3.64)$$

Dans l'espace de LC, la fonction de fluage apparente S_{Bu}^* se déduit de la loi de comportement macroscopique (3.28) où k^* et μ^* sont donnés dans (E.16) (cf. Annexe (E.1.3)) par :

$$S_{Bu}^* = \frac{1}{9k_M^e} + \frac{1}{3\mu_M^e} + \left(\frac{1}{3\eta_M^s} + \frac{2}{3\eta_M^d} \right) \frac{1}{p} + \frac{1}{9(k_K^e + p\frac{\eta_K^s}{3})} + \frac{1}{3(\mu_K^e + p\frac{\eta_K^d}{2})} \quad (3.65)$$

Dans l'espace des temps réels, elle s'écrit :

$$S_{Bu}(t) = \frac{1}{9k_M^e} + \frac{1}{3\mu_M^e} + \left(\frac{1}{3\eta_M^s} + \frac{2}{3\eta_M^d} \right) t + \frac{1}{9k_K^e} (1 - e^{-t/\tau_K^s}) + \frac{1}{3\mu_K^e} (1 - e^{-t/\tau_K^d}) \quad (3.66)$$

où τ_K^s et τ_K^d sont les temps de relaxation respectivement des parties sphérique et déviatorique du modèle de Kelvin-Voigt (cf. équation (3.63)). Shrive et *al.* [107] ont montré que le modèle de Burgers ne fournit pas de bons résultats pour le comportement du mortier durant les premiers jours (jusqu'à 100 jours) et qu'il surévalue la déformation de fluage au-delà de cette durée.

Modèle de Maxwell modifié (MM)

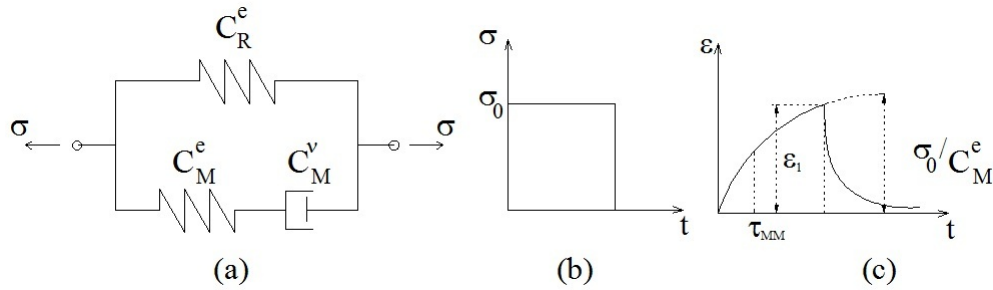


FIGURE 3.7 – Modèle de Maxwell modifié (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type MM à une contrainte constante σ_0 (b).

Ce modèle a été proposé par Lenczer [109] et Choi et *al.* [83] pour modéliser le comportement d'une maçonnerie en fluage à l'issue d'essais de fluage menés sur des maçonneries. Il est constitué de deux parties élastiques (ressorts) et une visqueuse (amortisseur) comme indiqué sur la figure (3.7). Le tenseur de rigidité du ressort est :

$$\mathbb{C}_R^e = 3k_R^e \mathbb{J} + 2\mu_R^e \mathbb{K} \quad (3.67)$$

où k_R^e et μ_R^e sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement du ressort. Les équations caractéristiques du modèle de MM sont :

$$\sigma_t = \sigma_M + \sigma_R, \quad \epsilon_t = \epsilon_M = \epsilon_R \quad (3.68)$$

Par ailleurs, la loi de comportement de la partie de Maxwell est :

$$\dot{\epsilon}_M = \mathbb{S}_M^e \dot{\sigma}_M + \mathbb{S}_M^v \sigma_M \quad (3.69)$$

et celle du ressort est :

$$\sigma_R = \mathbb{C}_R^e \epsilon_R \quad (3.70)$$

Les équations (3.68), (3.69) et (3.70) permettent de déterminer l'équation différentielle qui décrit le comportement d'un mortier de type MM :

$$\mathbb{S}_M^v \sigma + \mathbb{S}_M^e \dot{\sigma} = \mathbb{S}_M^v \mathbb{C}_R^e \epsilon + (\mathbb{I} + \mathbb{S}_M^e \mathbb{C}_R^e) \dot{\epsilon} \quad (3.71)$$

Pour la suite, on pose : $\mathbb{X} = \mathbb{S}_M^v \mathbb{C}_R^e$, $\mathbb{Y} = \mathbb{I} + \mathbb{S}_M^e \mathbb{C}_R^e$. L'équation différentielle (3.71) se réécrit :

$$\mathbb{S}_M^v \sigma + \mathbb{S}_M^e \dot{\sigma} = \mathbb{X} \varepsilon + \mathbb{Y} \dot{\varepsilon} \quad (3.72)$$

Dans la base $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$, les tenseurs isotropes $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ s'expriment comme suit :

$$\mathbb{X} = \frac{3k_R^e}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{2\mu_R^e}{\eta_M^d} \mathbb{K}, \quad \mathbb{Y} = \left(1 + \frac{k_R^e}{k_M^e}\right) \mathbb{J} + \left(1 + \frac{\mu_R^e}{\mu_M^e}\right) \mathbb{K} \quad (3.73)$$

Dans l'espace de LC, la fonction du fluage S_{MM}^* du matériau (cf. Annexe (E.1)) est :

$$S_{MM}^* = \frac{1}{9 \left(k_R^e + \frac{1}{\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{p \frac{\eta_M^s}{3}}} \right)} + \frac{1}{3 \left(\mu_R^e + \frac{1}{\frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{p \frac{\eta_M^d}{2}}} \right)} \quad (3.74)$$

Dans l'espace des temps réels, elle s'écrit :

$$S_{MM}(t) = \frac{1}{9(k_R^e + k_M^e)} + \frac{1}{3(\mu_R^e + \mu_M^e)} + \frac{k_M^e}{9k_R^e(k_R^e + k_M^e)} (1 - e^{-t/\tau_{MM}^s}) + \frac{\mu_M^e}{3\mu_R^e(\mu_R^e + \mu_M^e)} (1 - e^{-t/\tau_{MM}^d}) \quad (3.75)$$

où τ_{MM}^s et τ_{MM}^d sont les temps de relaxation respectivement des parties sphérique et déviatorique du modèle de Maxwell modifié, avec :

$$\tau_{MM}^s = \frac{\eta_M^s(k_R^e + k_M^e)}{3k_R^e k_M^e}, \quad \tau_{MM}^d = \frac{\eta_M^d(\mu_R^e + \mu_M^e)}{2\mu_R^e \mu_M^e}. \quad (3.76)$$

3.3 Homogénéisation de mortiers v.l.n.v. microfissurés

3.3.1 Couplage entre homogénéisation et théorie de Griffith

L'application de la transformée de LC à l'extension de la déformation globale $\bar{\varepsilon}(t)$ (1.85) en présence de microfissures conduit à l'équation :

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{1}{V} \left(\int_{\Omega_s} \varepsilon^* dV + \sum_i \int_{C_i} [u]_i^* \otimes^s n_i dS \right) \quad (3.77)$$

L'objectif est de trouver la relation entre la déformation et la contrainte macroscopique dans l'espace symbolique. Comme dans cet espace, le comportement local de la phase saine (matrice) du mortier est de la forme $\sigma^* = \mathbb{C}^* : \varepsilon^*$, l'équation (1.85) donne :

$$\bar{\varepsilon}^* = \mathbb{C}^{*-1} : \Sigma^* + \frac{1}{V} \left(\sum_i \int_{C_i} [u]_i^* \otimes^s n_i dS \right) \quad (3.78)$$

Dans ce qui suit, le lien entre le saut de déplacement $[u]_i^*$ et la contrainte macroscopique apparente Σ^* peut être exprimé par l'un des schémas d'homogénéisation disponibles dans la littérature (schéma dilué, de Mori-Tanaka, auto-cohérent [38]). Le schéma dilué, par exemple, suppose la présence d'une seule fissure dans un milieu fictif élastique de rigidité

apparente $\mathbb{C}^*(p)$ avec un état de contrainte asymptotique Σ^* . Il permet donc d'utiliser la solution du problème de la rupture fragile [40] pour estimer le saut de déplacement en fonction de la contrainte macroscopique. Deux solutions sont possibles selon l'état de chargement : le cas où la contrainte est isotrope appliquée à l'infini ($\Sigma^* = \Sigma^* \mathbf{i}$) et le cas où la contrainte de cisaillement est appliquée à l'infini ($\Sigma^* = \Sigma^* e_3 \otimes^s e_1$ avec e_1 et e_3 les vecteurs respectivement parallèle et normal au plan de fissures). Dans le premier cas de chargement, la discontinuité de déplacement est normale au plan de la fissure (mode I) et est donnée par :

$$[u_n]^* = \frac{4(1 - \nu_s^*)}{\pi} \frac{\Sigma^*}{\mu_s^*} \sqrt{l^2 - \rho^2} \quad (3.79)$$

où ν_s^* et μ_s^* sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de cisaillement apparents du matériau sain. Dans le second cas, le saut de déplacement est parallèle au plan de la fissure (mode II) et s'écrit :

$$[u_t]^* = \frac{4(1 - \nu_s^*)}{\pi(2 - \nu_s^*)} \frac{\Sigma^*}{\mu_s^*} \sqrt{l^2 - \rho^2} \quad (3.80)$$

Pour des raisons de concision, nous ne développons par la suite que le cas de mortiers avec fissures aléatoires.

Distribution isotrope de l'orientation des fissures :

Comme dans les deux cas de chargement (contrainte isotrope et contrainte de cisaillement), le saut de déplacement dépend linéairement de la contrainte macroscopique, il est alors possible de réécrire l'équation (3.78) sous la forme :

$$\bar{\varepsilon}^* = \tilde{\mathbb{C}}_{dc}^{*-1} : \Sigma^* \quad (3.81)$$

où $\tilde{\mathbb{C}}_{dc}^*$ est le tenseur de rigidité effective apparente du mortier viscoélastique microfissuré estimé par le couplage entre le schéma d'homogénéisation dilué et la théorie de Griffith. Avec l'hypothèse de distribution isotrope des fissures, le tenseur $\tilde{\mathbb{C}}_{dc}^*$ est isotrope et s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{dc}^* = 3\tilde{k}_{dc}^* \mathbb{J} + 2\tilde{\mu}_{dc}^* \mathbb{K} \quad (3.82)$$

L'expression du module de compressibilité effectif apparent $\tilde{k}_{dc}^*$ (de cisaillement apparent $\tilde{\mu}_{dc}^*$) est déterminée en considérant un chargement macroscopique en contrainte isotrope (déviatorique).

Module de compressibilité effectif apparent :

Sous chargement sphérique ($\Sigma^* = \Sigma^* \mathbf{i}$), la contribution élémentaire de la fissure est purement normale (mode I) avec un saut de déplacement $[u]^* = [u_n]^* n$ où $[u_n]^*$ est donné par (3.79). Dans ce cas, de la relation (3.78), il a été montré [40] que la déformation macroscopique apparente s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}^* = \mathbb{C}^{*-1} : (\Sigma^* : \mathbf{i}) + \frac{8d_c}{9} \frac{\Sigma^*(1 - \nu_s^*)}{\mu_s^*} \mathbf{i} \quad (3.83)$$

où $d_c = Nl^3$ (cf. équation (1.29)) est la densité de fissures, l est la longueur de fissure et N est le nombre des fissures par unité de volume. L'équation (3.83) permet de déduire la déformation sphérique apparente suivante :

$$trace(\bar{\varepsilon}^*) = \left(\frac{1}{k_s^*} + \frac{8d_c(1-\nu_s^*)}{3\mu_s^*} \right) \Sigma^* \quad (3.84)$$

où k_s^* et μ_s^* sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement apparents du matériau sain et sont donnés par (E.16) (pour le modèle de Burgers) et par (E.19) (pour le modèle de MM). ν_s^* (cf. (3.22)) est le coefficient de Poisson apparent du matériau sain. Sachant aussi que $trace(\bar{\varepsilon}^*) = \Sigma^*/k_{d_c}^*$, on pourra alors déduire l'estimation suivante du module de compressibilité effectif du mortier viscoélastique fissuré en fonction du paramètre d_c :

$$\frac{1}{\tilde{k}_{d_c}^*} = \frac{1 + d_c Q^*}{k_s^*} \quad \text{avec} \quad Q^* = \frac{16}{9} \frac{1 - \nu_s^{*2}}{1 - 2\nu_s^*} \quad (3.85)$$

Module de cisaillement effectif apparent :

Dans le cas où le chargement en contrainte est déviatorique et de la forme :

$\Sigma^* = \Sigma^*(e_1 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3)$ dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées de base (e_1, e_2, e_3) (e_3 est le vecteur unitaire normal au plan des fissures (e_1, e_2)), la contribution élémentaire d'une fissure est mixte et elle est déterminée grâce aux deux équations (3.79) pour $[u_n]^*$ et (3.80) pour $[u_t]^*$. S.T. Nguyen et *al.* [106] ont montré que la loi de comportement macroscopique apparente sous chargement déviatorique s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{1 + d_c M^*}{2\mu_s^*} \Sigma^* \quad (3.86)$$

où μ_s^* est le module de cisaillement apparent du matériau sain.

A partir de cette équation et de la relation de moyenne $\bar{\varepsilon}^* = \frac{\Sigma^*}{2\tilde{\mu}_{d_c}^*}$ dans le cas d'un chargement purement déviatorique, il est possible d'identifier l'estimation suivante du module de cisaillement effectif apparent du mortier viscoélastique microfissuré :

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_{d_c}^*} = \frac{1 + d_c M^*}{\mu_s^*} \quad \text{avec} \quad M^* = \frac{32}{45} \frac{(1 - \nu_s^*)(5 - \nu_s^*)}{2 - \nu_s^*} \quad (3.87)$$

Identification de modèles rhéologiques existants à court et long termes

S.T. Nguyen et *al.* [106] ont proposé d'identifier la meilleure approximation de la rigidité apparente $\tilde{C}_{d_c}^*(p, d_c)$ qui découle du couplage entre les techniques d'homogénéisation et la mécanique de la rupture linéaire d'un béton viscoélastique microfissuré dont le comportement en fluage suit le modèle rhéologique de Burgers dans la classe du même modèle (i.e. de Burgers) à court ($t \rightarrow 0$) et long termes ($t \rightarrow \infty$). Dans la présente étude, une démarche similaire a été suivie et appliquée pour d'autres modèles rhéologiques valables dans la littérature pour modéliser le comportement d'un mortier viscoélastique [83, 84], comme par exemple ceux de Maxwell, Kelvin-Voigt, Ross, Feng, Maxwell généralisé, Kelvin-Voigt généralisé. Pour des raisons de concision, nous montrons brièvement la démarche suivie

par ces auteurs et nous ne reportons que les résultats associés aux modèles de Burgers et MM (cf. Annexe (E.2)). On note que sous un chargement de compression uniaxiale en contrainte, la fonction de fluage $\tilde{S}^*$ du mortier viscoélastique fissuré est donnée par (cf. (3.28)) :

$$\tilde{S}_{d_c}^* = \frac{1}{\tilde{E}_{d_c}^*} = \frac{1}{9\tilde{k}_{d_c}^*} + \frac{1}{3\tilde{\mu}_{d_c}^*} \quad (3.88)$$

Les modules apparents $\tilde{k}_{d_c}^*$ et $\tilde{\mu}_{d_c}^*$ sont exprimés par (E.25), (E.38) (pour le modèle de Burgers) et (E.51), (E.56) (pour celui de Maxwell modifié). On montrera ci-dessous les résultats de la procédure d'identification des paramètres d'un matériau microfissuré de types Burgers et MM dans le cas de fissures à distribution aléatoire.

* Modèle de Burgers :

La fonction de fluage effective de Burgers est :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{Bu} = \tilde{S}_{d_c}(t, d_c) = & \frac{1}{9k_M^e(d_c)} + \frac{1}{3\mu_M^e(d_c)} + \left(\frac{1}{3\eta_M^s(d_c)} + \frac{2}{3\eta_M^d(d_c)} \right) t \\ & + \frac{1}{9k_K^e(d_c)} \left(1 - e^{-t/\tau_K^s(d_c)} \right) + \frac{1}{3\mu_K^e(d_c)} \left(1 - e^{-t/\tau_K^d(d_c)} \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

où les 8 paramètres de ce modèle sont :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_M^e(d_c)} &= \frac{1 + Q_M^e d_c}{k_M^e}, & \frac{1}{\mu_M^e(d_c)} &= \frac{1 + M_M^e d_c}{\mu_M^e}, \\ \frac{1}{\eta_M^s(d_c)} &= \frac{1 + Q_M^v d_c}{\eta_M^s}, & \frac{1}{\eta_M^d(d_c)} &= \frac{1 + M_M^v d_c}{\eta_M^d}, \\ \frac{1}{k_K^e(d_c)} &= \frac{1 + Q_K^e d_c}{k_K^e}, & \frac{1}{\mu_K^e(d_c)} &= \frac{1 + M_K^e d_c}{\mu_K^e}, \\ \frac{1}{\eta_K^s(d_c)} &= \frac{1 + Q_K^v d_c}{\eta_K^s}, & \frac{1}{\eta_K^d(d_c)} &= \frac{1 + M_K^v d_c}{\eta_K^d} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Les temps caractéristiques effectifs des parties sphérique et déviatorique du comportement de Burgers sont identiques à ceux du modèle de KV :

$$\tau_K^s(d_c) = \frac{\eta_K^s(d_c)}{3k_K^e(d_c)}, \quad \tau_K^d(d_c) = \frac{\eta_K^d(d_c)}{2\mu_K^e(d_c)} \quad (3.91)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_M^e = Q_0^\infty &= \frac{4}{3} \frac{k_M^e(3k_M^e + 4\mu_M^e)}{\mu_M^e(3k_M^e + \mu_M^e)}, & Q_M^v = Q_0^0 &= \frac{16}{9} \frac{\eta_M^s(\eta_M^s + 2\eta_M^d)}{\eta_M^d(2\eta_M^s + \eta_M^d)} \\ Q_K^e = Q_0^0 + \frac{3k_K^e}{\eta_M^s} Q_1^0 - \frac{k_K^e}{k_M^e} (Q_0^\infty - Q_0^0), & Q_K^v = Q_0^\infty + \frac{\eta_K^s}{3k_M^e} Q_{-1}^\infty - \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} (Q_0^0 - Q_0^\infty) \\ Q_1^0 &= \frac{32}{9} \frac{\eta_M^s}{\eta_M^d} \frac{(\eta_M^s{}^2 + \eta_M^s \eta_M^d + \eta_M^d{}^2)}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left[\frac{\eta_M^s}{3} \left(\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{k_K^e} \right) - \frac{\eta_M^d}{2} \left(\frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{\mu_K^e} \right) \right] \\ Q_{-1}^\infty &= -\frac{4}{3} \frac{k_M^e}{\mu_M^e} \frac{(9k_M^e{}^2 + 6\mu_M^e k_M^e + 4\mu_M^e{}^2)}{(3k_M^e + \mu_M^e)^2} \left[3k_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 2\mu_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.92)$$

et

$$\begin{aligned}
 M_M^e &= M_0^\infty = \frac{16}{45} \frac{(9k_M^e + 4\mu_M^e)(3k_M^e + 4\mu_M^e)}{(3k_M^e + \mu_M^e)(3k_M^e + 2\mu_M^e)} \\
 M_M^v &= M_0^0 = \frac{32}{45} \frac{(\eta_M^s + 2\eta_M^d)(3\eta_M^s + 2\eta_M^d)}{(\eta_M^s + \eta_M^d)(2\eta_M^s + \eta_M^d)} \\
 M_K^e &= M_0^0 + \frac{2\mu_K^e}{\eta_M^d} M_1^0 - \frac{\mu_K^e}{\mu_M^e} (M_0^\infty - M_0^0) \\
 M_K^v &= M_0^\infty + \frac{\eta_K^d}{2\mu_M^e} M_{-1}^\infty - \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} (M_0^0 - M_0^\infty)
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

où

$$\begin{aligned}
 M_1^0 &= \frac{32}{45} \frac{\eta_M^s \eta_M^d}{(\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \frac{(7\eta_M^s{}^2 + 10\eta_M^s \eta_M^d + 4\eta_M^d{}^2)}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left[\frac{\eta_M^s}{3} \left(\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{k_K^e} \right) - \frac{\eta_M^d}{2} \left(\frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{\mu_K^e} \right) \right] \\
 M_{-1}^\infty &= \frac{16}{15} \frac{k_M^e \mu_M^e}{(3k_M^e + \mu_M^e)^2} \frac{(63k_M^e{}^2 + 60\mu_M^e k_M^e + 16\mu_M^e{}^2)}{(3k_M^e + 2\mu_M^e)^2} \cdot \left[3k_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 2\mu_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Plus de détails concernant la démarche d'obtention de ces coefficients sont présentés dans l'annexe (E.2.1).

* Modèle de Maxwell modifié (MM) :

D'après Choi et *al.* [83], le modèle de MM est mieux approprié que les modèles simples et basiques de Maxwell et Kelvin-Voigt pour modéliser le fluage d'un mortier. Contrairement au modèle de Maxwell classique, le ressort additionnel permet de conserver une certaine rigidité même à la fin de la relaxation du mortier. Ceci permet de mieux représenter la diminution continue du fluage à long terme du mortier.

La fonction de fluage du modèle de MM (cf. (3.75) et l'annexe (E.2.2)) est :

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{MM} = \tilde{S}_{d_c}(t, d_c) &= \frac{1}{9[k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c)]} + \frac{1}{3[\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c)]} \\
 &+ \frac{k_M^e(d_c)(1 - e^{-t/\tau_{MM}^s(d_c)})}{9k_R^e(d_c)(k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c))} + \frac{\mu_M^e(d_c)(1 - e^{-t/\tau_{MM}^d(d_c)})}{3\mu_R^e(d_c)(\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c))}
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

où les 6 paramètres de ce modèle sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k_R^e(d_c)} &= \frac{1 + d_c Q_M^v}{k_R^e}, & \frac{1}{\mu_R^e(d_c)} &= \frac{1 + d_c M_M^v}{\mu_M^e} \\
 \frac{1}{k_M^e(d_c)} &= \frac{1}{(1 + d_c Q_M^e)(1 + d_c Q_M^v)}, & \frac{1}{\mu_M^e(d_c)} &= \frac{1}{(1 + d_c M_M^e)(1 + d_c M_M^v)} \\
 \frac{1}{k_M^e(d_c)} &= \frac{k_M^e + d_c [k_R^e(Q_M^v - Q_M^e) + k_M^e Q_M^v]}{(1 + d_c Q_M^v)^2}, & \frac{1}{\mu_M^e(d_c)} &= \frac{\mu_M^e + d_c [\mu_R^e(M_M^v - M_M^e) + \mu_M^e M_M^v]}{(1 + d_c M_M^v)^2} \\
 \frac{1}{\eta_M^s(d_c)} &= \frac{1}{\eta_M^s + d_c(\eta_M^s Q_M^v - 3k_R^e Q_1^0)}, & \frac{1}{\eta_M^d(d_c)} &= \frac{1}{\eta_M^d + d_c(\eta_M^d M_M^v - 2\mu_R^e M_1^0)}
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

avec des temps caractéristiques effectifs des parties sphérique et déviatorique suivants :

$$\tau_{MM}^s(d_c) = \frac{\eta_M^s(d_c)(k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c))}{3k_R^e(d_c)k_M^e(d_c)}, \quad \tau_{MM}^d(d_c) = \frac{\eta_M^d(d_c)(\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c))}{2\mu_R^e(d_c)\mu_M^e(d_c)} \tag{3.96}$$

Les constantes des fonctions Q^* et M^* déterminées à l'aide des propriétés issues des

conditions aux limites (3.14) sont :

$$\begin{aligned}
 Q_M^e &= Q_0^\infty = \frac{4}{3} \frac{(k_R^e + k_M^e)[3(k_R^e + k_M^e) + 4(\mu_R^e + \mu_M^e)]}{(\mu_R^e + \mu_M^e)[3(k_R^e + k_M^e) + \mu_R^e + \mu_M^e]}, \quad Q_M^v = Q_0^0 = \frac{4}{3} \frac{k_R^e(3k_R^e + 4\mu_R^e)}{\mu_R^e(3k_R^e + \mu_R^e)}, \\
 Q_1^0 &= \frac{2}{9} \frac{(9k_R^{e^2} + 6k_R^e\mu_R^e + 4\mu_R^{e^2})(-3k_R^e\eta_M^d + 2\mu_R^e\eta_M^s)}{9\mu_R^{e^2}(3k_R^e + \mu_R^e)^2}, \\
 M_M^e &= M_e^\infty = \frac{16}{45} \frac{[9(k_R^e + k_M^e) + 4(\mu_R^e + \mu_M^e)]}{[3(k_R^e + k_M^e) + \mu_R^e + \mu_M^e]} \frac{[3(k_R^e + k_M^e) + 4(\mu_R^e + \mu_M^e)]}{[3(k_R^e + k_M^e) + 2(\mu_R^e + \mu_M^e)]}, \\
 M_M^v &= M_0^0 = \frac{16}{45} \frac{(3k_R^e + 4\mu_R^e)(9k_R^e + 4\mu_R^e)}{(9k_R^{e^2} + 9k_R^e\mu_R^e + 2\mu_R^{e^2})}, \\
 M_1^0 &= \frac{8}{45} \frac{(63k_R^{e^2} + 60k_R^e\mu_R^e + 16\mu_R^{e^2})(3k_R^e\eta_M^d - 2\mu_R^e\eta_M^s)}{(9k_R^{e^2} + 9k_R^e\mu_R^e + 2\mu_R^{e^2})^2}
 \end{aligned}$$

Plus de détails concernant le calcul de ces paramètres sont présentés dans l'annexe (E.2.2).

Validation du modèle approché

Dans cette partie, seul le cas d'une distribution isotrope des fissures est montré. On rappelle que les solutions approchées (3.90) et (3.95) respectivement des modèles de Burgers et MM sont déterminées par une approximation du comportement endommagé réel à court et long termes. Pour valider cette approximation, nous proposons de tester ces solutions en terme de fonctions de fluage à une situation simple, où l'inversion directe de la TLC peut être appliquée. Pour cela, considérons l'exemple d'un problème cylindrique homogène isotrope soumis à une traction sphérique :

$$\Sigma(t) = \Sigma_0 H(t) \mathbf{i} \quad (3.97)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside et Σ_0 est une contrainte constante.

La déformation macroscopique s'écrit sous la forme $\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}_{nn}(t) \mathbf{i}$ où $\bar{\varepsilon}_{nn}(t)$ est la déformation macroscopique normale.

Pour le modèle de Burgers, on peut montrer comme indiqué dans [40] que la déformation macroscopique approchée s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_{nn}(t, d_c) = \Sigma_0 \left(\frac{1}{3k_M^e(d_c)} + \frac{1}{3k_K^e(d_c)} + \frac{t}{\eta_M^s(d_c)} - \frac{e^{-t/\tau_K^s(d_c)}}{3k_K^e(d_c)} \right) \quad (3.98)$$

Pour le modèle de MM, $\bar{\varepsilon}_{nn}$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta_M^s(d_c)} \Sigma_0 = \frac{3k_R^e(d_c)}{\eta_M^s(d_c)} \bar{\varepsilon}_{nn}(t) + \left(1 + \frac{k_R^e(d_c)}{k_M^e(d_c)} \right) \dot{\bar{\varepsilon}}_{nn}(t) \\ \bar{\varepsilon}_{nn}(t) |_{t=0} = \frac{\Sigma_0}{3(k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c))} \end{cases} \quad (3.99)$$

Elle s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_{nn}(t, d_c) = \Sigma_0 \left[\frac{1}{3k_{RM}^e(d_c)} + \frac{k_M^e(d_c)}{3k_R^e(d_c)(k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c))} (1 - e^{-t/\tau_{MM}^s(d_c)}) \right] \quad (3.100)$$

Par ailleurs, la solution exacte de la déformation macroscopique est obtenue par une inversion directe de la TLC (possible dans ce cas de chargement simple (3.97)) de la loi du

comportement effective :

$$\bar{\varepsilon}_{nn}^*(p) = \frac{\Sigma_0}{3\tilde{k}^*} \quad (3.101)$$

où le module de compressibilité effectif $\tilde{k}^*$ est donné respectivement par (E.25) et (E.51) pour le modèle de Burgers et MM.

Les figures (3.8) et (3.10) présentent les évolutions des 8 (6) paramètres du modèle de Burgers (de MM) en fonction de d_c . Pour évaluer la pertinence du modèle approché, on définit l'erreur relative suivante entre les solutions exactes et approchées :

$$E_r = \frac{|A - A_0|}{A_0} \times 100\% \quad (3.102)$$

où A et A_0 sont respectivement la valeur approchée et exacte d'une variable donnée.

Les figures (3.9) et (3.11) montrent d'excellents accords entre les solutions exacte et approchée pour un mortier hybride de type Burgers et MM pour le problème de fluage considéré - en traction sphérique $\Sigma_0 = 1$ MPa - pour différents niveaux de la densité de fissures d_c .

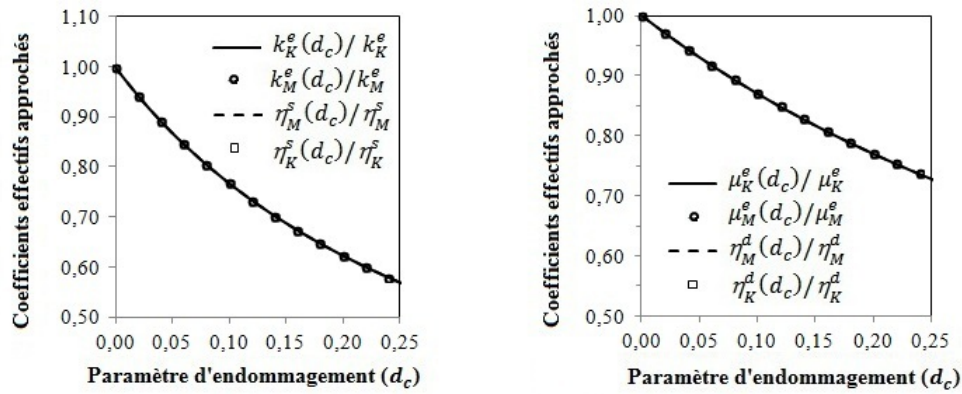


FIGURE 3.8 – Influence de la densité de fissures d_c sur les coefficients effectifs approchés par le modèle de Burgers (les données du mortier hybride sain sont fournies dans la table (3.2)).

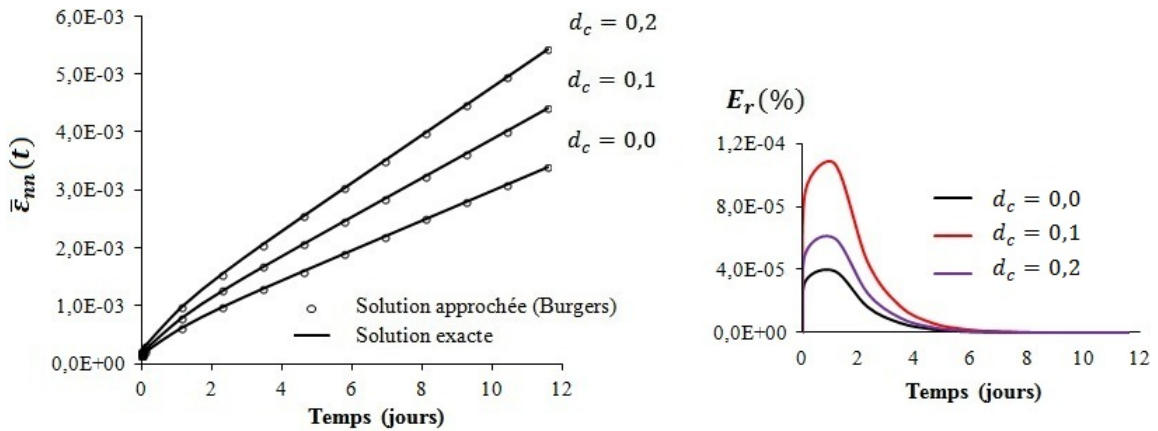


FIGURE 3.9 – Comparaison des solutions exacte et approchée (modèle de Burgers) de la déformation macroscopique dans le cas d'un mortier hybride microfissuré (cf. table (3.2)).

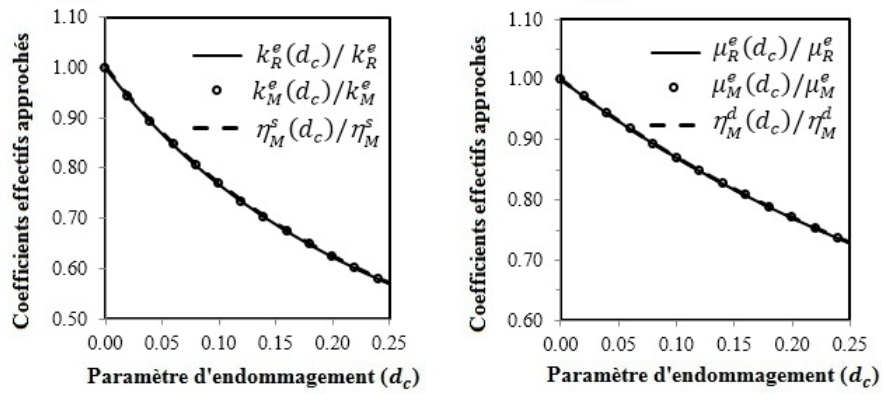


FIGURE 3.10 – Influence de la densité de fissures d_c sur l'évolution des coefficients effectifs approchés par le modèle de MM (les données du mortier hybride sain sont fournies dans la table (3.2)).

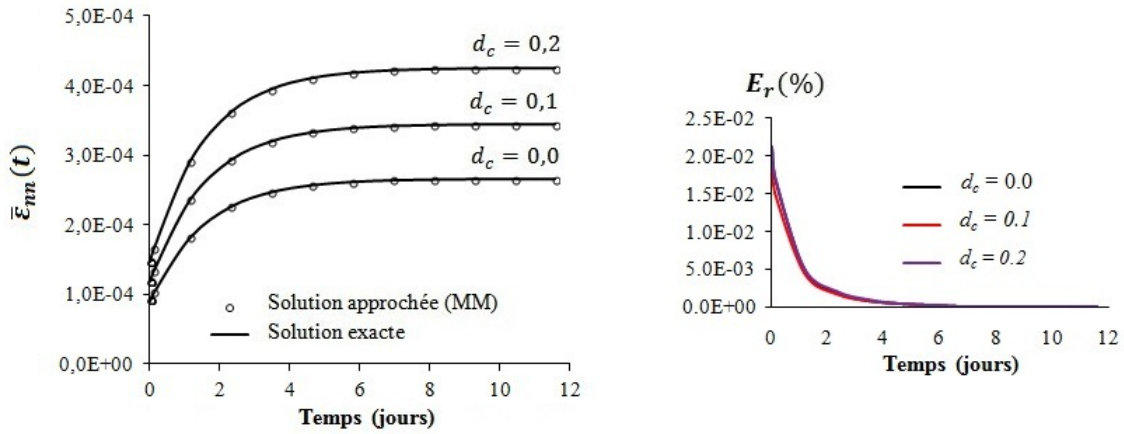


FIGURE 3.11 – Comparaison des solutions exacte et approchée (modèle de MM) de la déformation macroscopique dans le cas d'un mortier hybride microfissuré (cf. table (3.2)).

3.3.2 Application au mortier microfissuré

Données matériau de mortiers viscoélastiques

(i) Cas sain

Pour simplifier l'étude, seuls les deux modèles de Burgers et MM sont utilisés pour décrire le comportement visqueux du mortier. Els Vertrynne et *al.* [101] fournissent les valeurs des paramètres du modèle de Burgers sain pour un mortier non-carboné et carboné. Seven Ignoul et *al.* [84] a donné aussi les résultats d'essais de compression monotone appliqués à des mortiers hydrauliques à base de chaux et des mortiers hybrides (cf. table (3.1)). Les relations utilisées dans cette partie sont :

$$\tau_\alpha^d = \frac{\eta_\alpha^d}{2\mu_\alpha}, \quad \tau_\alpha^s = \frac{\eta_\alpha^s}{3k_\alpha}, \quad \frac{1}{E_\alpha} = \frac{1}{9k_\alpha} + \frac{1}{3\mu_\alpha}, \quad \nu_\alpha = \frac{3k_\alpha - 2\mu_\alpha}{6k_\alpha + 2\mu_\alpha} \quad (3.103)$$

Ici on fait l'hypothèse que : $\tau_\alpha = \tau_\alpha^d = \tau_\alpha^s$ car leurs valeurs ne sont pas distinguées dans les travaux cités ci-dessus. Les données viscoélastiques sont montrées dans la table (3.2) où les

Type de mortier	E_M (MPa)	τ_M (s)	E_K (MPa)	τ_K (s)	ν
non-carboné [101]	1211	487560	1500	15446	0,15
carboné [101]	1868	474270	2500	34491	0,2
hydraulique de chaux [84]	4651	59526	1959	78907	0,10
hybride [84]	4038	46490	2112	90866	0,22
cimentaire [84]	5275	32147	1764	96643	0,48

TABLE 3.1 – Paramètres expérimentaux pour les données viscoélastiques.

paramètres d'entrée pour le modèle de MM sont déduits de ceux du modèle de Burgers.

(ii) Cas microfissuré

Pour chaque valeur de la densité de fissures d_c , on détermine les caractéristiques du mortier fissuré à l'aide des formules (3.90) pour le modèle de Burgers et (3.95) pour le modèle de MM. Ces modules et coefficients de viscosité sont présentés dans la table (3.3).

Évolutions de la fonction de fluage $\tilde{S}(t, d_c)$ du mortier viscoélastique microfissuré

- Modèle de Burgers :

En fixant la densité de fissures d_c (cf. figure (3.12)-b) ou le temps t (cf. figure (3.12)-a), on peut considérer que $\tilde{S}_{Bu}(t, d_c)$ évolue linéairement en fonction de d_c et du temps t . Pour confirmer ces tendances, on propose d'étudier les fonctions dérivées de $\tilde{S}_{Bu}(t, d_c)$ par rapport aux variables t (cf. équation (3.104))-b) et d_c (cf. équation (3.104))-a).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}_{Bu}(t, d_c)}{\partial d_c} = & \left(\frac{Q_K^e}{9k_K^e} + \frac{Q_M^e}{9k_M^e} + \frac{M_K^e}{3\mu_K^e} + \frac{M_M^e}{3\mu_M^e} \right) - \left(\frac{M_K^e}{3\mu_K^e} e^{-t/\tau_K^s(d_c)} + \frac{Q_K^e}{9k_K^e} e^{-t/\tau_K^d(d_c)} \right) \\ & + \left(\frac{Q_M^v}{3\eta_M^s} + \frac{2M_M^e}{3\eta_M^d} - \frac{1}{3} \frac{Q_K^e - Q_K^v}{\eta_K^s + d_c Q_K^e \eta_K^s} e^{-t/\tau_K^d(d_c)} - \frac{2}{3} \frac{M_K^e - M_K^v}{\eta_K^d + d_c M_K^e \eta_K^d} e^{-t/\tau_K^s(d_c)} \right) t \end{aligned} \quad (3.104)$$

Mortier	Modèle rhéologique	Parties de modèle	k^e (MPa)	μ^e (MPa)	η^s (MPa.s)	η^d (MPa.s)
Mortier non-carboné [101]	Burgers	Maxwell Kelvin	576,67 714,28	526,52 652,17	8,435.10 ⁸ 33,099.10 ⁶	5,134.10 ⁸ 20,147.10 ⁶
	MM	Maxwell Ressort	576,67 714,28	526,52 652,17	8,435.10 ⁸	5,134.10 ⁸
Mortier carboné [101]	Burgers	Maxwell Kelvin	1037,68 1388,89	778,33 1041,67	14,77.10 ⁸ 14,37.10 ⁷	7,38.10 ⁸ 7,19.10 ⁷
	MM	Maxwell Ressort	1037,68 1388,89	778,33 1041,67	14,77.10 ⁸	7,38.10 ⁸
Mortier hydraulique de chaux [84]	Burgers	Maxwell Kelvin	1938 816	2114 890	3,460.10 ⁸ 1,932.10 ⁸	2,519.10 ⁸ 1,405.10 ⁸
	MM	Maxwell Ressort	1938 816	2114 890	3,460.10 ⁸	2,519.10 ⁸
Mortier cimentaire [84]	Burgers	Maxwell Kelvin	43958 14700	1782 596	4,239.10 ⁹ 4,261.10 ⁹	1,146.10 ⁸ 1,152.10 ⁸
	MM	Maxwell Ressort	43958 14700	1782 596	4,239.10 ⁹	1,146.10 ⁸
Mortier hybride [84]	Burgers	Maxwell Kelvin	2404 1257	1655 866	3,352.10 ⁸ 3,427.10 ⁶	1,539.10 ⁸ 1,573.10 ⁸
	MM	Maxwell Kelvin	2404 1257	1655 866	3,352.10 ⁸	1,539.10 ⁸

TABLE 3.2 – Données viscoélastiques du mortier de type Burgers et MM

Modèle	d_c	$k_M^e(d_c)$ (MPa)	$\mu_M^e(d_c)$ (MPa)	$\eta_M^s(d_c)$ (MPa.s)	$\eta_M^d(d_c)$ (MPa.s)	$k_K^e(d_c)$ (MPa)	$\mu_K^e(d_c)$ (MPa)	$\eta_K^s(d_c)$ (MPa.s)	$\eta_K^d(d_c)$ (MPa.s)
Burgers	0,0	2404	1655	3,35.10 ⁸	1,54.10 ⁸	1257	866	3,43.10 ⁸	1,57.10 ⁸
	0,1	1846	1440	2,57.10 ⁸	1,34.10 ⁸	965	753	2,63.10 ⁸	1,37.10 ⁸
	0,2	1498	1275	2,09.10 ⁸	1,34.10 ⁸	784	667	2,13.10 ⁸	1,21.10 ⁸
Modèle	d_c	$k_M^e(d_c)$ (MPa)	$\mu_M^e(d_c)$ (MPa)	$\eta_M^s(d_c)$ (MPa.s)	$\eta_M^d(d_c)$ (MPa.s)	$k_R^e(d_c)$ (MPa)	$\mu_R^e(d_c)$ (MPa)	$\eta_R^s(d_c)$ (MPa.s)	$\eta_R^d(d_c)$ (MPa.s)
MM	0,0	2404	1655	3,35.10 ⁸	1,54.10 ⁸	1257	866	-	-
	0,1	1846	1440	2,57.10 ⁸	1,33.10 ⁸	965	754	-	-
	0,2	1498	1275	2,09.10 ⁸	1,19.10 ⁸	784	667	-	-

TABLE 3.3 – Modules et coefficients du mortier à l'état sain ($d_c = 0$) et microfissuré ($d_c = 0,1, d_c = 0,2$). Les données du mortier sain sont présentées dans la table (3.2) pour un mortier hybride.

L'évolution de la fonction dérivée $\frac{\partial \tilde{S}_{Bu}(t, d_c)}{\partial d_c}$ pour t fixé et d_c variable est constante comme

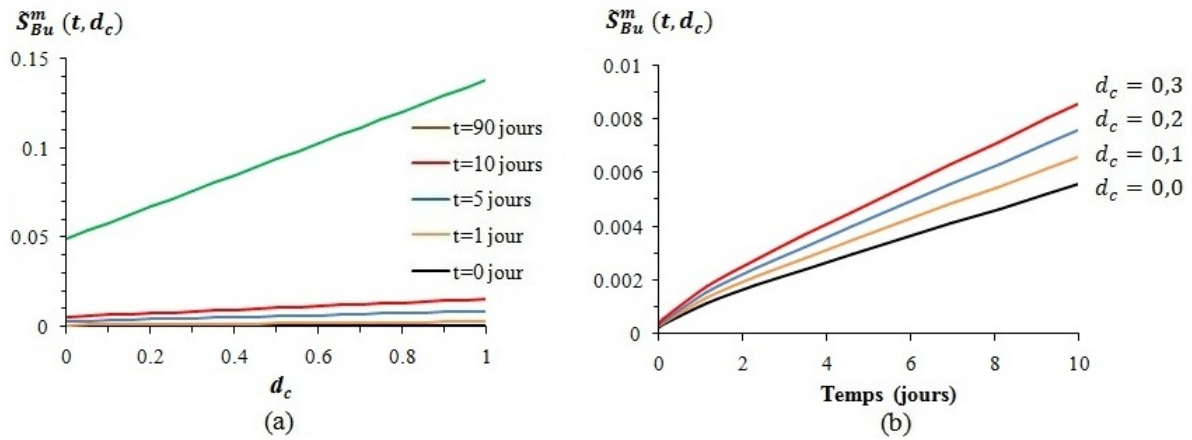


FIGURE 3.12 – Évolutions de la fonction de fluage $\tilde{S}_{Bu}$ en fonction de d_c (a) et du temps (b) pour un mortier viscoélastique hybride (table (3.2)) microfissuré.

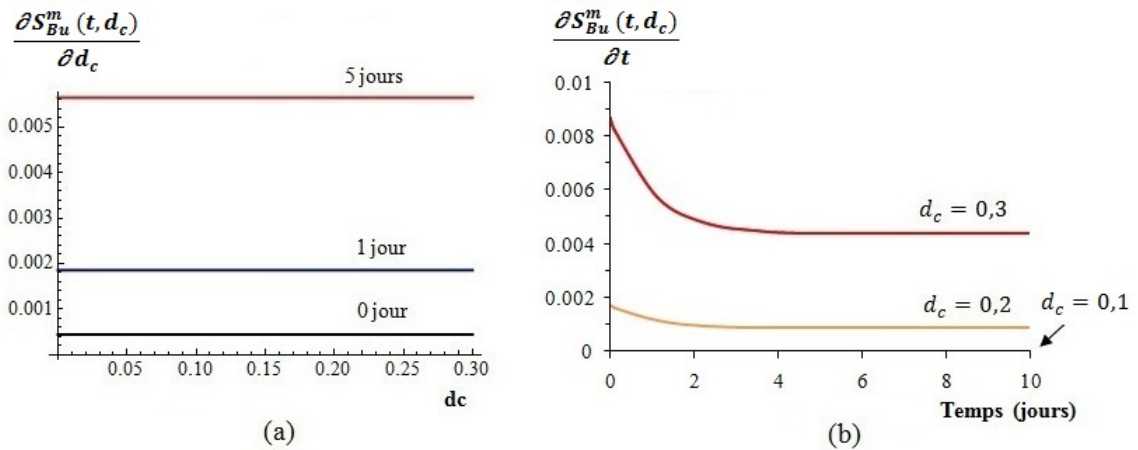


FIGURE 3.13 – Évolutions des dérivées de $\tilde{S}_{Bu}(d_c)$ par rapport à la densité de fissures d_c pour t fixé (a) et par rapport au temps t pour d_c donné (b). Les données viscoélastiques du mortier hybride sont présentées dans la table (3.2).

montré sur la figure (3.13)-a.

$$\frac{\partial \tilde{S}_{Bu}(t, d_c)}{\partial t} = \frac{1}{3\eta_M^s(d_c)} + \frac{2}{3\eta_M^d(d_c)} + \frac{e^{-t/\tau_K^s(d_c)}}{3\eta_K^s(d_c)} + \frac{2e^{-t/\tau_K^d(d_c)}}{3\eta_K^d(d_c)} \quad (3.105)$$

L'évolution de $\frac{\partial \tilde{S}_{Bu}(t, d_c)}{\partial t}$ en fonction du temps t à des d_c fixés ($d_c = 0,1$; $0,2$ et $0,3$), figure (3.13)-b montre également une tendance linéaire à partir de $t_s = 3,5$ jours.

- Modèle de MM :

Pour t fixé, la dérivée de $\tilde{S}_{MM}(t, d_c)$ par rapport à d_c est :

$$\frac{\partial \tilde{S}_{MM}(t, d_c)}{\partial d_c} = \frac{Q_M^v}{9k_R^e} + \frac{M_M^v}{3\mu_R^e} - \frac{[-k_R^e Q_M^e + (k_R^e + k_M^e) Q_M^v] e^{-t/\tau_{MM}^s(d_c)}}{9k_R^e (k_R^e + k_M^e)} - \frac{[-\mu_R^e M_M^e + (\mu_R^e + \mu_M^e) M_M^v] e^{-t/\tau_{MM}^d(d_c)}}{3\mu_R^e (\mu_R^e + \mu_M^e)}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{k_R^e[-k_M^e - d_c k_M^e Q_M^v + d_c k_R^e(Q_M^e - Q_M^v)][3k_M^e Q_1^0 - \eta_M^s(Q_M^e - Q_M^v)]e^{-t/\tau_{MM}^s(d_c)}}{3(k_R^e + k_M^e)^2(\eta_M^s - 3d_c k_R^e Q_1^0 + d_c \eta_M^s Q_M^v)^2} \\
 & - \frac{2\mu_R^e[-\mu_M - d_c \mu_M M_M^v + d_c \mu_R^e(M_M^e - M_M^v)][2\mu_M M_1^0 - \eta_M^d(M_M^e - M_M^v)]e^{-t/\tau_{MM}^d(d_c)}}{3(\mu_R^e + \mu_M)^2(\eta_M^d - 2d_c \mu_R^e M_1^0 + d_c \eta_M^d M_M^v)^2}
 \end{aligned} \quad (3.106)$$

Pour d_c fixé, la dérivée de $\tilde{S}_{MM}(t, d_c)$ par rapport à t est :

$$\frac{\partial \tilde{S}_{MM}(t, d_c)}{\partial t} = \frac{k_M^e(d_c)e^{-t/\tau_{MM}^s(d_c)}}{9k_R^e(d_c)\tau_{MM}^s(d_c)(k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c))} + \frac{\mu_M^e(d_c)e^{-t/\tau_{MM}^d(d_c)}}{3\mu_R^e(d_c)\tau_{MM}^d(d_c)(\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c))} \quad (3.107)$$

La figure (3.15)-a montre une évolution de $\tilde{S}_{MM}(d_c)$ quasiment linéaire en fonction de d_c .

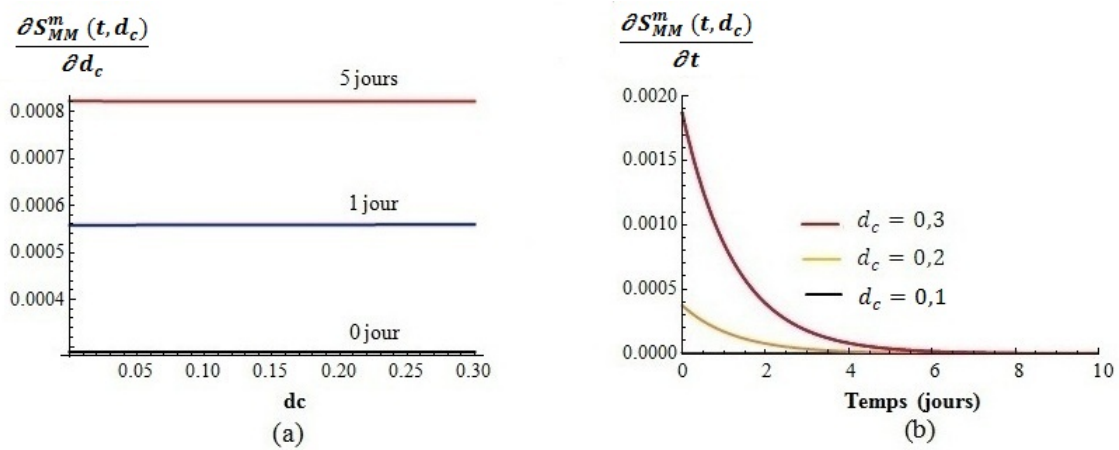


FIGURE 3.14 – Évolutions des dérivées de $\tilde{S}_{MM}(t, d_c)$ par rapport à la densité de fissures d_c pour t fixé (a) et par rapport au temps t pour d_c donné (b) pour le mortier hybride considéré (table (3.2)).

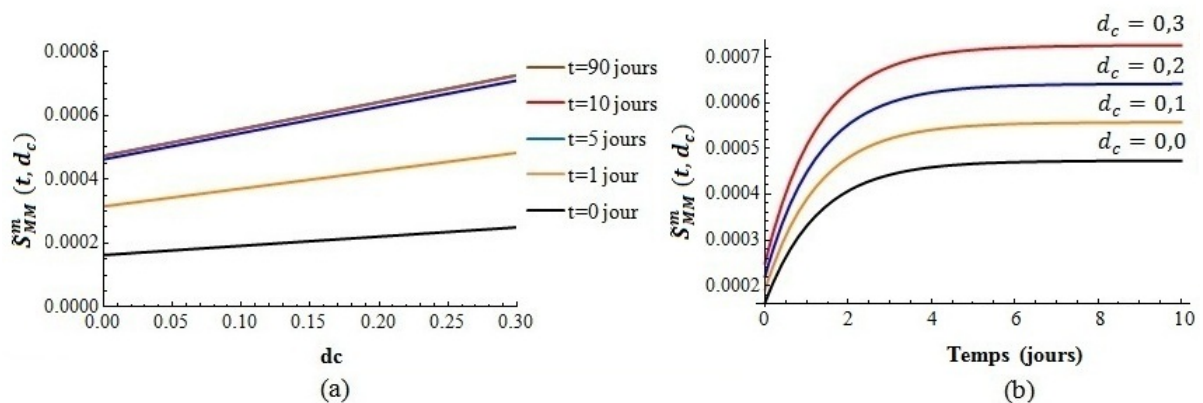


FIGURE 3.15 – Évolutions de $\tilde{S}_{MM}$ en fonction de d_c (a) et du temps (b).

Pour un d_c donné, l'évolution de $\tilde{S}_{MM}$ en fonction du temps est croissante et est quasiment constante au-delà de $t_s = 6$ jours. Les courbes se stabilisent au-delà de t_s contrairement au modèle de Burgers (cf. figure (3.12)-b). Cette tendance est obtenue pour différentes valeurs de d_c (cf. figure (3.15)-b) avec un fluage moins important avec l'augmentation de d_c .

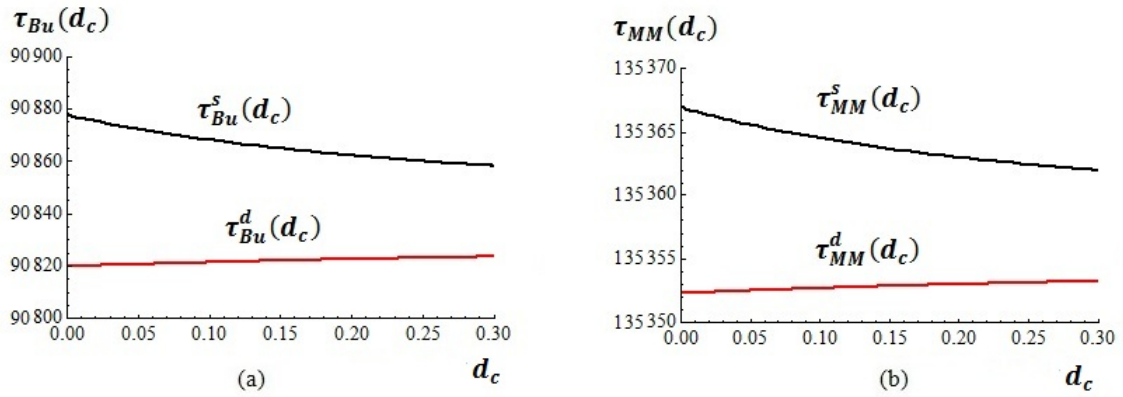


FIGURE 3.16 – Évolution des temps de fluage en fonction de d_c pour des mortiers hybrides microfissurés de type Burgers (a) et MM (b).

Temps de fluage

Les figures (3.16-a,b) montrent l'évolution des temps de retard $\tau(d_c)$ en fonction de la valeur de d_c pour les parties sphérique et déviatorique des modèles de Burgers et MM. Pour les deux modèles, $\tau^s(d_c)$ décroît avec l'augmentation de d_c , contrairement à $\tau^d(d_c)$ qui augmente légèrement. De plus, à un temps t fixé, le modèle de Burgers prévoit des temps de fluage $\tau^{d,s}(d_c)$ inférieurs à ceux prévu par le modèle de MM.

3.4 Comportement d'une cellule périodique de maçonnerie viscoélastique microfissurée

Comme montré à la section précédente (3.3), le couplage entre les techniques d'homogénéisation linéaire (schéma dilué) et la théorie de Griffith a permis d'estimer le comportement global d'un mortier viscoélastique microfissuré de type Burgers ou MM. Il est alors possible dans cette section d'évaluer le comportement global de l'assemblage brique/mortier (maçonnerie) moyennant les techniques d'homogénéisation en champs moyens. Cette évaluation peut se baser sur trois approches.

La première approche (homogénéisation analytique) consiste à appliquer l'homogénéisation périodique de façon analytique en se servant des formules de rigidités effectives dans le cas d'un composite stratifié (cas 1D) [59] et des formules proposées par Cecchi et Sab [26] dans le cas d'une cellule périodique 2D. Cette dernière approche permet d'étendre les travaux de Cecchi et Tralli [36] à une maçonnerie viscoélastique microfissurée et est nommée "E.C-T". La seconde approche conduisant au comportement effectif d'une cellule périodique 1D et 2D consiste à effectuer une homogénéisation périodique à l'aide de la méthode des EF à l'instar des travaux [24, 32, 35]. Le comportement du mortier viscoélastique (sain et microfissuré) est implémenté de façon incrémentale selon la procédure indiquée dans l'annexe (G.2). Cette approche est une combinaison de la technique d'homogénéisation EF avec formulation incrémentale ou affine pour le mortier viscoélastique sain ou microfissuré) notée "INC+EF". A chaque fois, le comportement du mortier (avec ou sans microfissures) est supposé élastique linéaire mais avec des propriétés (6 ou 8 paramètres selon le modèle de

MM ou Burgers) qui dépendent du temps et du paramètre d_c . Rappelons que ces propriétés sont fournies par les formules (3.90) et (3.95) respectivement pour le modèle de Burgers et MM. Les résultats effectifs issus des deux modèles (homogénéisation numérique, homogénéisation analytique) de l'assemblage brique/mortier pour le cas 2D sont montrés à la section (3.4.3).

La troisième approche consiste à supposer que l'assemblage brique/mortier est assimilé à un composite avec des inclusions ellipsoïdales (briques) disposées dans le mortier ou liant (matrice). Dans ce cas, il est possible d'employer un des schémas d'homogénéisation morphologique disponibles dans la littérature car la fraction volumique des briques est élevée ($\varphi^b \geq 70\%$ [38]). Cette approche nommée "MT+ITLC" est un couplage entre une inversion directe de la TLC et le schéma de MT.

Dans cette partie, nous ne développons que le modèle basé sur l'homogénéisation analytique qu'on appellera par la suite "extension de Cecchi et Tralli" (E.C-T). Les modèles numérique "INC+EF" et "MT+ITLC" sont développés respectivement dans les annexes (G.2) et (G.1).

3.4.1 Cas d'une colonne maçonnée (1-D)

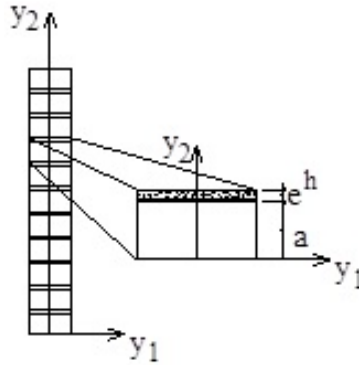


FIGURE 3.17 – Colonne maçonnée et sa cellule périodique (composite stratifié).

Rigidité effective normale

Le comportement d'une colonne maçonnée peut être parfaitement décrit par celui de la cellule périodique (composite stratifié avec un biphasé brique/mortier) montrée à la figure (3.17). Cecchi et Tralli [36] ont rapporté qu'en déformations planes, la rigidité effective normale (selon la direction $n = \vec{y}_2$) d'un stratifié à l'état sain s'écrit :

$$C_{nn}^{el}(t) = \frac{E^b S_m^{-1}(t)(a^b + e^h)}{E^b e^h + S_m^{-1}(t)a^b} \quad (3.108)$$

où E^b est le module d'Young de la brique, a^b et e^h sont respectivement la hauteur de brique et l'épaisseur du mortier. On note que la fonction de fluage du mortier viscoélastique $S_M^{-1}(t)$ est liée au module d'Young du mortier E^m par :

$$S_m^{-1}(t) = E^m(t) = E^m(t_0)\Phi^m(t) \quad (3.109)$$

où $\Phi^m(t)$ est la fonction visqueuse du mortier sain. Si on suppose, de plus, que les briques sont rigides ($E^b \rightarrow \infty$), la rigidité (3.108) devient :

$$C_{nn}^{ri}(t) = S_m^{-1}(t) \left(\frac{a^b + e^h}{e^h} \right) \quad (3.110)$$

Notons que la rigidité (3.110) implique que le comportement global de la cellule est identique à celui du mortier quand les briques sont rigides.

En présence de microfissures dans le mortier viscoélastique, la rigidité normale globale de la cellule périodique (3.119) se réécrit sous la forme :

$$\tilde{C}_{nn}^{el}(t, d_c) = \frac{E^b \tilde{S}_m^{-1}(t, d_c)(a^b + e^h)}{E^b e^h + \tilde{S}_m^{-1}(t, d_c) a^b} \quad (3.111)$$

Dans le cas d'une cellule maçonnée avec des briques rigides, la relation (3.110) devient :

$$\tilde{C}_{nn}^{ri}(t, d_c) = \tilde{S}_m^{-1}(t, d_c) \left(\frac{a^b + e^h}{e^h} \right) \quad (3.112)$$

Rappelons que $\tilde{S}_m(t, d_c)$ est la fonction de fluage (3.89) et (3.94) respectivement pour les modèles de Burgers et MM.

La rigidité normale effective $\tilde{C}_{nn}(t, d_c)$ est donnée par (3.108) si les briques sont élastiques et le mortier v.l.n.v. sain, par la formule (3.111) si le mortier est microfissuré. Pour des briques rigides, $\tilde{C}_{nn}(t, d_c)$ est déterminée par (3.110) et (3.112) respectivement pour les cas de mortiers sains et microfissurés. Pour l'exemple d'une colonne montrée sur la figure (3.32)-b, les propriétés des mortiers hybrides sains et endommagés utilisées pour les calculs sont présentées respectivement dans les tables (3.2) et (3.3). Notons que l'estimation du coefficient de Poisson effectif $\tilde{\nu}_{nt}(t, d_c)$ de la cellule périodique découle des coefficients de Poisson des briques et du mortier selon la borne de Reuss :

$$\tilde{\nu}_{nt}(t, d_c) = \left(\frac{e^h}{a + e^h} \nu^m \tilde{S}_m(t, d_c) + \frac{a}{a + e^h} \frac{\nu^b}{E^b} \right) \tilde{C}_{nn}(t, d_c) \quad (3.113)$$

où ν^m est le coefficient de Poisson du mortier.

Les expressions de la rigidité $\tilde{C}_{nn}(t, d_c)$ et du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}^m(t, d_c)$ effectifs dans le cas de mortiers sains et endommagés sont fournies dans les tables (3.4) (cas sain) et (3.5) (cas endommagé). Pour les instants $t = 0$, $t = 100$ et $t = 1000$ jours, les rigidités et coefficients de Poisson qui découlent de cette étude sont présentés dans la table (3.6) pour les cas sain et microfissuré.

Influence des paramètres géométriques et matériels

(i) Cas sain

- Influence du paramètre géométrique ($\xi = \frac{e^h}{a^b}$)

Pour illustrer plus clairement l'influence du paramètre $\xi = \frac{e^h}{a^b}$ sur la rigidité effective (cf. équation (3.108)), on suppose dans un premier temps que $E^m(t_0) = E^b$. La rigidité effective $\tilde{C}_{nn}$ normée par la rigidité normale de référence $\tilde{C}_{nn}(t_0)$ s'écrit :

$$H(t, \xi) = \frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)} = \frac{(1 + \xi)\Phi^m(t)}{\xi + \Phi^m(t)} \text{ où } \tilde{C}_{nn}(t_0) = E^m(t_0) \quad (3.114)$$

3.4. COMPORTEMENT D'UNE CELLULE PÉRIODIQUE DE MAÇONNERIE VISCOÉLASTIQUE MICROFISSURÉE

Briques	Mortier	Rigidités effectives et coefficients de Poisson effectifs du mortier v.l.n.v. (cas sain)
élastiques $E^b = 100E^m(t_0)$, $\nu^b = 0,2$	Bu	$\tilde{C}_{nn}^{Bu}(t) = \left(1, 13.10^{-4} + 8, 19.10^{-10}t - 1, 36.10^{-5}e^{-1,10.10^{-5}t} - 5, 92.10^{-5}e^{-1,10.10^{-5}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{Bu}^m(t) = 0,22 + 2, 26.10^{-5}e^{-4,87.10^{-5}t} + 1,4510^{-4}e^{-1,10.10^{-5}t} + 8,27.10^{-5}e^{-4,86.10^{-6}t}$
	MM	$\tilde{C}_{nn}^{MM}(t) = \left(7, 42.10^{-5} - 3, 89.10^{-5}e^{-7,39.10^{-6}t} - 8, 93.10^{-6}e^{-7,39.10^{-6}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{MM}^m(t) = 0,22 + 8, 51.10^{-5}e^{-2,15.10^{-5}t} + 2,47.10^{-5}e^{-7,39.10^{-6}t}$
rigides $E^b = \infty$, $\nu^b = 0,2$	Bu	$\tilde{C}_{nn}^{Bu}(t) = \left(1, 11.10^{-4} + 8, 19.10^{-10}t - 1, 36.10^{-5}e^{-1,44.10^{-5}t} - 5, 92.10^{-5}e^{-1,10.10^{-5}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{Bu}^m(t) \rightarrow 0,0$
	MM	$\tilde{C}_{nn}^{MM}(t) = \left(7, 28.10^{-5} - 8, 93.10^{-6}e^{-7,39.10^{-6}t} - 3, 89.10^{-5}e^{-7,39.10^{-6}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{MM}^m(t) \rightarrow 0,0$

TABLE 3.4 – Rigidités normales $\tilde{C}_{nn}$ effectives pour une colone maçonnée saine et coefficients de Poisson $\tilde{\nu}^m$ effectifs pour un mortier à l'état sain.

Briques	Mortier	Rigidités effectives et coefficients de Poisson effectifs du mortier v.l.n.v. (cas microfissuré)
élastiques $E^b = 100E^m(t_0)$, $\nu^b = 0,2$	Bu	$\tilde{C}_{nn}^{Bu}(t, d_c) = \left(1, 13.10^{-4} + 9, 65.10^{-10}t - 6, 80.10^{-5}e^{-1,10.10^{-5}t} - 1, 77.10^{-5}e^{-1,11.10^{-5}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{Bu}^m(t, d_c) = 0,19 + 1, 974.10^{-5}e^{-4,87.10^{-5}t} + 1,266e^{-1,10.10^{-5}t} - 7,21.10^{-5}e^{-4,86.10^{-6}t}$
	MM	$\tilde{C}_{nn}^{MM}(t, d_c) = \left(8, 74.10^{-5} - 1, 16.10^{-5}e^{-9,22.10^{-6}t} - 4, 47.10^{-5}e^{-7,44.10^{-6}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{MM}^m(t, d_c) = 0,19 + 7, 43.10^{-5}e^{-2,15.10^{-5}t} - 2,16e^{-7,39.10^{-6}t}$
rigides $E^b = \infty$, $\nu^b = 0,2$	Bu	$\tilde{C}_{nn}^{Bu}(t, d_c) = \left(1, 31.10^{-4} + 9, 65.10^{-10}t - 6, 80.10^{-5}e^{-1,10.10^{-5}t} - 1, 77.10^{-5}e^{-1,11.10^{-5}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{Bu}^m(t, d_c) \rightarrow 0,0$
	MM	$\tilde{C}_{nn}^{MM}(t, d_c) = \left(8, 57.10^{-5} - 1, 16.10^{-5}e^{-9,22.10^{-6}t} - 4, 47.10^{-5}e^{-7,44.10^{-6}t}\right)^{-1}$ $\tilde{\nu}_{MM}^m(t, d_c) \rightarrow 0,0$

TABLE 3.5 – Rigidités normales $\tilde{C}_{nn}$ effectives pour une colone maçonnée microfissurée et coefficients de Poisson $\tilde{\nu}^m$ effectifs pour un mortier v.l.n.v. microfissuré ($d_c = 0,1$).

État du mortier	Instant t (jours)	Propriétés effectives	Mortier (Bu)		Mortier (MM)	
			Briques élastiques	Briques rigides	Briques élastiques	Briques rigides
Sain	$t = 0$	$\tilde{C}_{nn}(MPa)$	24880	26248	37898	39982
		$\tilde{\nu}_{nt}$	0,202	0	0,202	0
	$t = 100$	$\tilde{C}_{nn}(MPa)$	131	131	13478	13733
		$\tilde{\nu}_{nt}$	0,202	0	0,202	0
	$t = 1000$	$\tilde{C}_{nn}(MPa)$	13,2	13,2	13478	13733
		$\tilde{\nu}_{nt}$	0,202	0	0,202	0
Microfissuré	$t = 0$	$\tilde{C}_{nn}(MPa)$	21129	22291	32184	33954
		$\tilde{\nu}_{nt}$	0,198	0	0,198	0
	$t = 100$	$\tilde{C}_{nn}(MPa)$	111	111	11446	11662
		$\tilde{\nu}_{nt}$	0,198	0	0,198	0
	$t = 1000$	$\tilde{C}_{nn}(MPa)$	11,3	11,3	11446.3	11662
		$\tilde{\nu}_{nt}$	0,198	0	0,198	0

TABLE 3.6 – Rigidités normales $\tilde{C}_{nn}$ et coefficients de Poisson $\tilde{\nu}_{nt}$ effectifs pour une cellule périodique (1D, $a^b = 55$ mm et $e^h = 10$ mm) avec mortier v.l.n.v. sain et microfissuré ($d_c = 0,1$) aux instants $t = 0$, $t = 100$ et $t = 1000$ jours.

Dans un second cas, on suppose que $E^b = \alpha E^m(t_0)$ avec $\alpha \geq 1$. La rigidité normée $H(t, \xi)$ devient :

$$H(t, \xi) = \frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)} = \frac{(1 + \alpha\xi)\Phi^m(t)}{\alpha\xi + \Phi^m(t)} \text{ avec } \tilde{C}_{nn}(t_0) = E^m(t_0) \frac{\alpha(1 + \xi)}{\alpha\xi + 1} \quad (3.115)$$

(3.115) implique que $H(t, \xi)$ dépend de la fonction de viscosité du mortier $\Phi^m(t)$, du paramètre géométrique $\xi = \frac{e^h}{a^b}$ et du ratio $\alpha = E^b/E^m(t_0)$.

Les modèles de Burgers et MM montrent la décroissance de la rigidité normée avec l'aug-

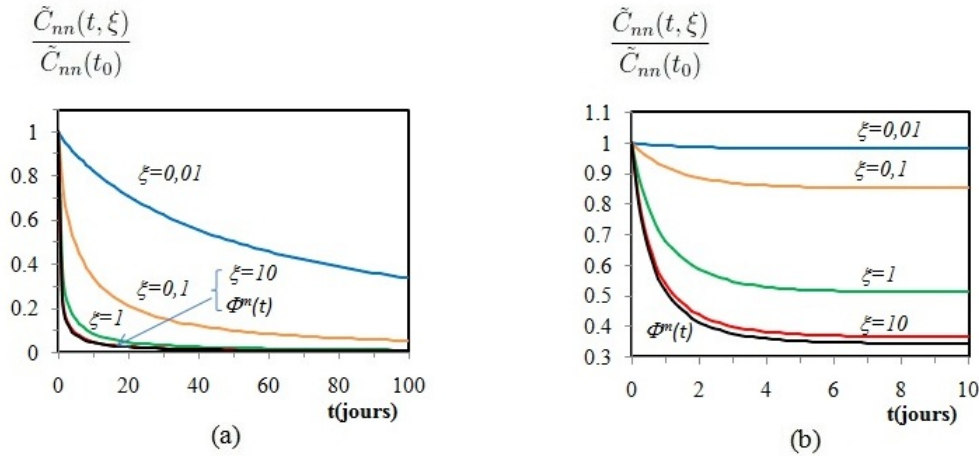


FIGURE 3.18 – Cas 1D, mortier hybride sain : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution de $\frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)}$ pour les modèles de Burgers (a) et MM (b).

mentation de ξ , jusqu'à zéro pour le modèle de Burgers (cf. figure (3.18)-a) et jusqu'à une valeur asymptotique dès 10 jours pour le modèle de MM (figure (3.18)-b). Si $\xi \ll 0, 1$ (cas des maçonneries sans joints de mortier par exemple), on a $\tilde{C}_{nn}(t, \xi) \simeq \tilde{C}_{nn}(t_0) = E^m(t_0) = E^b$ ce qui implique que la rigidité effective normale ne dépend plus du temps. Quand $\xi \geq 10$, ce ratio s'approche de la fonction visqueuse $\Phi(t)$. Des études similaires effectuées pour un autre mortier avec des données matériaux égales à celles des échantillons (S7) expérimentés par Choi et *al.* confirment cette tendance (voir figure (F.2) dans l'annexe (F.1)).

Par ailleurs, nous avons étudié l'évolution de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$ avec différents ratios E^b/E^m (cf. figures (F.3), (F.4) et (F.8)). Les figures (F.3), (F.4) et (F.5) montrent que si $\xi \ll 1$, le comportement global est celui du mortier si $E^b \gg E^m$ (cf. aussi équation (3.115)).

-Influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$:

La figure (3.19(a)) montre que $H(t, \xi)$ dépend sensiblement du ratio $\alpha = E^b/E^m$ si ξ est petit ($< 0, 1$). Quand ξ est plus grand (cf. figure (3.19(b))), α influence de moins en moins $H(t, \xi)$. On remarque qu'avec ξ petit, on peut considérer que les briques sont rigides quand $E^b \geq 1000E^m$. Pour justifier cette remarque, nous avons aussi étudié l'évolution de $\tilde{C}_{nn}(t, \xi)$ avec les données du mortier de type (S7) (cf. figures (F.6), (F.7) et (F.8) dans l'annexe (F)).

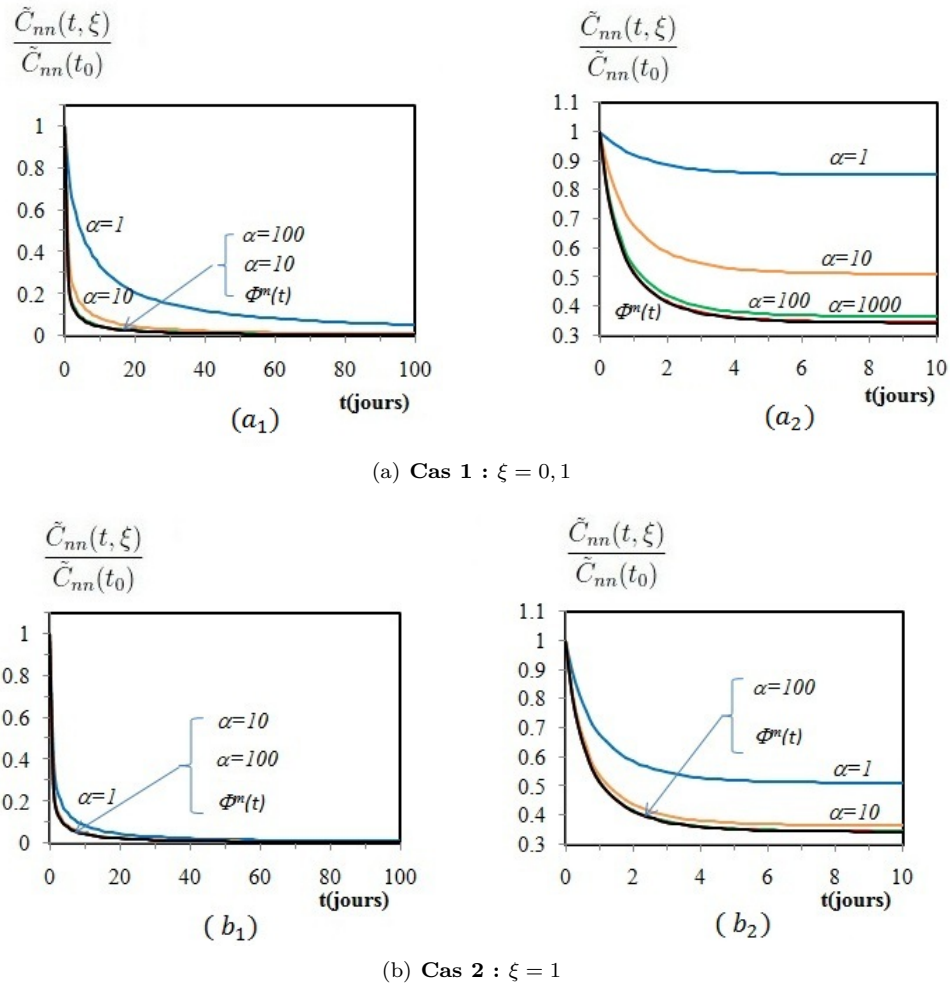


FIGURE 3.19 – Cas 1D, mortier hybride sain : influence du paramètre géométrique α sur l'évolution de $\frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)}$ pour les modèles de Burgers (a_1, b_1) et MM (a_2, b_2).

(ii) Cas microfissuré

Dans cette partie, nous allons discuter seulement de l'influence de la densité de fissures d_c sur le comportement effectif d'une cellule périodique (1D). Les influences des paramètres géométriques et matériels pour le cas microfissuré sont discutées dans l'annexe (F.2), figures (F.9), (F.10), (F.11), (F.12), (F.13), (F.14) et (F.15).

Pour simplifier, on note $E^m(t_0)$ le module d'Young à l'instant t_0 du mortier sain au lieu de $E^m(t_0, d_c = 0)$. En fixant t à 1 jour et 100 jours avec un ratio $\alpha = E^b/E^m(t_0)$ constant ($\alpha = 1, 10, 100$), on trouve que $\tilde{C}_{nn}$ dépend quasi-linéairement de d_c et sensiblement de α (cf. figure (3.20)-c,d et (3.21)-c,d). En fixant d_c à 0 et 0,2, les figures (3.20)-a,b et (3.21)-a,b montrent que pour $E^b > 100E^m$, les deux modèles de Burgers et MM donnent des rigidités effectives dépendantes sensiblement du temps et que dans le cas d'un mortier microfissuré, ces rigidités sont beaucoup plus faibles que dans le cas sain.

3.4.2 Cas d'un mur maçonné (2-D)

Rigidités d'un mur maçonné

Comme la cellule de base plane (cf. figure(1.19)-b) considérée est symétrique par rapport aux axes $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$, l'étude sera portée uniquement sur le quart de la cellule. La référence [36] fournit les expressions suivantes des rigidités d'une cellule périodique d'un mur maçonné avec briques et mortier sain :

Cas de briques élastiques : Dans ce cas, les rigidités effectives sont [36] :

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{1111}^{el} &= \frac{\left(C_{1111}^b K_h' + \mathbf{B} \frac{e^h}{a^b + e^h} \right) \left(4K_v' \frac{e^h}{a^b + e^h} + \frac{b^b + e^v}{a^b + e^h} K_h'' \frac{e^v}{a^b + e^h} \right)}{4 \left(\frac{e^h}{a^b + e^h} \right)^2 \frac{e^v}{b^b + e^v} \mathbf{B} + C_{1111}^b \frac{e^h}{a^b + e^h} \mathbf{C} + K_h' \mathbf{D}} \\
 \tilde{C}_{2222}^{el} &= K_h' \frac{\left(4K_v' \frac{e^h}{a^b + e^h} + \frac{b^b + e^v}{a^b + e^h} K_h'' \frac{e^v}{a^b + e^h} \right) C_{1111}^b + \mathbf{B} \frac{e^h}{a^b + e^h} \frac{e^v}{a^b + e^h}}{4 \left(\frac{e^h}{a^b + e^h} \right)^2 \frac{e^v}{b^b + e^v} \mathbf{B} + C_{1111}^b \frac{e^h}{a^b + e^h} \mathbf{C} + K_h' \mathbf{D}} \\
 \tilde{C}_{1122}^{el} &= K_h' \frac{\left(4K_v' \frac{e^h}{a^b + e^h} + \frac{b^b + e^v}{a^b + e^h} K_h'' \frac{e^v}{a^b + e^h} \right) C_{1122}^b}{4 \left(\frac{e^h}{a^b + e^h} \right)^2 \frac{e^v}{b^b + e^v} \mathbf{B} + C_{1111}^b \frac{e^h}{a^b + e^h} \mathbf{C} + K_h' \mathbf{D}} \\
 \tilde{C}_{1212}^{el} &= \frac{C_{1212}^b K_h'' \left(K_h' \frac{e^v}{b^b + e^v} + 4 \frac{a^b + e^h}{b^b + e^v} K_h'' \frac{e^h}{b^b + e^v} \right)}{C_{1212}^b \frac{e^h}{a^b + e^h} \mathbf{F} + 4K_h'' \mathbf{G}}
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= (C_{1111}^b)^2 - (C_{1122}^b)^2, \quad \mathbf{C} = 4K_v' \frac{e^h}{a^b + e^h} + \frac{b^b + e^v}{a^b + e^h} K_h'' \frac{e^v}{a^b + e^h} + 4K_h' \frac{a^b}{a^b + e^h} \frac{e^v}{b^b + e^v} \\
 \mathbf{D} &= 4K_v' \frac{e^h}{a^b + e^h} + \frac{b^b + e^v}{a^b + e^h} K_h'' \frac{e^v}{a^b + e^h}, \quad \mathbf{G} = K_h' \frac{e^v}{b^b + e^v} + 4 \frac{a^b + e^h}{b^b + e^v} K_h'' \frac{e^h}{b^b + e^v}
 \end{aligned}$$

3.4. COMPORTEMENT D'UNE CELLULE PÉRIODIQUE DE MAÇONNERIE VISCOÉLASTIQUE MICROFISSURÉE

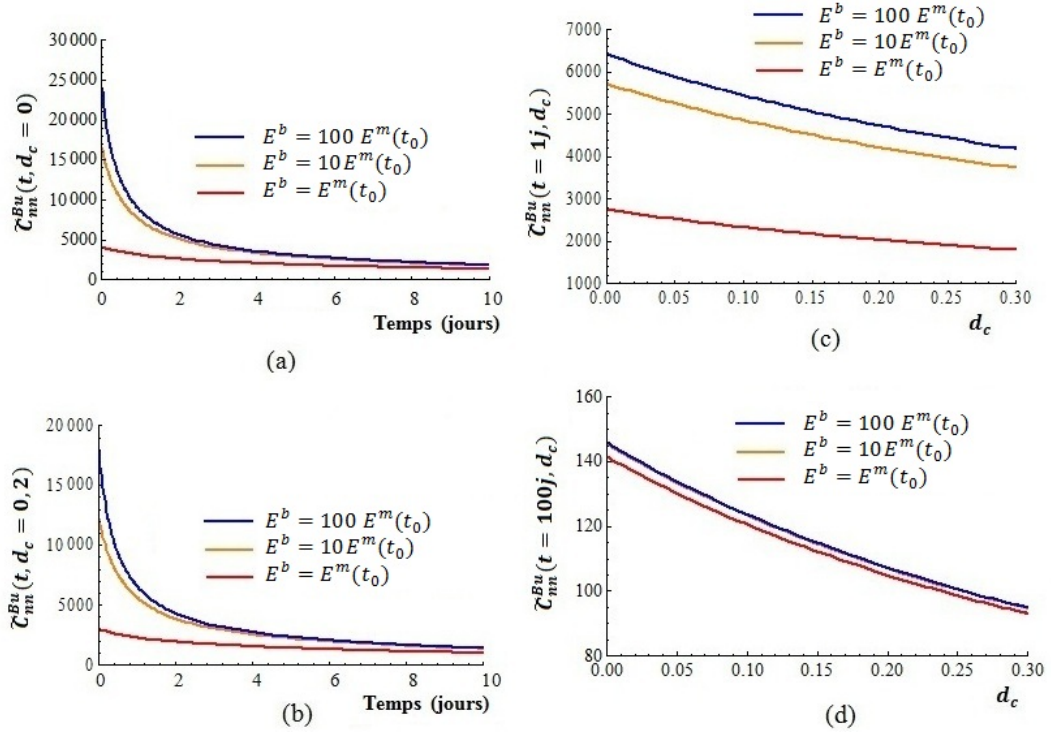


FIGURE 3.20 – Cas 1D, modèle de Burgers, mortier hybride : évolutions de la rigidité effective normale $\tilde{\mathcal{C}}_{nn}^{Bu}(d_c)$ (MPa) à d_c fixé à $d_c = 0$ (cas sain) (a) et à $d_c = 0, 2$ (b) ou à t fixé à 1 jour (c) ou 100 jours (d).

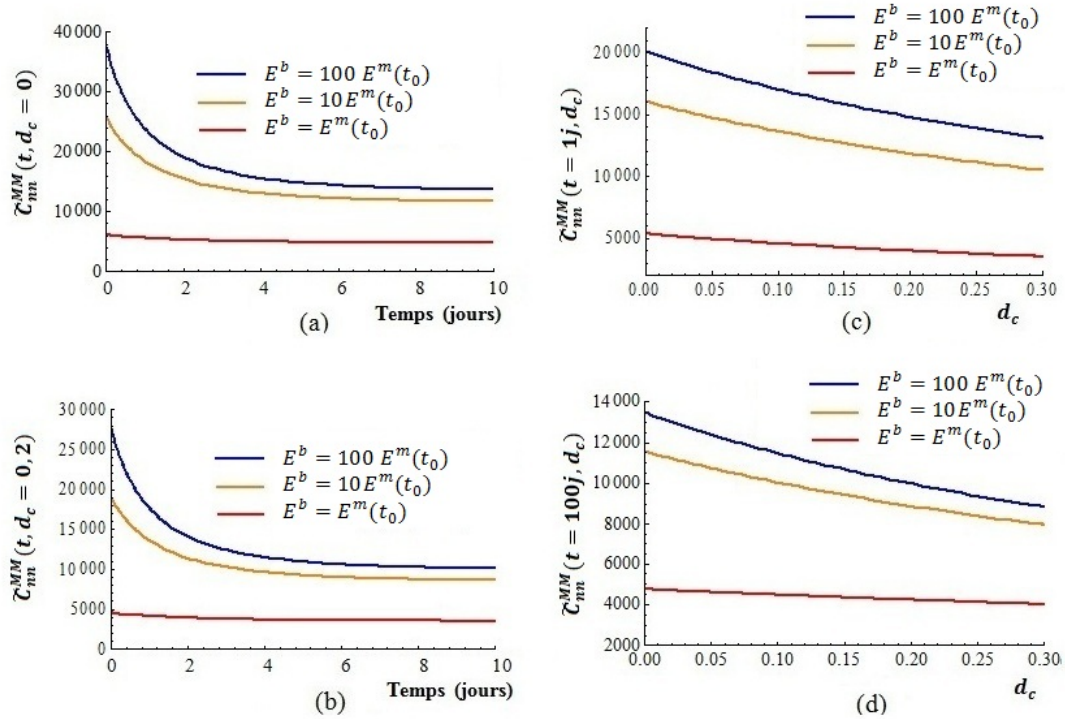


FIGURE 3.21 – Cas 1D, modèle de MM, mortier hybride : évolutions de la rigidité effective normale $\tilde{\mathcal{C}}_{nn}^{Bu}(d_c)$ (MPa) à d_c fixé à $d_c = 0$ (cas sain) (a) et à $d_c = 0, 2$ (b) ou à t fixé à 1 jour (c) ou 100 jours (d).

$$\mathbf{F} = K'_h \frac{e^v}{b^b + e^v} + 4 \frac{a^b + e^h}{b^b + e^v} K''_h \frac{e^h}{b^b + e^v} + 4 \left(\frac{a^b + e^h}{b^b + e^v} \right)^2 K''_v \frac{e^v}{b^b + e^v} \quad (3.117)$$

où K'_α , K''_α sont respectivement les rigidités de l'interface suivant les directions normale et tangentielle et $\alpha = h, v$ correspond au mortier horizontal ou vertical, $\mathbb{C}^b$ est le tenseur de rigidité de la brique, ν^m et ν^b sont respectivement les coefficients de Poisson du mortier et de la brique, e^h et e^v sont les épaisseurs horizontale et verticale du mortier, a^b et b^b sont la hauteur et la largeur de la brique.

Cas de briques rigides ($E^b \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1111}^{ri} &= \frac{\left(4K'_v \frac{e^h}{a^b + e^h} + \frac{b^b + e^v}{a^b + e^h} K''_h \frac{e^v}{a^b + e^h} \right)}{4 \frac{e^h}{a^b + e^h} \frac{e^v}{b^b + e^v}}, \quad \tilde{C}_{2222}^{ri} = \frac{K'_h}{\frac{e^h}{a^b + e^h}}, \quad \tilde{C}_{1122}^{ri} = 0 \\ \tilde{C}_{1212}^{ri} &= \frac{K''_h \left(K'_h \frac{e^v}{b^b + e^v} + 4 \frac{a^b + e^h}{b^b + e^v} K''_h \frac{e^h}{b^b + e^v} \right)}{\frac{e^h}{a^b + e^h} \left(K'_h \frac{e^v}{b^b + e^v} + 4 \frac{a^b + e^h}{b^b + e^v} K''_h \frac{e^h}{b^b + e^v} + 4 \left(\frac{a^b + e^h}{b^b + e^v} \right)^2 K''_v \frac{e^v}{b^b + e^v} \right)} \end{aligned} \quad (3.118)$$

En comparant les formules de Cecchi et Tralli pour le cas viscoélastique [36] avec celles de Cecchi et Sab pour le cas élastique [26], les joints verticaux et horizontaux sont distingués par leurs rigidités et leurs géométries. De plus, l'extension de ces formules pour l'évaluation du comportement effectif de maçonneries avec un mortier viscoélastique microfissuré repose sur le remplacement de la rigidité du mortier E^m par $E^m(t, d_c)$. Rappelons que :

$$\tilde{S}_m^{-1}(t, d_c) = E^m(t, d_c) \quad (3.119)$$

Considérons une cellule périodique d'un mur dont les paramètres géométriques et matériels sont montrés à la section (3.5.2) et la figure (3.36). Les tables (3.7) et (3.8) montrent un exemple de calcul appliqué au mortier de type hybride. Sous l'hypothèse de contraintes planes, on constate que quand t dépasse 100 jours, les modules effectifs prédits par le modèle de Burgers tendent vers zéro alors que ceux du modèle de MM tendent vers une limite asymptotique finie.

En introduisant (3.119) dans (3.116) et en notant que :

$$\tilde{C}_{1111} = \frac{\tilde{E}_1}{1 - \tilde{\nu}_{12} \cdot \tilde{\nu}_{21}}, \quad \tilde{C}_{2222} = \frac{\tilde{E}_2}{1 - \tilde{\nu}_{12} \cdot \tilde{\nu}_{21}}, \quad \tilde{C}_{1122} = \frac{\tilde{E}_1 \cdot \tilde{\nu}_{21}}{1 - \tilde{\nu}_{12} \cdot \tilde{\nu}_{21}}, \quad \tilde{C}_{1212} = \tilde{\mu}_{12},$$

les rigidités $\tilde{C}_{ijkl}$ peuvent s'exprimer en fonction des constantes d'ingénieurs : modules de cisaillement $\tilde{\mu}_{12}$, d'Young effectifs $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ et coefficients de Poisson effectifs $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{21}$ (cf. équation (1.162)). Il est alors possible d'évaluer les propriétés effectives ($\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{21}$, $\tilde{\mu}_{12}$) suivantes d'une cellule périodique de maçonnerie (2D) dans les tables (3.7) et (3.8)

3.4. COMPORTEMENT D'UNE CELLULE PÉRIODIQUE DE MAÇONNERIE VISCOÉLASTIQUE MICROFISSURÉE

Modèle rhéologique du mortier	État du mortier	Instant t	$\tilde{E}_1$ (GPa)	$\tilde{E}_2$ (GPa)	$\tilde{G}_{12}$ (GPa)	$\tilde{\nu}_{12}$	$\tilde{\nu}_{21}$
Burgers	Sain	0	111,15	25,82	9,49	0,06	0,013
		100s	110,80	25,72	9,45	0,05	0,013
		100j	0,81	0,15	0,050	0,00	0,00
		1000j	0,09	0,014	0,005	0,00	0,00
	$d_c = 0,1$	0	98,47	22,14	8,12	0,05	0,011
		100s	98,16	22,05	8,09	0,05	0,011
		100j	0,69	0,12	0,05	0,00	0,00
		1000j	0,07	0,012	0,005	0,00	0,00
MM	Sain	0	169,31	39,33	14,45	0,06	0,013
		100s	169,13	39,28	14,43	0,05	0,013
		100j	70,98	14,10	5,15	0,02	0,005
		1000j	70,98	14,10	5,15	0,02	0,005
	$d_c = 0,1$	0	150,00	33,73	12,38	0,05	0,011
		100s	149,85	33,68	12,36	0,05	0,011
		100j	61,35	12,02	4,39	0,02	0,004
		1000j	61,35	12,02	4,39	0,02	0,004

TABLE 3.7 – Modules effectifs de la cellule périodique (2D) de la maçonnerie avec mortier hybride visco-élastique à l'état sain ($d_c = 0$) et microfissuré ($d_c = 0,1$) et briques élastiques avec $E^b = 100E^m(t_0)$.

Modèle rhéologique du mortier	État du mortier	Instant t	$\tilde{E}_1$ (GPa)	$\tilde{E}_2$ (GPa)	$\tilde{G}_{12}$ (GPa)
Burgers	Sain	0	1949	331	88,7
		100s	1490	330	88,3
		100j	9,8	1,6	0,4
		1000j	1,0	0,2	0,05
	$d_c = 0,1$	0	1655	281	75,3
		100s	1648	280	75,0
		100j	8,3	1,4	0,4
		1000j	0,8	0,1	0,03
MM	Sain	0	2969	504	135,1
		100s	2964	503	134,9
		100j	1020	173,2	46,4
		1000j	1020	173,2	46,4
	$d_c = 0,1$	0	2521	428	114,8
		100s	2517	427	114,6
		100j	866	147	39,4
		1000j	866	147	39,4

TABLE 3.8 – Modules effectifs de la cellule périodique (2D) de la maçonnerie avec mortier hybride visco-élastique à l'état sain ($d_c = 0$) et microfissuré ($d_c = 0,1$) et briques rigides.

Influence des paramètres géométriques et matériels

(i) Cas sain

- Influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$

Nous considérons le cas d'un mur avec les paramètres géométriques présentés sur la figure (3.36) et avec l'hypothèse de contraintes planes. Les résultats sont montrés respectivement dans les figures (3.22(a)) et (3.22(b)) pour les modèles de Burgers et MM. On trouve que le ratio $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ du modèle de Burgers (figure (3.22(a))-a) tend rapidement vers 0 (avant 20 jours dans le cas où $E^b > 10E^m(t_0)$) lorsque le modèle de MM (figure (3.22(b))-a) présente des valeurs asymptotiques.

En comparant le modèle de MM avec celui de Burgers, nous trouvons la même tendance de $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ (figures (3.22(a))-b, (3.22(b))-b) sauf dans le cas où $E^b = E^m(t_0)$. Quand $E^b = 1000E^m(t_0)$ ou pour le cas de briques rigides, les modèles de Burgers et MM donnent une évolution quasi-constante en fonction du temps ($\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)} \approx 1$). Les autres cas de $E^b/E^m(t_0)$ montrent des valeurs asymptotiques après t_s jours. Notons que $t_s^{MM} < t_s^{Bu}$. De plus, lorsque $E^b/E^m(t_0)$ varie, les deux modèles montrent que $\tilde{C}_{2222}$ décroît moins rapidement que $\tilde{C}_{1212}$. On constate le contraire pour $\tilde{C}_{1111}$. Ces résultats montrent aussi que pour la modélisation du comportement d'une maçonnerie avec du mortier hybride viscoélastique à l'état sain, le modèle de MM est plus approprié que celui de Burgers.

Pour confirmer ces tendances, nous avons aussi étudié l'influence de α avec les données d'un autre type de mortier (S7), en déformations planes (cf. figures (F.16), (F.17), (F.18) dans l'annexe (F.3.1)).

- Influence du paramètre géométrique $\xi = e^h/a^b$

On suppose que $e^h = e^v$, $\nu^b = 0,2$ et $\alpha = 1$ (pour mieux visualiser l'influence de ξ). La figure (3.23(a)) montre que pour le modèle de Burgers le ratio $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ dépend faiblement de ξ mais sensiblement du temps. Au bout de 20 jours, le rapport $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ tend vers 0. On voit le contraire dans la figure (3.23(b)) pour le modèle de MM, avec une valeur asymptotique atteinte après 5 jours pour tous les ratios. Seul le modèle de MM donne des évolutions $\tilde{C}_{ijkl}$ quasi-indépendantes du temps pour le cas $\xi \ll 0,1$.

(ii) Cas microfissuré :

- Influence de la densité de fissures d_c

Considérons le cas d'un mur avec les paramètres géométriques présentés sur la figure (3.36). Nous présentons ici seulement l'estimation de $\tilde{C}_{1111}(d_c)$ pour les modèles de Burgers et MM (figures (3.24) et (3.25)). Les estimations de $\tilde{C}_{2222}(d_c)$ et $\tilde{C}_{1212}(d_c)$ sont données sur les figures (F.19), (F.20), (F.21), (F.22) dans l'annexe (F.3.2). On peut faire les mêmes remarques sur les évolutions de $\tilde{C}_{ijkl}(d_c)$ dans le cas 2D que dans le cas 1D (cf. figures (3.20) et (3.21)).

3.4. COMPORTEMENT D'UNE CELLULE PÉRIODIQUE DE MAÇONNERIE VISCOÉLASTIQUE MICROFISSURÉE

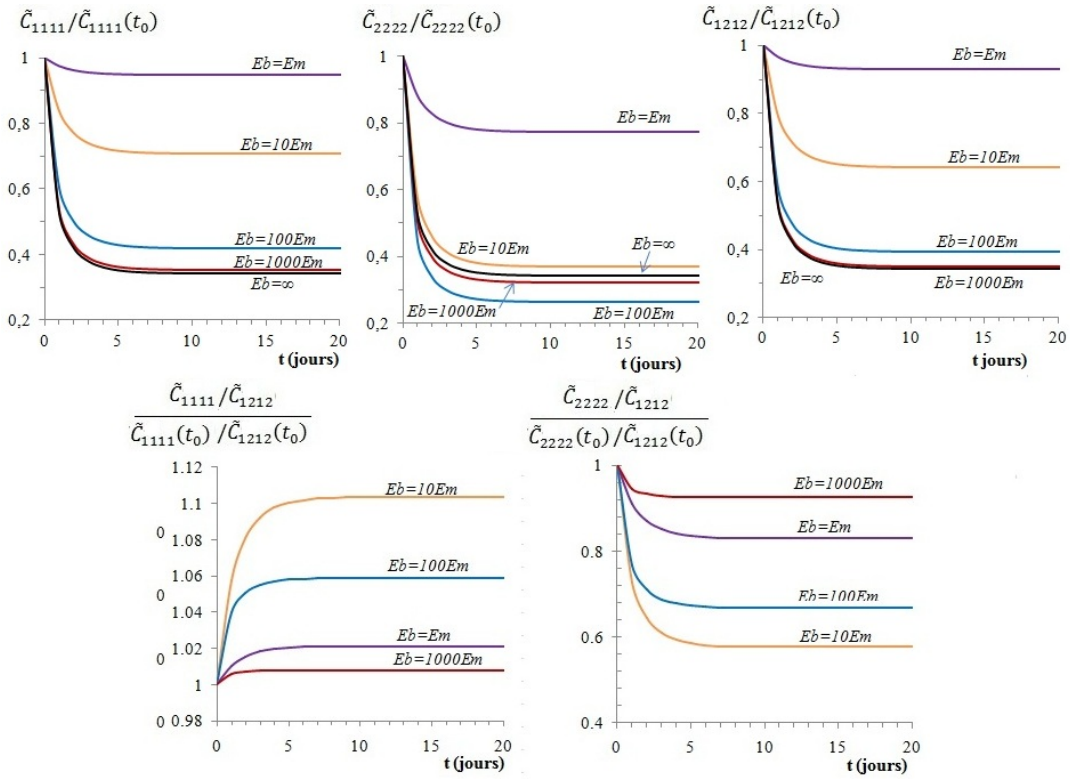
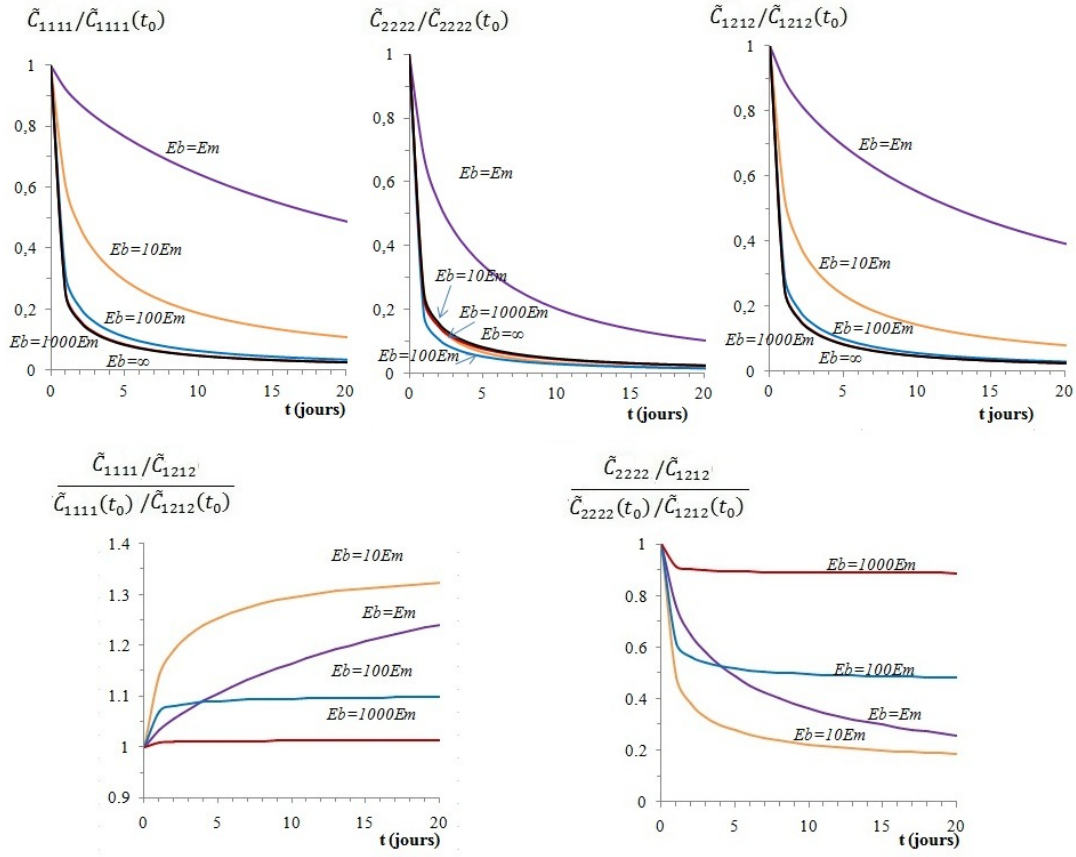


FIGURE 3.22 – Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution des rapports $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour un mortier hybride sain avec ξ variable.

3.4. COMPORTEMENT D'UNE CELLULE PÉRIODIQUE DE MAÇONNERIE VISCOÉLASTIQUE MICROFISSURÉE

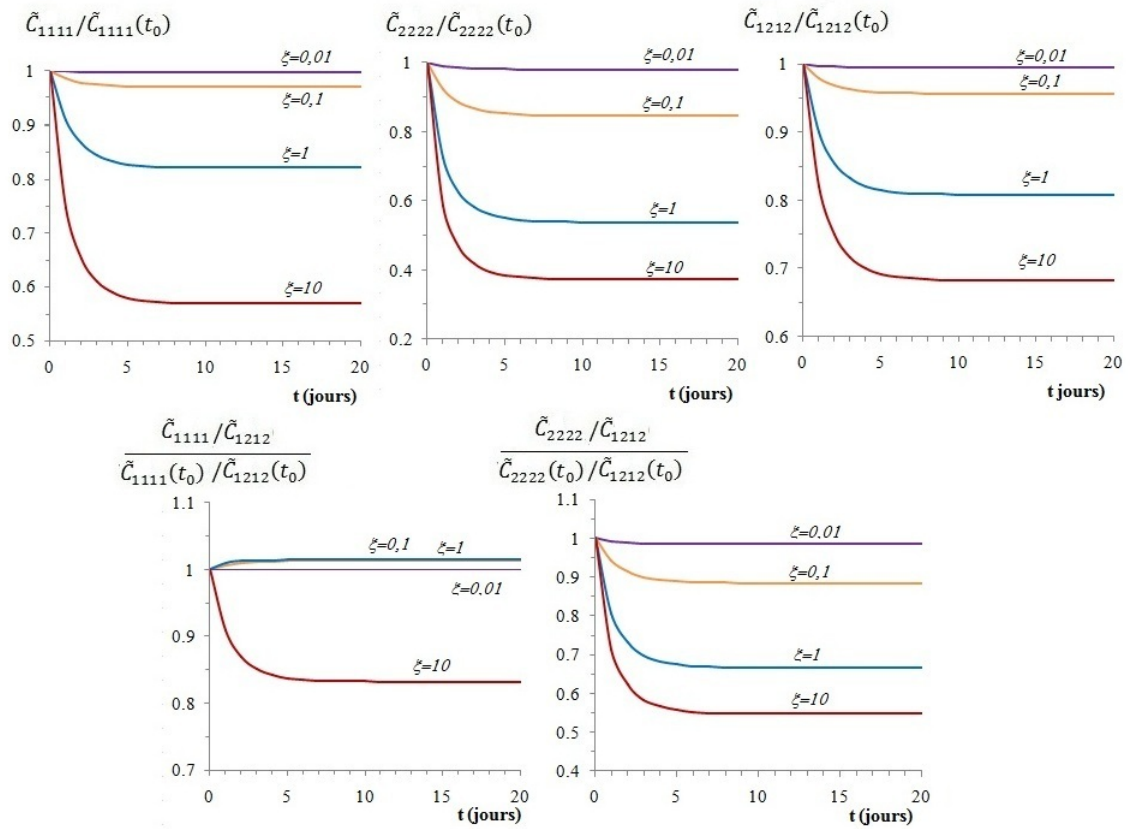
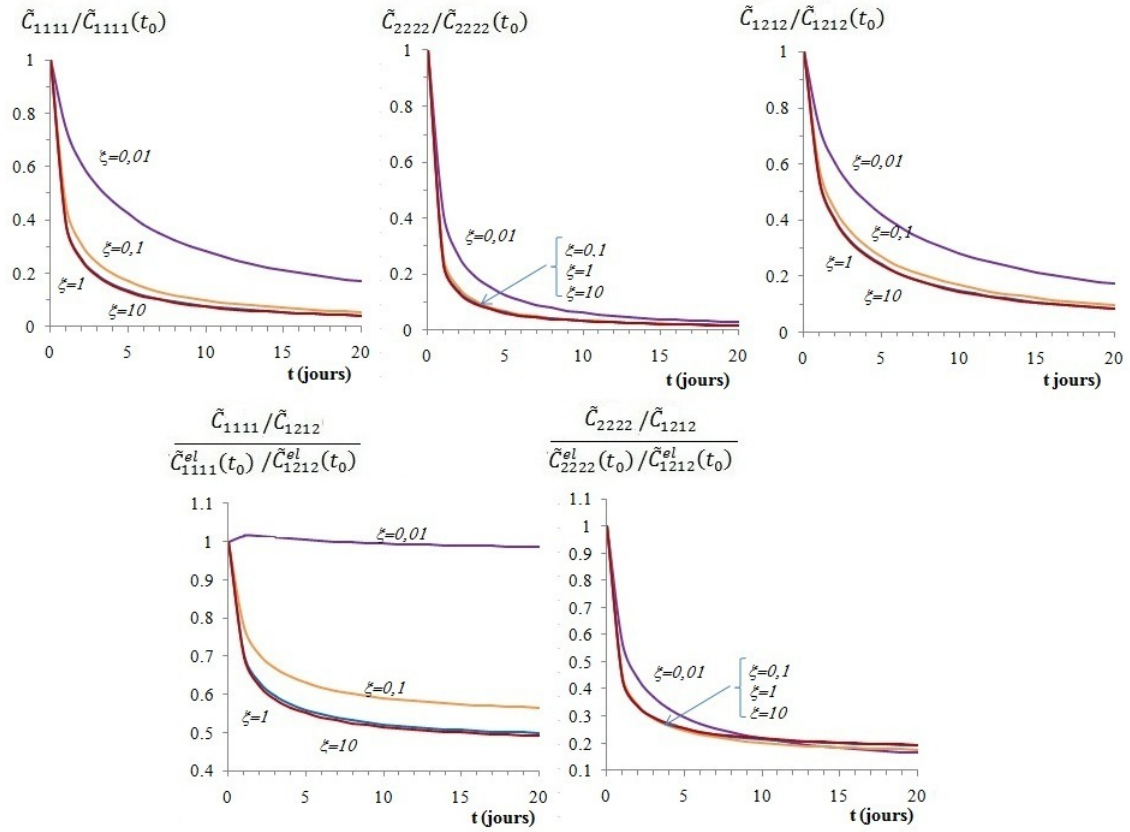


FIGURE 3.23 – Cas 2D : influence du ratio $\xi = e^h/a^b$ sur l'évolution des rapports $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour $\alpha = 1$ avec un mortier hybride.

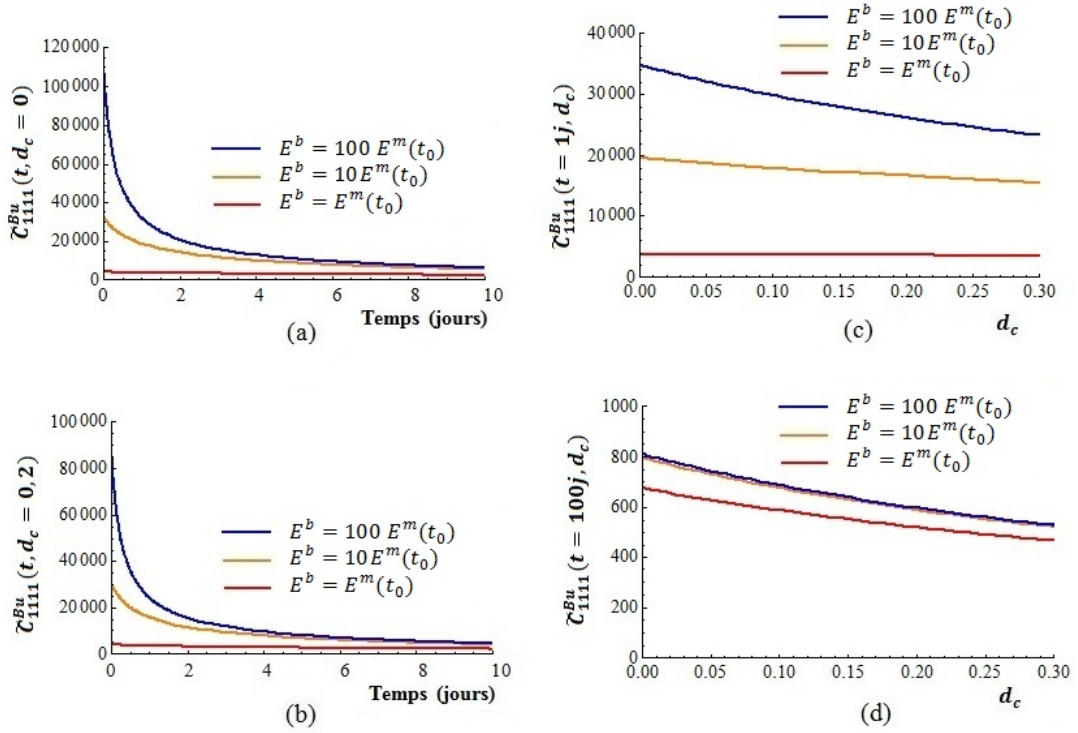


FIGURE 3.24 – Cas 2D, mortier hybride de type Burgers : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{1111}^{Bu}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).

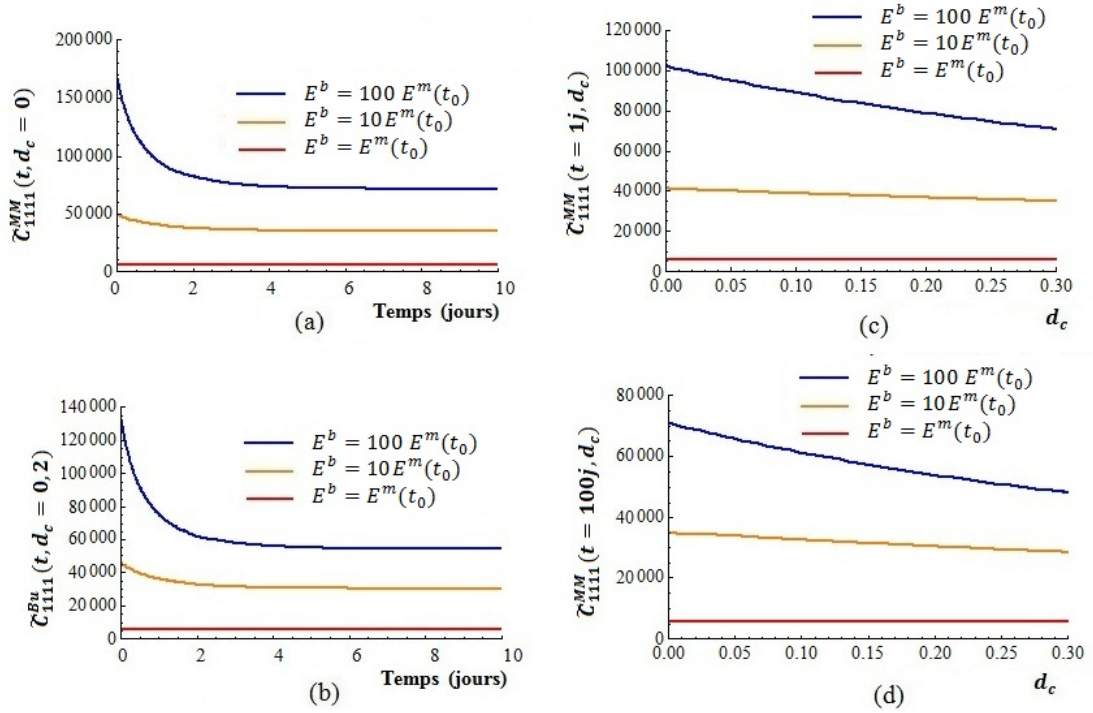


FIGURE 3.25 – Cas 2D, mortier hybride de type MM : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{1111}^{MM}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).

3.4.3 Comparaison des modèles à l'échelle globale

Cette partie a pour objectif de comparer le résultat de l'extension du modèle de Cecchi et Tralli au modèle numérique. Pour illustrer la différence entre ces modélisations, nous proposons d'appliquer à une cellule périodique (2D) d'un mur maçonné sain ou microfissuré constitué de briques de dimensions $b^b \times a^b \times \delta^b = 250 \times 55 \times 120 \text{ mm}^3$ avec un coefficient de Poisson $\nu^b = 0,2$. Le modèle rhéologique de MM est utilisé pour le mortier hybride v.l.n.v. Les calculs sont faits avec l'hypothèse de contraintes planes.

Cas sain

Les propriétés du mortier hybride sain sont fournies par la table (3.2). Dans le cas de briques élastiques, deux cas de rigidité de briques seront considérés : $E^b = E^m$ et $E^b = 100E^m$. L'extension de Cecchi et Tralli utilise les équations (3.116) pour déduire le tenseur de rigidité.

Les évolutions des propriétés effectives $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\nu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{12}$ de la maçonnerie avec une épaisseur de mortier $e^m = 10 \text{ mm}$ (cas d'une maçonnerie classique) et des briques élastiques pour chaque approche sont reportées sur les figures (3.26) et (3.27). On considère aussi le cas de briques rigides ($E^b = \infty$) où l'épaisseur de mortier est de $e^m = 2 \text{ mm}$ (cas des garnissages). Dans ce cas, l'extension de l'approche analytique de Cecchi et Tralli repose sur les relations (3.118). Pour l'approche numérique on suppose que $E^b = 10000E^m$. Les résultats en terme de modules de rigidité effectifs sont montrés sur la figure (3.28).

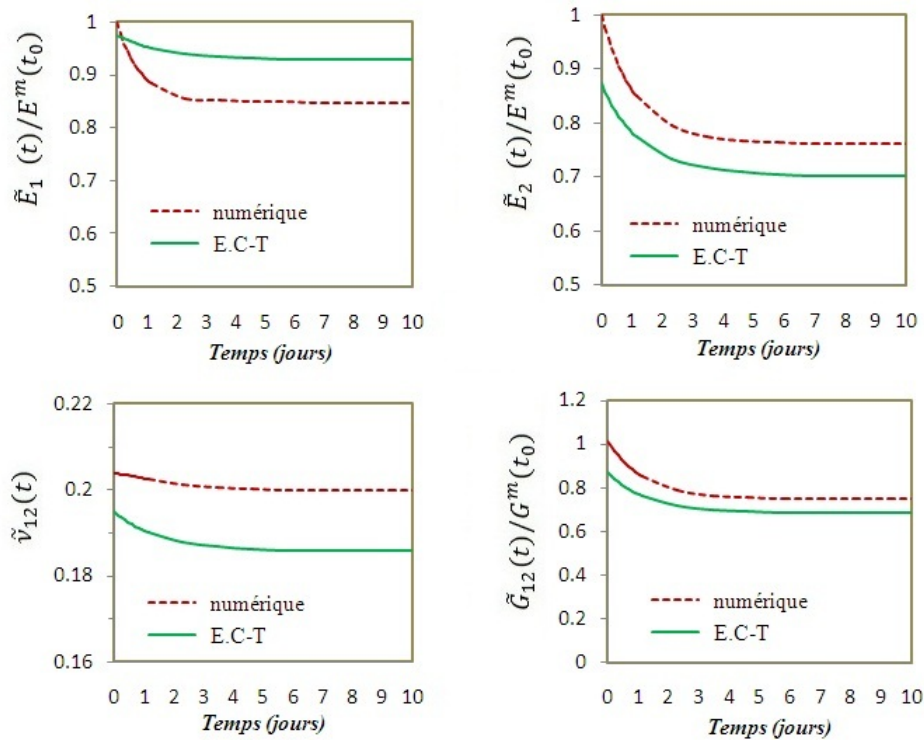


FIGURE 3.26 – Comparaison des modules $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = \mathbf{E}^m$, $\nu^b = 0,2$, $e^m = 10 \text{ mm}$, modèle de MM, mortier hybride à l'état sain.

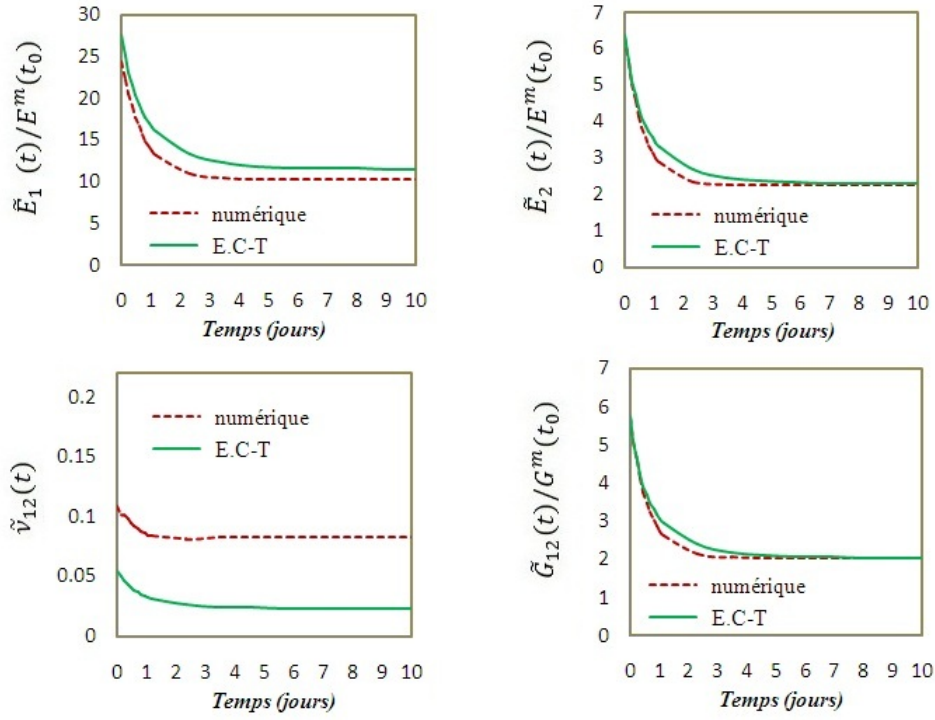


FIGURE 3.27 – Comparaison des modules $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = 100\mathbf{E}^m$, $\nu^b = 0,2$, $e^m = 10mm$, modèle de MM, mortier hybride à l'état sain.

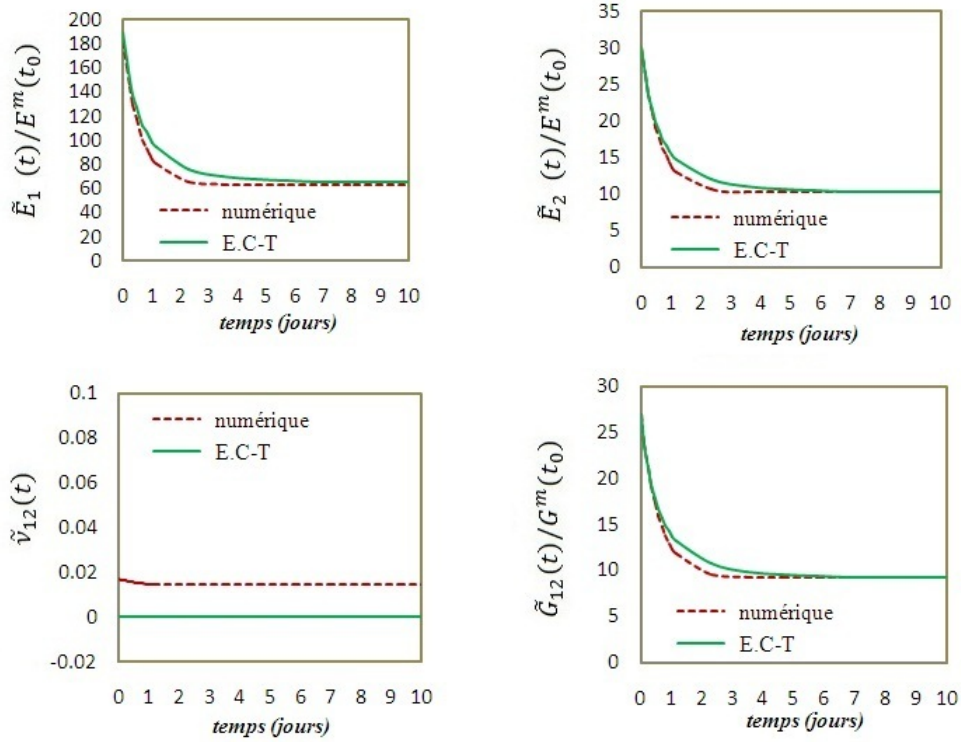


FIGURE 3.28 – Comparaison des modules $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = \infty$, $\nu^b = 0,2$, $e^m = 2mm$, modèle de MM, mortier hybride à l'état sain.

Cas microfissuré

Les propriétés du mortier hybride microfissuré sont fournies par la table (3.3) (i.e. $d_c = 0, 1$). Dans le cas de briques élastiques, on suppose que $e^m = 10$ mm, cas $E^b = 11000$ MPa [110] et cas $E^b = 100E^m(t_0)$. L'extension du modèle de Cecchi et Tralli (3.116) est estimée à l'état microfissuré par l'équation (3.116) où $E^m(t, d_c) = \tilde{S}_m^{-1}(t, d_c)$. On considère aussi le cas de briques rigides avec $e^m = 2$ mm où les propriétés effectives de la cellule périodique sont estimées par l'équation (3.118). On remarque que :

- Pour le cas de briques élastiques ayant un module d'Young E^b légèrement plus grand que $E^m(t_0)$ (i.e. $E^m(t_0) = 6151$ MPa) avec e^m assez grand (i.e. $e^m = 10$ mm), les figures (3.26) (pour $\alpha = 1$) et (3.29) (pour $\alpha \approx 2$) montrent qu'avec l'augmentation de α , l'extension de Cecchi et Tralli donne des estimations de plus en plus proches de la solution numérique. Dans le cas où $E^b \approx 2E^m(t_0)$, l'erreur observée, constante en fonction du temps, est de moins de 14% pour $\tilde{E}_1$, 9% pour $\tilde{E}_2$, 7% pour $\tilde{\nu}_{12}$ et 11% pour $\tilde{G}_{12}$.
- Pour le cas de briques rigides ou élastiques ayant un module d'Young $E^b \gg E^m$ ($E^b = 100E^m(t_0)$ (MPa)), les figures (3.27), (3.28), (3.30) et (3.31) montrent que l'estimation analytique "E.C-T" donne des résultats cohérents avec le calcul numérique. Les calculs numériques montrent aussi pour $E^b \gg E^m$, que l'on peut considérer $\tilde{\nu}_{12} = 0$, ce qui est aussi estimé par Cecchi et Tralli. On remarque également qu'après 4 jours, le cas de briques élastiques donne des erreurs absolues entre les deux modèles de moins de 5% pour $\tilde{E}_2$ et $\tilde{G}_{12}$ et de moins de 13% pour $\tilde{E}_1$, alors que le cas de briques rigides donne des erreurs absolues de moins de 4% pour tous les modules. Par contre, pour une durée de 1 à 2 jours, l'erreur maximale est de 22% (cas de briques élastiques) et de 17% (cas de briques rigides).

On s'intéresse alors à l'estimation analytique de Cecchi et Tralli pour le comportement des maçonneries classiques avec $E^b \gg E^m$ et des garnissages maçonnés. Notons que l'estimation de Cecchi et Tralli dans le cas viscoélastique sain est le remplacement des rigidités de l'interface K' et K'' dans [26] du cas élastique par celles du cas viscoélastique [36] où le coefficient ν^m est supposé indépendant du temps. C'est-à-dire, seul E^m du cas élastique est remplacé par $E^m(t)$ du cas viscoélastique. Pour le cas viscoélastique microfissuré (le cadre de cette étude), encore une fois, $E^m(t)$ devient $E^m(t, d_c)$ quand on prend en compte l'influence de la densité de fissures d_c . Avec cette approche, aucune géométrie de fissures n'est considérée. L'extension du modèle de Cecchi et Tralli combinée avec l'estimation de Levin peut être une solution à ce problème (perspective).

3.5 Applications du modèle "E.C-T" à des maçonneries chargées

On se limite ici à l'application de l'extension du modèle de Cecchi et Tralli au cas viscoélastique microfissuré. Les modèles numérique (formulation incrémentale) et micromécanique (schéma de MT classique) seront étudiés dans une étude ultérieure.

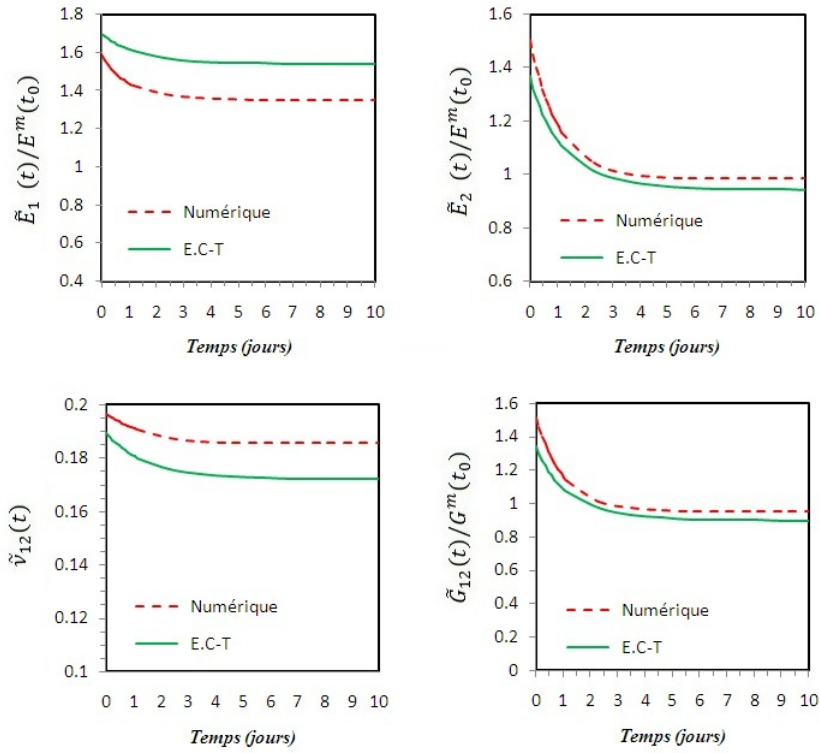


FIGURE 3.29 – Comparaison des modules $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ et $\tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = 11000$ MPa ($E^b \approx 2E^m(t_0)$), $\nu^b = 0,2$, $e^m = 10\text{mm}$, mortier hybride **microfissuré** de type MM avec $d_c = 0,1$.

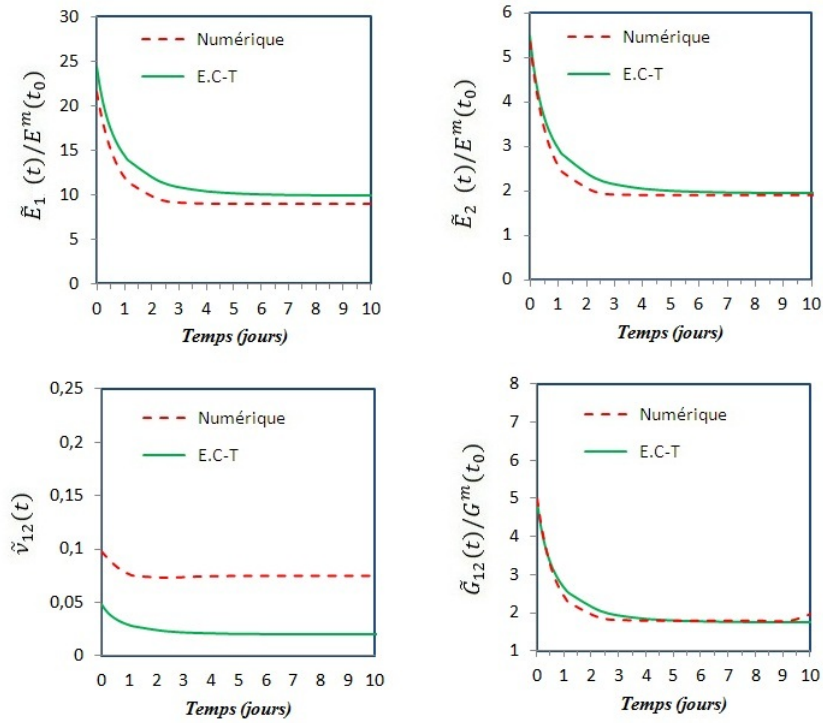


FIGURE 3.30 – Comparaison des modules $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\nu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = 100\mathbf{E}^m(\mathbf{t}_0, \mathbf{0})$, $\nu^b = 0,2$, $e^m = 10$ mm, mortier hybride **microfissuré** de type MM avec $d_c = 0,1$.

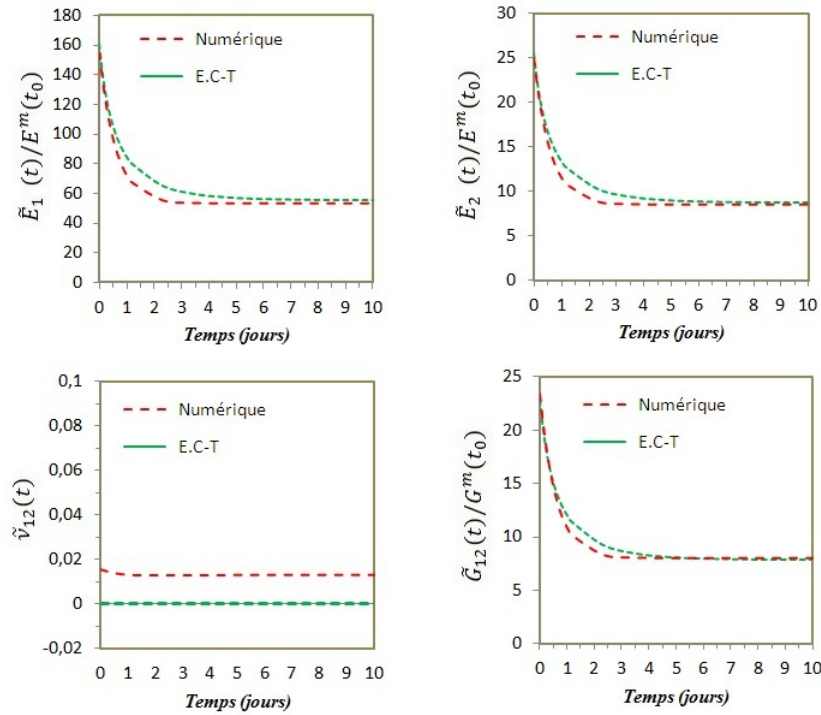


FIGURE 3.31 – Comparaison des modules $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\nu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = \infty$, $\nu^b = 0,2$, $e^m = 2$ mm, mortier hybride **microfissuré** de type MM avec $d_c = 0,1$.

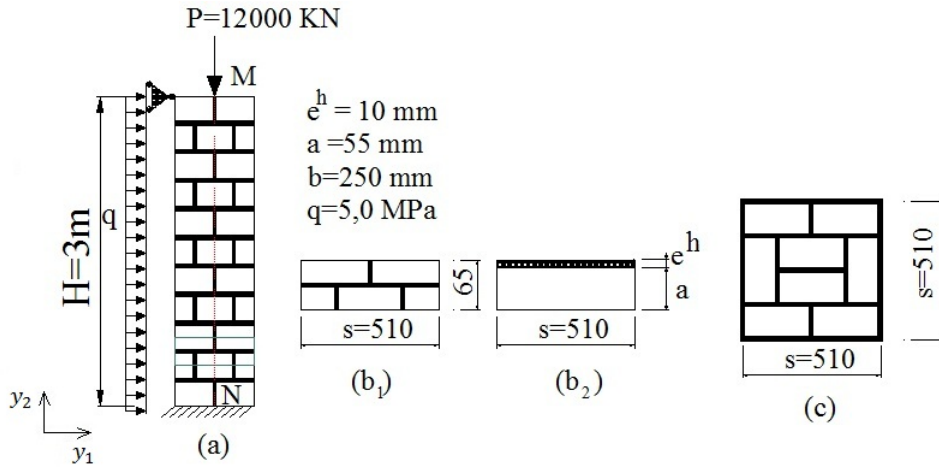


FIGURE 3.32 – Une colonne maçonnée périodique (a) et ses cellules périodiques pour la solution numérique "INC-EF" (b1) et analytique "E.C-T" (b2) pour sa section (c) d'après [36].

3.5.1 Cas d'une colonne maçonnée (1D)

On étudie le cas d'une colonne maçonnée soumise à une compression suivant deux directions : une force concentrée $\vec{P}$ et une distribution uniforme de pression horizontale $\vec{q}$. Pour éviter le risque de flambage, on impose une charge $P \ll P_E$ avec $P_E = \frac{\pi^2 EI}{(l_k)^2}$ la charge critique d'Euler, où E est le module d'Young du matériau, I le moment quadratique de la poutre, l_k la longueur de flambement de la poutre. Pour cette application, $P_E = 6.10^4$ kN. Le calcul est réalisé numériquement en 2D et en 1D par la théorie des poutres avec les paramètres : $d_c = 0,1$, $E^b = 100E^m(t_0)$, $\nu^b = 0,2$ pour le cas de briques élastiques

et $E^b = \infty$ pour le cas de briques rigides. Les calculs sont effectués à l'aide du logiciel Cast3M pour un mortier de type Burgers ou MM. La colonne maçonnée hétérogène (cf. figure (3.32)-a) est substituée par une colonne homogène dont les propriétés mécaniques sont identiques à celles de la cellule périodique (3.32)-b₂) d'après l'extension de Cecchi et Tralli, et les paramètres géométriques sont présentés sur sa section (cf. figure (3.32)-c). Les éléments de maillage utilisés pour modéliser la colonne sont des segments à 2 nœuds SEG2 et des quadrilatères à 4 nœuds QUA4 respectivement pour le cas 1D et 2D.

On remarque que (cf. table (3.6)) lorsque t dépasse 100 jours, la rigidité effective du modèle de Burgers tend vers zéro alors que celle issue du modèle de MM tend vers une asymptote non nulle. On propose donc d'étudier le comportement de cette colonne à $t = 0$ et à $t = 100$ jours. La figure (3.33) présente les déplacements suivant la direction $\vec{y}_1$ calculés à mi-section de la colonne. On remarque que les déplacements prévus par le modèle de Burgers sont plus importants que ceux prédits par le modèle de MM à $t = 0$ et $t = 100$ jours. Les figures (3.34), (3.35) (cf. aussi (H.1), et (H.2) dans l'annexe (H)) montrent que pour le cas de briques élastiques, la contrainte locale dans une colonne avec mortier de type Burgers décroît avec le temps alors que celle pour un mortier de type MM demeure quasiment constante. De plus, la carte de contraintes locales pour une colonne avec mortier v.l.n.v. sain montre une concentration de contrainte plus prononcée que celle associée à un mortier microfissuré. Pour le cas de briques rigides, les deux modèles présentent des cartes de contraintes similaires qui semblent ne pas évoluer avec le changement de la variable d_c .

3.5.2 Cas d'un mur maçonné (2D)

Nous considérons à présent le cas d'un mur de dimensions : $L = 1560$ mm, $H = 1040$ mm avec les propriétés suivantes de briques et mortier [36] :

- Briques : $b^b \times a^b \times \delta^b = 250 \times 55 \times 120$ mm³, $E^b = 100E^m(t_0, d_c = 0)$, $\nu^b = 0,2$, où δ^b est l'épaisseur de la brique.
- Mortier : $e^h = e^v = e^m = 10$ mm dans le cas de briques élastiques et $e^h = e^v = e^m = 1$ mm dans le cas de briques rigides. $\nu_v^m = \nu_h^m = 0,2$, $E^m(t_0) = 1000$ et 6150 MPa pour le mortier de type S7 et hybride, respectivement. Dans cette partie, seuls les résultats du mortier hybride sont montrés. Ceux relatifs au mortier de type S7 sont reportés à l'annexe (H.2).

Deux combinaisons de chargements sont considérées (figure (3.36)) :

- Cas 1 (figure (3.36)-a) : mur soumis à deux pressions uniformément réparties $-q_1 \vec{y}_2$, $q_2 \vec{y}_1$ et $-q_2 \vec{y}_1$,
- Cas 2 : en plus des pressions réparties $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_2$ (cf. cas 1), une force concentrée F est appliquée à mi-largeur du mur. Notons que les valeurs des charges q_1 , q_2 sont extraites des références [13, 65]. Celle de la force F provient de [111, 112].

Pour les deux cas de chargement, les propriétés du mur initialement hétérogènes sont substituées par celles du milieu homogène équivalent (MHE) définies dans la section (3.4) relatives à la cellule maçonnée périodique du cas 2D. Ainsi le mur est supposé homogène, caractérisé par les rigidités effectives $\tilde{C}_{1111}(t, d_c)$, $\tilde{C}_{2222}(t, d_c)$, $\tilde{C}_{1122}(t, d_c)$ et $\tilde{C}_{1212}(t, d_c)$ (cf. (3.116), (3.118)) dans le cas d'un mortier microfissuré. Pour un mortier sain, il suffit de considérer les mêmes rigidités avec la densité de fissures d_c nul à un instant t donné.

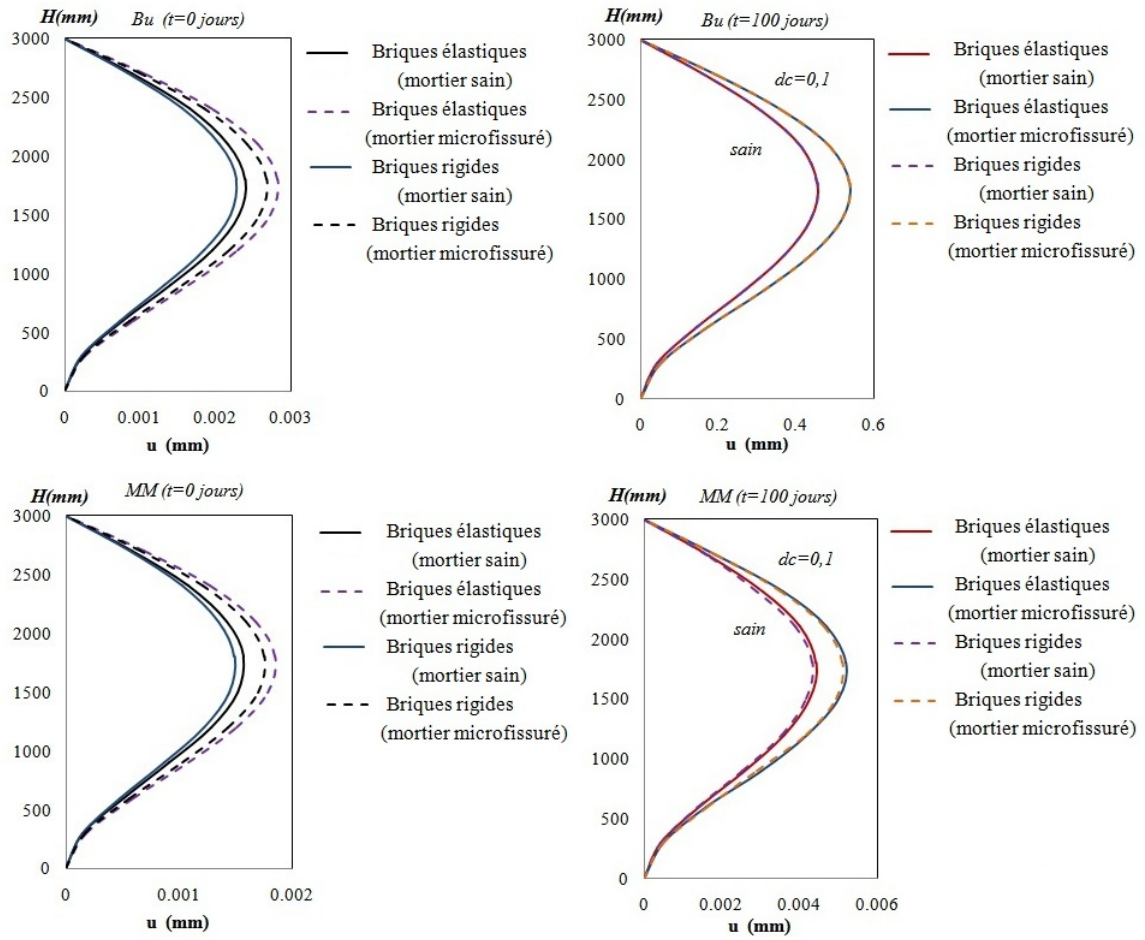


FIGURE 3.33 – Déplacement horizontal à mi-section d'une colonne maçonnée avec mortier v.l.n.v. microfissuré ($d_c = 0,1$) aux instants $t = 0$ et $t = 100$ jours.

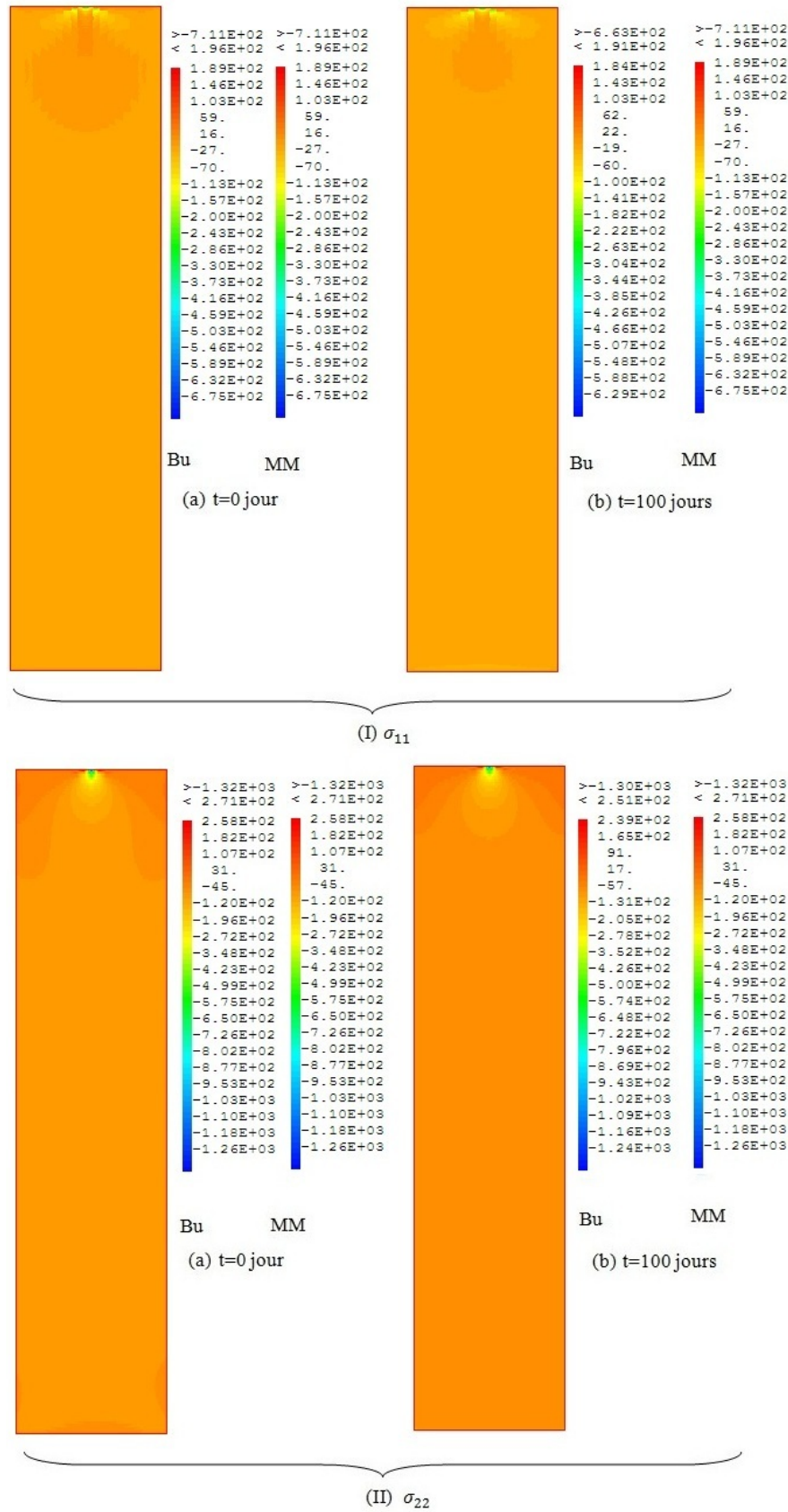


FIGURE 3.34 – Carte de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) à $t = 0$ (a) et $t = 100$ jours (b) pour une colonne maçonnée avec briques élastiques et mortier sain de type Burgers et MM.

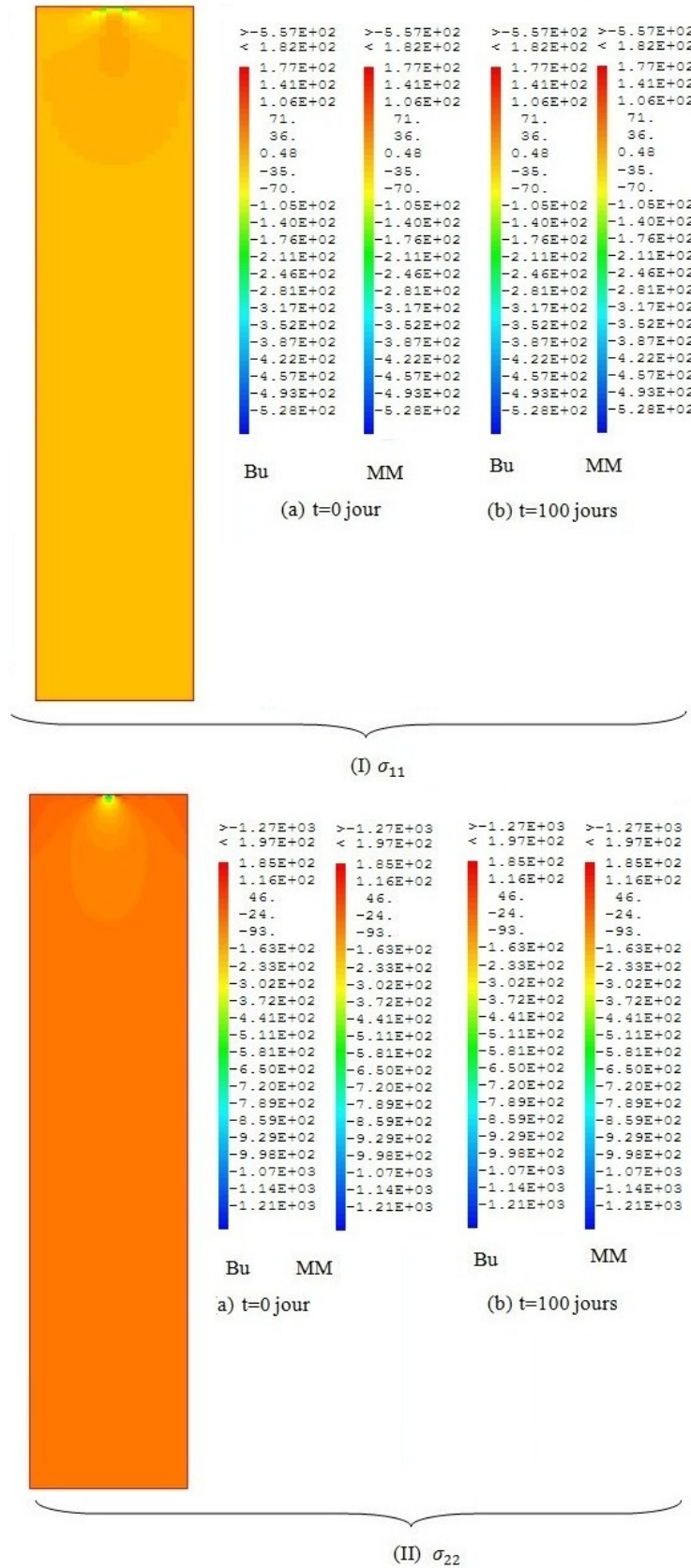


FIGURE 3.35 – Carte de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) à $t = 0$ (a) et $t = 100$ jours (b) pour une colonne maçonnée avec briques rigides et mortier sain de type Burgers et MM.

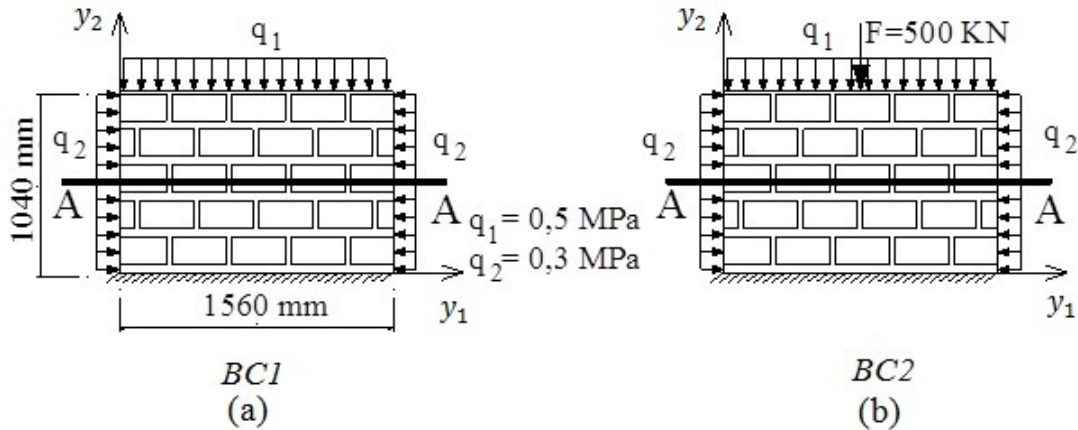


FIGURE 3.36 – Mur maçonné : conditions (BC1) (a) et (BC2) (b) de chargements.

Les caractéristiques viscoélastiques d'un VER sont supposées bien estimées dans les tables (3.7) et (3.8) par l'approche analytique de Cecchi et Tralli et son extension "E.C-T" au cas microfissuré. Pour les chargements (BC1) et (BC2), le mur désormais homogène est maillé finement avec des éléments de maillage de type quadrilatère à 4 nœuds de Cast3m.

Dans cette partie, tout d'abord, il est proposé d'estimer les champs (contraintes σ_{ij} et déformations ε_{ij}) locaux à l'aide du modèle proposé qui est une extension du modèle de Cecchi et Tralli [36] au cas microfissuré avec l'hypothèse de briques élastiques, au niveau de la coupe "A – A" à mi-hauteur du mur comme indiqué sur la figure (3.36). Les calculs font appels aux modèles de Burgers et MM. Deux cas seront considérés : mortier hybride sain et microfissuré (cf. table (3.7)). Les conclusions seront confirmées en regardant aussi les résultats des autres types de mortier sain (S7) présentés dans l'annexe (H). Ensuite, les cartes de contraintes et déplacements locaux pour un mur avec mortier v.l.n.v. microfissuré et des briques rigides soumis à la condition BC2 de chargement seront présentées.

Cas sain

Pour le modèle de Burgers, les contraintes σ_{22} et σ_{12} observées sur les figures (3.37) pour le mortier hybride, (H.4) pour le mortier S7, montrent que la variation de contrainte en fonction du temps dépend du module d'Young du mortier à $t = 0$ (par exemple, pour le cas BC2, la différence par rapport à l'état initial atteint 4,6% dans le cas du mortier hybride et 146% dans le cas du mortier S7). La figure (3.37) montre aussi que les déformations ε_{ij} croissent énormément (plusieurs fois) après 100 jours (on voit les mêmes résultats pour les autres types de mortier). Pour le modèle de MM, les figures (3.38)-mortier hybride et (H.5)-mortier S7, montrent que les contraintes σ_{22} et σ_{12} sont quasiment constantes, alors que les déformations ε_{ij} croissent en fonction du temps.

Remarquons que les modèles de MM S7 (à $t = 228$ jours) et USBR S7 (à $t = 6000$ jours) conduisent à des contraintes σ_{ij} (figures (H.6)) et des déformations ε_{ij} (figures (H.7)) quasiment identiques. Le modèle de Burgers montre des valeurs de contraintes locales différentes des estimations des autres modèles. En effet, le modèle de Burgers prévoit des contraintes moins élevées que celles de MM dans le cas du mortier hybride (figures (3.39) et

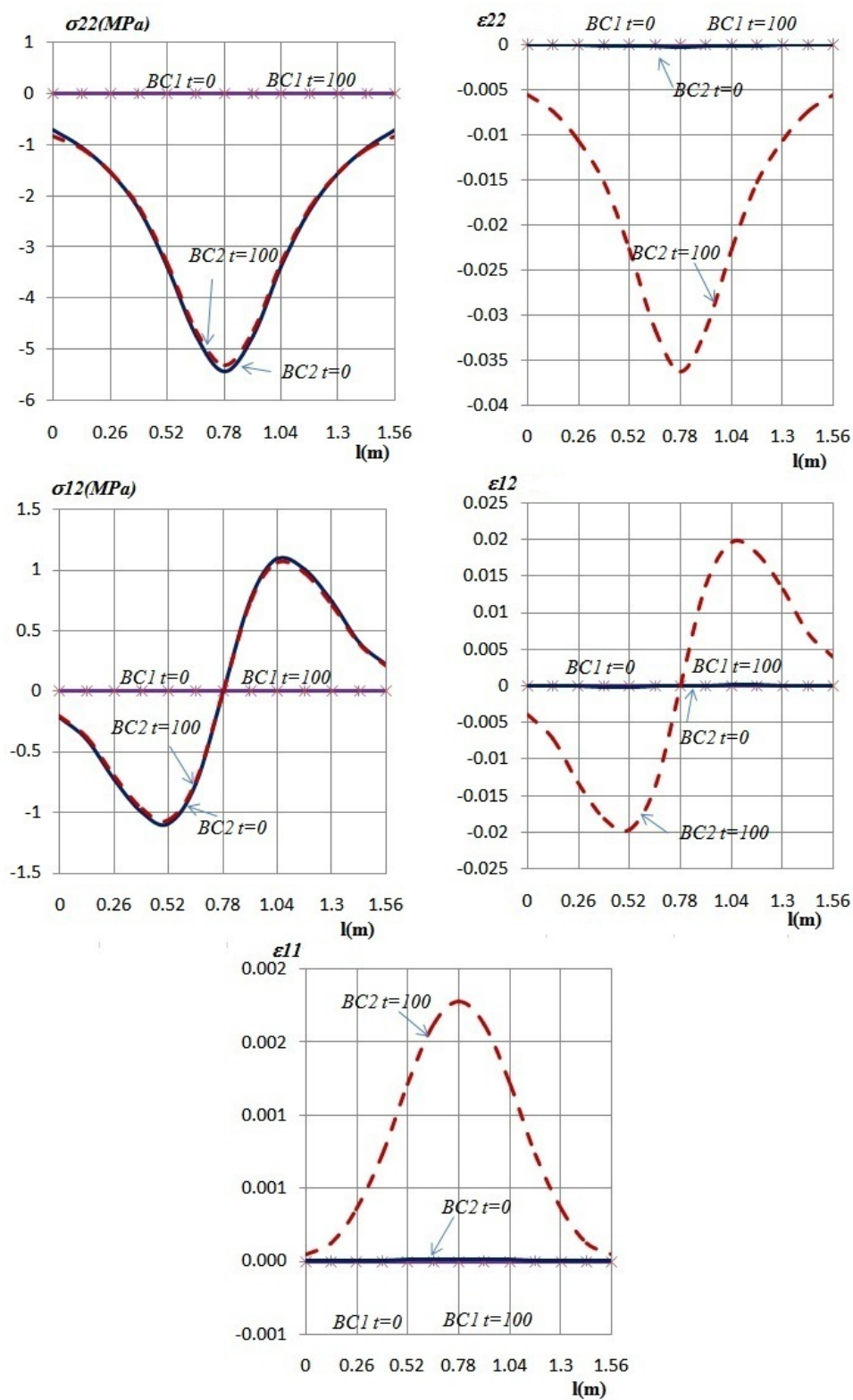


FIGURE 3.37 – Cas 2D, mortier hybride de type Burgers à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ε_{22} , ε_{12} et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".

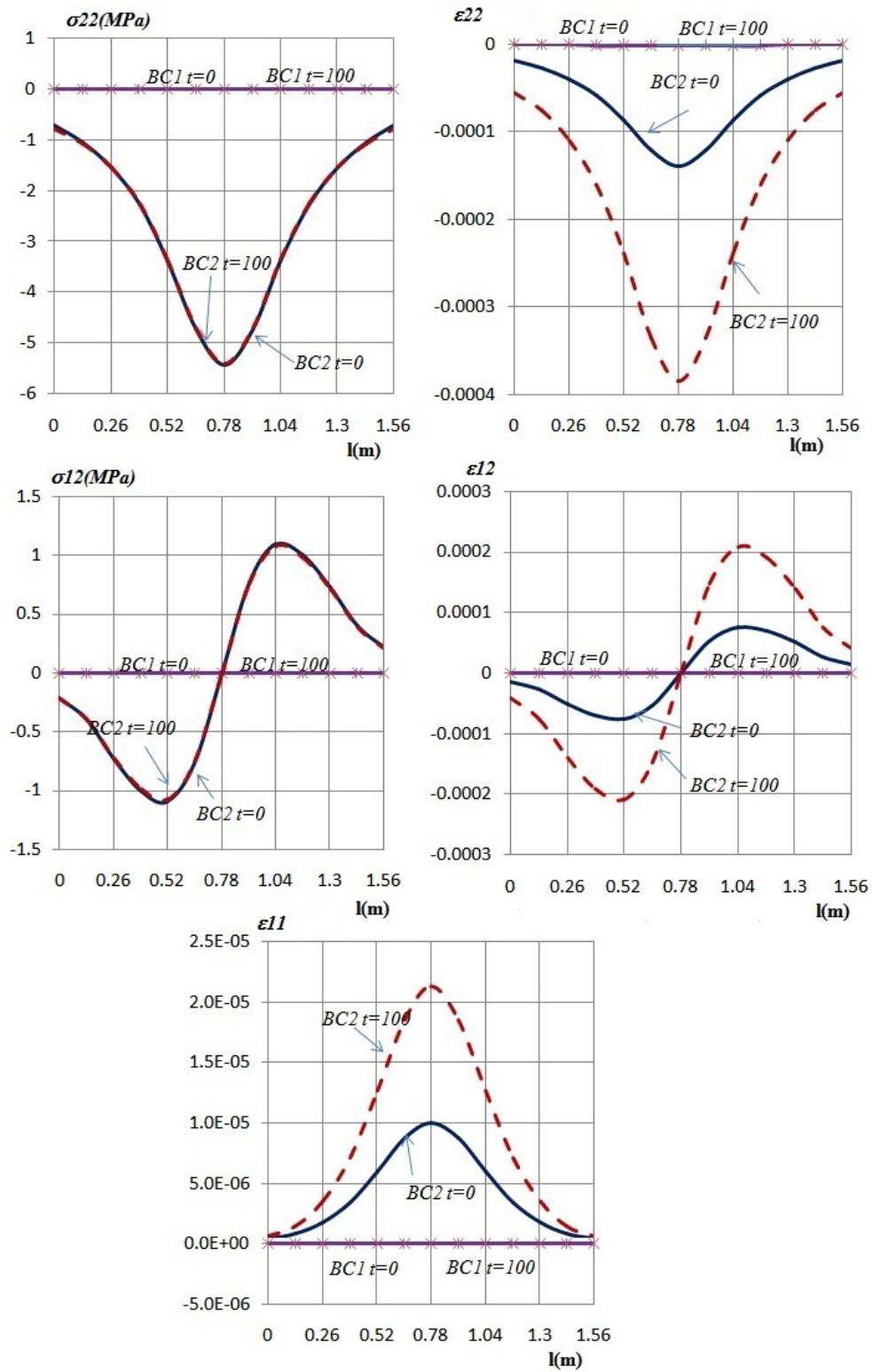


FIGURE 3.38 – Cas 2D, mortier hybride de type MM à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ϵ_{22} , ϵ_{12} et ϵ_{11} au niveau de la coupe "A-A".

(3.40)) mais plus élevées que celles de MM dans le cas du mortier de type S7 (figure (H.6)). Le modèle de Burgers semble surestimer la déformation en fonction du temps (figures (3.41), (3.42), (3.43) ou (H.7)).

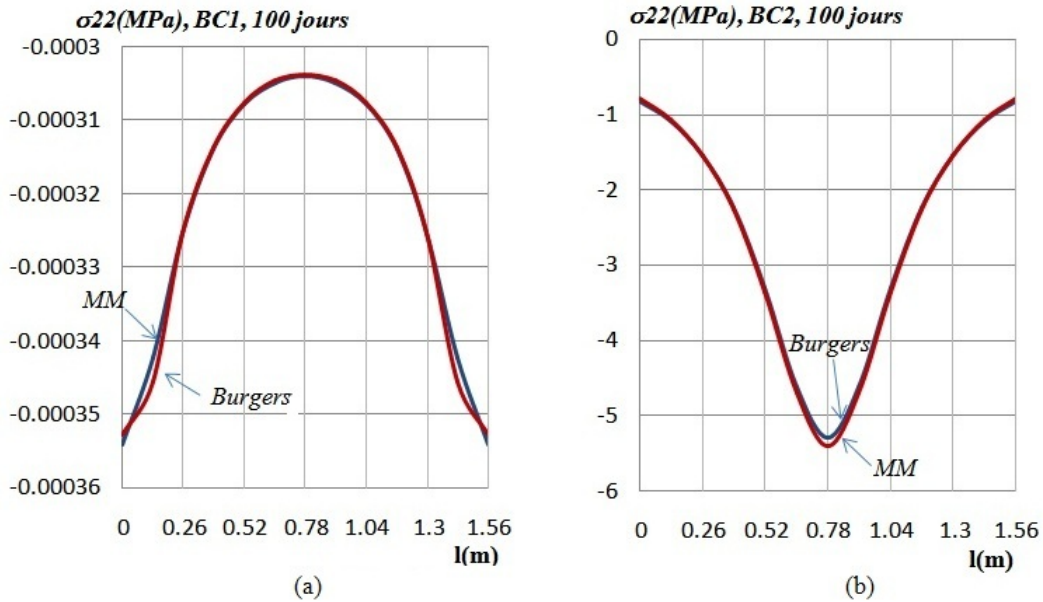


FIGURE 3.39 – Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de contrainte σ_{22} (coupe "A-A") à $t=100$ jours pour les modèles de Burgers et MM, cas BC1 (a) et cas BC2 (b).

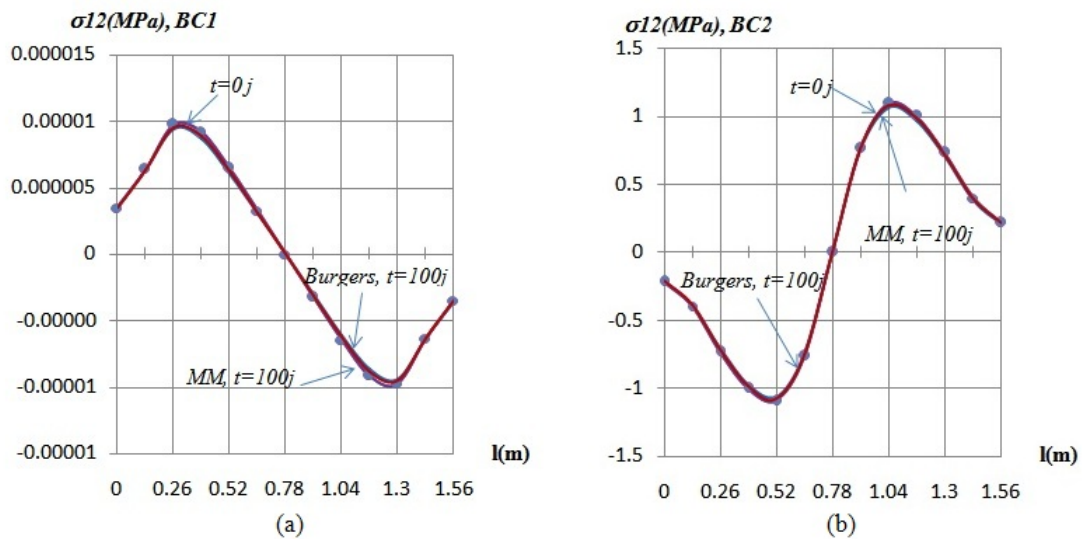


FIGURE 3.40 – Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de contrainte σ_{12} (coupe "A-A") pour les modèles de Burgers et MM, cas BC1 (a) et cas BC2 (b).

Cas microfissuré

Dans cette partie, nous comparons les états sain et microfissuré. Notons que les évolutions de contrainte σ_{ij} (coupe "A-A") sont quasiment identiques en fonction de d_c (l'erreur maximale est de 2,8% et 0,8% respectivement pour les modèles de Burgers et MM). Les figures

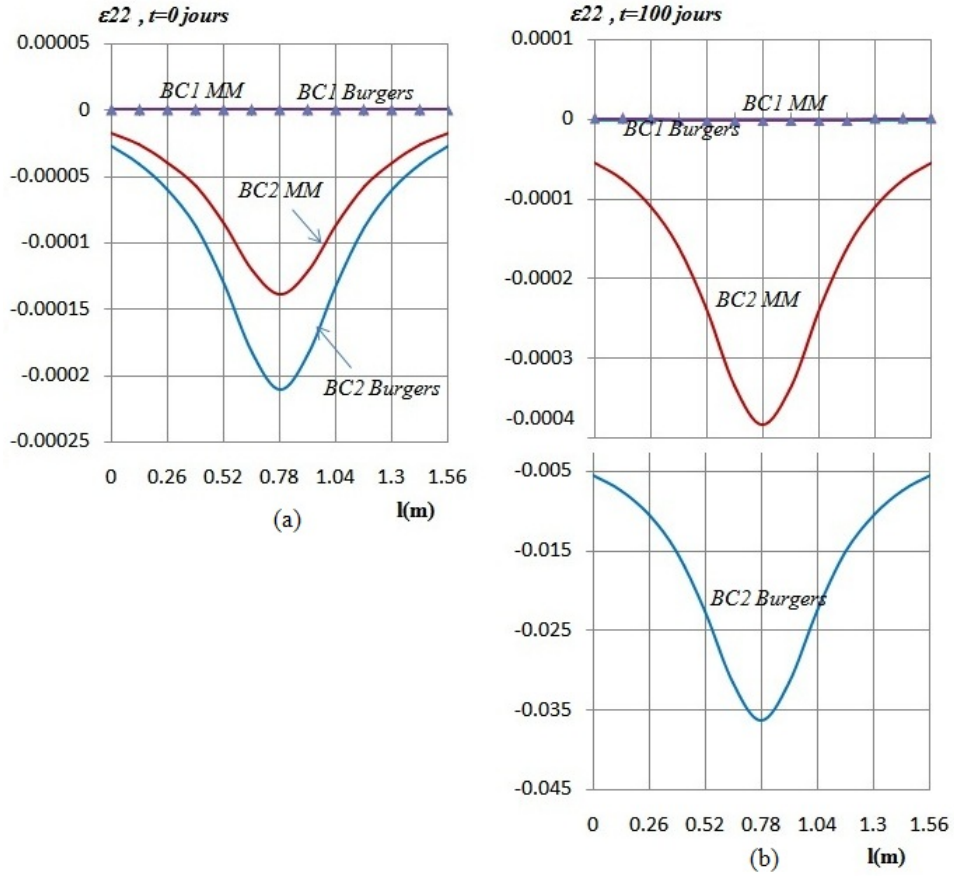


FIGURE 3.41 – Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de déformation ε_{22} (coupe "A-A") à $t=0$ jour (a) et 100 jours (b) pour les modèles de Burgers et MM.

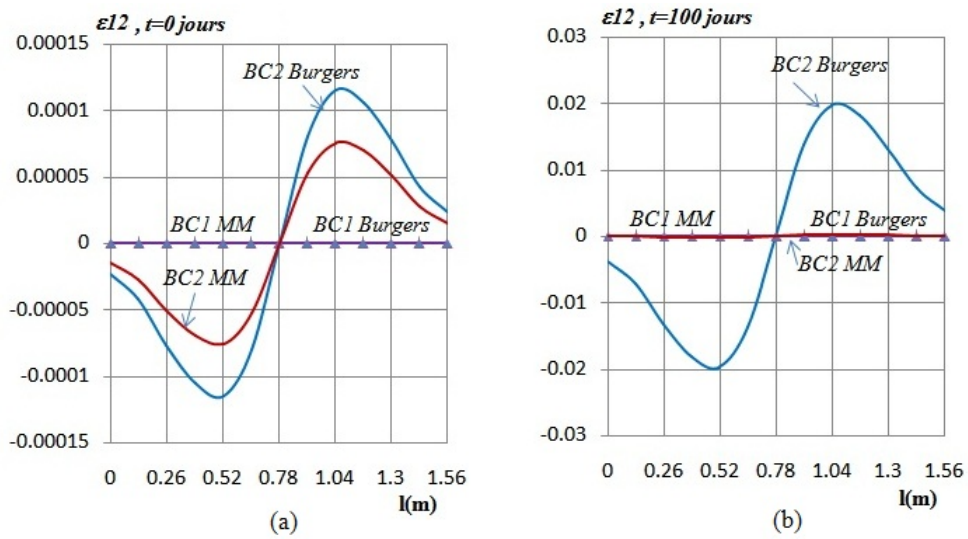


FIGURE 3.42 – Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de déformation ε_{12} (coupe "A-A") à $t=0$ jour (a) et 100 jours (b) pour les modèles de Burgers et MM.

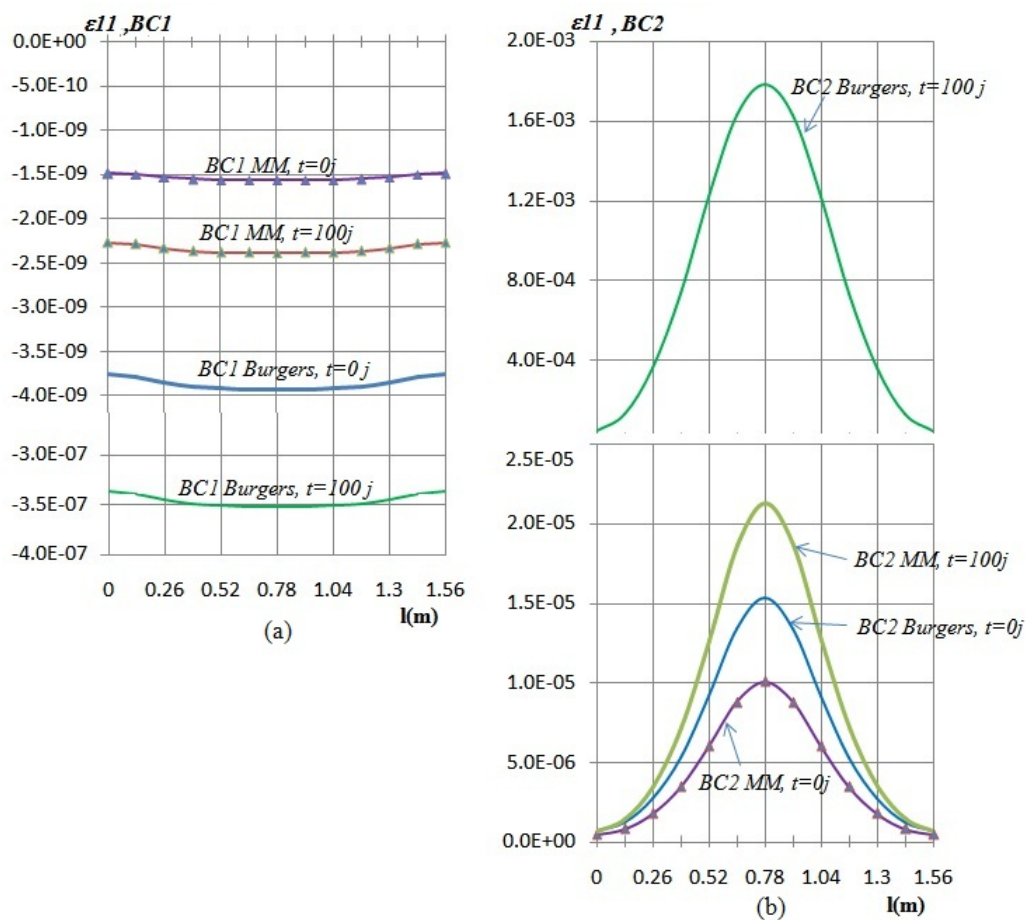


FIGURE 3.43 – Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de déformation ε_{11} (coupe "A-A") à $t=0$ jour et 100 jours pour les modèles de Burgers et MM.

(3.44) et (3.45) montrent une variation d'environ 18% de déformation ε_{ij} pour les deux modèles en comparant les états microfissuré ($d_c = 0,1$) et sain. La figure (3.46) montre

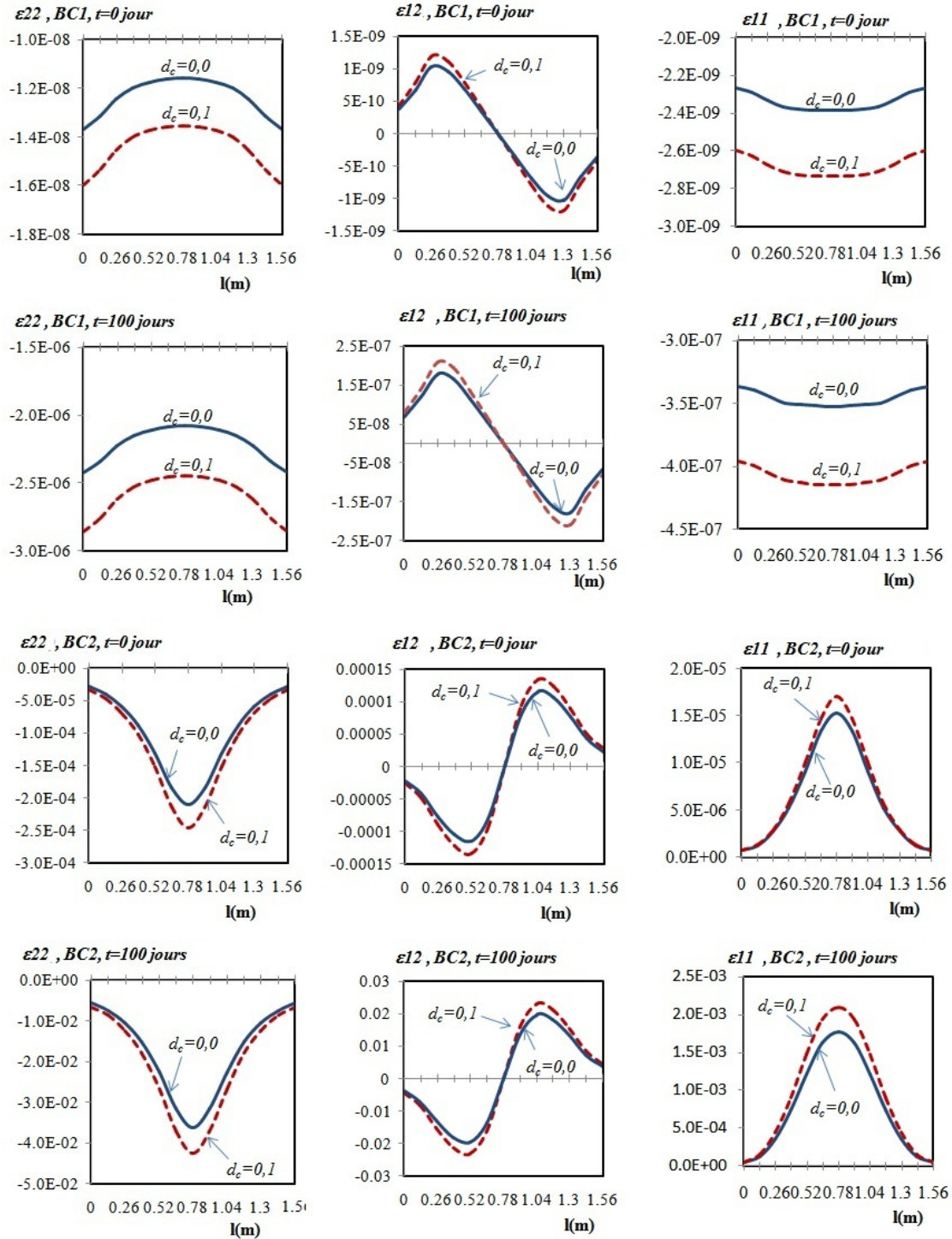


FIGURE 3.44 – Cas 2D, mortier hybride : comparaison entre deux états de mortier des évolutions de déformation ε_{ij} (coupe "A-A") à $t=0$ jour et 100 jours pour le modèle de Burgers.

une contrainte locale σ_{22} symétrique avec une compression sur presque toute la surface de la maçonnerie. Des petites zones symétriques de tension sont aussi observées aux alentours du point d'application de la force concentrée F . Après 100 jours, le déplacement du modèle

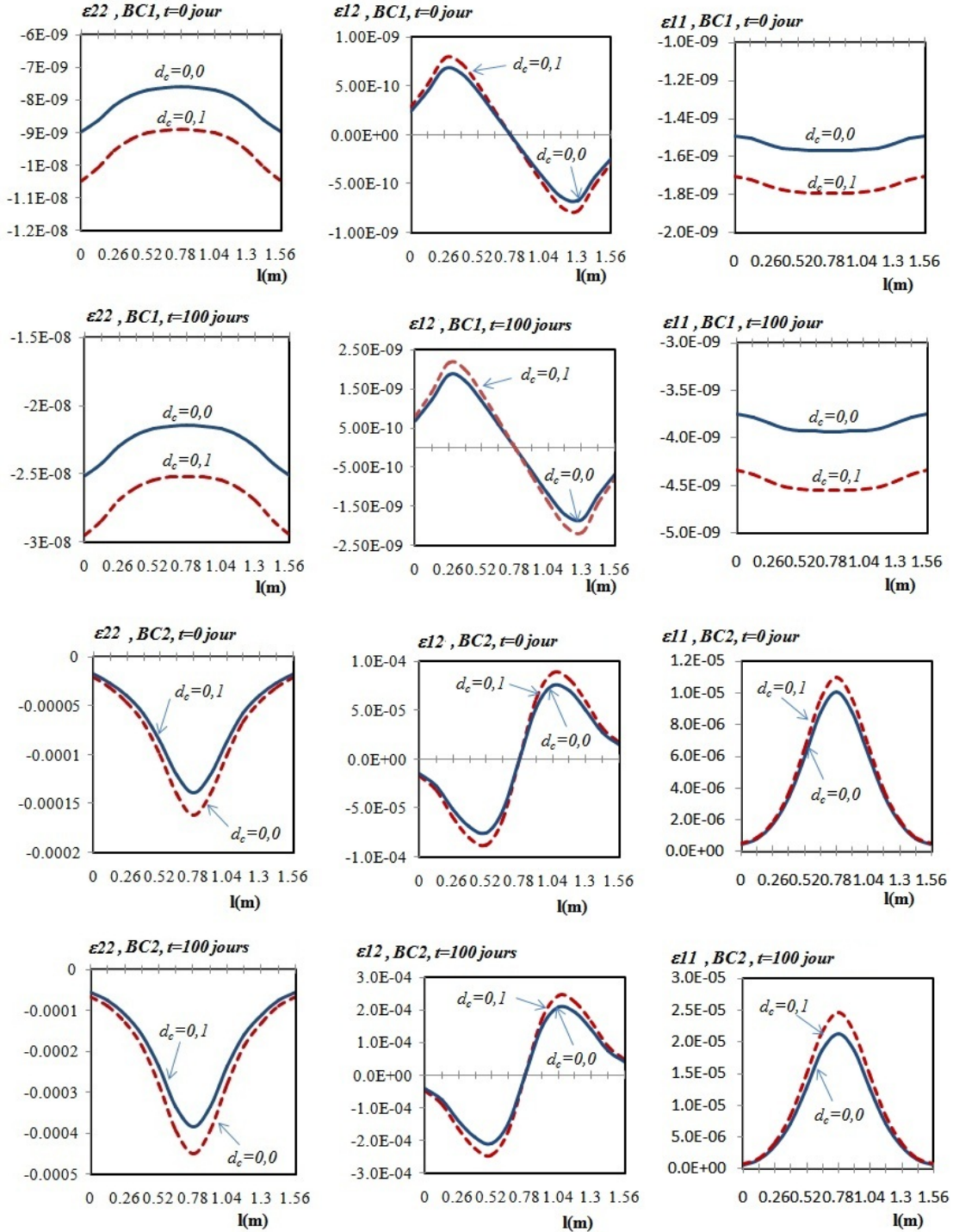


FIGURE 3.45 – Cas 2D, mortier hybride : comparaison entre deux états de mortier des évolutions de déformation ϵ_{ij} (coupe "A-A") à $t=0$ jour et 100 jours pour le modèle de MM.

de Burgers est plus élevé que celui de MM (figure (3.47)).

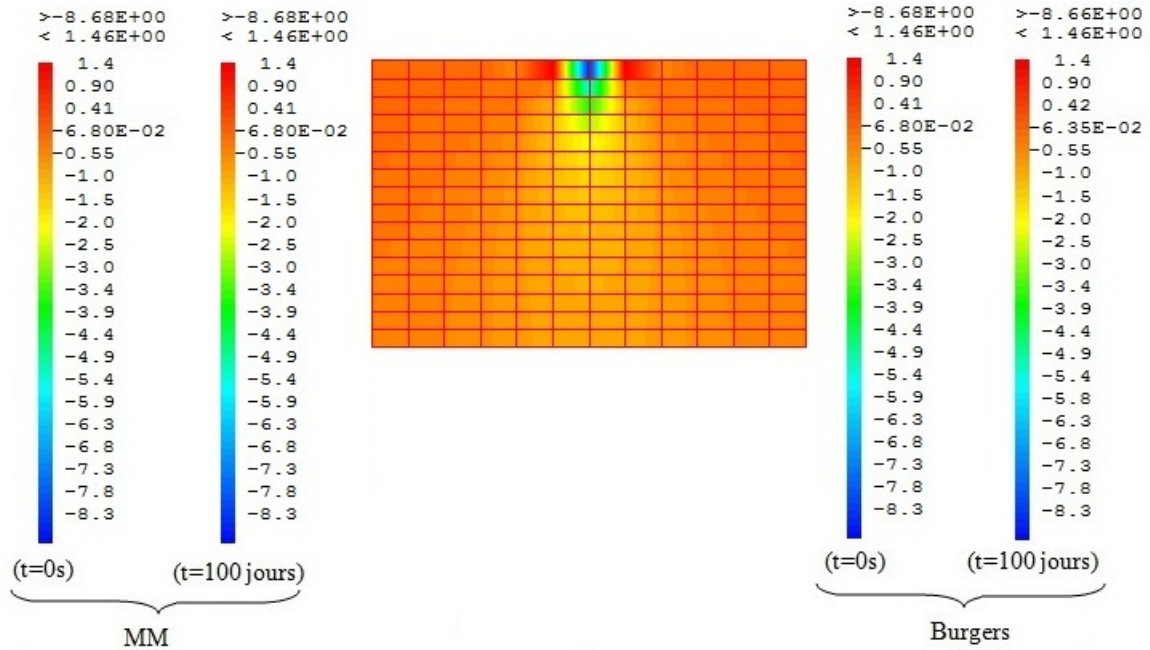


FIGURE 3.46 – Comparaison des cartes de contraintes σ_{22} à 0 jour (a) et à 100 jours (b) de deux modèles, cas de brique rigide, mortier sain. Les modules effectifs de la cellule périodique 2D sont présentés dans la table (3.8).

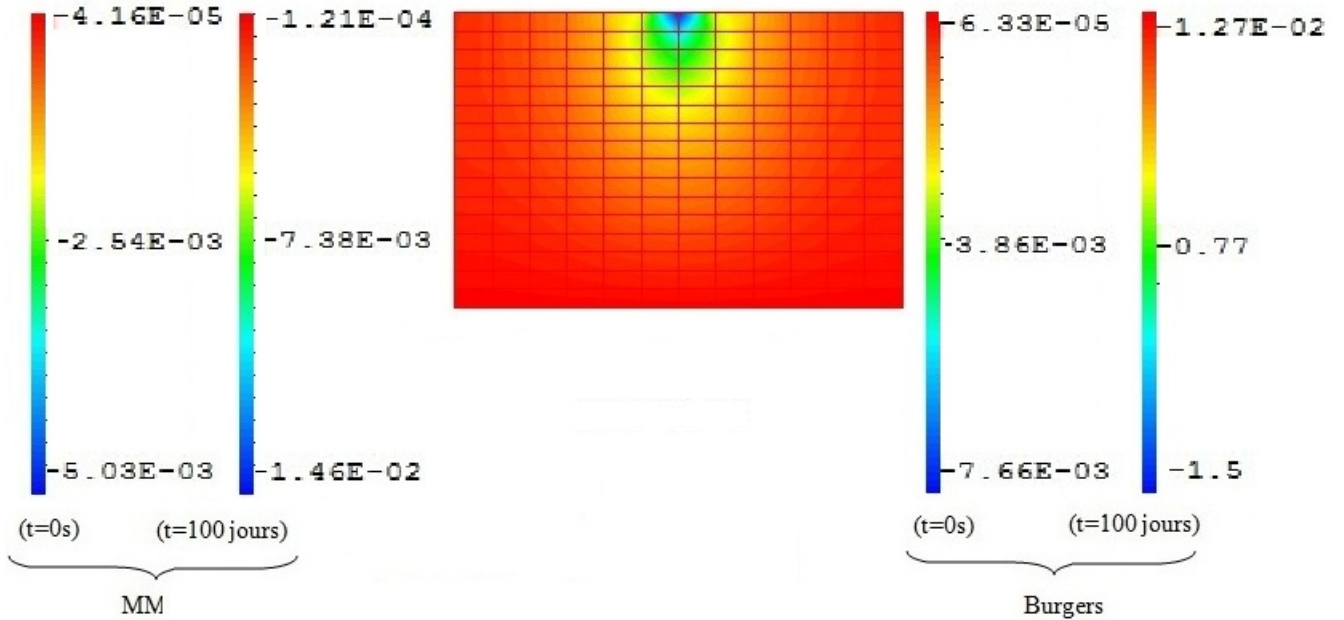


FIGURE 3.47 – Comparaison des cartes de déplacements u_2 (mm) à 0 jour (a) et à 100 jours (b) de deux modèles, cas de brique rigide, mortier sain. Les modules effectifs de la cellule périodique 2D sont présentés dans la table (3.8)

3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche multi-échelles permettant d'estimer le comportement local et global de maçonneries avec mortier v.l.n.v. microfissuré. Pour simplifier cette étude, nous avons fait l'hypothèse de non-propagation de fissures. Le couplage entre la théorie de Griffith et le schéma dilué [90] a permis d'exprimer la fonction de fluage effective du mortier v.l.n.v. microfissuré. Le comportement global de la maçonnerie a ensuite été obtenu par homogénéisation périodique analytique et numérique. L'homogénéisation numérique basée sur une procédure incrémentale a permis d'évaluer la pertinence du modèle "E.C-T" appliqué à une maçonnerie 2D.

Ce chapitre s'est intéressé d'abord à deux modèles v.l.n.v. (Burgers et MM) pour modéliser le mortier à l'état microfissuré. Nous nous sommes limités dans ce travail à des fissures de forme elliptique. Seul un cas de distribution isotrope de fissures a été considéré. Après le couplage entre l'homogénéisation et la théorie de Griffith, les paramètres d'un matériau microfissuré de type Burgers et MM dans le cas de fissures à distribution aléatoire ont été obtenus, puis validés en considérant un chargement déviatorique. Les validations donnent d'excellents accords entre les solutions exactes et approchées. La deuxième partie du chapitre a été consacrée au problème d'homogénéisation d'une maçonnerie avec mortier v.l.n.v. microfissuré. En utilisant une extension analytique de Cecchi et Tralli, des applications des modèles approchés sur une cellule périodique maçonnée viscoélastique microfissurée ont été réalisées pour obtenir le comportement global effectif. Les résultats ont montré les influences sensibles des paramètres géométriques, matériels et de la densité de fissures sur le comportement effectif des maçonneries (1D et 2D) pour deux types de mortier. On remarque aussi que le modèle de MM donne des estimations des rigidités plus convenables que le modèle de Burgers pour ces mortiers (type hybride ou S7). Ensuite, le modèle de MM est choisi pour les calculs numériques sur une cellule périodique dans deux cas de maçonnerie (classique et réfractaire). Pour cela, trois cas de rigidité de briques (deux cas pour les briques élastiques et un cas pour les briques rigides) et deux cas d'épaisseur de mortier (10 mm et 2 mm) sont considérés. Les comparaisons de cette approche avec l'approche "E.C-T" à l'échelle globale montrent que dans le cas de maçonneries viscoélastiques microfissurées, "E.C-T" donne de bons résultats pour $\tilde{E}_2$ et $\tilde{G}_{12}$ dans le cas de maçonneries avec $E^b > 2E^m$ et pour tous les modules dans le cas de maçonneries avec $E^b \gg E^m$ ou briques rigides. Pour les autres cas de maçonneries, il s'agit d'appliquer un autre modèle analytique. Dans cette étude, nous avons proposé un modèle micromécanique qui est déduit du schéma de MT et de l'inversion directe de TLC (cf. (G.1)). Une procédure composée de deux étapes est suivie pour obtenir les propriétés effectives visco-élastiques de la maçonnerie (la première concerne le mortier microfissuré et la deuxième concerne la maçonnerie). Dans un premier temps, seul le cas le plus simple est considéré : le mortier viscoélastique est microfissuré avec des fissures aléatoires et les briques élastiques saines sont supposées sphériques avec une distribution aléatoire dans la matrice de mortier. De cette façon, l'effet de la densité des fissures et de la fraction volumique de la brique sont analysés. Des validations pour les maçonneries micro-fissurées même dans une situation transitoire, sont aussi présentées. L'avantage de cette approche est que l'on peut résoudre le problème en 3D. Les résultats

sur un VER en 2D confirment que cette approche est une bonne solution dans le cas où $E^b \leq 2E^m$.

La troisième partie a concerné des applications du modèle "E.C-T" à des maçonneries 1D et 2D. Quelques résultats de contraintes et déformations ont été discutés en comparant deux modèles (Burgers et MM) pour les cas sain et microfissuré et deux mortier (S7 et hybride). Le comportement en fluage a été observé dans ce cas (les contraintes évoluent peu en fonction du temps). De plus, en fonction du temps, le modèle de Burgers prédit des déplacements et déformations plus élevés que ceux du modèle de MM. L'état microfissuré présente le risque de rupture de la maçonnerie surtout dans le cas d'un chargement concentré. De petites zones symétriques de tension observées non loin du point d'application de la force concentrée (cas 1D et 2D) montrent que la rupture s'amorce à partir de cette zone.

Chapitre 4

Conclusions et perspectives

4.1 Conclusions

Le travail réalisé dans cette thèse s'inscrit dans le cadre des modélisations et simulations de maçonneries classiques et de garnissages réfractaires. Nous nous sommes intéressés à des méthodes analytiques et numériques qui permettent de traiter le comportement de maçonneries avec mortier élastique ou viscoélastique microfissuré et briques élastiques saines. L'épaisseur du mortier est soit non négligeable soit faible, et les briques sont supposées rigides ou déformables. L'approche multi-échelle a été choisie dans cette étude.

Tout d'abord, des méthodes de modélisation d'un milieu sec et saturé ont été rappelées et développées dans le chapitre 1 pour le comportement du mortier élastique contenant des pores et des microfissures de distribution aléatoire ou parallèle. Cela a permis de déduire la loi d'interface de l'assemblage brique/mortier microfissuré dans le chapitre 2 (cf. section (2.2) et (2.3)). On remarque que les estimations d'interface de Thomsen, de $B\&K$ et de $S\&K$ ne sont proches que dans le cas des fissures parallèles saturées sans pores, et que les estimations d'interface de $K\&L$ sont largement inférieures aux estimations des autres modèles.

La méthode d'homogénéisation périodique numérique MEF appliquée sur un VER a aussi été rappelée dans le domaine élastique avec ou sans loi d'interface dans le chapitre (2) (cf. section (2.4.1)). Des applications numériques sur une cellule maçonnée élastique périodique avec différents états du mortier liés à la porosité, la densité de fissures et la distribution de fissures ont été réalisées dans le cas où l'interface brique/mortier est reproduite par des éléments discontinus. Une extension de l'approche analytique de Cecchi et Sab pour le cas de mortier élastique microfissuré a également été mentionnée en appliquant le modèle d'interphase de Kanaun et Levin. On remarque que les évolutions des modules de rigidité sont quasi-linéaires en fonction de la densité de fissures d_c et non linéaires en fonction du paramètre de géométrie des pores γ . Les modules d'élasticité et le coefficient de Poisson d'une cellule maçonnée périodique microfissurée avec ou sans interface peuvent être déterminés de façon numérique et analytique.

Dans le chapitre (3), le comportement du mortier v.l.n.v. microfissuré a été considéré. Deux modèles rhéologiques (Burgers et MM) ont été choisis. En se basant sur la technique d'homogénéisation du matériau v.l.n.v. microfissuré appliqué au béton pour le modèle de Burgers, cette étude a été adaptée au mortier avec le modèle de MM. Les résultats ont été

présentés dans les cas d'une distribution isotrope des orientations des fissures. Notons que le comportement effectif approché obtenu par un modèle de Burgers ou MM est toujours très bon à court et long termes. Les validations dans une situation transitoire (cas de fissures aléatoires ou parallèles) ont alors été réalisées pour les deux modèles en utilisant les données de mortiers v.l.n.v. disponibles dans la littérature. Les évolutions de la fonction de fluage et des temps de fluage du mortier viscoélastique microfissuré ont été également discutées.

Parallèlement aux études analytiques, des calculs numériques ont été réalisés pour un mortier élastique microfissuré ("EF", cf. section(1.2.2)) et puis pour un mortier viscoélastique microfissuré de type MM ("INC+EF", cf. section(G.2)) avec l'aide de la notion de motif morphologique représentatif et la forme incrémentale de l'équation différentielle (cas viscoélastique). Les microfissures de distributions isotrope et isotrope transverse ont également été considérées. Les calculs sur une cellule périodique maçonnerie avec mortier viscoélastique sain ou microfissuré de l'extension du modèle de Cecchi et Tralli et du modèle numérique sont comparés et utilisés pour montrer les limites du modèle analytique "E.C-T" (cf. (3.4.3)). On remarque que le modèle "E.C-T" donne de bons résultats dans les cas de briques élastiques avec $E^b > 2E^m$ et de briques rigides. Dans le cas où $E^b \leq 2E^m$, un modèle micromécanique déduit du schéma de MT et de l'inversion directe de ITLC a été proposé (cf. (G.1)). Ce modèle nommé "MT+ITLC" peut être un bon choix, mais il s'agit de le développer dans le cas isotrope transverse pour l'adapter au comportement orthotrope des maçonneries.

Enfin, en utilisant le modèle "E.C-T" qui permet de calculer le comportement effectif d'une cellule périodique de façon analytique, deux exemples de maçonneries (1D et 2D) ont été considérés pour le calcul numérique dans le code Cast3m. Les résultats obtenus ont confirmé que l'approche multi-échelle est une solution appropriée avec une grande capacité à exprimer le comportement des maçonneries viscoélastiques microfissurés. De plus, dans le cadre de cette étude (cas de mortier hybride, S7 par exemple), le modèle de MM est plus approprié que le modèle de Burgers pour la modélisation du comportement d'une maçonnerie avec du mortier viscoélastique microfissuré et des briques rigides ou élastiques.

4.2 Perspectives

En ce qui concerne la loi d'interface, plusieurs formules sont déduites dans différents cas de mortier. Il reste à les valider par des essais réels. Une interface viscoélastique est envisagée. Pour le problème d'homogénéisation d'une maçonnerie viscoélastique microfissuré, on peut développer ces études pour les autres lois de comportement (par exemple les modèles de MG, de KG, ou de Rs).

Sur l'étude de la densité de fissures, nous nous sommes limités dans cette thèse au cas où le mortier est supposé viscoélastique avec des fissures ouvertes de forme elliptique et de distribution isotrope ou isotrope transverse sans propagation des fissures et sans interaction entre elles, et des briques qui restent élastiques saines. Il reste à développer ces études en tenant compte de la propagation des fissures et l'interaction entre ces fissures de différentes formes. Les études des modes II et III de sollicitation de fissures, du cas de distribution de

fissures non isotrope et du cas de briques viscoélastiques microfissurées sont aussi envisageables.

Sur les modèles de calcul, la méthode numérique pourra être développée pour les autres cas de distribution de fissures et dans le cas de briques viscoélastiques. La méthode micromécanique "MT+ITLC" doit être étendue pour autre forme de briques de distribution alignée pour prendre en compte le comportement non isotrope d'une maçonnerie.

De petites applications 1D et 2D ont été réalisées, mais il reste à les valider par des essais réels. De plus, cette étude pourra être développée dans le cas de garnissages réfractaires composés de briques et de joints sans mortier (joint sec). Il faudra également prendre en compte les effets de la thermique (dilatation et changement de propriétés). Enfin, il sera intéressant de décrire la (visco-)plasticité du comportement de la maçonnerie sans mortier en considérant une approche de l'état des joints (ouverts ou fermés) [5, 113–115] et dans le cas 3D.

Annexe A

Les bases de calcul tensoriel

A.1 Base de $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$

$(\mathbb{J}, \mathbb{K})$ est la base de projections sphérique et déviatorique d'un tenseur isotrope d'ordre 4 quelconque $\mathbb{A}$ et est défini par :

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3}\delta_{ij} \otimes \delta_{ij}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (\text{A.1})$$

où δ_{ij} est le tenseur identité d'ordre deux. $\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre quatre.

$\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}$ sont les projections sur les espaces des tenseurs d'ordre quatre respectivement isotropes et déviatoriques et présentent les propriétés suivantes :

$$\mathbb{J} : \mathbb{J} = \mathbb{J}, \quad \mathbb{K} : \mathbb{K} = \mathbb{K}, \quad \text{et} \quad \mathbb{J} : \mathbb{K} = \mathbb{K} : \mathbb{J} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ peuvent être décomposés par :

$$\mathbb{A} = a_1\mathbb{J} + a_2\mathbb{K}, \quad \mathbb{B} = b_1\mathbb{J} + b_2\mathbb{K} \quad (\text{A.3})$$

où a_1 et a_2 sont les deux composantes de $\mathbb{A}$, b_1 et b_2 sont les deux composantes de $\mathbb{B}$ dans la base $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$, on a :

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{a_1}\mathbb{J} + \frac{1}{a_2}\mathbb{K}, \quad \mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_1 + b_1)\mathbb{J} + (a_2 + b_2)\mathbb{K}, \quad \mathbb{A} : \mathbb{B} = a_1b_1\mathbb{J} + a_2b_2\mathbb{K} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Base de Walpole

Les tenseurs d'ordre 4 isotropes transverses par rapport à l'axe e_3 sont de la forme :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A_{1122} & A_{1111} & A_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3311} & A_{3311} & A_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{1111} - A_{1122}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Ils contiennent 5 composantes indépendantes et s'écrivent comme une combinaison linéaire des 6 tenseurs élémentaires définis ci-dessous [42] :

$$\mathbb{A} = \sum_1^6 a_i \mathbb{E}_i \quad (\text{A.6})$$

où $\mathbb{E}_i$ sont les tenseurs d'ordre 4 définis par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1(n) &= \frac{1}{2} \mathbb{T} \otimes \mathbb{T}, & \mathbb{E}_2(n) &= \mathbb{N} \otimes \mathbb{N}, & \mathbb{E}_3(n) &= \mathbb{T} \underline{\otimes} \mathbb{T} - \mathbb{E}_1(n) \\ \mathbb{E}_4(n) &= \mathbb{N} \underline{\otimes} \mathbb{T} + \mathbb{T} \underline{\otimes} \mathbb{N}, & \mathbb{E}_5(n) &= \mathbb{N} \otimes \mathbb{T}, & \mathbb{E}_6(n) &= \mathbb{T} \otimes \mathbb{N} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec $\mathbb{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, $\mathbb{T} = 1 - \mathbb{N}$ et $\mathbf{n}$ la direction transversale.

On note que : $(a \underline{\otimes} b)_{ijkl} = \frac{1}{2} (a_{ik} b_{jl} + a_{il} b_{jk})$ et $(a \otimes b)_{ijkl} = \frac{1}{2} (a_{ij} b_{kl} + a_{kl} b_{ij})$. Le tenseur $\mathbb{A}$ est symétrique si $a_5 = a_6$. Les scalaires dans (A.6) sont déterminés en fonction des composantes de $\mathbb{A}$ par :

$$\begin{aligned} a_1 &= A_{1111} + A_{1122}; & a_2 &= A_{3333}; & a_3 &= A_{1111} - A_{1122} \\ a_4 &= 2A_{1313}; & a_5 &= A_{3311}; & a_6 &= A_{1133}; \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

L'inverse de $\mathbb{A}$ est :

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{a_2}{\Delta} \mathbb{E}_1(n) + \frac{a_1}{\Delta} \mathbb{E}_2(n) + \frac{1}{a_3} \mathbb{E}_3(n) + \frac{1}{a_4} \mathbb{E}_4(n) - \frac{a_5}{\Delta} \mathbb{E}_1(n) - \frac{a_6}{\Delta} \mathbb{E}_6(n) \quad (\text{A.9})$$

avec $\Delta = a_1 a_2 - 2a_5^2$. Si un second tenseur d'ordre 4 $\mathbb{B}$ s'écrit par les composantes $(b_1, \dots, b_6)$, on a la propriété :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : \mathbb{B} &= (a_1 b_1 + 2a_6 b_5) \mathbb{E}_1(n) + (a_2 b_2 + 2a_5 b_6) \mathbb{E}_2(n) + a_3 b_3 \mathbb{E}_3(n) + a_4 b_4 \mathbb{E}_4(n) + \\ &\quad (a_2 b_5 + a_5 b_1) \mathbb{E}_5(n) + (a_1 b_6 + a_6 b_2) \mathbb{E}_6(n) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Le produit doublement contracté de deux éléments de la base de Walpole est donné dans la table A.1. Si $\mathbb{A}$ est le tenseur de rigidité d'un matériau isotrope, dans la base de Walpole,

	$\mathbb{E}_1(n)$	$\mathbb{E}_2(n)$	$\mathbb{E}_3(n)$	$\mathbb{E}_4(n)$	$\mathbb{E}_5(n)$	$\mathbb{E}_6(n)$
$\mathbb{E}_1(n)$	$\mathbb{E}_1(n)$	0	0	0	0	$\mathbb{E}_6(n)$
$\mathbb{E}_2(n)$	0	$\mathbb{E}_2(n)$	0	0	$\mathbb{E}_5(n)$	0
$\mathbb{E}_3(n)$	0	0	$\mathbb{E}_3(n)$	0	0	0
$\mathbb{E}_4(n)$	0	0	0	$\mathbb{E}_4(n)$	0	0
$\mathbb{E}_5(n)$	$\mathbb{E}_5(n)$	0	0	0	0	$2\mathbb{E}_2(n)$
$\mathbb{E}_6(n)$	0	$\mathbb{E}_6(n)$	0	0	$2\mathbb{E}_1(n)$	0

TABLE A.1 – Propriétés de la base de Walpole

il s'écrit sous la forme $[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]$. En utilisant (A.8), on a :

$$c_1 = \frac{2\mu^m}{1 - 2\nu^m}, \quad c_2 = \frac{2\mu^m(1 - \nu^m)}{1 - 2\nu^m}, \quad c_3 = c_4 = 2\mu^m, \quad c_5 = c_6 = \frac{2\mu^m\nu^m}{1 - 2\nu^m} \quad (\text{A.11})$$

avec μ^m et ν^m le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau. De plus, si l'estimation du tenseur de rigidité effective s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \sum_1^6 c_i \mathbb{E}_i \quad (\text{A.12})$$

on a le module d'Young dans la direction longitudinale :

$$E_3 = c_2 - \frac{2c_5^2}{c_1} \quad (\text{A.13})$$

et dans la direction transversale :

$$E_1 = E_2 = \frac{2c_3(c_1c_2 - 2c_5^2)}{(c_1 + c_3)c_2 - 2c_5^2} \quad (\text{A.14})$$

Le coefficient de Poisson et le module de cisaillement dans le plan perpendiculaire à la direction transversale sont :

$$\nu_{31} = \frac{c_5}{c_1}, \quad \mu_{12} = \frac{c_3}{2} \quad (\text{A.15})$$

On note que :

	$\mathbb{E}_1(n)$	$\mathbb{E}_2(n)$	$\mathbb{E}_3(n)$	$\mathbb{E}_4(n)$	$\mathbb{E}_5(n)$	$\mathbb{E}_5(n)$
N	0	N	0	0	T	0
T	T	0	0	0	N	0

TABLE A.2 – Propriétés de la base de Walpole

A.3 Base de $\mathbb{F}$

On introduit les notions de base de $\mathbb{F}$ [56] qui permettent de calculer les tenseurs de type isotrope transverse selon l'approche de Levin et *al.* [53]. Les éléments de cette base sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\alpha\beta\lambda\mu}^1 &= \delta_{\alpha(\lambda\delta_{\mu})\beta}, & \mathbb{F}_{\alpha\beta\lambda\mu}^2 &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu}, & \mathbb{F}_{\alpha\beta\lambda\mu}^3 &= \delta_{\alpha\beta}n_{\lambda}n_{\mu} \\ \mathbb{F}_{\alpha\beta\lambda\mu}^4 &= n_{\alpha}n_{\beta}\delta_{\lambda\mu}, & \mathbb{F}_{\alpha\beta\lambda\mu}^5 &= n_{\alpha}n_{(\mu}\delta_{\lambda)(\beta)}, & \mathbb{F}_{\alpha\beta\lambda\mu}^6 &= n_{\alpha}n_{\beta}n_{\lambda}n_{\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Notons que $\mathbb{F}_1 = \mathbb{I}$ et $\mathbb{F}_2 = 3\mathbb{J}$ en comparant avec (A.3). Le tenseur d'élasticité isotrope s'écrit alors :

$$\mathbb{C} = k\mathbb{F}_2 + 2\mu(\mathbb{F}_1 - \frac{1}{3}\mathbb{F}_2) \quad (\text{A.17})$$

et le tenseur des souplesses $\mathbb{S}$ s'écrit :

$$\mathbb{S} = \alpha_1\mathbb{F}_2 + \alpha_2(\mathbb{F}_1 - \frac{1}{3}\mathbb{F}_2) \quad (\text{A.18})$$

$$\text{où } \alpha_1 = \frac{1}{9k}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\mu}.$$

A.4 Base de $\mathbb{P}$

Cette base est construite comme (A.16) mais la projection $\theta_{\alpha\beta}$ est sur le plan orthogonal à un vecteur unitaire m .

$$\theta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - m_{\alpha}m_{\beta} \quad (\text{A.19})$$

La base de $\mathbb{P}$ est définie par les tenseurs d'ordre 4 suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha\beta\lambda\mu}^1 &= \theta_{\alpha(\lambda\theta_{\mu})\beta}, & \mathbb{P}_{\alpha\beta\lambda\mu}^2 &= \theta_{\alpha\beta}\theta_{\lambda\mu}, & \mathbb{P}_{\alpha\beta\lambda\mu}^3 &= \theta_{\alpha\beta}m_{\lambda}m_{\mu} \\ \mathbb{P}_{\alpha\beta\lambda\mu}^4 &= m_{\alpha}m_{\beta}\theta_{\lambda\mu}, & \mathbb{P}_{\alpha\beta\lambda\mu}^5 &= m_{\alpha}m_{(\mu}\theta_{\lambda)(\beta}, & \mathbb{P}_{\alpha\beta\lambda\mu}^6 &= m_{\alpha}m_{\beta}m_{\lambda}m_{\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Les éléments de la base de $\mathbb{P}$ et de la base de $\mathbb{F}$ sont reliés par les équations :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{P}_3 \\ \mathbb{P}_4 \\ \mathbb{P}_5 \\ \mathbb{P}_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_2 \\ \mathbb{F}_3 \\ \mathbb{F}_4 \\ \mathbb{F}_5 \\ \mathbb{F}_6 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Si le tenseur $\mathbb{A}$ s'écrit dans la base de $\mathbb{P}$ sous la forme :

$$\mathbb{A} = a_1\mathbb{P}_2 + a_2\left(\mathbb{P}_1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}_2\right) + a_3\mathbb{P}_3 + a_4\mathbb{P}_4 + a_5\mathbb{P}_5 + a_6\mathbb{P}_6 \quad (\text{A.22})$$

L'inverse de $\mathbb{A}$ est :

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{a_6}{2\Delta_1}\mathbb{P}_2 + \frac{1}{a_2}\left(\mathbb{P}_1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}_2\right) - \frac{a_3}{\Delta_1}\mathbb{P}_3 - \frac{a_4}{\Delta_1}\mathbb{P}_4 + \frac{4}{a_5}\mathbb{P}_5 - \frac{2a_1}{\Delta_1}\mathbb{P}_6 \quad (\text{A.23})$$

avec $\Delta_1 = 2(a_1a_6 - a_3a_4)$.

Dans la base de $\mathbb{P}$, le tenseur d'élasticité isotrope transverse $\mathbb{C} = \mathbb{S}^{-1}$ s'écrit [56] :

$$\mathbb{C} = k_f\mathbb{P}_2 + 2m_f\left(\mathbb{P}_1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}_2\right) + l_f(\mathbb{P}_3 + \mathbb{P}_4) + 4\mu_f\mathbb{P}_5 + n_f\mathbb{P}_6 \quad (\text{A.24})$$

Les cinq paramètres dans (A.24) sont en relation avec les modules élastiques par :

$$m_f = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}, \quad k_f = \frac{1}{2\Delta E_3}, \quad l_f = \frac{\nu_{13}}{\Delta E_3}, \quad n_f = \frac{1 - \nu_{12}}{\Delta E_1}, \quad \mu_f = \frac{E_3}{2(1 + \nu_{13})} \quad (\text{A.25})$$

Où E_1 est le module d'Young dans le plan de θ perpendiculaire à la direction transversale e_3 et E_3 est celui dans la direction e_3 . ν_{13} et ν_{12} sont les coefficients de Poisson,

$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}}{E_1 E_3} - 2\left(\frac{\nu_{13}}{E_3}\right)^2$. Si on connaît $m_f, k_f, l_f, n_f, \mu_f$, de façon inverse, on a :

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &= \frac{4(2k_fm_f\mu_f + l_fm_f\mu_f)}{4k_f\mu_f + 2l_f\mu_f + m_fn_f}, & E_3 &= \frac{(2k_f + l_f)\mu_f}{k_f} \\ \nu_{12} &= \frac{4k_fm_f\mu_f + 2l_fm_f - \mu_fn_f}{4k_f\mu_f + 2l_f\mu_f + m_fn_f}, & \nu_{13} &= \frac{l_f}{2k_f} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Dans le cas isotrope, [56] a montré que : $\mu_f = m_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}$, $k_f = \lambda_f + \mu_f$, $l_f = \lambda_f$ et $n_f = \lambda_f + 2\mu_f$. De plus, si on connaît E_1 , E_3 et ν_{12} dans le plan de θ , on peut calculer E_0 et ν_0 dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées de base (e_1, e_2, e_3) selon les relations :

$$E_1 = \frac{27(-E_0 + 2E_0\nu_0)}{-19 + 18\nu_0 + 36\nu_0^2}, \quad \nu_{12} = \frac{-8 + 9\nu_0 + 18\nu_0^2}{-19 + 18\nu_0 + 36\nu_0^2} \quad (\text{A.27})$$

Annexe B

Tenseur d'Eshelby

B.1 Ellipsoïde cylindrique

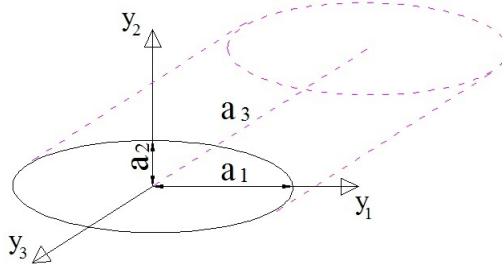


FIGURE B.1 – Inclusion ellipsoïdale

Le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}_E$ dépend toujours de la forme de l'ellipse, de l'orientation de l'inclusion, du tenseur de rigidité de la matrice solide. Les composantes du tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}_E$ pour un ellipsoïde cylindrique ($a_3 \rightarrow \infty$) sont déterminées en fonction de $0 < X = a_2/a_1 \leq 1$ où les a_i dénotent les rayons de l'inclusion [8, 37, 116] :

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= \frac{X}{2(1-\nu^m)} \left[\frac{2+X}{(1+X)^2} + \frac{1-2\nu^m}{1+X} \right], & S_{2222} &= \frac{1}{2(1-\nu^m)} \left[\frac{2+X}{(1+X)^2} + \frac{1-2\nu^m}{1+X} \right] \\
 S_{1122} &= \frac{X}{2(1-\nu^m)} \left[\frac{X}{(1+X)^2} - \frac{1-2\nu^m}{1+X} \right], & S_{2211} &= \frac{1}{2(1-\nu^m)} \left[\frac{1}{(1+X)^2} - \frac{1-2\nu^m}{1+X} \right] \\
 S_{1133} &= \frac{\nu^m}{1-\nu^m} \frac{X}{1+X}, & S_{2233} &= \frac{\nu^m}{1-\nu^m} \frac{1}{1+X}, & S_{1313} &= \frac{X}{2(1+\nu^m)}; \\
 S_{1212} &= \frac{1}{4(1-\nu^m)} \left[\frac{1+X^2}{(1+X)^2} + 1 - 2\nu^m \right], & S_{1212} &= \frac{1}{2(1+\nu^m)}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Le tenseur d'Eshelby (B.1) s'écrit dans la base de Walpole :

$$\mathbb{S}_E = \frac{X}{1+X} \left\{ \frac{1}{1-\nu^m}, 0, \frac{2+X-2\nu^m(1+X)}{(1+X)(1-\nu^m)}, 1, 0, \frac{\nu^m}{1-\nu^m} \right\} \tag{B.2}$$

B.2 Ellipsoïde aplati

On suppose que les inclusions sont des pores ellipsoïdaux aplatis selon la direction y_3 ($a_1 = a_2 = l \gg a_3 = c$) avec la même orientation et la même forme. L'équation de la

section transversale est :

$$(z_1^2)/c^2 + (z_2^2 + z_3^2)/l^2 = 1 \quad (\text{B.3})$$

où c dénote la demi-ouverture et l est le rayon de l'inclusion. Les composantes du tenseur

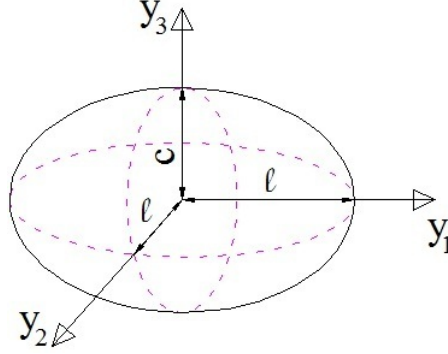


FIGURE B.2 – Fissure ellipsoïdale aplatie

d'Eshelby $\mathbb{S}_E$ pour un ellipsoïde aplati sont déterminées en fonction de $0 < X = c/l \leq 1$ [37, 40, 41] :

$$\begin{aligned} S_{1111} &= \frac{13 - 8\nu^m}{32(1 - \nu^m)}\pi X, & S_{3333} &= 1 - \frac{1 - 2\nu^m}{4(1 - \nu^m)}\pi X \\ S_{1122} &= S_{2211} = \frac{8\nu^m - 1}{32(1 - \nu^m)}\pi X; & S_{1133} &= S_{2233} = 1 - \frac{2\nu^m - 1}{8(1 - \nu^m)}\pi X \\ S_{3311} &= S_{3322} = \frac{\nu^m}{1 - \nu^m} \left(1 - \frac{4\nu^m + 1}{8\nu^m}\pi X \right), & S_{1212} &= \frac{7 - 8\nu^m}{32(1 - \nu^m)}\pi X \\ S_{1313} &= S_{2323} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu^m - 2}{4(1 - \nu^m)}\pi X \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$\mathbf{S}_E$ dans la base de Walpole s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_E &= \frac{3}{8(1 - \nu^m)}\pi X \mathbb{E}_1 + \left(1 - \frac{1 - 2\nu^m}{4(1 - \nu^m)}\pi X \right) \mathbb{E}_2 + \frac{7 - 8\nu^m}{16(1 - \nu^m)}\pi X \mathbb{E}_3 \\ &+ \left(1 + \frac{\nu^m - 2}{4(1 - \nu^m)}\pi X \right) \mathbb{E}_4 + \frac{\nu^m}{1 - \nu^m} \left(1 - \frac{4\nu^m + 1}{8\nu^m}\pi X \right) \mathbb{E}_5 + \left(1 - \frac{2\nu^m - 1}{8(1 - \nu^m)}\pi X \right) \mathbb{E}_6 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Annexe C

Loi d'interface

C.1 Analyse asymptotique

C.1.1 Pour l'interface

On utilise une analyse asymptotique du tenseur de rigidité effective quand l'épaisseur tend vers zéro.

- L'expansion asymptotique vers l'extérieur :

$$u^\varepsilon(x_1, x_3) = u^0(x_1, x_3) + \varepsilon u^1(x_1, x_3) + \cdots, \quad (\text{C.1})$$

$$e_{ij}(u^\varepsilon)(x_1, x_3) = e_{ij}^0 + \varepsilon e_{ij}^1 + \cdots, \quad (\text{C.2})$$

$$e_{ij}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^1}{\partial x_i} \right) \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x_1, x_3) = \sigma_{ij}^0(x_1, x_3) + \varepsilon \sigma_{ij}^1(x_1, x_3) + \cdots, \quad (\text{C.4})$$

- L'expansion asymptotique vers l'intérieur, avec $y_3 = x_3/\varepsilon$:

$$u^\varepsilon(x_1, y_3) = v^0(x_1, y_3) + \varepsilon v^1(x_1, y_3) + \cdots, \quad (\text{C.5})$$

$$e_{ij}(u^\varepsilon)(x_1, y_3) = \varepsilon^{-1} e_{ij}^{-1} + e_{ij}^0 + \varepsilon e_{ij}^1 + \cdots, \quad (\text{C.6})$$

$$e_{11}^n = \frac{\partial v_1^n}{\partial x_1}, e_{33}^n = \frac{\partial v_3^{n+1}}{\partial y_3}, e_{31}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3^n}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1^{n+1}}{\partial y_3} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x_1, y_3) = \varepsilon^{-1} \tau_{ij}^{-1}(x_1, y_3) + \tau_{ij}^0(x_1, y_3) + \varepsilon \tau_{ij}^1(x_1, y_3) + \cdots, \quad (\text{C.8})$$

$$\sigma_{ij,j}^\varepsilon = \sum_{n=-2}^{\infty} \varepsilon^n \left(\frac{\partial \tau_{i1}^n}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i3}^{n+1}}{\partial y_3} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$v^n = 0, n < 0; \tau^n = 0, n < -1 \quad (\text{C.10})$$

- La condition de continuité : quand ε tend vers zéro, x_3 tend vers ± 0 et y_3 tend vers $\pm \infty$.

$$v^0(x_1, \pm \infty) = u^0(x_1, \pm 0), \quad \tau^{-1}(x_1, \pm \infty) = 0, \quad \tau^0(x_1, \pm \infty) = \sigma^0(x_1, \pm 0) \quad (\text{C.11})$$

Où u^0, v^0 sont les déplacements au contour ; σ^0, τ^0 sont les contraintes à la surface. On suppose que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{ijkl}}{\varepsilon} = \bar{a}_{ijkl}$ existe, $\tau_{ij}^{-1} = 0$ et $\tau_{ij}^0 = \bar{a}_{ijkl} e_{kl}^{-1}$ quand ε est petit.

- L'équilibre :

$$\frac{\partial \tau_{i3}^{-1}}{\partial y_3} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{i2}^0}{\partial y_3} = 0; \quad v_i^0 = u_i^0(x_1, 0), \quad \tau_{i3}^0 = \sigma_{i3}^0(x_1, 0); \quad \tau_{ij}^0 = \bar{a}_{ijkl} \frac{\partial v_i^0}{\partial y_3} \quad (\text{C.12})$$

Comme $\tau_{i3}^0 = \bar{a}_{i3i3} [v_i^0]$, on a : $\sigma_{i3}^0 = \bar{a}_{i3i3} [u_i^0]$ avec $[u_i^0]$ le saut de déplacement. On définit C_N, C_T respectivement les rigidités normale et tangentielle de l'interface.

$$C_N = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\tilde{C}_{3333}}{e}, \quad C_T = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\tilde{C}_{1313}}{e} \quad (\text{C.13})$$

Où $\tilde{C}$ est le tenseur de rigidité effective, $\sigma = \tilde{C} : \varepsilon$. $\tilde{C}_{3333} = \tilde{C}_L$, $\tilde{C}_{1313} = \tilde{\mu}_L$ sont les modules dans la direction longitudinale.

C.1.2 Pour l'interphase-Modèle de Klarbring (1999)

Quand les limites (C.13) ne peuvent pas être réalisées, le modèle de Klarbring et *al.* [81,82] est utilisé comme une bonne solution pour la loi d'interphase. La rigidité de l'interphase s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} K^h &= \frac{1}{e^h} [3\tilde{k}\mathbb{J} + 2\tilde{\mu}\mathbb{K}] = \frac{1}{e^h} [3\tilde{k}\mathbb{J} + 2\tilde{\mu}(\mathbb{I} - \mathbb{J})] \\ &= \frac{1}{e^h} \left[2\tilde{\mu}\mathbb{I} + (3\tilde{k} - 2\tilde{\mu})\frac{1}{3}n \otimes n \right] = \frac{1}{e^h} \left[2\tilde{\mu}\mathbb{I} + (\tilde{k} - \frac{2}{3}\tilde{\mu})n \otimes n \right] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

On suppose que :

$$\tilde{\mu}^{int} = 2\tilde{\mu}; \tilde{k}^{int} = \tilde{k} \quad (\text{C.15})$$

(C.14) devient :

$$K^h = \frac{1}{e^h} \left[\tilde{\mu}^{int}\mathbb{I} + (\tilde{k}^{int} - \frac{1}{3}\tilde{\mu}^{int})n \otimes n \right] \quad (\text{C.16})$$

C.2 Modèles d'interface existants

Cas 1 : Traction uniaxiale

Dans ce cas, la contrainte macroscopique s'exprime dans la base cartésienne orthonormée (e_1, e_2, e_3) (cf. figure (2.4)-a) par :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{33}e_3 \otimes e_3 \quad (\text{C.17})$$

À l'interface brique/mortier, la continuité de la contrainte s'écrit :

$$\sigma_{j3}^b = \sigma_{j3}^m \text{ pour } j = 1, 2, 3 \quad (\text{C.18})$$

La continuité des déformations dans le plan (e_1, e_2) s'écrit :

$$\varepsilon_{kj}^b = \varepsilon_{kj}^m \text{ pour } (k, j) = (1, 1), (2, 2), (1, 2) \quad (\text{C.19})$$

Les relations (C.19) et (C.17) injectées dans (2.5) conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{11} &= \bar{\varepsilon}_{22} &= \bar{S}_{1133}^0 \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= \bar{S}_{3333}^0 \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\varepsilon}_{23} &= \bar{\varepsilon}_{13} &= \bar{\varepsilon}_{12} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

Dans la phase r (r =brique ou mortier), la contrainte locale s'écrit :

$$\sigma^r = \bar{\sigma}_{33}[e_3 \otimes e_3 + \alpha^r(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)] \quad (\text{C.21})$$

où les α^r sont des constantes déterminées par les conditions (C.18) et (C.19).

Rappelons que la contrainte globale est déterminée par :

$$\bar{\sigma} = \sum_{r=b,m} f^r \bar{\sigma}^r \quad (\text{C.22})$$

Les équations (C.21) et (C.22) impliquent la relation suivante :

$$f^m \alpha^m + f^b \alpha^b = 0 \quad (\text{C.23})$$

De plus, (2.4) et (C.21) donnent :

$$\varepsilon_{ij}^{b,m} = \mathbb{S}_{ijkl}^{b,m} : \sigma_{kl} = [\mathbb{S}_{ij33}^{b,m} + \alpha^{b,m}(\mathbb{S}_{ij11}^{b,m} + \mathbb{S}_{ij22}^{b,m})] \bar{\sigma}_{33} \quad (\text{C.24})$$

Si $(i, j) = (1, 1)$ avec la condition (C.19), on a :

$$\mathbb{S}_{ij33}^b + \alpha^b(\mathbb{S}_{ij11}^b + \mathbb{S}_{ij22}^b) = \mathbb{S}_{ij33}^m + \alpha^m(\mathbb{S}_{ij11}^m + \mathbb{S}_{ij22}^m) \quad (\text{C.25})$$

En remplaçant $\alpha^m = -f^b \alpha^b / f^m$ (voir (C.23)) dans (C.25), on obtient :

$$\alpha^m = \frac{f^m(\mathbb{S}_{1133}^m - \mathbb{S}_{1133}^b)}{f^m(\mathbb{S}_{1111}^b + \mathbb{S}_{1122}^b) + f^b(\mathbb{S}_{1111}^m + \mathbb{S}_{1122}^m)} \quad (\text{C.26})$$

En combinant (2.6) avec (C.20), on a :

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \bar{S}_{1133}^0 \bar{\sigma}_{33} = \sum_{i=b,m} f^r [\mathbb{S}_{1133}^r + \alpha^r(\mathbb{S}_{1111}^r + \mathbb{S}_{1122}^r)] \bar{\sigma}_{33} \quad (\text{C.27})$$

et :

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \bar{S}_{3333}^0 \bar{\sigma}_{33} = \sum_{i=b,m} f^r [\mathbb{S}_{3333}^r + \alpha^r(\mathbb{S}_{3311}^r + \mathbb{S}_{3322}^r)] \bar{\sigma}_{33} \quad (\text{C.28})$$

On obtient finalement :

$$\bar{S}_{1133}^0 = \sum_{i=b,m} f^r [\mathbb{S}_{1133}^r + \alpha^r(\mathbb{S}_{1111}^r + \mathbb{S}_{1122}^r)] \quad (\text{C.29})$$

$$\bar{S}_{3333}^0 = \sum_{i=b,m} f^r [\mathbb{S}_{3333}^r + \alpha^r(\mathbb{S}_{3311}^r + \mathbb{S}_{3322}^r)] \quad (\text{C.30})$$

Cas 2 : Chargement axisymétrique

Sous chargement axisymétrique (voir la figure (2.4)-b) :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{33}[e_3 \otimes e_3 - \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)] \quad (\text{C.31})$$

La relation entre la déformation et la contrainte à l'échelle macroscopique s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon}_{22} = \bar{S}_{11kl}^0 \bar{\sigma}_{kl} = [\bar{S}_{1133}^0 - \frac{1}{2}(\bar{S}_{1111}^0 + \bar{S}_{1122}^0)] \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\varepsilon}_{33} = \bar{S}_{33kl}^0 \bar{\sigma}_{kl} = [\bar{S}_{3333}^0 - \frac{1}{2}(\bar{S}_{3311}^0 + \bar{S}_{3322}^0)] \bar{\sigma}_{33} = (\bar{S}_{3333}^0 - \bar{S}_{1133}^0) \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\varepsilon}_{23} = \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{12} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

On note que $\bar{S}_{1133}^0 = \bar{S}_{3311}^0 = \bar{S}_{3322}^0$. Dans la phase r , la contrainte locale s'écrit :

$$\sigma^r = \bar{\sigma}_{33}[e_3 \otimes e_3 + \beta^r(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)] \quad (\text{C.33})$$

Où les β^r sont des scalaires qui doivent être déterminés. (C.22) dans ce cas devient :

$$\bar{\sigma} = \sum_{r=b,m} f^r \bar{\sigma}_{33} e_3 \otimes e_3 + \sum_{r=b,m} f^r \beta^r \bar{\sigma}_{33} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \quad (\text{C.34})$$

En combinant (C.30) avec (C.34), on a :

$$\sum_{r=b,m} f^r \beta^r = -\frac{1}{2} \quad (\text{C.35})$$

D'autre part, on a :

$$\varepsilon_{ij}^{b,m} = \mathbb{S}_{ijkl}^{b,m} : \sigma_{kl}^{b,m} = [\mathbb{S}_{ij33}^{b,m} + \beta^{b,m}(\mathbb{S}_{ij11}^{b,m} + \mathbb{S}_{ij22}^{b,m})] \bar{\sigma}_{33} \quad (\text{C.36})$$

La continuité des composantes (C.19) pour $(i, j) = (1, 1)$ donne $\varepsilon_{11}^b = \varepsilon_{11}^m$. En introduisant (C.35) dans cette relation, on obtient :

$$\beta^b = \frac{f^m(\mathbb{S}_{1133}^m - \mathbb{S}_{1133}^b) - \frac{1}{2}(\mathbb{S}_{1111}^m + \mathbb{S}_{1122}^m)}{f^m(\mathbb{S}_{1111}^b + \mathbb{S}_{1122}^b) + f^b(\mathbb{S}_{1111}^m + \mathbb{S}_{1122}^m)} \quad (\text{C.37})$$

Retournons à la relation (2.6) :

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \sum_{i=b,m} f^r \varepsilon_{11}^r = \sum_{r=b,m} f^r [\mathbb{S}_{1133}^r + \beta^r(\mathbb{S}_{1111}^r + \mathbb{S}_{1122}^r)] \bar{\sigma}_{33} \quad (\text{C.38})$$

et la relation (C.32), on obtient finalement :

$$\bar{S}_{1111}^0 + \bar{S}_{1122}^0 = 2\bar{S}_{1133}^0 - 2 \sum_{r=b,m} f^r [\mathbb{S}_{1133}^r + \beta^r(\mathbb{S}_{1111}^r + \mathbb{S}_{1122}^r)] \quad (\text{C.39})$$

Cas 3 : Chargement mixte

Maintenant on considère un chargement mixte (voir la figure (2.4)-c) où la contrainte macroscopique s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{12}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) \quad (\text{C.40})$$

On suppose que $\sigma^r = \gamma^r \bar{\sigma}$, avec la relation (C.22), on trouve facilement :

$$\sum_{r=b,m} f^r \gamma^r = 1 \quad (\text{C.41})$$

Les équations (2.4) et (C.40) donnent :

$$\varepsilon_{ij}^{b,m} = \mathbb{S}_{ijkl}^{b,m} : \sigma_{kl}^{b,m} = \gamma^r \left[(\mathbb{S}_{ij12}^{b,m} + \mathbb{S}_{ij21}^{b,m}) \bar{\sigma}_{12} + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})(\mathbb{S}_{ij11}^{b,m} + \mathbb{S}_{ij22}^{b,m}) \right] \quad (\text{C.42})$$

A partir de (C.41), (C.42) et (C.19) avec $(i, j) = (1, 1)$, on a :

$$\gamma^b(\mathbb{S}_{1111}^b - \mathbb{S}_{1122}^b) = \gamma^m(\mathbb{S}_{1111}^m - \mathbb{S}_{1122}^m) \quad (\text{C.43})$$

alors, γ^b s'écrit :

$$\gamma^b = \frac{\mathbb{S}_{1111}^m - \mathbb{S}_{1122}^m}{f^m(\mathbb{S}_{1111}^b - \mathbb{S}_{1122}^b) + f^b(\mathbb{S}_{1111}^m - \mathbb{S}_{1122}^m)} \quad (\text{C.44})$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \sum_{i=b,m} f^r \varepsilon_{11}^r = \sum_{r=b,m} f^r \gamma^r \left[(\mathbb{S}_{1112}^r + \mathbb{S}_{1121}^r) \bar{\sigma}_{12} + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})(\mathbb{S}_{1111}^r - \mathbb{S}_{1122}^r) \right] \\ &= \bar{\mathbb{S}}_{11kl}^0 \bar{\sigma}_{kl} = (\bar{\mathbb{S}}_{1112}^0 + \bar{\mathbb{S}}_{1121}^0) \bar{\sigma}_{12} + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})(\bar{\mathbb{S}}_{1111}^0 - \bar{\mathbb{S}}_{1122}^0) \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

alors :

$$\bar{\mathbb{S}}_{1111}^0 - \bar{\mathbb{S}}_{1122}^0 = \sum_{r=b,m} f^r \gamma^r (\mathbb{S}_{1111}^r - \mathbb{S}_{1122}^r) \quad (\text{C.46})$$

De même façon pour le cas $(i, j) = (2, 2)$, on a :

$$\bar{\mathbb{S}}_{1122}^0 - \bar{\mathbb{S}}_{2222}^0 = \sum_{r=b,m} f^r \gamma^r (\mathbb{S}_{2211}^r - \mathbb{S}_{2222}^r) \quad (\text{C.47})$$

Cas 4 : Chargement de cisaillement longitudinal

Dans ce cas (voir la figure (2.4)-d), la contrainte macroscopique s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{13}(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) + \bar{\sigma}_{23}(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) \quad (\text{C.48})$$

On suppose que la contrainte dans chaque phase est $\sigma^r = \delta^r \bar{\sigma}$. La moyenne des contraintes s'écrit : $\bar{\sigma} = \sum_{r=b,m} f^r \sigma^r = \sum_{r=b,m} f^r \delta^r \bar{\sigma}$. On a alors : $\sum_{r=b,m} f^r \delta^r = 1$. En combinant cette équation avec la condition de continuité de la contrainte (voir (C.18)) :

$$\sigma_{13}^m = \delta^m \bar{\sigma}_{13} \text{ et } \sigma_{13}^b = \delta^b \bar{\sigma}_{13} \quad (\text{C.49})$$

on obtient : $\delta^m = \delta^b = 1$. En reportant cette équation dans les relations (2.4) et (C.48), on a :

$$\bar{\varepsilon}_{13} = \sum_{r=b,m} f^r [(\mathbb{S}_{1313}^r + \mathbb{S}_{1331}^r) \bar{\sigma}_{13} + (\mathbb{S}_{1323}^r + \mathbb{S}_{1332}^r) \bar{\sigma}_{23}] \quad (\text{C.50})$$

$$= (\bar{\mathbb{S}}_{1313}^0 + \bar{\mathbb{S}}_{1331}^0) \bar{\sigma}_{13} + (\bar{\mathbb{S}}_{1323}^0 + \bar{\mathbb{S}}_{1332}^0) \bar{\sigma}_{123} \quad (\text{C.51})$$

Ceci conduit à la relation :

$$\bar{\mathbb{S}}_{1313}^0 = \sum_{r=b,m} f^r \mathbb{S}_{1313}^r \quad (\text{C.52})$$

Les 5 équations (C.29), (C.30), (C.39), (C.46) et (C.52) permettent de déterminer les 5 composantes indépendantes $\bar{\mathbb{S}}_{1111}^0$, $\bar{\mathbb{S}}_{1122}^0$, $\bar{\mathbb{S}}_{1133}^0$, $\bar{\mathbb{S}}_{3333}^0$, $\bar{\mathbb{S}}_{1313}^0$ du tenseur de souplesse (voir l'équation (2.1)). Alors, un premier matériau homogène équivalent MHE.1 est obtenu. On

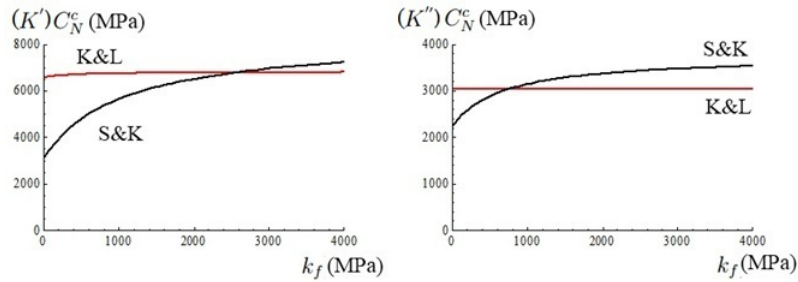
note que dans cette étape, les briques et le mortier sont supposés isotropes sains et :

$$\bar{\mathbb{S}}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_1^0} & \frac{-\bar{\nu}_{12}^0}{\bar{E}_1^0} & \frac{-\bar{\nu}_{13}^0}{\bar{E}_1^0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\bar{\nu}_{12}^0}{\bar{E}_1^0} & \frac{1}{\bar{E}_1^0} & \frac{-\bar{\nu}_{13}^0}{\bar{E}_1^0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\bar{\nu}_{13}^0}{\bar{E}_1^0} & \frac{-\bar{\nu}_{13}^0}{\bar{E}_1^0} & \frac{1}{\bar{E}_3^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}_{13}^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}_{13}^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}_{12}^0} \end{pmatrix} \quad (\text{C.53})$$

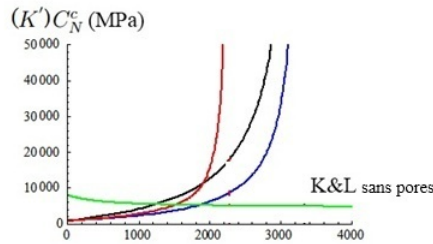
Annexe D

Choix des modèles d'interaction

Dans le cas d'interface sèche, la figure (2.8) montre que les estimations du modèle de Mori-Tanaka de C_N et C_T tendent vers l'infini pour des valeurs de d_c très faibles (inférieures à 1%). Dans le cas d'interface saturée, les figures (2.13) et (2.14) montrent aussi que pour le cas sain ($d_c = 0$), l'estimation de $K\&L$ donne des valeurs finies alors que celles d'autres modèles montrent des valeurs infinies. Ceci présente la limitation des modèles de Thomsen, $B\&K$, $S\&K$ pour une densité d_c faible. On propose donc d'utiliser le modèle de $K\&L$ pour $d_c \leq 1\%$. Le modèle $S\&K$ est acceptable au-delà de $d_c = 1\%$. De plus, ces estimations semblent plus rigoureuses comme elles tendent vers 0 pour des fortes valeurs de d_c . On peut faire la même remarque pour les évolutions de C_N et C_T en fonction de ϕ_p (voir la figure (2.13)). Pour discuter de la limitation des modèles quand le module de compression du fluide k_f varie, on considère le cas de fissures aléatoires sans pores (figure (D.1)-a) et le cas de fissures parallèles sans pores selon l'estimation de $K\&L$, montré sur la figure (D.1)-b (voir aussi la figure (2.10)). On observe que quand la compressibilité est supérieure à 3500



(a) Fissures aléatoires saturées sans pores



(b) Fissures parallèles

FIGURE D.1 – Comparaison des évolutions de raideur C_N (ou K' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de k_f ($d_c = 0, 1$, $\phi_p = 0,05$ MPa, table (2.1)).

MPa avec fissures parallèles saturées, seul le modèle de $K\&L$ est valable. Par conséquent, nous proposons ici une limitation des modèles d'interaction, comme montré sur la table (D.1).

Distribution aléatoire des fissures							
Etat	$d_c < 0,1$	$d_c > 0,1$	$\varphi_p < 0,7$	$\varphi_p > 0,7$	$k_f < 2500$	$k_f < 3500$	$k_f > 3500$
Sec	$K\&L$	MT	$MT + K\&L$	$MT + K\&L$	non	non	non
Saturé	$K\&L$	$S\&K$ $+K\&L$	$S\&K$	$S\&K + K\&L$	$S\&K + K\&L$	$S\&K$ $+K\&L$	$S\&K$ $+K\&L$
Distribution parallèle des fissures							
Etat	$d_c < 0,1$	$d_c > 0,1$	$\varphi_p < 0,7$	$\varphi_p > 0,7$	$k_f < 2500$	$k_f < 3500$	$k_f > 3500$
Sec	$K\&L$	MT	$MT + K\&L$	$MT + K\&L$	non	non	non
Saturé	$K\&L$	$K\&L + S\&K$ $+Thomsen$ $+B\&K$	$K\&L + S\&K$	$K\&L$	$K\&L + S\&K$ $+Thomsen$ $+B\&K$	$S\&K$ $+K\&L$	$K\&L$

TABLE D.1 – Limitation des modèles d'interaction.

Annexe E

Modèles rhéologiques

E.1 Calcul des modules apparents de compressibilité et de cisaillement

Pour un comportement v.l.n.v. 3D isotrope, on définit les rigidités élastiques $\mathbb{C}_\alpha^e$ et visqueuses $\mathbb{C}_\alpha^\nu$ sous la forme :

$$\mathbb{C}_\alpha^e = 3k_\alpha^e \mathbb{J} + 2\mu_\alpha^e \mathbb{K}, \quad \mathbb{C}_\alpha^\nu = \eta_\alpha^s \mathbb{J} + \eta_\alpha^d \mathbb{K} \quad (\text{E.1})$$

Les tenseurs de souplesse associés sont :

$$\mathbb{S}_\alpha^e = \frac{1}{3k_\alpha^e} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_\alpha^e} \mathbb{K}, \quad \mathbb{S}_\alpha^\nu = \frac{1}{\eta_\alpha^s} \mathbb{J} + \frac{1}{\eta_\alpha^d} \mathbb{K} \quad (\text{E.2})$$

où k_α^e et μ_α^e sont les modules de compressibilité et de cisaillement de la partie élastique (ressort) et η_α^s et η_α^d sont les viscosités des parties sphérique et déviatorique de l'amortisseur. $\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre quatre ($\mathbb{I} = \mathbb{J} + \mathbb{K}$).

E.1.1 Modèle de Maxwell

La loi de comportement non linéaire (3D) du matériau de type modèle de Maxwell s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \mathbb{S}_M^e \dot{\sigma} + \mathbb{S}_M^\nu \sigma \quad (\text{E.3})$$

Dans l'espace symbolique de LC, elle est linéaire et s'écrit :

$$p\varepsilon^* = p\mathbb{S}_M^e \sigma^* + \mathbb{S}_M^\nu \sigma^* = \sigma^* (p\mathbb{S}_M^e + \mathbb{S}_M^\nu) \quad (\text{E.4})$$

Le tenseur de souplesse symbolique est alors :

$$\mathbb{S}^* = \mathbb{S}_M^e + \frac{\mathbb{S}_M^\nu}{p} \quad (\text{E.5})$$

Comme chacune des composantes du modèle (ressort et amortisseur) est supposée avoir un comportement isotrope, alors (E.5) se réécrit :

$$\mathbb{S}^* = \frac{1}{3k^*} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu^*} \mathbb{K} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^s/3} \right) \mathbb{J} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^d/2} \right) \mathbb{K} \quad (\text{E.6})$$

Ceci permet de déduire les modules de compressibilité k^* et de cisaillement μ^* symboliques du modèle de Maxwell :

$$\frac{1}{k_M^*} = \frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^s/3}, \quad \frac{1}{\mu_M^*} = \frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^d/2} \quad (\text{E.7})$$

Pour un problème de fluage, $\sigma = \sigma_0 = \text{constante}$, $\dot{\sigma} = 0$, (E.3) devient :

$$\dot{\varepsilon} = \mathbb{S}_M^\nu \sigma \quad (\text{E.8})$$

Avec la condition aux limites : $\varepsilon|_{t=0} = \sigma_0 \mathbb{S}_M^e$, la déformation est :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 (\mathbb{S}_M^e + \mathbb{S}_M^\nu t) \quad (\text{E.9})$$

E.1.2 Modèle de Kelvin-Voigt

La contrainte totale est reliée à la déformation comme suit :

$$\sigma = \mathbb{C}_K^e \varepsilon + \mathbb{C}_K^\nu \dot{\varepsilon} \quad (\text{E.10})$$

Dans l'espace de LC :

$$\sigma^* = (\mathbb{C}_K^e + p\mathbb{C}_K^\nu) \varepsilon^* = \mathbb{C}^* \varepsilon^* \quad (\text{E.11})$$

Sachant que $\mathbb{C}_K^e = 3k_K^e \mathbb{J} + 2\mu_K^e \mathbb{K}$, $\mathbb{C}_K^\nu = \eta_K^s \mathbb{J} + \eta_K^d \mathbb{K}$ et que $\mathbb{C}^* = 3k^* \mathbb{J} + 2\mu^* \mathbb{K}$, alors :

$$k_K^* = k_K^e + \frac{p\eta_K^s}{3}, \quad \mu_K^* = \mu_K^e + \frac{p\eta_K^d}{2} \quad (\text{E.12})$$

Pour un problème de fluage uniaxial, $\sigma = \sigma_0 = \text{constante}$, (E.10) devient :

$$\sigma_0 = \mathbb{C}_K^e \varepsilon + \mathbb{C}_K^\nu \dot{\varepsilon} \quad (\text{E.13})$$

En prenant la condition aux limites : $\varepsilon|_{t=0} = 0$, on a la déformation :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \mathbb{S}_K^e \left(1 - e^{-t \cdot \mathbb{T}_K^{-1}} \right) \quad (\text{E.14})$$

avec $\mathbb{T}_K = \mathbb{C}_K^\nu \mathbb{S}_K^e$.

E.1.3 Modèle de Burgers

Parce que la déformation totale est la contribution de la partie de Maxwell et celle de la partie de Kelvin-Voigt et que ces deux parties sont disposées en série pour ce modèle, alors on peut déduire k_{Bu}^* et μ_{Bu}^* comme suit :

$$\frac{1}{k_{Bu}^*} = \frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{k_K^e}, \quad \frac{1}{\mu_{Bu}^*} = \frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{\mu_K^e} \quad (\text{E.15})$$

ou encore :

$$\frac{1}{k_{Bu}^*} = \frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^s/3} + \frac{1}{k_K^e + p\eta_K^s/3}, \quad \frac{1}{\mu_{Bu}^*} = \frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^d/2} + \frac{1}{\mu_K^e + p\eta_K^d/2} \quad (\text{E.16})$$

En combinant (E.9) et (E.14) avec (E.15), on obtient la déformation totale suivante pour un problème de fluage :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\mathbb{S}_M^e + \mathbb{S}_M^\nu t + \mathbb{S}_K^e \left(1 - e^{-t \cdot \mathbb{T}_K^{-1}} \right) \right] \quad (\text{E.17})$$

E.1.4 Modèle de Maxwell modifié (MM)

Parce que la déformation totale est la contribution de la partie de Maxwell et celle d'un ressort disposé en parallèle avec la composante de Maxwell, alors il est possible de déduire k_{MM}^* et μ_{MM}^* sous la forme :

$$k_{MM}^*(p) = k_M^e + k_R^e, \quad \mu_{MM}^*(p) = \mu_M^e + \mu_R^e \quad (\text{E.18})$$

ou encore :

$$k_{MM}^*(p) = \frac{1}{\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^s/3}} + k_R^e, \quad \mu_{MM}^*(p) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{p\eta_M^d/2}} + \mu_R^e \quad (\text{E.19})$$

La loi de comportement du matériau correspondant au modèle de MM :

$$\mathbb{S}_M^v \sigma + \mathbb{S}_M^e \dot{\sigma} = \mathbb{S}_M^v \mathbb{C}_R^e \varepsilon + (\mathbb{I} + \mathbb{S}_M^e \mathbb{C}_R^e) \dot{\varepsilon} \quad (\text{E.20})$$

Où $\mathbb{C}_R^e$ est la rigidité du ressort additionnel. Pour un problème de fluage, $\sigma = \sigma_0 = \text{constante}$, $\dot{\sigma} = 0$, (E.20) devient :

$$\mathbb{S}_M^v \sigma = \mathbb{S}_M^v \mathbb{C}_R^e \varepsilon + (\mathbb{I} + \mathbb{S}_M^e \mathbb{C}_R^e) \dot{\varepsilon} \quad (\text{E.21})$$

En prenant la condition aux limites : $\varepsilon|_{t=0} = \sigma_0 (\mathbb{C}_M^e + \mathbb{C}_R^e)^{-1}$, on a la déformation :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\mathbb{S}_M^e - (\mathbb{C}_M^e + \mathbb{C}_R^e)^{-1} e^{-t \cdot \mathbb{T}_{MM}^{-1}} \right] \quad (\text{E.22})$$

avec $\mathbb{T}_{MM} = \mathbb{C}_M^v (\mathbb{C}_R^e + \mathbb{C}_M^e) \mathbb{S}_M^e \mathbb{S}_R^e$.

E.2 Comportement effectif approché : distribution isotrope des fissures

E.2.1 Modèle de Burgers

On rappelle que ce modèle est l'association en série des modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt. La loi de comportement de ce modèle s'écrit :

$$(\mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^v) \sigma + (\mathbb{I} + \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^e + \mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^v) \dot{\sigma} + (\mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^e) \ddot{\sigma} = \mathbb{C}_K^e \dot{\varepsilon} + \mathbb{C}_K^v \ddot{\varepsilon} \quad (\text{E.23})$$

On rappelle que $\mathbb{C}_K^e$ et $\mathbb{C}_K^v$ sont respectivement les tenseurs de rigidité élastique et visqueuse associés respectivement au ressort et à l'amortisseur pour le modèle de Kelvin-Voigt. $\mathbb{S}_M^e$ et $\mathbb{S}_M^v$ sont respectivement les tenseurs de souplesse élastique et visqueuse associés au ressort et à l'amortisseur pour le modèle de Maxwell. Le tenseur de souplesse dans l'espace de LC satisfait la relation :

$$\tilde{\mathbb{S}}_{Bu}^* = \mathbb{S}_M^e(d_c) + \frac{1}{p} \mathbb{S}_M^v(d_c) + [\mathbb{S}_K^e(d_c)^{-1} + p \mathbb{S}_K^v(d_c)^{-1}]^{-1} \quad (\text{E.24})$$

Module de compressibilité approché :

Pour le module de compressibilité apparent (3.85), cela revient à l'approcher par la fonction

suivante qui correspond à la compressibilité effective apparente d'un matériau homogénéisé du type "Burgers" soit :

$$\frac{1}{\tilde{k}_{Bu}^*(p, d_c)} = \frac{1}{k_M^e(d_c)} + \frac{1}{p\eta_M^s(d_c)/3} + \frac{1}{k_K^e(d_c) + p\eta_K^s(d_c)/3} \quad (\text{E.25})$$

où l'ensemble des paramètres de viscosité du matériau endommagé $k_M^e(d_c)$, $k_K^e(d_c)$, $\eta_M^s(d_c)$, $\eta_K^s(d_c)$ sont à déterminer de sorte que les développements en série de Taylor au second ordre près en p (en $1/p$) des estimations apparentes (3.85) et de celle approchée du type "Burgers" (E.25) coïncident au voisinage de $p = 0$ ($p = \infty$). Pour l'identification de ces paramètres, il est aussi utile de se servir des relations (3.14) pour toute fonction $f(t)$ dont la fonction symbolique est $f^*(p)$. Rappelons que $Q^* = \frac{16}{9} \frac{1 - \nu_s^{*2}}{1 - 2\nu_s^*}$ et que $\nu_s^* = \frac{3k_s^* - 2\mu_s^*}{6k_s^* + 2\mu_s^*}$ (voir (3.22)). Au voisinage de $p = 0$, le développement en série à l'ordre 2 de Q^* donne :

$$Q^* = Q_0^0 + Q_1^0 p + O(p^2) \quad (\text{E.26})$$

avec

$$Q_0^0 = \frac{16}{9} \frac{\eta_M^s(\eta_M^s + 2\eta_M^d)}{\eta_M^d(2\eta_M^s + \eta_M^d)} \quad (\text{E.27})$$

et

$$Q_1^0 = \frac{16}{27} \eta_M^s \frac{\eta_M^s{}^2 + \eta_M^d \eta_M^s + \eta_M^d{}^2}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left(3 \left(\frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{\mu_K^e} \right) - 2 \frac{\eta_M^s}{\eta_M^d} \left(\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{k_K^e} \right) \right) \quad (\text{E.28})$$

L'estimation apparente $\frac{1}{\tilde{k}_{d_c}^*}$ (cf. (3.85)) du module de compressibilité devient alors au voisinage de $p = 0$:

$$\frac{1}{\tilde{k}_{d_c}^*} = \left(3 \frac{d_c Q_1^0}{\eta_M^s} + (1 + d_c Q_0^0) \left(\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{k_K^e} \right) \right) + 3 \frac{1 + d_c Q_0^0}{\eta_M^s} \frac{1}{p} + O(p) \quad (\text{E.29})$$

et au voisinage de $p = \infty$:

$$\frac{1}{\tilde{k}_{d_c}^*} = \frac{1 + d_c Q_0^\infty}{k_M^e} + \frac{1}{p} \left(3(1 + d_c Q_0^\infty) \left(\frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) + \frac{d_c Q_{-1}^\infty}{k_M^e} \right) + O(1/p^2) \quad (\text{E.30})$$

Sachant que :

$$Q^* = Q_0^\infty + \frac{Q_{-1}^\infty}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (\text{E.31})$$

avec

$$Q_0^\infty = \frac{4}{3} \frac{k_M^e(3k_M^e + 4\mu_M^e)}{\mu_M^e(3k_M^e + \mu_M^e)} \quad (\text{E.32})$$

et

$$Q_{-1}^\infty = -\frac{4}{3} \frac{k_M^e}{\mu_M^e} \frac{9k_M^e{}^2 + 6\mu_M^e k_M^e + 4\mu_M^e{}^2}{(3k_M^e + \mu_M^e)^2} \left[3k_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 2\mu_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right] \quad (\text{E.33})$$

D'autre part, le développement en série au second ordre en p de l'approximation (cf. (E.25)) de $\frac{1}{\tilde{k}_{Bu}^*(p, d_c)}$ s'écrit :

$$\text{au voisinage de } p = 0 : \quad \frac{1}{\tilde{k}_{Bu}^*(p, d_c)} = \left(\frac{1}{k_M^e(d_c)} + \frac{1}{k_K^e(d_c)} \right) + \frac{3}{p\eta_M^s(d_c)} \frac{1}{p} + O(p) \quad (\text{E.34})$$

Son développement en série au second ordre en $1/p$ donne :

$$\text{au voisinage de } p = \infty : \quad \frac{1}{\tilde{k}_{Bu}^*(p, d_c)} = \frac{1}{k_M^e(d_c)} + \frac{3}{p} \left(\frac{1}{\eta_M^s(d_c)} + \frac{1}{\eta_K^s(d_c)} \right) + O(1/p^2) \quad (\text{E.35})$$

L'égalité entre les équations (E.29) et (E.34) au voisinage de $p = 0$ et puis entre (E.30) et (E.30) au voisinage de $p = \infty$ permet d'identifier les 4 paramètres suivants pour le module de compressibilité effectif apparent (3.85) du matériau viscoélastique endommagé :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_M^e(d_c)} &= \frac{1 + Q_M^e d_c}{k_M^e} ; \quad \frac{1}{k_K^e(d_c)} = \frac{1 + Q_K^e d_c}{k_K^e} \\ \frac{1}{\eta_M^s(d_c)} &= \frac{1 + Q_M^v d_c}{\eta_M^s} ; \quad \frac{1}{\eta_K^s(d_c)} = \frac{1 + Q_K^v d_c}{\eta_K^s} \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

avec

$$\begin{aligned} Q_M^e &= Q_0^\infty ; Q_M^v = Q_0^0 \\ Q_K^e &= Q_0^0 + \frac{3k_K^e}{\eta_M^s} Q_1^0 - \frac{k_K^e}{k_M^e} (Q_0^\infty - Q_0^0) \\ Q_K^v &= Q_0^\infty + \frac{\eta_K^s}{3k_M^e} Q_{-1}^\infty - \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} (Q_0^0 - Q_0^\infty) \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

Module de cisaillement approché :

Une démarche similaire à celle montrée dans le paragraphe précédent peut être menée pour approcher le module de cisaillement effectif apparent $\tilde{\mu}_{d_c}^*$ (estimation (3.87)) d'un matériau viscoélastique endommagé par celui qui découle de l'homogénéisation d'un matériau viscoélastique du type Burger, i.e. de la forme :

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_{Bu}^*(p, d_c)} = \frac{1}{\mu_M^e(d_c)} + \frac{2}{p\eta_M^d(d_c)} + \frac{1}{\mu_K^e(d_c) + p\eta_K^d(d_c)/2} \quad (\text{E.38})$$

Les développements en série de $\frac{1}{\tilde{\mu}_{d_c}^*}$ dans (E.38) et de $\frac{1}{\tilde{\mu}_{Bu}^*(p, d_c)}$ dans (3.87) au voisinage de 0 et l'infini conduisent à l'identification des 4 paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_M^e(d_c)} &= \frac{1 + M_M^e d_c}{\mu_M^e} ; \quad \frac{1}{\mu_K^e(d_c)} = \frac{1 + M_K^e d_c}{\mu_K^e} \\ \frac{1}{\eta_M^d(d_c)} &= \frac{1 + M_M^v d_c}{\eta_M^d} ; \quad \frac{1}{\eta_K^d(d_c)} = \frac{1 + M_K^v d_c}{\eta_K^d} \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

où

$$\begin{aligned} M_M^e &= M_0^\infty = \frac{16}{45} \frac{(9k_M^e + 4\mu_M^e)(3k_M^e + 4\mu_M^e)}{(3k_M^e + \mu_M^e)(3k_M^e + 2\mu_M^e)} ; \\ M_M^v &= M_0^0 = \frac{32}{45} \frac{(\eta_M^s + 2\eta_M^d)(3\eta_M^s + 2\eta_M^d)}{(\eta_M^s + \eta_M^d)(2\eta_M^s + \eta_M^d)} ; \\ M_K^e &= M_0^0 + \frac{2\mu_K^e}{\eta_M^d} M_1^0 - \frac{\mu_K^e}{\mu_M^e} (M_0^\infty - M_0^0) ; \\ M_K^v &= M_0^\infty + \frac{\eta_K^d}{2\mu_M^e} M_{-1}^\infty - \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} (M_0^0 - M_0^\infty) \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

avec

$$\begin{aligned}
 M_1^0 &= \frac{32}{45} \frac{\eta_M^s \eta_M^d}{(\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \frac{(7\eta_M^s{}^2 + 10\eta_M^s \eta_M^d + 4\eta_M^d{}^2)}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left[\frac{\eta_M^s}{3} \left(\frac{1}{k_M^e} + \frac{1}{k_K} \right) - \frac{\eta_M^d}{2} \left(\frac{1}{\mu_M^e} + \frac{1}{\mu_K^e} \right) \right] \\
 M_{-1}^\infty &= \frac{16}{15} \frac{k_M^e \mu_M^e}{(3k_M^e + \mu_M^e)^2} \frac{(63k_M^e{}^2 + 60\mu_M^e k_M^e + 16\mu_M^e{}^2)}{(3k_M^e + 2\mu_M^e)^2} \cdot \left[3k_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 2\mu_M^e \left(\frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{E.41}$$

E.2.2 Modèle de Maxwell modifié

On rappelle que la loi de comportement de ce modèle est donnée par dans l'équation (E.20). Si le comportement effectif était rigoureusement de type MM, le tenseur d'élasticité dans l'espace de LC s'écrivait :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{MM}^* = \mathbb{C}_R^e(d_c) + \left[\mathbb{S}_M^e(d_c) + \frac{1}{p} \mathbb{S}_M^\nu(d_c) \right]^{-1} \tag{E.42}$$

De la même façon qu'indiqué plus tôt dans la section (E.2.1) pour le modèle de Burgers, le développement en série de $\tilde{\mathbb{C}}_{MM}^*$ au second ordre au voisinage de 0 en p et de l'infini en $1/p$ permet d'identifier les 6 paramètres d'élasticité et de viscosité de ce modèle. Au voisinage de $p = 0$, (E.42) s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{MM}^* = \mathbb{C}_R^e(d_c) + p \mathbb{C}_M^\nu(d_c) + O(p^2) \tag{E.43}$$

Au voisinage de $p = \infty$, (E.42) s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{MM}^* = \mathbb{C}_R^e(d_c) + \mathbb{C}_M^e(d_c) + O(1/p) \tag{E.44}$$

Si on a la relation :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{MM}^* = \frac{\mathbb{C}_s^*}{1 + d_c N^*} \tag{E.45}$$

où $\mathbb{C}_s^* = 3k_s^{e*} \mathbb{J} + 2\mu_s^{e*} \mathbb{K}$ à l'état sain. N^* est un paramètre qui dépend du type de chargement et de la distribution des fissures.

$$\text{Au voisinage de } p = 0, \quad N^* = N_0^0 + p N_1^0 + O(p^2) \tag{E.46}$$

$$\text{Au voisinage de } p = \infty, \quad N^* = N_0^\infty + O(1/p) \tag{E.47}$$

D'autre part, (E.45) s'écrit au voisinage de $p = 0$:

$$\tilde{\mathbb{C}}_{MM}^* = \frac{\mathbb{C}_R^e}{1 + N_0^0 d_c} + \frac{p}{1 + N_0^0 d_c} \left(\mathbb{C}_M^\nu - \frac{\mathbb{C}_R^e N_1^0 d_c}{1 + N_0^0 d_c} \right) + O(p^2) \tag{E.48}$$

et au voisinage de $p = \infty$:

$$\tilde{\mathbb{C}}_{MM}^* = \frac{\mathbb{C}_R^e + \mathbb{C}_M^e}{1 + N_0^\infty d_c} + O(1/p) \tag{E.49}$$

L'égalité entre les équations (E.43) et (E.48) au voisinage de $p = 0$ et puis entre (E.44) et (E.49) au voisinage de $p = \infty$ permet d'identifier les 3 paramètres suivants :

$$\begin{cases} \mathbb{C}_R^e(d_c) = \frac{\mathbb{C}_R^e}{1 + N_0^0 d_c} \\ \mathbb{C}_M^v(d_c) = \frac{\mathbb{C}_M^v}{1 + N_0^0 d_c} \left(1 - \frac{N_1^0 d_c}{1 + N_0^0 d_c} \frac{\mathbb{C}_R^e}{\mathbb{C}_M^v} \right) \\ \mathbb{C}_M^e(d_c) = \frac{\mathbb{C}_R^e + \mathbb{C}_M^e}{1 + N_0^\infty d_c} - \frac{\mathbb{C}_R^e}{1 + N_0^0 d_c} \end{cases} \quad (\text{E.50})$$

- Chargement sphérique : identification du module de compressibilité approché :

On remplace N^* dans (E.45) par $Q^* = \frac{16}{9} \frac{1 - \nu_s^{*2}}{1 - 2\nu_s^*}$ (voir (3.85)) et on suppose que (voir (E.19)) :

$$\tilde{k}_{MM}^*(p, d_c) = k_R^e(d_c) + \left[\frac{1}{k_M^e(d_c)} + \frac{1}{p\eta_M^s(d_c)/3} \right]^{-1} \quad (\text{E.51})$$

Le développement en série de Q^* au voisinage de $p = 0$ (voir (E.26) et (3.85)) donne :

$$Q_M^v = Q_0^0 = \frac{4}{3} \frac{k_R^e(3k_R^e + 4\mu_R^e)}{\mu_R^e(3k_R^e + \mu_R^e)} \quad (\text{E.52})$$

$$Q_1^0 = \frac{2}{9} \frac{(9k_R^{e2} + 6k_R^e\mu_R^e + 4\mu_R^{e2})(-3k_R^e\eta_M^d + 2\mu_R^e\eta_M^s)}{\mu_R^{e2}(3k_R^e + \mu_R^e)^2} \quad (\text{E.53})$$

Au le voisinage de $p = \infty$:

$$Q_M^e = Q_0^\infty = \frac{4}{3} \frac{(k_R^e + k_M^e)[3(k_R^e + k_M^e) + 4(\mu_R^e + \mu_M^e)]}{(\mu_R^e + \mu_M^e)[3(k_R^e + k_M^e) + (\mu_R^e + \mu_M^e)]} \quad (\text{E.54})$$

Avec (E.50), on identifie les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_R^e(d_c)} &= \frac{1 + Q_M^v d_c}{k_R^e}, & \frac{1}{k_M^e(d_c)} &= \frac{1 + Q_M^e d_c}{k_R^e + k_M^e - \frac{k_R^e(1 + Q_M^e d_c)}{1 + Q_M^v d_c}} \\ \frac{1}{\eta_M^s(d_c)} &= \frac{(1 + Q_M^v d_c)^2}{\eta_M^s(1 + Q_M^v d_c) - 3d_c k_R^e Q_1^0} \end{aligned} \quad (\text{E.55})$$

- Chargement déviatorique : identification du module de cisaillement approché :

Pour trouver les paramètres effectifs déviatoriques $\mu_R^e(d_c)$, $\mu_M^e(d_c)$, $\eta_M^d(d_c)$, on suppose que (cf. (E.19)) :

$$\tilde{\mu}_{MM}^*(p, d_c) = \mu_R^e(d_c) + \left[\frac{1}{\mu_M^e(d_c)} + \frac{1}{p\eta_M^d(d_c)/2} \right]^{-1} \quad (\text{E.56})$$

De plus, en remplaçant N^* dans (E.45) par M^* (cf. (3.87)), on identifie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_R^e(d_c)} &= \frac{1 + M_M^v d_c}{\mu_R^e}, & \frac{1}{\mu_M^e(d_c)} &= \frac{1 + M_M^e d_c}{\mu_R^e + \mu_M^e - \frac{\mu_R^e(1 + M_M^e d_c)}{1 + M_M^v d_c}} \\ \frac{1}{\eta_M^d(d_c)} &= \frac{(1 + M_M^v d_c)^2}{\eta_M^d(1 + M_M^v d_c) - 2d_c \mu_R^e M_1^0} \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

avec

$$\begin{aligned}
 M_M^e &= M_0^\infty = \frac{16}{45} \left(\frac{3(k_R^e + k_M^e) + 4(\mu_R^e + \mu_M^e)}{3(k_R^e + k_M^e) + (\mu_R^e + \mu_M^e)} \right) \left(\frac{9(k_R^e + k_M^e) + 4(\mu_R^e + \mu_M^e)}{3(k_R^e + k_M^e) + 2(\mu_R^e + \mu_M^e)} \right) \\
 M_M^v &= M_0^0 = \frac{16}{45} \frac{(3k_R^e + 4\mu_R^e)(9k_R^e + 4\mu_R^e)}{9k_R^{e^2} + 9k_R^e\mu_R^e + 2\mu_R^{e^2}} \\
 M_1^0 &= \frac{8}{45} \frac{(63k_R^{e^2} + 60k_R^e\mu_R^e + 16\mu_R^{e^2})(3k_R^e\eta_M^d - 2\mu_R^e\eta_M^s)}{(9k_R^{e^2} + 9k_R^e\mu_R^e + 2\mu_R^{e^2})}
 \end{aligned} \tag{E.58}$$

E.3 Autres modèles rhéologiques

E.3.1 Modèle de Maxwell généralisé (MG)

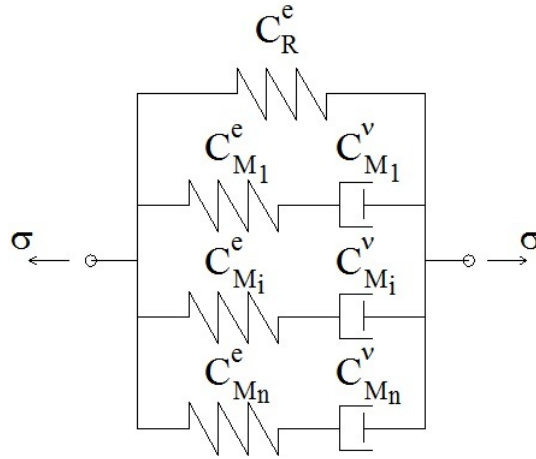


FIGURE E.1 – Modèle de MG.

Le modèle de Maxwell généralisé est constitué de n modèles de Maxwell assemblés en parallèle (figure E.1). La fonction de relaxation de ce modèle est fournie dans la littérature [102] et est appliquée à des structures maçonnées [103]. La loi de comportement du matériau correspondant à ce modèle s'écrit :

$$\dot{\epsilon} = \sum_{i=1}^n \dot{\epsilon}_i = \mathbb{S}_R^e \dot{\sigma} + \sum_{i=1}^n (\mathbb{S}_{M_i}^e \dot{\sigma} + \mathbb{S}_{M_i}^v \sigma) \tag{E.59}$$

Le tenseur de souplesse symbolique est alors :

$$\mathbb{S}_{MG}^* = \left(\mathbb{S}_R^e + \sum_{i=1}^n \mathbb{S}_{M_i}^e \right) + \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{S}_{M_i}^v}{p} \tag{E.60}$$

Les modules apparents de compression volumique et de cisaillement sont :

$$k_{MG}^* = k_R^e + \sum_{i=1}^n k_{M_i} \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_{M_i}^s}}, \quad \mu_{MG}^* = \mu_R^e + \sum_{i=1}^n \mu_{M_i}^e \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_{M_i}^d}} \tag{E.61}$$

$$\text{avec } \tau_{M_i}^s = \frac{\eta_{M_i}^s}{3k_{M_i}}, \quad \tau_{M_i}^d = \frac{\eta_{M_i}^d}{2\mu_{M_i}^e}.$$

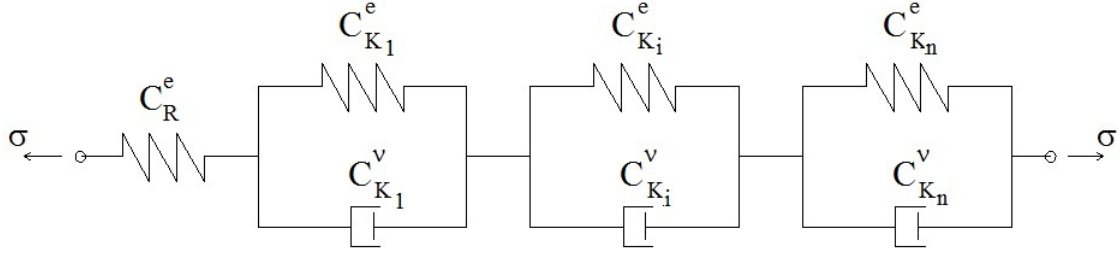


FIGURE E.2 – Modèle de KG.

E.3.2 Modèle de Kelvin généralisé (KG)

Ce modèle est l'association en série d'un ressort et de n modèles de KV (figure E.2). Les modules apparents de compression volumique et de cisaillement sont :

$$\frac{1}{k_{KG}^*} = \frac{1}{k_R^e} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_{K_i}^e(1 + p\tau_{K_i}^s)}, \quad \frac{1}{\mu_{KG}^*} = \frac{1}{\mu_R^e} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_{K_i}^e(1 + p\tau_{K_i}^d)} \quad (\text{E.62})$$

La fonction de fluage de ce modèle est donnée dans l'espace de LC par :

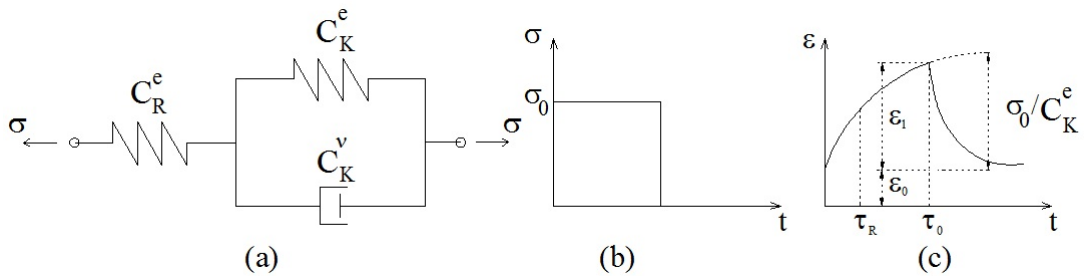
$$S_{KG}^* = \frac{1}{9k_R^e} + \frac{1}{3\mu_R^e} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{9(k_{K_i}^e + p\frac{\eta_{K_i}^s}{3})} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{3(\mu_{K_i}^e + p\frac{\eta_{K_i}^d}{2})} \quad (\text{E.63})$$

et dans l'espace des temps réels par :

$$S_{KG}(t) = \frac{1}{9k_R^e} + \frac{1}{3\mu_R^e} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{9k_{K_i}^e} (1 - e^{-t/\tau_{K_i}^s}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{3\mu_{K_i}^e} (1 - e^{-t/\tau_{K_i}^d}) \quad (\text{E.64})$$

où $\tau_{K_i}^s$ et $\tau_{K_i}^d$ sont respectivement les temps de relaxation de la partie sphérique et déviatorique de la partie i ($C_{K_i}^e, C_{K_i}^v$) du modèle de Kelvin-Voigt, voir (3.63).

E.3.3 Modèle de Ross (Rs)


 FIGURE E.3 – Modèle de Ross (a) et sa réponse (c) sous l'effet d'une contrainte constante σ_0 (b).

Ce modèle est composé de deux ressorts et d'un amortisseur [83, 100]. La loi de comportement du matériau correspondante à ce modèle s'écrit :

$$(\mathbb{C}_R^e + \mathbb{C}_K^e)\dot{\sigma} + \mathbb{C}_K^v\ddot{\sigma} = \mathbb{C}_R^e\mathbb{C}_K^e\dot{\varepsilon} + \mathbb{C}_R^e\mathbb{C}_K^v\ddot{\varepsilon} \quad (\text{E.65})$$

Parce que la déformation totale est la contribution de la partie ressort (R) et celle de la partie de Kelvin-Voigt, on peut déduire k_{Rs}^* et μ_{Rs}^* selon la disposition (en série) de ces

deux parties :

$$\frac{1}{k_{Rs}^*} = \frac{1}{k_R^e} + \frac{1}{k_K^*}, \quad \frac{1}{\mu_{Rs}^*} = \frac{1}{\mu_R^e} + \frac{1}{\mu_K^*} \quad (\text{E.66})$$

Dans l'espace de LC, la fonction de fluage S_{Rs}^* est donnée par (voir Annexe D.1) :

$$S_{Rs}^* = \frac{1}{9k_R^e} + \frac{1}{3\mu_R^e} + \frac{1}{9(k_K^e + p\frac{\eta_K^s}{3})} + \frac{1}{3(\mu_K^e + p\frac{\eta_K^d}{2})} \quad (\text{E.67})$$

Dans l'espace des temps réels, cette fonction s'écrit :

$$S_{Rs}(t) = \frac{1}{9k_R^e} + \frac{1}{3\mu_R^e} + \frac{1}{9k_K^e} (1 - e^{-t/\tau_K^s}) + \frac{1}{3\mu_K^e} (1 - e^{-t/\tau_K^d}) \quad (\text{E.68})$$

où τ_K^s et τ_K^d sont les temps de relaxation respectivement des parties sphériques et déviatoriques du modèle de Ross qui sont identiques à ceux du modèle de Kelvin Voigt (voir (3.63)). Ce modèle a le même problème que celui de Kelvin Voigt puisqu'il ne prévoit pas de déformation élastique instantanée.

E.3.4 Modèle de l'US Bureau de Réclamation (USBR)

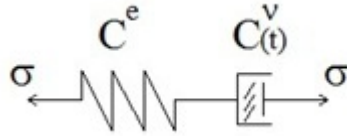


FIGURE E.4 – Modèle de l'US bureau de Réclamation.

Ce modèle développé par l'US Bureau de Réclamation nommé modèle de USBR [104], est composé d'un ressort de raideur C^e et d'un amortisseur dont la fonction visqueuse C^v dépend linéairement du temps (cf. figure E.4) comme suit $C^v(t) = a + bt$. Si on pose : $F_U = \frac{A}{bL}$ et le temps de fluage $\tau_U = a/b$, où L est la longueur de l'échantillon et A est la surface soumise à une force extérieure, la fonction du fluage du modèle USBR s'écrit sous la forme (cf. [83]) :

$$S_{USBR}(t) = \frac{1}{C^e} + F_U \ln\left(\frac{t}{\tau_U} + 1\right) \quad (\text{E.69})$$

Sa fonction dans l'espace de LC :

$$S^* = \frac{1}{C^e} + e^{p\tau_U} F_U \Gamma(0, p\tau_U) \quad (\text{E.70})$$

où $\Gamma(0, \tau_U)$ est la fonction gamma incomplète, qui est déterminée par :

$$\Gamma(0, p\tau_U) = \int_0^{p\tau_U} \frac{e^{-p}}{p} dp \quad (\text{E.71})$$

Annexe F

Influence des paramètres sur le comportement global de la maçonnerie selon le modèle "E.C-T"

F.1 Cas du mortier S7 à l'état sain (cellule périodique 1D)

Pour chaque modèle rhéologique de mortier, de Burgers, de MM et USBR [83], on propose d'exprimer la fonction de fluage $S_m(t)$ et la fonction visqueuse $\Phi_m(t)$ tel que $S_m^{-1}(t) = E_0 \Phi_m(t)$ où $E_0 = E^m$ est le module d'Young de référence du mortier i.e. à l'instant initial t_0 . Les essais de compression uniaxiaux réalisés sur des échantillons de maçonnerie dans les travaux de Choi et *al.*, [83] montrent que la fonction visqueuse de la maçonnerie dépend de la durée t_0 , de l'humidité et de la résistance à la compression. On s'intéressera alors tout d'abord à l'ensemble d'échantillons S7 qui présente une humidité de 35% avec un module d'Young $E(t_0) = 7700$ MPa à $t_0 = 28$ jours. Le rapport entre la contrainte de compression maintenue σ_0 et la résistance de compression f_c est $\sigma_0/f_c = 18\%$. Notons de plus que le modèle USBR (S7) est utilisé dans les travaux de Cecchi et Tralli [36] pour une colonne 1D avec un mortier sain.

Les évolutions temporelles des fonctions de fluage $S^m(t)$ et visqueuse $\Phi^m(t)$ sont présentées dans les équations (F.1), (F.2) pour le modèle USBR ; (F.3) (F.4) pour le modèle de Burgers et (F.5), (F.6) pour le modèle de MM.

– Modèle USBR (S7) :

$$S_{USBR}^m(t) = \frac{1}{E(t_0)} + F_U \ln \left(\frac{t - t_0}{\tau_U} + 1 \right) \quad (\text{F.1})$$

avec $F_U = 1,4 \cdot 10^{-5}$ (MPa⁻¹), $\tau_U = 1$ jour, $E(t_0) = 7700$ MPa.

L'équation (3.109) permet de déduire la fonction visqueuse associée à ce modèle :

$$\Phi_{USBR}^m(t) = \frac{1}{1 + F_U E(t_0) \ln \left(\frac{t - t_0}{\tau_U} + 1 \right)} = \frac{1}{1 + 0,1078 \ln(t - 27)} \quad (\text{F.2})$$

– Modèle de Burgers (S7) : dans ce cas, la fonction de fluage du mortier sain est :

$$S_{Bu}^m(t) = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{A}{Lv_1} (t - t_0) + \frac{A\alpha_2}{L} (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_B}) \quad (\text{F.3})$$

avec $v_1 = \eta A/L = 5,85.10^7$ MPa.m, $\alpha_2 = 4,1.10^{-4}$ (MPa.m) $^{-1}$, $\tau_B = 1,4$ jours, $\frac{A}{L} = \frac{\bar{S}_u}{\alpha_2 E(t_0)}$ avec $\bar{S}_u = 1,3$ et $E(t_0) = 7700$ MPa. L et A sont respectivement la longueur et la surface de l'échantillon soumis au chargement. La fonction visqueuse s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi_{Bu}^m(t) &= \frac{1}{1 + E(t_0) \frac{A}{L\nu_1} (t - t_0) + E(t_0) \frac{A\alpha_2}{L} (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_B})} \\ &= \frac{1}{2,2984 + 5,42.10^{-5}t - 1,3.e^{(20-0,71428t)}}\end{aligned}\quad (F.4)$$

– Modèle de MM (S7) : pour ce modèle, la fonction de fluage est donnée par :

$$S_{MM}^m(t) = \frac{1}{E(t_0)} [\bar{J}_u + (1 - \bar{J}_u)e^{-(t-t_0)/\tau_{MM}}] \quad (F.5)$$

avec $\bar{J}_u = 1,3$ et $\tau_{MM} = 34,9$ jours.

La fonction visqueuse est :

$$\Phi_{MM}^m(t) = \frac{1}{\bar{J}_u + (1 - \bar{J}_u).e^{-(t-t_0)/\tau_{MM}}} = \frac{1}{1,3 - 0,3.e^{-(t-28)/34,9}} \quad (F.6)$$

Les variations de $\Phi^m(t)$ et de $S^m(t)$ en fonction du temps sont reportées sur la figure (F.1). On remarque que l'estimation de MM s'approche de celle de USBR pour t de 200 à 600 jours. La fonction $\Phi^m(t)$ estimée par le modèle de Burgers décroissent très rapidement vers des valeurs qui évoluent très peu en fonction du temps mais qui tendent vers une asymptote nulle pour t très grand (par exemple, après 10 jours, $\Phi^m(t) = 0,432$ mais après 600 jours, cette valeur est de 0,428 et $\Phi^m(t) = 0,1$ à $t = 390$ ans). $\Phi^m(t)$ estimée par le modèle de USBR tendent très lentement vers 0. Au contraire, celle du modèle de MM tendent vers une asymptote non nulle quand t n'est pas très grand ($t = 200$ jours). Les nombres de jours choisis pour chaque modèle satisfont la condition "quasi-constante" de la fonction visqueuse ($t = 38$ jours pour le modèle de Burgers, $t = 228$ jours pour le modèle de MM, et $t = 6000$ jours pour celui de USBR).

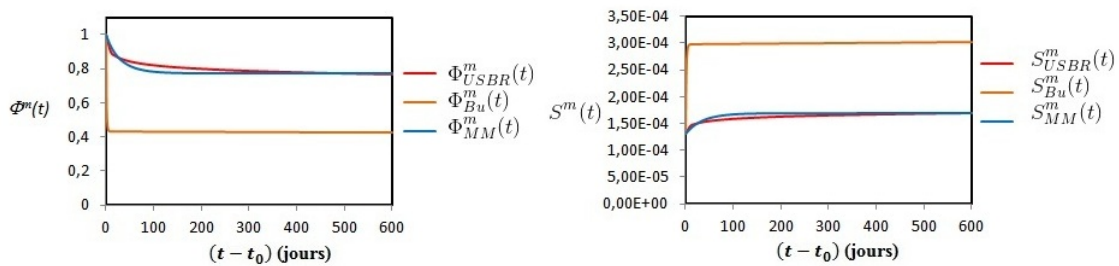


FIGURE F.1 – Évolution des fonctions visqueuse $\Phi^m(t)$ et de fluage $S^m(t)$ pour le mortier S7 de type Burgers, MM et USBR.

Les évolutions de $\frac{\tilde{C}_{nn}(t,\xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)}$ en fonction du temps sont reportées à la figure (F.2).

Estimation de la rigidité effective normale pour différents rapports $\xi = e^h/a$ et $\alpha = E^b/E^m$

Voir les figures (F.3) à (F.8).

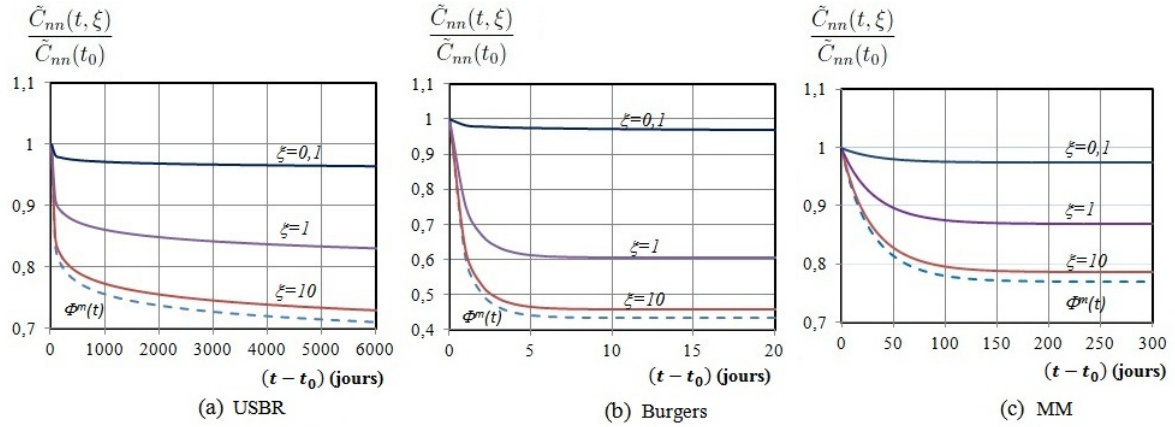


FIGURE F.2 – Cas 1D, mortier (S7) à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution temporelle de $\frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)}$ pour les modèles de USBR (a), Burgers (b) et MM (c).

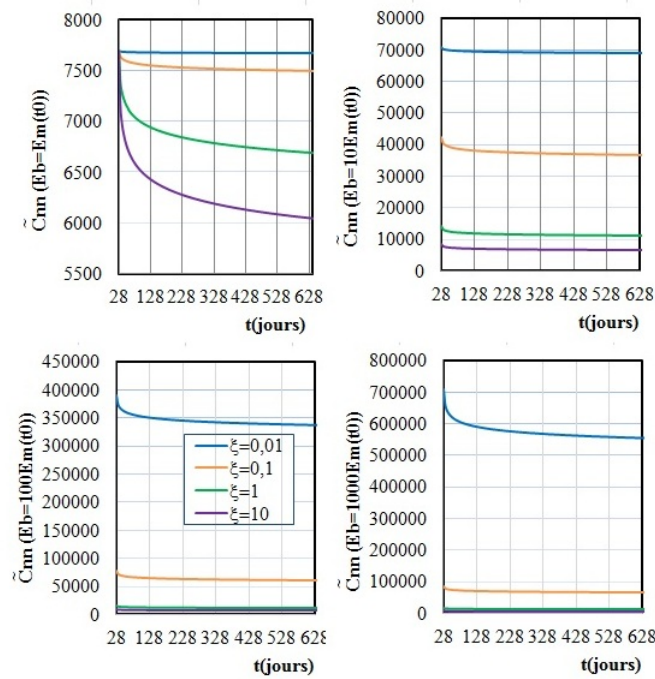


FIGURE F.3 – Cas 1D, mortier (S7) de type USBR à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas α fixé.

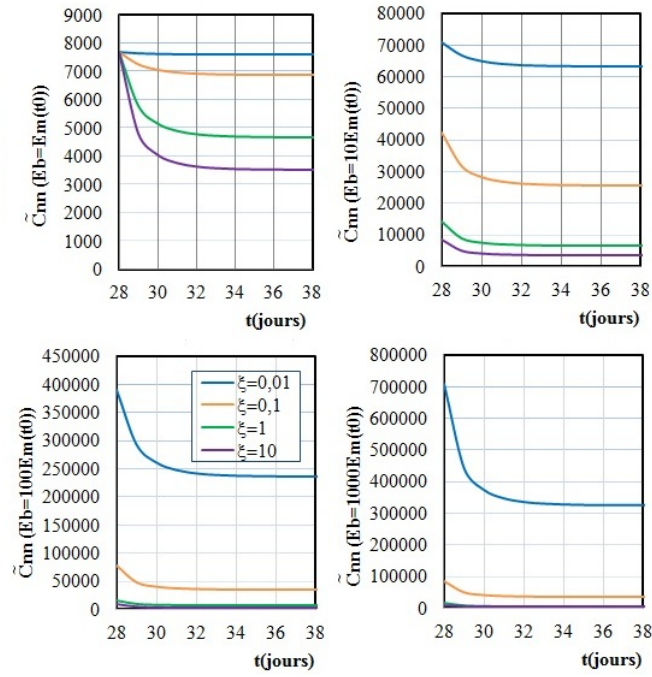


FIGURE F.4 – Cas 1D, mortier (S7) de type Burgers à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas α fixé.

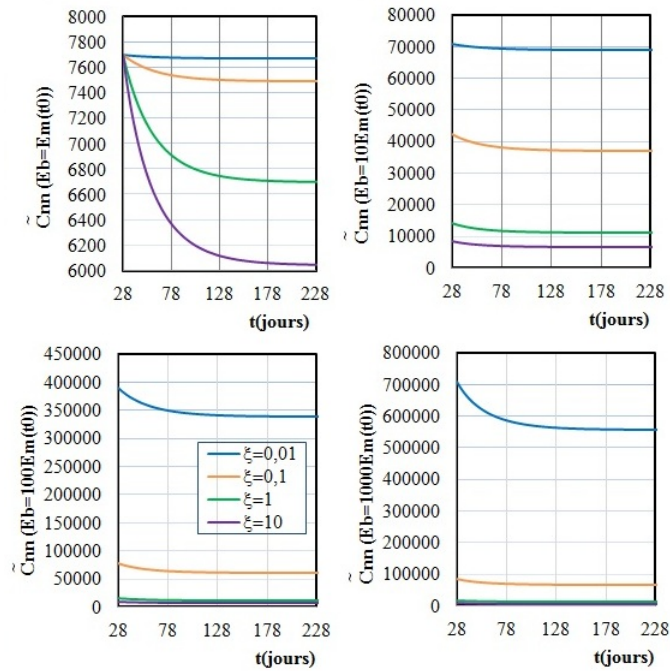


FIGURE F.5 – Cas 1D, mortier (S7) de type MM à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas α fixé.

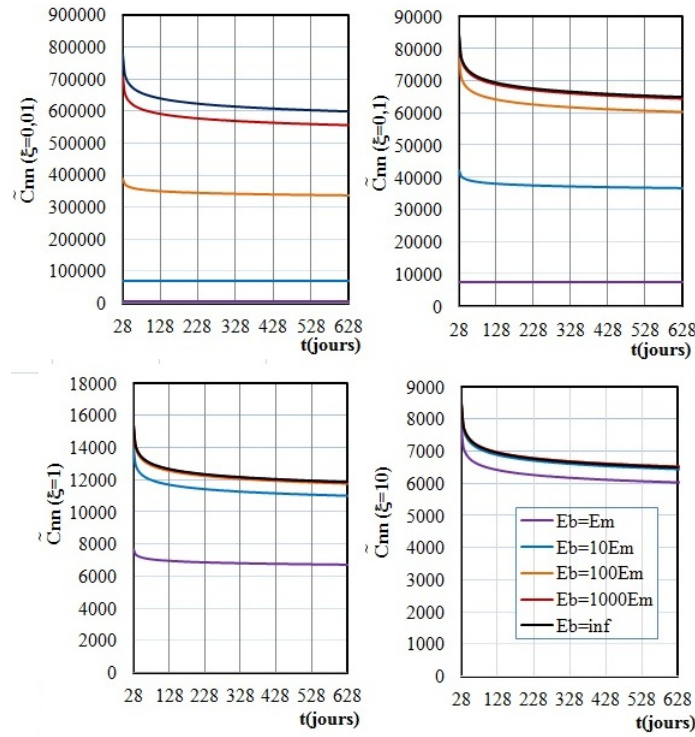


FIGURE F.6 – Cas 1D, mortier (S7) de type USBR à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas ξ fixé.

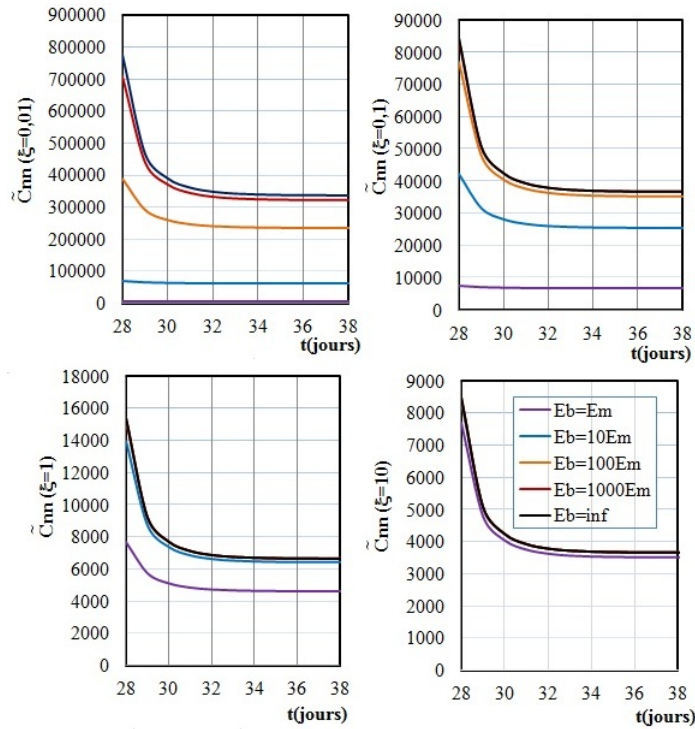


FIGURE F.7 – Cas 1D, mortier (S7) de type Burgers à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas ξ fixé.

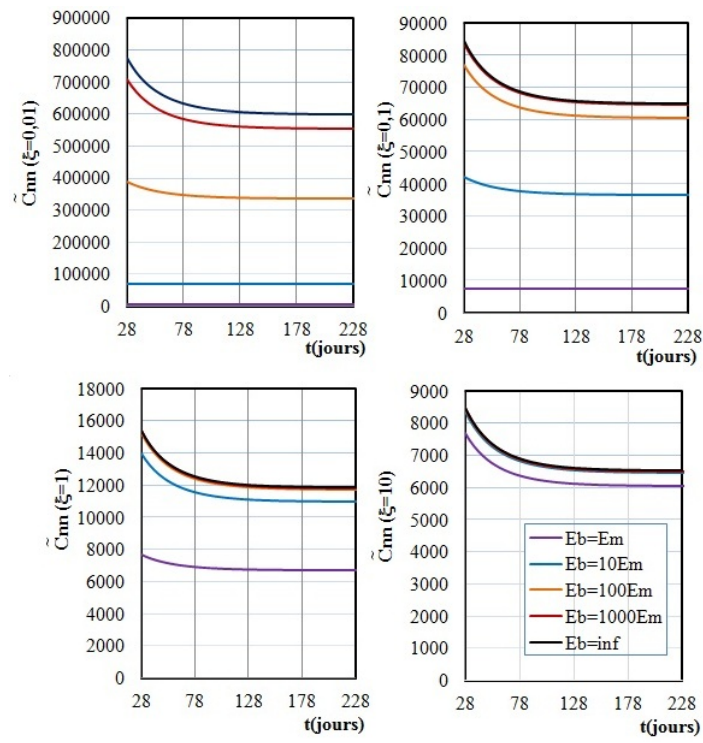


FIGURE F.8 – Cas 1D, mortier (S7) de type MM à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas ξ fixé.

F.2 Cas d'une cellule périodique 1D avec mortier microfissuré

Estimation de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$

- Influence du paramètre géométrique ($\xi = \frac{e^h}{a}$) et du ratio $\alpha = E^b/E^m$:

En fixant la valeur de d_c ($d_c = 0,0$, $d_c = 0,1$ et $d_c = 0,2$), on trace les évolutions de $\tilde{C}_{nn}$ en fonction du temps pour différents rapports ξ et α (cf. figures (F.9) à (F.13)).

- Influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ et de d_c (cf. figures F.14 et F.15) :

Pour le modèle de Burgers, on observe que la rigidité normale $\tilde{C}_{nn}$ décroît rapidement avec d_c et qu'au-delà de 10 jours, le rapport $\alpha = E^b/E^m$ influence peu l'évolution de $\tilde{C}_{nn}$ en fonction de d_c (à $t=90$ jours, les courbes de $\tilde{C}_{nn}$ sont quasiment confondues pour tout α). Pour le modèle de MM (figure F.15), on constate qu'au-delà de $t = 5$ jours le rapport α n'affecte plus les évolutions de $\tilde{C}_{nn}$ et que $\tilde{C}_{nn}$ dépend sensiblement de la densité de fissures d_c .

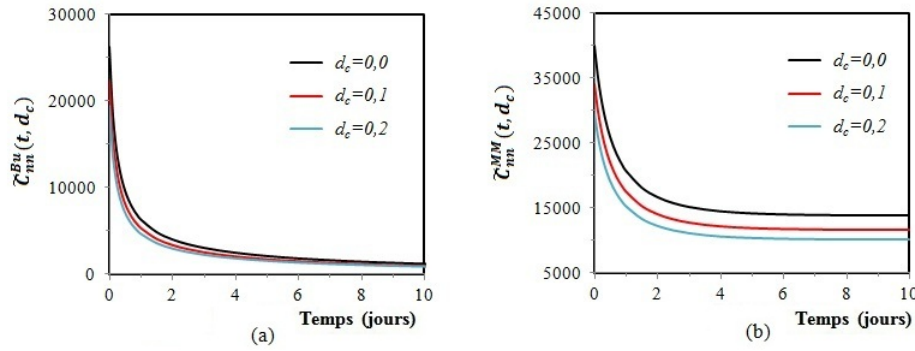


FIGURE F.9 – Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers (a) et MM (b) : influence du paramètre d_c sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas de briques rigides et $\xi = 0,1$.

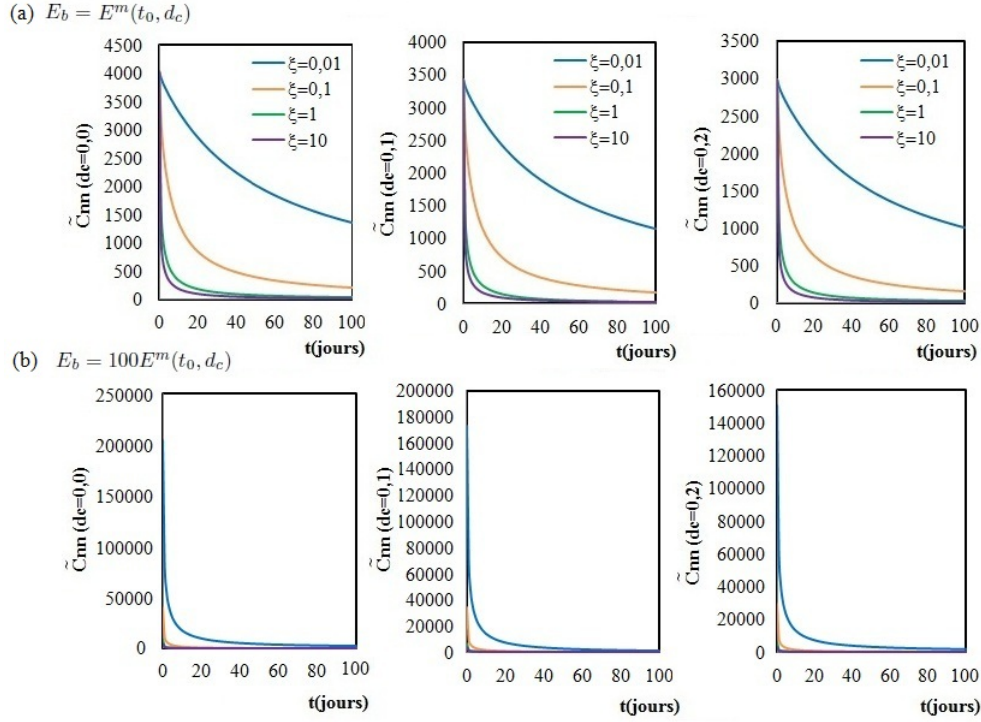


FIGURE F.10 – Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E^b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E^b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).

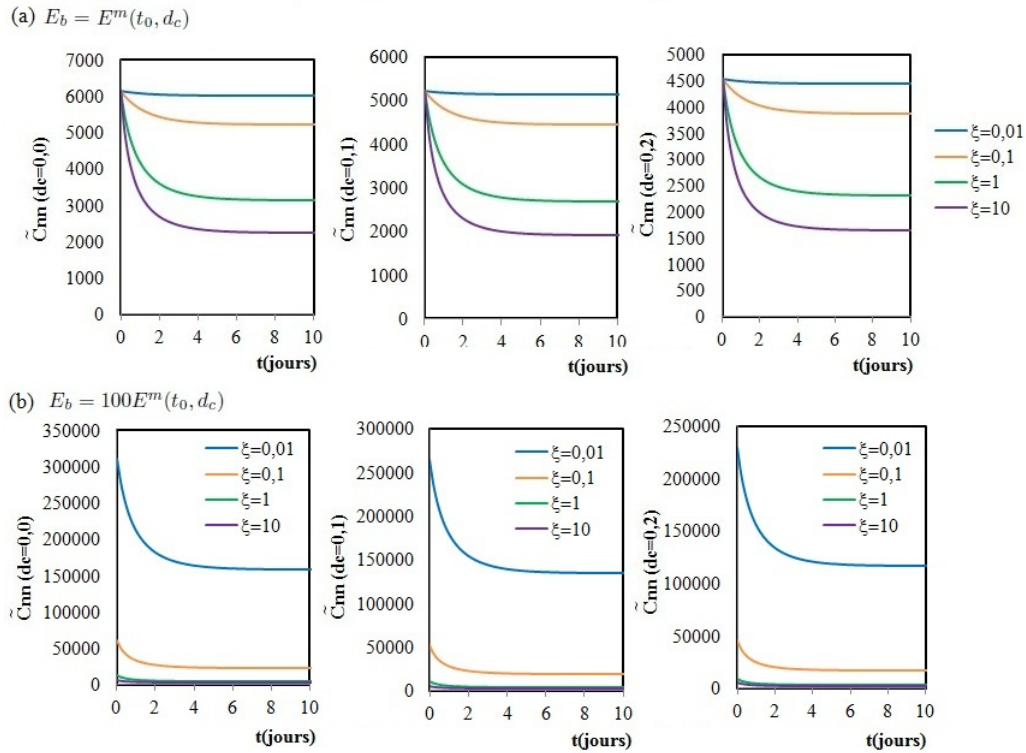


FIGURE F.11 – Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type MM : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E^b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E^b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).

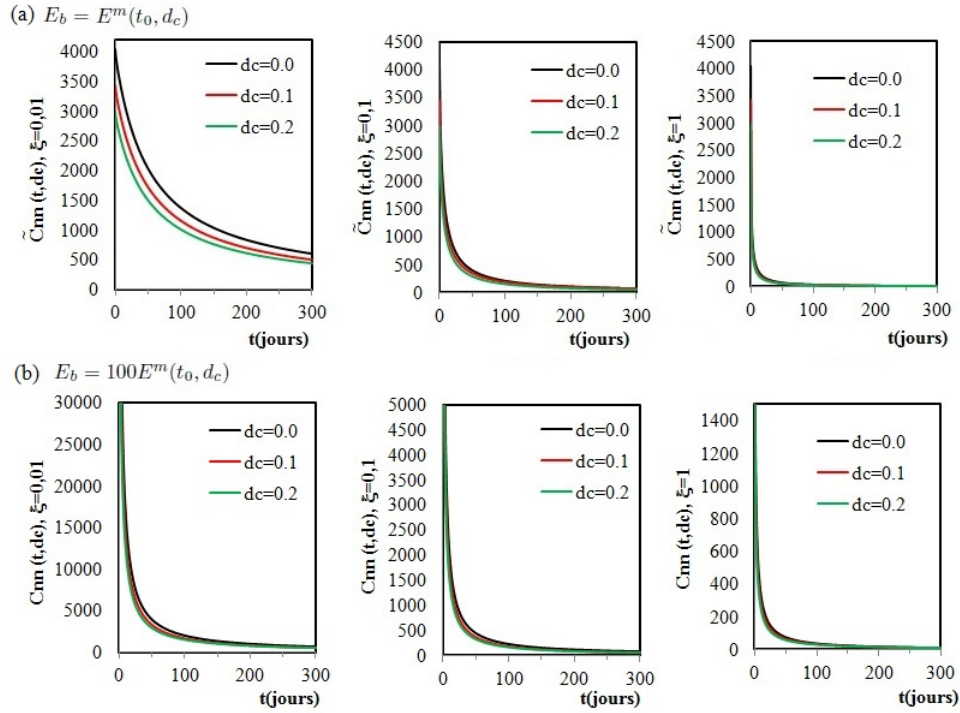


FIGURE F.12 – Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers : influence du paramètre d_c sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E_b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E_b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).

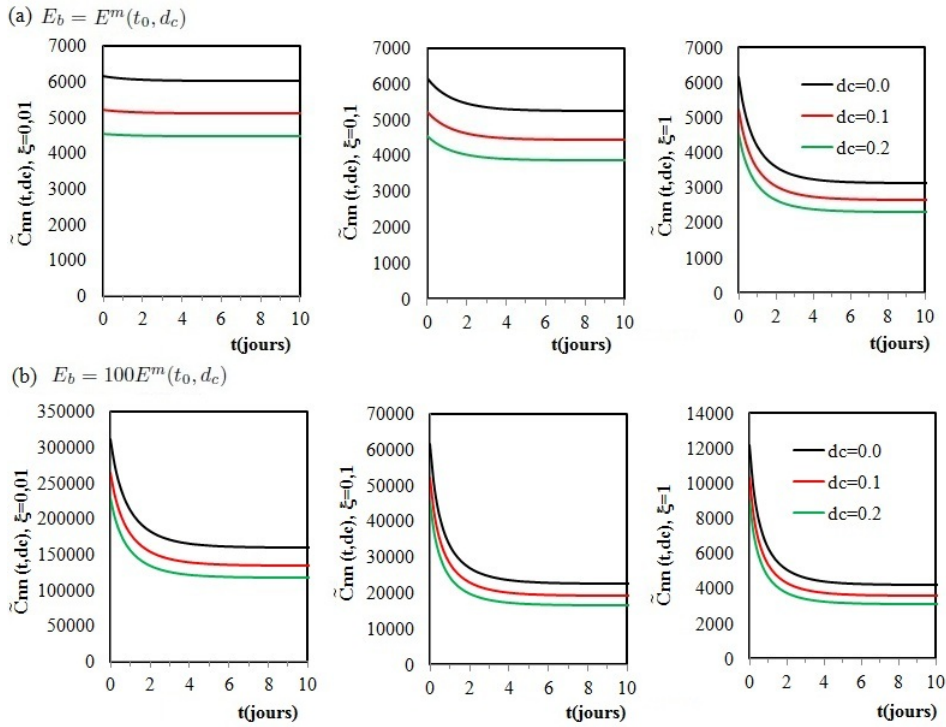


FIGURE F.13 – Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type MM : influence du paramètre d_c sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E_b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E_b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).

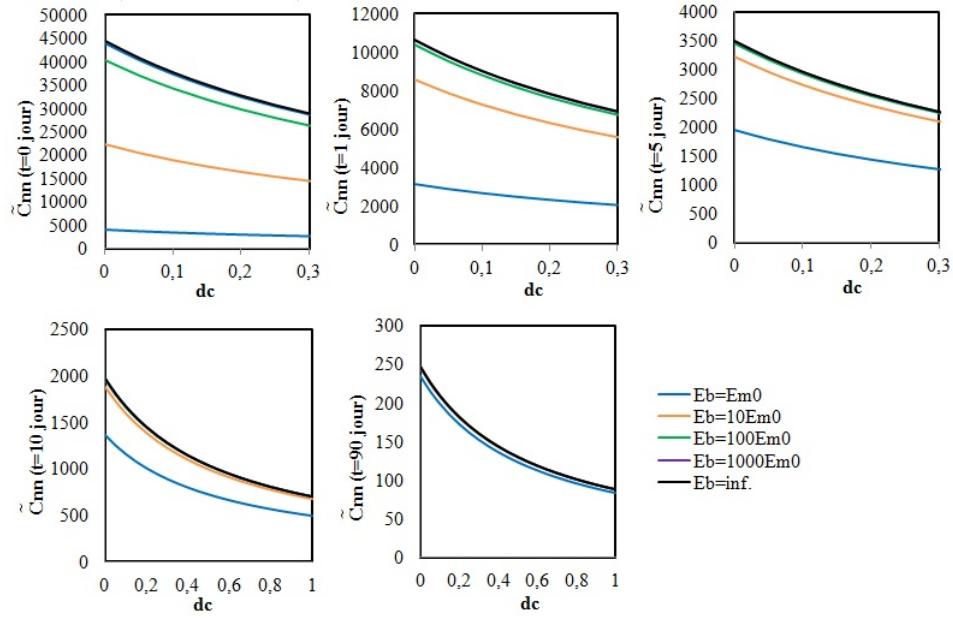


FIGURE F.14 – Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers : évolutions temporelles de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$ avec d_c variable et pour différents ratios $\alpha = E^b/E^m$, $\xi = 0, 1$

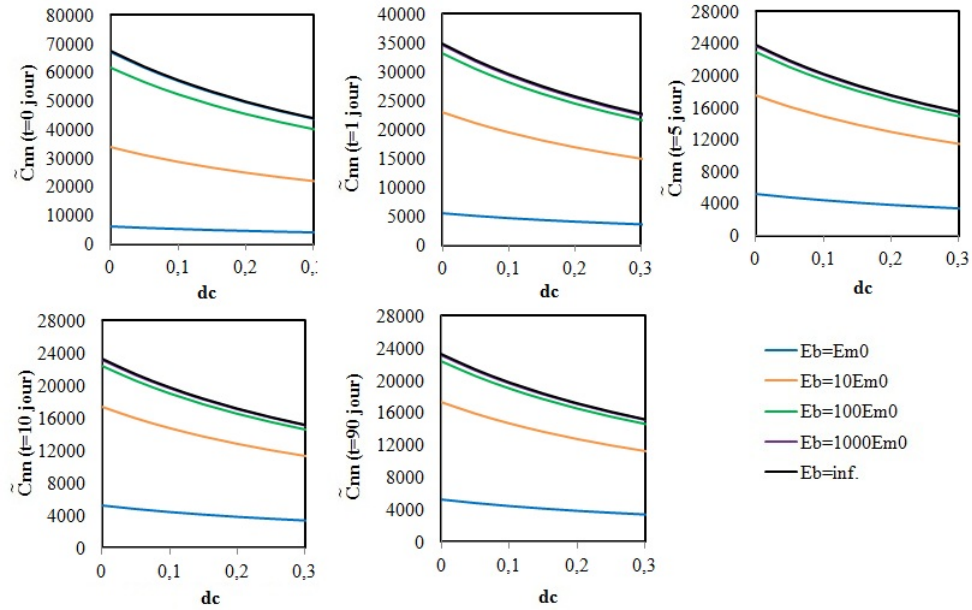


FIGURE F.15 – Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type MM : évolutions temporelles de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$ avec d_c variable et pour différents ratios $\alpha = E^b/E^m$, $\xi = 0, 1$.

F.3 Cas d'un mur 2D

F.3.1 Cas de cellule périodique 2D avec mortier sain

Influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$

Les données matériau du mortier de l'ensemble d'échantillons S7 [83] sont utilisées pour déduire les fonction de fluage de mortiers de type USBR (figures (F.16)), Burgers (figures (F.17)) et MM (figures (F.18)).

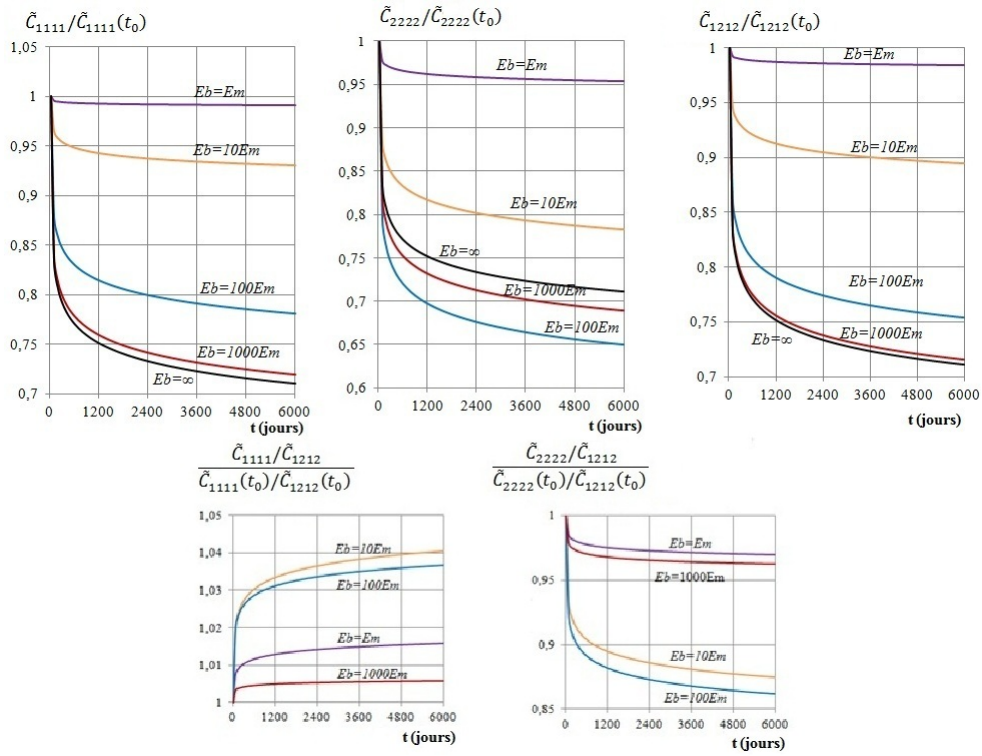


FIGURE F.16 – Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour le modèle de USBR (S7).

Les résultats des figures (F.16), (F.17), (F.18) montrent des raideurs effectives qui dépendent sensiblement du rapport E^b/E^m . Le cas homogène $E^m(t_0) = E^b$ est faiblement dépendant du temps à l'opposé des autres cas ($\alpha > 1$). La figure (F.17)-a associée au mortier de type Burgers montre une raideur effective qui décroît rapidement vers la valeur asymptotique 0,42 (après 10 jours) alors que celle de MM reste constante égale à 0,78 (après 160 jours). La valeur asymptotique du modèle de Burgers est moins élevée que celle de MM. Le modèle de USBR ne montre pas de valeur asymptotique même après 6000 jours (16,4 ans). De plus, pour tous les modèles, les rapports présentés sur les figures (F.16)-b, (F.17)-b, (F.18)-b montrent que $\tilde{C}_{1111}$ décroît plus rapidement que $\tilde{C}_{1212}$, mais on constate l'inverse pour $\tilde{C}_{2222}$.

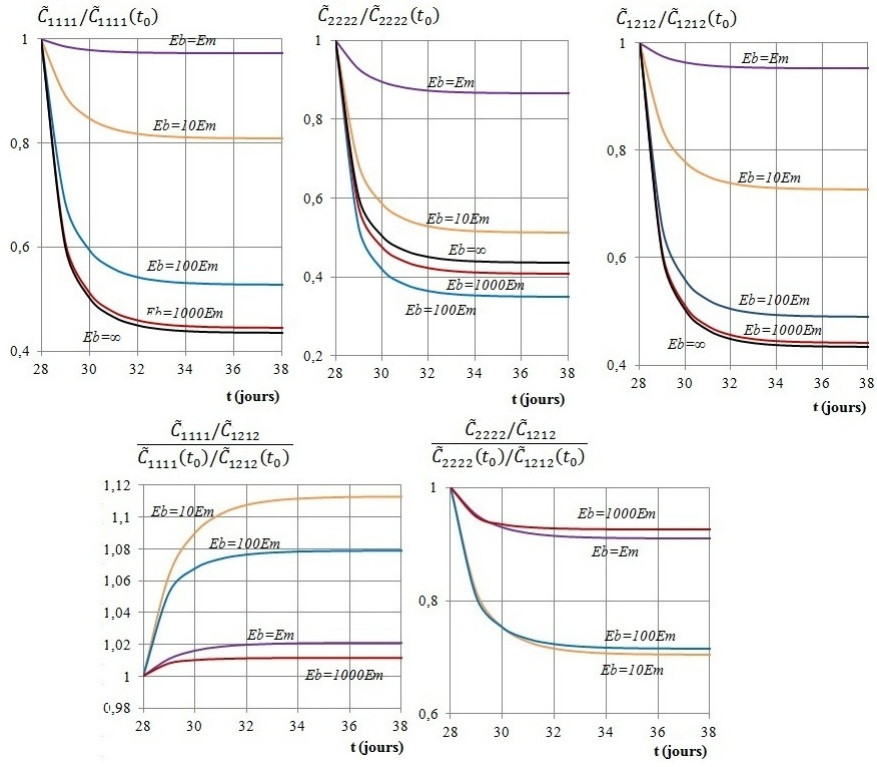


FIGURE F.17 – Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour le modèle de Burgers (S7).

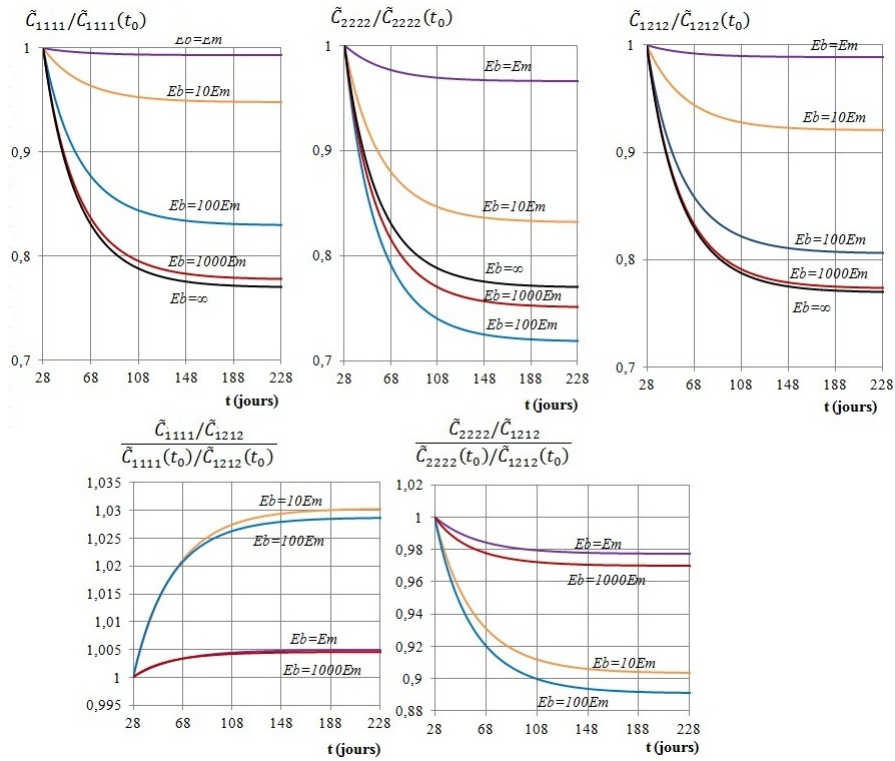


FIGURE F.18 – Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour le modèle de MM (S7).

F.3.2 Cas microfissuré 2D

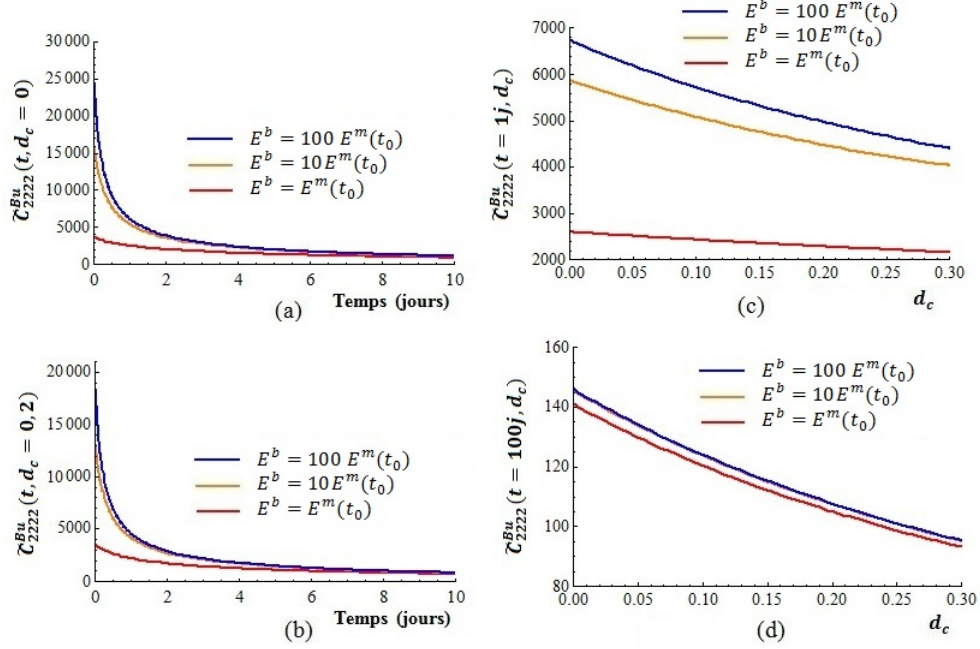
Influence de la densité de fissures d_c 

FIGURE F.19 – Cas 2D, mortier hybride de type Burgers : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{2222}^{Bu}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0,2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).

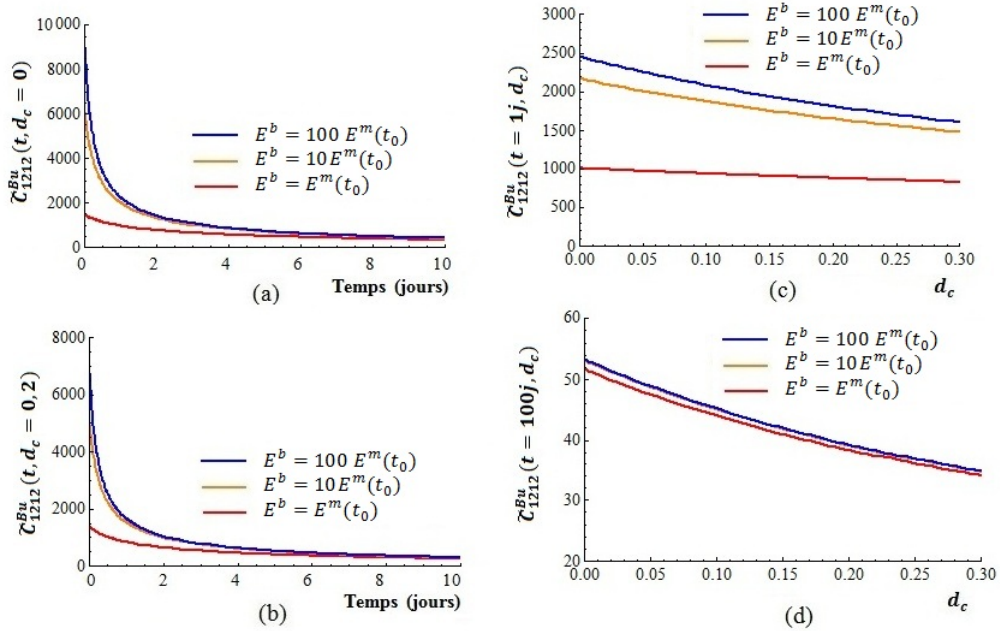


FIGURE F.20 – Cas 2D, mortier hybride de type Burgers : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{1212}^{Bu}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0,2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).

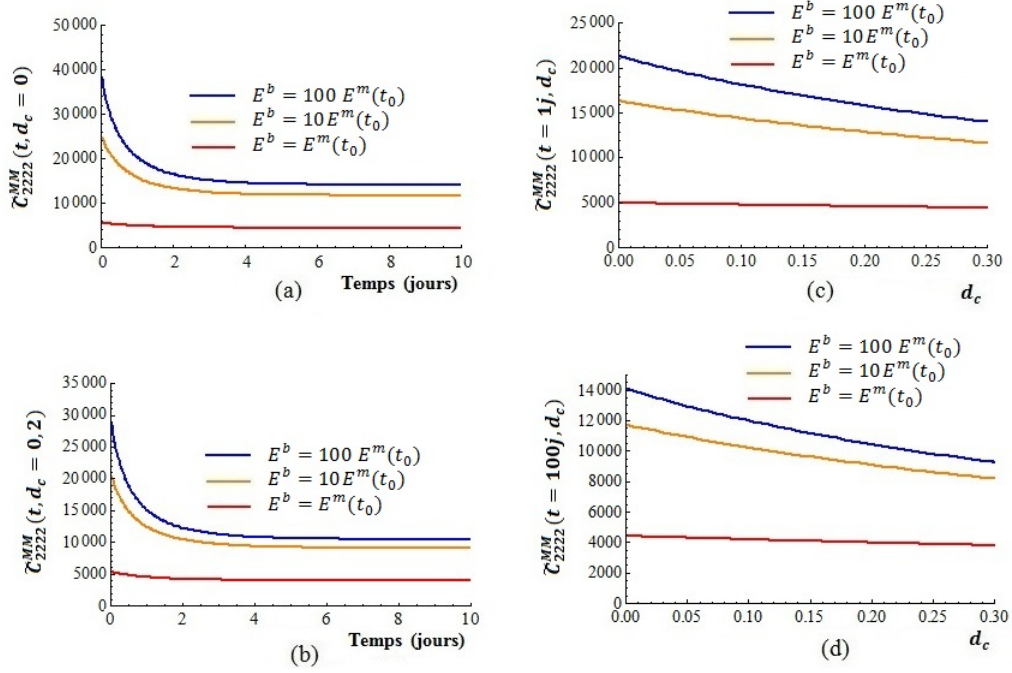


FIGURE F.21 – Cas 2D, mortier hybride de type MM : évolutions de la rigidité effective $\tilde{\mathcal{C}}_{2222}^{MM}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0,2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).

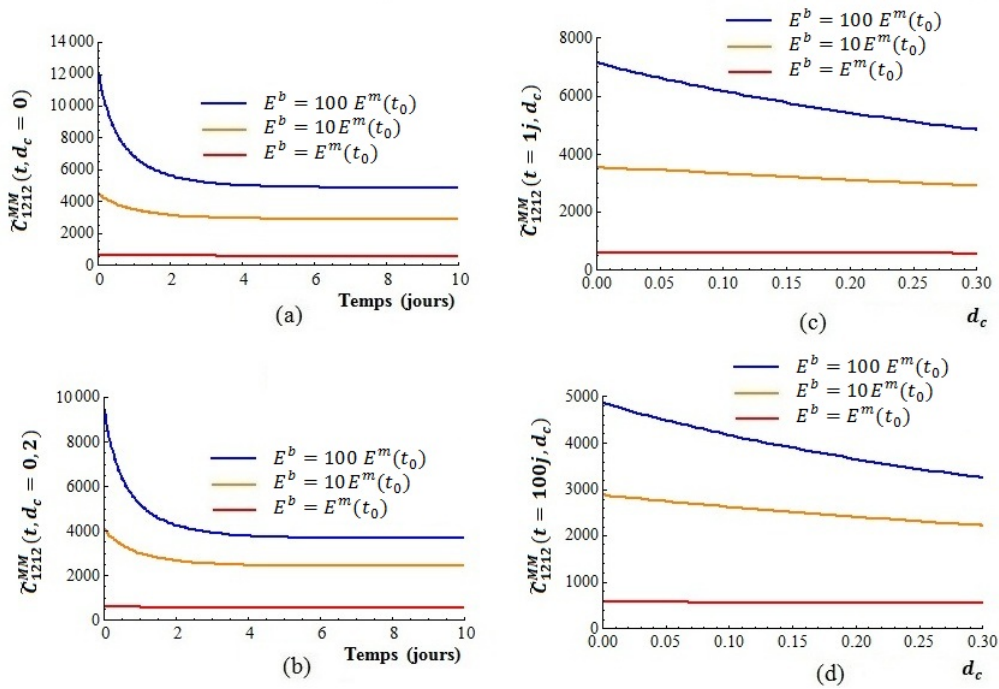


FIGURE F.22 – Cas 2D, mortier hybride de type MM : évolutions de la rigidité effective $\tilde{\mathcal{C}}_{1212}^{MM}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0,2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).

Annexe G

Modèles proposés pour le comportement global des maçonneries

G.1 Modèle micromécanique : schéma de MT et inversion directe de TLC

Ce modèle ("MT+ITLC") repose sur deux étapes : la première consiste à homogénéiser le comportement du mortier v.l.n.v. microfissuré comme indiqué à la section (3.3) selon la démarche suivie par S.T. Nguyen et *al.* [106]. À la seconde étape, on propose d'estimer le comportement global de l'assemblage briques/mortier à l'aide de l'estimation classique de Mori-Tanaka [11]. Cela suppose que les briques sont assimilées à des inclusions ellipsoïdales (ou sphériques) disposées selon une distribution aléatoire (ou parallèle) dans une matrice de mortier. Comme le comportement de la matrice (mortier) est viscoélastique de type MM par exemple, caractérisé dans l'espace symbolique par six paramètres $k_R^e(d_c)$, $k_M^e(d_c)$, $\eta_M^s(d_c)$ (cf. équation (E.55)), $\mu_R^e(d_c)$, $\mu_M^e(d_c)$ et $\eta_M^d(d_c)$ (cf. (E.57)), le comportement global de la maçonnerie estimé par le modèle est aussi viscoélastique. Celui-ci peut être approché par le modèle de MM. Cela simplifiera l'étape d'inversion de la TLC de l'estimation globale de MT.

En effet, dans le cas élastique, si les estimations globales de MT de l'assemblage brique/mortier sont données par :

$$\tilde{k}^{MT} = \left(\frac{(1 - \varphi_b)}{k_m + \frac{4\mu_m}{3}} + \frac{\varphi_b}{k_b + \frac{4\mu_m}{3}} \right)^{-1} - \frac{4\mu_m}{3} \quad (G.1)$$

$$\tilde{\mu}^{MT} = \left(\frac{(1 - \varphi_b)}{\mu_m + a} + \frac{\varphi_b}{\mu_b + a} \right)^{-1} - a \quad (G.2)$$

avec $a = \frac{\mu_m}{6} \frac{9k_m + 8\mu_m}{k_m + 2\mu_m}$. k_b , μ_b et φ_b sont respectivement le module de compressibilité, de cisaillement et la fraction volumique des inclusions de briques.

Pour le problème viscoélastique, l'approche de Mori-Tanaka permet d'estimer les modules

de compressibilité et de cisaillement effectif apparents de la maçonnerie micro-fissurée dans l'espace de LC comme suit (cf. (G.1) et (G.2)) :

$$\tilde{k}_{mb}^* = \left(\frac{1 - \varphi_b}{\tilde{k}_m^* + \frac{4\tilde{\mu}_m^*}{3}} + \frac{\varphi_b}{k_b + \frac{4\tilde{\mu}_m^*}{3}} \right)^{-1} - \frac{4\tilde{\mu}_m^*}{3} \quad (\text{G.3})$$

$$\tilde{\mu}_{mb}^* = \left(\frac{1 - \varphi_b}{\tilde{\mu}_m^* + a_m^*} + \frac{\varphi_b}{\mu_b + a_m^*} \right)^{-1} - a_m^* \quad (\text{G.4})$$

où $a_m^* = \frac{\tilde{\mu}_m^*}{6} \frac{9\tilde{k}_m^* + 8\tilde{\mu}_m^*}{\tilde{k}_m^* + 2\tilde{\mu}_m^*}$, $\tilde{k}_m^* = \tilde{k}^*(d_c)$ et $\tilde{\mu}_m^* = \tilde{\mu}^*(d_c)$ (cf. équations (E.51), (E.56)) sont respectivement les modules apparents de compressibilité et de cisaillement du mortier microfissuré.

Pour éviter la complexité due à la transformation inverse de la TLC, on suppose que le comportement viscoélastique effectif du mélange est similaire au comportement viscoélastique de la matrice définie par le même modèle rhéologique (i.e. du modèle de MM). Les modules de compressibilité et de cisaillement effectif apparents (G.3) et (G.4) sont alors approchés par :

$$\tilde{k}_{mb}^{MM*} = \tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b) + \left[\frac{1}{\tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b)} + \frac{3}{p\tilde{\eta}_M^s(d_c, \varphi_b)} \right]^{-1} \quad (\text{G.5})$$

$$\tilde{\mu}_{mb}^{MM*} = \tilde{\mu}_R^e(d_c, \varphi_b) + \left[\frac{1}{\tilde{\mu}_M^e(d_c, \varphi_b)} + \frac{3}{p\tilde{\eta}_M^d(d_c, \varphi_b)} \right]^{-1} \quad (\text{G.6})$$

où les paramètres $\tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b)$, $\tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b)$, $\tilde{\mu}_R^e(d_c, \varphi_b)$, $\tilde{\mu}_M^e(d_c, \varphi_b)$, $\tilde{\eta}_M^s(d_c, \varphi_b)$, $\tilde{\eta}_M^d(d_c, \varphi_b)$ sont à identifier avec les quasi-égalités $\tilde{k}_{mb}^* \approx \tilde{k}_{mb}^{MM*}$, $\tilde{\mu}_{mb}^* \approx \tilde{\mu}_{mb}^{MM*}$ des développements en série au voisinage de 0 et de l'infini des modules effectifs apparents.

Ainsi, on développe des formules explicites pour les propriétés viscoélastiques effectives de la maçonnerie en faisant correspondre le comportement à court et long termes et en validant les formules développées dans une situation transitoire. Les développements en série de $\tilde{k}_{mb}^*$ (G.3) et $\tilde{\mu}_{mb}^*$ (G.4) sont :

$$\text{Au voisinage de } p = 0 : \quad \tilde{k}_{mb}^* = A + pB + O(p^2), \quad \tilde{\mu}_{mb}^* = E + pF + O(p^2) \quad (\text{G.7})$$

$$\text{Au voisinage de } p = \infty : \quad \tilde{k}_{mb}^* = C + O(1/p), \quad \tilde{\mu}_{mb}^* = G + O(1/p) \quad (\text{G.8})$$

où A , B , C , E , F et G sont fonctions des propriétés viscoélastiques du mortier, de la densité des fissures, des propriétés élastiques de la brique et de la fraction volumique des inclusions de brique.

$$A = \frac{1}{\frac{\varphi_b}{k_b + \frac{4\mu_R^e(d_c)}{3}} + \frac{(1 - \varphi_b)}{k_R^e(d_c) + \frac{4\mu_R^e(d_c)}{3}}} - \frac{4\mu_R^e(d_c)}{3}$$

$$B = \frac{(1 - \varphi_b)[\eta_M^s(d_c)(3k_b + 4\mu_R^e(d_c))^2 + 18\varphi_b\eta_M^d(d_c)(k_R^e(d_c) - k_b)^2]}{3[(3k_b + 4\mu_R^e(d_c)) + 3\varphi_b(k_R^e(d_c) - k_b)]^2}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{\frac{\varphi_b}{k_b + C_1} + \frac{(1 - \varphi_b)}{k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c) + C_1}} - C_1 \\
 E &= \frac{1}{\frac{\varphi_b}{\mu_b + E_1} + \frac{(1 - \varphi_b)}{\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c) + E_1}} - E_1 \\
 F &= \frac{F_2 F_4 \left((1 - \varphi_b) \frac{F_1 + 3F_5 \eta_M^d(d_c)}{F_4(E_1 + \mu_R^e(d_c))} + \varphi_b \frac{F_1}{F_2(E_1 + \mu_b)} \right)}{6F_5(F_2 + F_3 \varphi_b) \left(\frac{1 - \varphi_b}{E_1 + \mu_R^e(d_c)} + \frac{\varphi_b}{E_1 + \mu_b} \right)} - \frac{F_1}{6F_5} \\
 G &= \frac{1}{\frac{\varphi_b}{\mu_b + G_1} + \frac{(1 - \varphi_b)}{\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c) + G_1}} - G_1
 \end{aligned} \tag{G.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{4}{3}(\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c)), \quad E_1 = \frac{\mu_R^e(d_c)(9k_R^e(d_c) + 8\mu_R^e(d_c))}{6(k_R^e(d_c) + 2\mu_R^e(d_c))} \\
 G_1 &= \frac{(\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c))(9(k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c)) + 8(\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c)))}{6((k_R^e(d_c) + k_M^e(d_c)) + 2(\mu_R^e(d_c) + \mu_M^e(d_c)))} \\
 F_1 &= \mu_R^e(d_c)[4\eta_M^d(d_c) + 3\eta_M^s(d_c)] + \frac{1}{2}\eta_M^d(d_c)[9k_R^e(d_c) + 8\mu_R^e(d_c)] - E_1[6\eta_M^d(d_c) + 2\eta_M^s(d_c)] \\
 F_2 &= 6\mu_b k_R^e(d_c) + 12\mu_b \mu_R^e(d_c) + 9k_R^e(d_c)\mu_R^e(d_c) + 8\mu_R^{e^2}(d_c) \\
 F_3 &= 6[k_R^e(d_c)\mu_R^e(d_c) + 2\mu_R^{e^2}(d_c) - k_R^e(d_c)\mu_b - 2\mu_R^e(d_c)\mu_b] \\
 F_4 &= 5\mu_R^e(d_c)(3k_R^e(d_c) + 4\mu_R^e(d_c)), \quad F_5 = k_R^e(d_c) + 2\mu_R^e(d_c)
 \end{aligned} \tag{G.10}$$

Le développement en série de $\tilde{k}_{mb}^*$ (G.5) et $\tilde{\mu}_{mb}^*$ (G.6) au voisinage de $p = 0$ donne (voir (E.43)) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_{mb}^* &= \tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b) + p \frac{\tilde{\eta}_M^s(d_c, \varphi_b)}{3} + O(p^2) \\
 \tilde{\mu}_{mb}^* &= \tilde{\mu}_R^e(d_c, \varphi_b) + p \frac{\tilde{\eta}_M^d(d_c, \varphi_b)}{3} + O(p^2)
 \end{aligned} \tag{G.11}$$

et au voisinage de $p = \infty$, on a (voir (E.44)) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_{mb}^* &= \tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b) + \tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b) + O(1/p) \\
 \tilde{\mu}_{mb}^* &= \tilde{\mu}_R^e(d_c, \varphi_b) + \tilde{\mu}_M^e(d_c, \varphi_b) + O(1/p)
 \end{aligned} \tag{G.12}$$

La combinaison de (G.7) et (G.8) avec (G.11) et (G.12) nous permet d'identifier les modules et les caractéristiques visqueuses suivants du modèle de MM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b) &= A, \quad \tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b) = C - A \\
 \tilde{\mu}_R^e(d_c, \varphi_b) &= E, \quad \tilde{\mu}_M^e(d_c, \varphi_b) = G - E \\
 \tilde{\eta}_M^s(d_c, \varphi_b) &= 3B, \quad \tilde{\eta}_M^d(d_c, \varphi_b) = 2F
 \end{aligned} \tag{G.13}$$

Pour valider cette approximation dans une situation transitoire, on considère un cas de fluage sous une contrainte macroscopique sphérique imposée (3.97). La déformation ma-

croscopique approchée s'écrit (cf. (3.100)) :

$$\bar{\varepsilon}_{nn}(d_c, \varphi_b, t) = \left(\frac{1}{3\tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b)} - \frac{\tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b)}{3\tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b)(\tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b) + \tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b))} e^{-t/t_2(d_c, \varphi_b)} \right) \cdot \Sigma_0 \quad (\text{G.14})$$

où

$$t_2(d_c, \varphi_b) = \frac{[\tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b) + \tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b)] * \eta_M^s(d_c, \varphi_b)}{3\tilde{k}_R^e(d_c, \varphi_b) \cdot \tilde{k}_M^e(d_c, \varphi_b)} \quad (\text{G.15})$$

La solution exacte est obtenue par la transformation inverse de la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}_{nn}^* = \frac{\Sigma_0}{3\tilde{k}_{mb}^*} \quad (\text{G.16})$$

où $\tilde{k}_{mb}^*$ est donné par (G.3).

La validation en terme de déformation globale $\bar{\varepsilon}_{nn}$ de l'approximation de la solution globale "exacte" est montrée aux figures (G.1) et (G.2) respectivement pour différentes valeurs de d_c ($d_c = 0; 0,1; 0,2$) et de φ_b ($\varphi_b = 0,7; 0,8; 0,9$).

La figure (G.3) montre les estimations des modules élastiques et coefficients de viscosité effectifs de la maçonnerie v.l.n.v. microfissurée selon le modèle de MT classique.

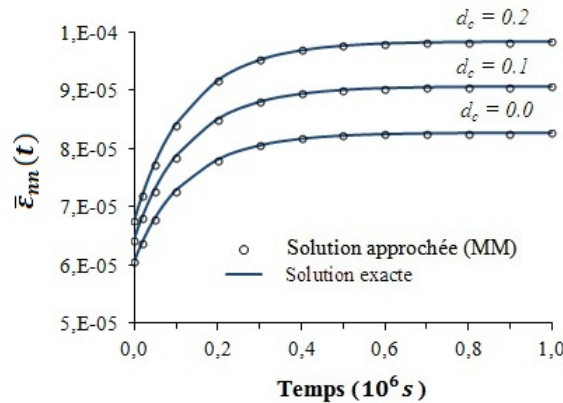


FIGURE G.1 – Comparaison entre la solution réelle et l'approximation par le modèle de MM - Comportement des maçonneries microfissurées. Les coefficients du mortier hybride sain sont donnés dans la table (3.2), $E^b = 11000$ MPa, $\nu^b = 0,2$, $\varphi_b = 0,8$.

La figure (G.4) montre que le modèle "MT+ITLC" peut donner des résultats cohérents avec le calcul numérique dans le cas où les briques sont légèrement plus raides que le mortier.

G.2 Approche numérique : modèle incrémental

Anthoine et *al.* [24] ont proposé un modèle d'homogénéisation périodique d'une maçonnerie dont les composants ont un comportement élastique linéaire. Toutefois, ce modèle ne peut pas être appliqué directement à une maçonnerie dont l'un des constituants est viscoélastique linéaire. La TLC est l'une des façons permettant de passer de l'espace des temps réels à l'espace symbolique où le comportement du constituant v.l.n.v devient élastique linéaire. Autrement, il est possible d'utiliser une méthode numérique basée sur la

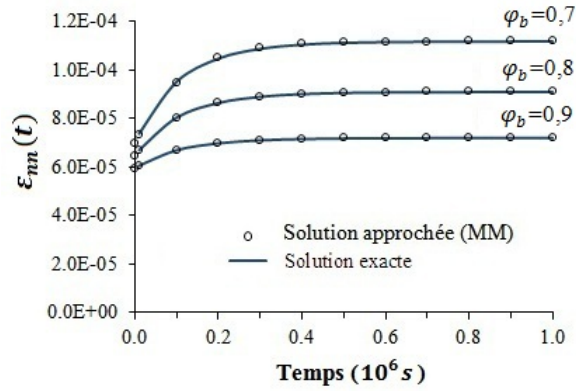


FIGURE G.2 – Comparaison entre la solution réelle et l'approximation par le modèle de MM - Comportement des maçonnerie microfissurée. Les coefficients du mortier hybride sain sont donnés dans la table (3.2), $E^b = 11000$ MPa, $\nu^b = 0,2$, $d_c = 0,1$.

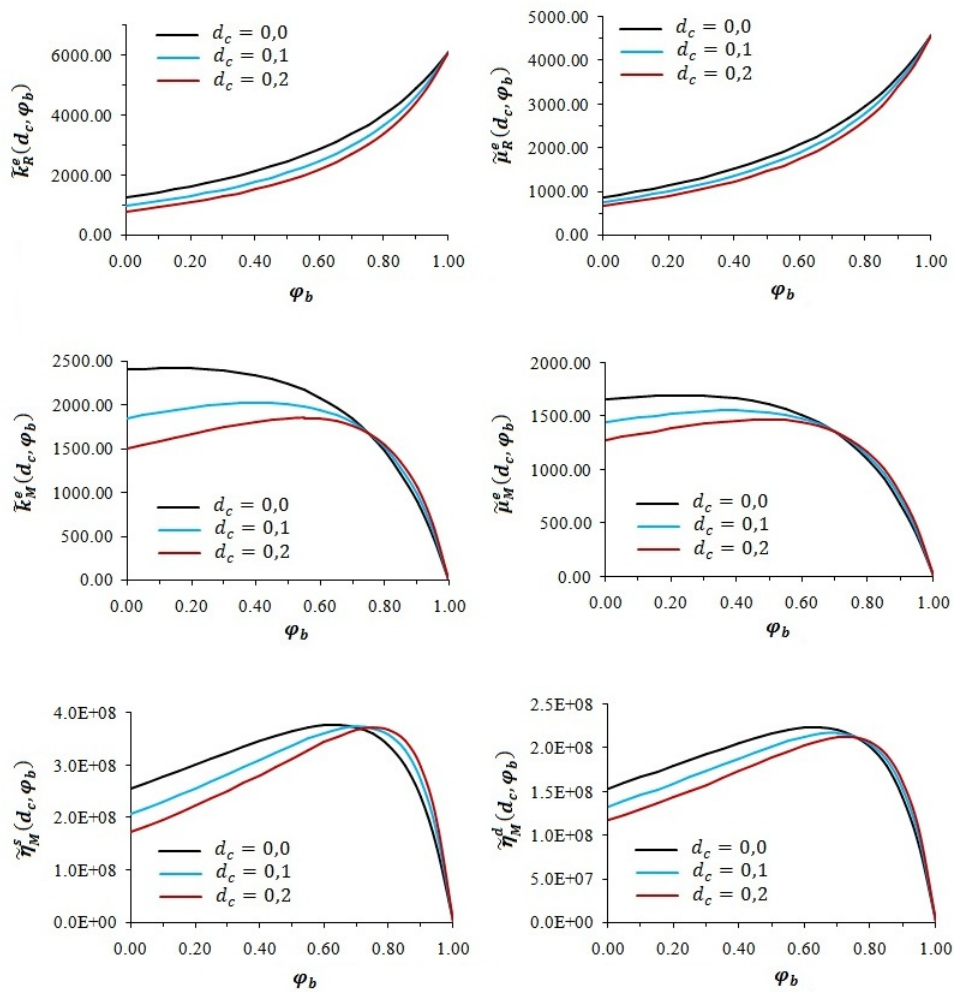


FIGURE G.3 – Estimations des modules du comportement effectif d'une maçonnerie viscoélastique microfissurée selon le modèle "MT+ITLC". Les propriétés du mortier hybride sain de type MM sont données dans la table (3.2), $E^b = 11000$ MPa et $\nu^b = 0,2$.

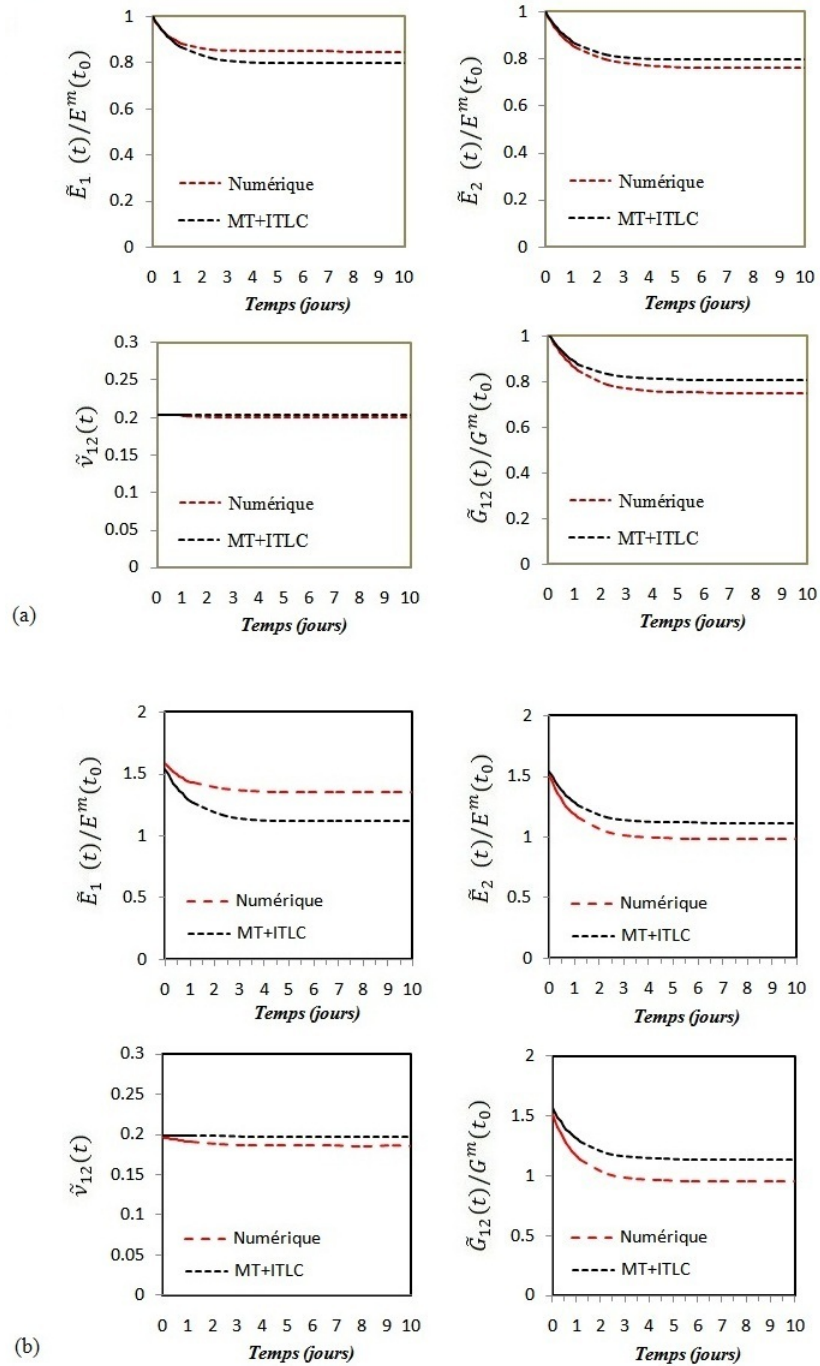


FIGURE G.4 – Comparaison des modules $\tilde{E}_{11}$, $\tilde{E}_{22}$ et $\tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $E^b = E^m$ - cas sain (cf. section (3.4.3.1)) (a) et $E^b \approx 2E^m(t_0)$ - cas microfissuré (cf. section (3.4.3.2)) (b) issus des modèles numérique et micromécanique "MT+ITLC".

procédure incrémentale sans passer par la conversion de la TLC. Ce schéma numérique fait appel à la méthode des différences finies qui permet d'approcher les fonctions dérivées $\dot{a}$ et $\ddot{a}$ comme cela a été proposé par S.T. Nguyen et *al.* [40, 90] lors de l'étude du fluage d'un béton de type Burgers. Ainsi, comme montré ci-dessous, cette démarche sera suivie pour une maçonnerie avec mortier v.l.n.v de type MM.

G.2.1 Forme incrémentale de la loi de MM

Comme mentionné précédemment, la fonction dérivée par rapport au temps de $\dot{a}$ peut être approchée par :

$$\dot{a} \simeq \frac{a(t+dt) - a(t)}{dt} \quad (\text{G.17})$$

Rappelons que la loi de MM est écrite dans (3.72). En introduisant (G.17) dans (3.72), celle-ci devient :

$$\left(\mathbb{S}_M^v + \frac{\mathbb{S}_M^e}{dt} \right) \sigma(t+dt) - \frac{\mathbb{S}_M^e}{dt} \sigma(t) = \left(\mathbb{X} + \frac{\mathbb{Y}}{dt} \right) \varepsilon(t+dt) - \frac{\mathbb{Y}}{dt} \varepsilon(t) \quad (\text{G.18})$$

On pose :

$$\mathbb{X} + \frac{\mathbb{Y}}{dt} = c_1 \mathbb{J} + c_2 \mathbb{K}, \quad \frac{\mathbb{Y}}{dt} = c_3 \mathbb{J} + c_4 \mathbb{K}, \quad \mathbb{S}_M^v + \frac{\mathbb{S}_M^e}{dt} = c_5 \mathbb{J} + c_6 \mathbb{K}, \quad \frac{\mathbb{S}_M^e}{dt} = c_7 \mathbb{J} + c_8 \mathbb{K} \quad (\text{G.19})$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3k_R^e}{\eta_M^s} + \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{k_R^e}{k_M^e} \right), & c_2 &= \frac{2\mu_R^e}{\eta_M^d} + \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{\mu_R^e}{\mu_M^e} \right) \\ c_3 &= \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{k_R^e}{k_M^e} \right), & c_4 &= \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{\mu_R^e}{\mu_M^e} \right) \\ c_5 &= \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{dt} \frac{1}{3k_M^e}, & c_6 &= \frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{dt} \frac{1}{2\mu_M^e} \\ c_7 &= \frac{1}{dt} \frac{1}{3k_M^e}, & c_8 &= \frac{1}{dt} \frac{1}{2\mu_M^e} \end{aligned}$$

La relation (G.18) peut alors se réécrire sous la forme :

$$(c_5 \mathbb{J} + c_6 \mathbb{K}) \sigma(t+dt) - (c_7 \mathbb{J} + c_8 \mathbb{K}) \sigma(t) = (c_1 \mathbb{J} + c_2 \mathbb{K}) \varepsilon(t+dt) - (c_3 \mathbb{J} + c_4 \mathbb{K}) \varepsilon(t) \quad (\text{G.20})$$

Levin [58] a présenté son théorème qui permet d'aborder l'homogénéisation des matériaux à constituants élastiques linéaires avec précontrainte ou déformation initiale. Le champ de contrainte macroscopique à l'instant $t+dt$ s'écrit sous la forme :

$$\sigma(t+dt) = \mathbb{C}_{MM}^{INC} : \varepsilon(t+dt) + \sigma_{MM}^p(t) \quad (\text{G.21})$$

où $\sigma_{MM}^p(t)$ est la précontrainte, qui a l'expression comme suit :

$$\sigma_{MM}^p(t) = - \left(\frac{c_3}{c_5} \mathbb{J} + \frac{c_4}{c_6} \mathbb{K} \right) \varepsilon(t) + \left(\frac{c_7}{c_5} \mathbb{J} + \frac{c_8}{c_6} \mathbb{K} \right) \sigma(t) \quad (\text{G.22})$$

Et le tenseur de rigidité fictif $\mathbb{C}_{MM}^{INC}$:

$$\mathbb{C}_{MM}^{INC} = \frac{c_1}{c_5} \mathbb{J} + \frac{c_2}{c_6} \mathbb{K} \quad (\text{G.23})$$

On note que :

$$\left(\frac{c_3}{c_5} \mathbb{J} + \frac{c_4}{c_6} \mathbb{K} \right) \varepsilon(t) = \left(\frac{c_7}{c_5} \mathbb{J} + \frac{c_8}{c_6} \mathbb{K} \right) \sigma_{RM}(t) \quad (\text{G.24})$$

avec $\sigma_{RM}(t) = \mathbb{C}_{RM}^e \varepsilon(t)$, $\mathbb{C}_{RM}^e = \mathbb{C} \mid_{t=0} = \mathbb{C}_M^e + \mathbb{C}_R^e$.

Remarquons que les coefficients c_i dépendent explicitement du pas de temps choisi et que la relation (G.21) qui lie $\sigma(t+dt)$ à $\varepsilon(t+dt)$ est formellement semblable à une équation d'état élastique linéaire avec une précontrainte $\sigma_{MM}^p(t)$.

Pour l'algorithme de calcul incrémental du comportement d'un mortier v.l.n.v. de type MM, on procède comme suit.

À l'instant $t_1 = 0$, la réponse instantanée est élastique. Seules les parties élastiques du ressort et de Maxwell contribuent à la rigidité du matériau. La loi de comportement (G.21) s'écrit :

$$\sigma_1 = \mathbb{C}_{RM}^e : \varepsilon_1 \quad (\text{G.25})$$

où $\mathbb{C}_{RM}^e = \mathbb{C}_R^e + \mathbb{C}_M^e$. À cet instant, la rigidité K_1 de la structure est fonction de la rigidité $\mathbb{C}_{RM}^e$ et du maillage. La relation entre le vecteur des déplacements nodaux et le vecteur des forces f_1 est :

$$u_1 = K_1^{-1} \cdot f_1 \quad (\text{G.26})$$

À partir de u_1 , on a la contrainte et la déformation par la loi de comportement élastique à l'instant souhaité selon la relation (G.21), avec la précontrainte $\sigma^p(t)$ calculée à l'instant précédent. Ainsi, pour l'instant $t_2 = dt$, la relation linéaire entre ε_2 et σ_2 s'écrit :

$$\sigma_2 = \mathbb{C} : \varepsilon_2 + \sigma_1^p \quad (\text{G.27})$$

où $\sigma_1^p = 0$ (cf. (G.24) et (G.25)). Ainsi, ε_2 et σ_2 sont déterminés par des calculs élastiques : $\sigma_2 = \mathbb{C} : \varepsilon_2$ ou $\varepsilon_2 = \mathbb{C}^{-1} : \sigma_2$.

Pour l'instant $t_i = (i-1) * dt$ avec $i > 2$, la contrainte σ_i et la déformation ε_i sont liées par la relation (G.21) avec σ_{i-1}^p non nul déterminé par (G.22).

G.2.2 Validation de la procédure incrémentale sur l'exemple d'une sphère creuse

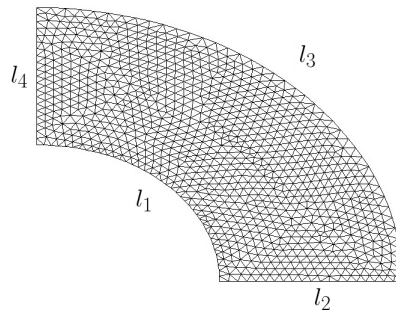


FIGURE G.5 – Maillage de la sphère creuse, [106]

On étudie maintenant le comportement de fluage d'une sphère creuse (voir figure (G.5)) soumise à une traction $\Sigma = \Sigma_0 \mathbf{i}$ sur son bord l_3 et une pression unité fictive sur le bord l_1 qui donne la force nodale P . La déformation macroscopique est déterminée par :

$$\bar{\varepsilon} = \varphi \bar{\varepsilon}^p + (1 - \varphi) \bar{\varepsilon}^s \quad (\text{G.28})$$

où φ est la fraction volumique de la phase poreuse. $\bar{\varepsilon}^s$ est la moyenne du champ de déformation de la phase solide, donnée par :

$$\bar{\varepsilon}^s = \frac{1}{\Omega^s} \int_{\Omega^s} \frac{\text{tr}(\varepsilon)}{3} d\Omega \quad (\text{G.29})$$

La déformation moyenne du pore s'écrit sous la forme :

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{P.U}{3.\Omega^p} \quad (\text{G.30})$$

avec U le vecteur des déplacements nodaux. Ω^s et Ω^p sont les volumes de la phase solide et poreuse, respectivement. La méthode des éléments finis nous permet de calculer la déformation $\bar{\varepsilon}$ à l'instant t .

Pour valider le calcul numérique, on détermine analytiquement cette déformation en utilisant la relation bien connue pour le cas élastique :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Sigma_0}{3k(\varphi)} \quad (\text{G.31})$$

où k est le module de compressibilité effectif de la sphère estimé par le modèle de Hashin $k(\varphi) = k_s \left(1 - \varphi \frac{3k_s + 4\mu_s}{3\varphi k_s + 4\mu_s} \right)$. Comme le matériau est viscoélastique linéaire, la déformation E est obtenue par l'inversion de la TLC de $\bar{\varepsilon}^*$ donnée par :

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{\Sigma_0}{3k^*(\varphi)} \quad (\text{G.32})$$

où $k^*(\varphi) = k^* \left(1 - \varphi \frac{3k^* + 4\mu^*}{3\varphi k^* + 4\mu^*} \right)$, k^* et μ^* sont définis par (E.19). En utilisant les données viscoélastiques de la table (3.2) [101] pour un mortier hybride de type MM, on obtient les déformations macroscopiques analytiques et numériques montrées dans la figure (G.6). Avec dt suffisamment petit (i.e $dt = 10^4$ s), on a une très bonne validation entre ces deux calculs.

G.2.3 Application à la maçonnerie v.l.n.v. microfissurée

Dans les sections (G.2.1) et (G.2.2) nous avons proposé et validé la procédure incrémentale permettant d'obtenir le comportement d'un mortier viscoélastique microfissuré à l'instant t . Les calculs sont réalisés pas à pas avec la méthode des éléments finis sur un VER (voir figure (1.20)-b) en utilisant la loi de comportement rhéologique exacte du mortier (i.e. Maxwell modifié) par une formulation incrémentale. Dans cette partie, une expérimentation numérique sera effectuée afin de vérifier l'évolution de la fonction de fluage du mortier et les rigidités effectives pour différents rapports entre le module d'Young de la brique et du

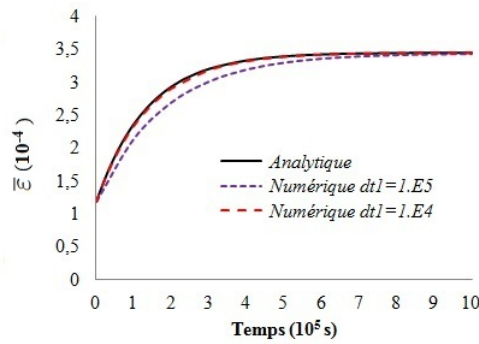


FIGURE G.6 – Déformation de fluage pour la fraction volumique $\varphi = 0,125$.

mortier, E^b/E^m . Ces calculs sont menés pour $dt = 10^4$ s qui est suffisamment petit comme montré à l'étape de validation (cf. figure (G.6)). Les briques et le mortier sont supposés parfaitement collés (cas sans interface).

Notons que la relation entre la précontrainte σ_{MM}^p exprimée à l'instant précédent t dans le mortier (voir (G.22)) et la force nodale fictive P_i est :

$$P_i = \mathbb{A}^m : \sigma_{MM}^p \quad (\text{G.33})$$

avec $\mathbb{A}^m$ transformation des contraintes en forces.

La précontrainte σ_{MM}^p est alors transformée en force nodale fictive sur le mortier selon cette relation. On constitue ainsi un champ de forces en utilisant l'opérateur BSIGMA de Castem. Cette force est ensuite considérée comme une force extérieure sur le mortier en plus du chargement de déplacement au bord du VER. Alors, le comportement global de la cellule périodique est élastique pour chaque pas du temps et s'écrit sous cette forme :

$$\bar{\sigma}_{cell}(t + dt, d_c) = \tilde{\mathbb{C}}_{cell}(t + dt, d_c) : \bar{\varepsilon}(t + dt, d_c) \quad (\text{G.34})$$

Notons que ce calcul dépend aussi de la densité de fissures d_c du mortier en plus de sa dépendance au temps. Dans ce travail, on se limite au cas sans propagation de fissures avec d_c fixé ($d_c = 0, 0$ ou $0, 1$).

Annexe H

Résultats

H.1 Cas d'une colonne maçonnée (1D)

Voir les figures (H.1) et (H.2).

H.2 Cas d'un mur maçonné (2D)

Cas sain du mortier (S7)

Pour ces calculs, on suppose que l'instant de référence est $t_0 = 28$ jours. Les propriétés matériaux du mortier sont celles proposées par Choi et al. [83] de l'ensemble d'échantillons S7 (cf. annexe (F.1)). Pour $E^m(t_0) = 1000$ MPa la fonction visqueuse (cf. (F.1)) pour le modèle USBR (S7) est :

$$\Phi_{USBR}^m(t) = \frac{1}{1 + F_U E(t_0) \ln\left(\frac{t-t_0}{\tau_U} + 1\right)} = \frac{1}{1 + 0,014 \ln(t - 27)} \quad (\text{H.1})$$

En introduisant (H.1) dans (3.116) et en rappelant que les rigidités $\tilde{C}_{ijkl}$ peuvent s'exprimer en fonction des constantes de l'ingénieur : modules de cisaillement $\tilde{\mu}_{12}$, modules d'Young effectifs $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ et coefficients de Poisson effectifs $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{21}$ (cf. équation (1.162)) :

$$\tilde{C}_{1111} = \frac{\tilde{E}_1}{1 - \tilde{\nu}_{12} \cdot \tilde{\nu}_{21}}, \quad \tilde{C}_{2222} = \frac{\tilde{E}_2}{1 - \tilde{\nu}_{12} \cdot \tilde{\nu}_{21}}, \quad \tilde{C}_{1122} = \frac{\tilde{E}_1 \cdot \tilde{\nu}_{21}}{1 - \tilde{\nu}_{12} \cdot \tilde{\nu}_{21}}, \quad \tilde{C}_{1212} = \tilde{\mu}_{12},$$

il est possible d'évaluer les propriétés effectives ($\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\mu}_{12}$) d'une cellule périodique de maçonnerie (2D) dans la table (H.1). De même, les propriétés effectives d'une cellule de maçonnerie avec mortiers (S7) de type Burgers ou MM sont présentées dans la table (H.1). Les résultats en termes d'évolutions de contraintes et déformations avec la coordonnée $\vec{x}$ (abscisse) du mur au niveau de la coupe "A-A" pour les modèles USBR, Burgers et MM sont reportés respectivement dans les figures (H.3), (H.4) et (H.5). La comparaison des trois modèles rhéologiques, USBR, Burgers et MM d'un mortier (S7), est présentée sur les figures (H.6) et (H.7).

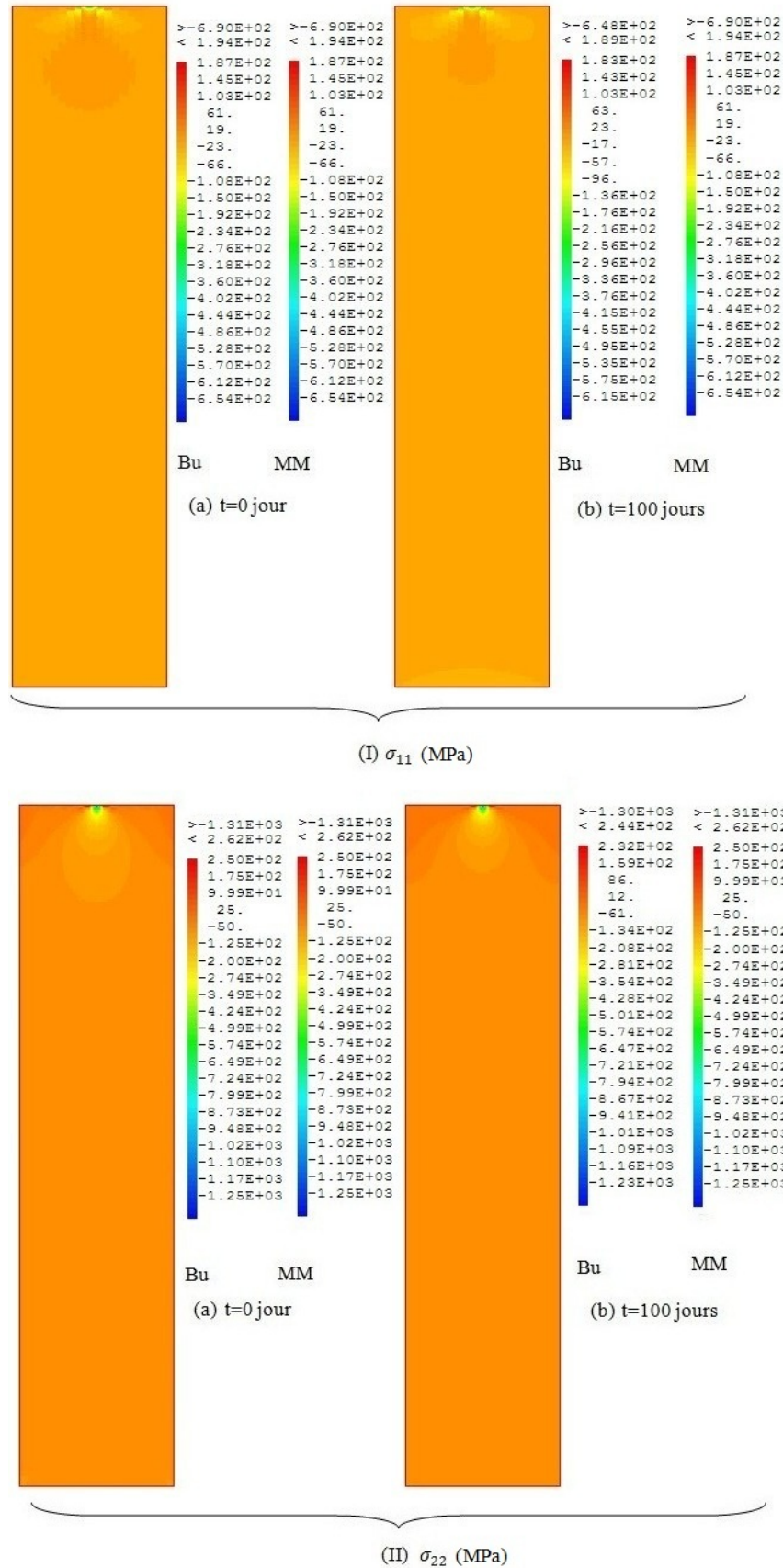


FIGURE H.1 – Cartes de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) de la colonne maçonnée sous compression à $t = 0$ jour (a) et $t = 100$ jours (b). Mortier hybride microfissuré ($d_c = 0,1$) de type Burgers et MM - cas de briques élastiques.

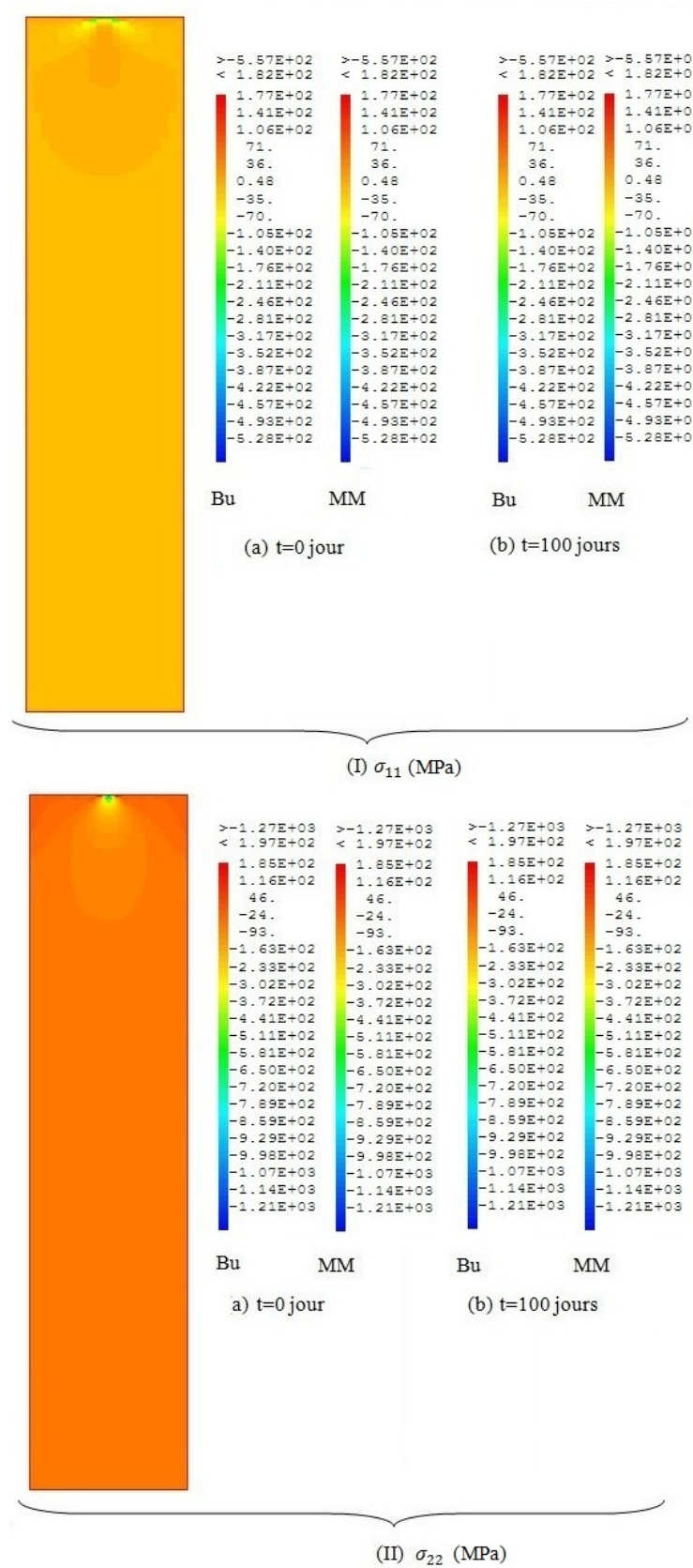


FIGURE H.2 – Cartes de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) de la colonne maçonnée sous compression à $t = 0$ jour (a) et $t = 100$ jours (b). Mortier hybride microfissuré ($d_c = 0,1$) de type Burgers et MM - cas de briques rigides.

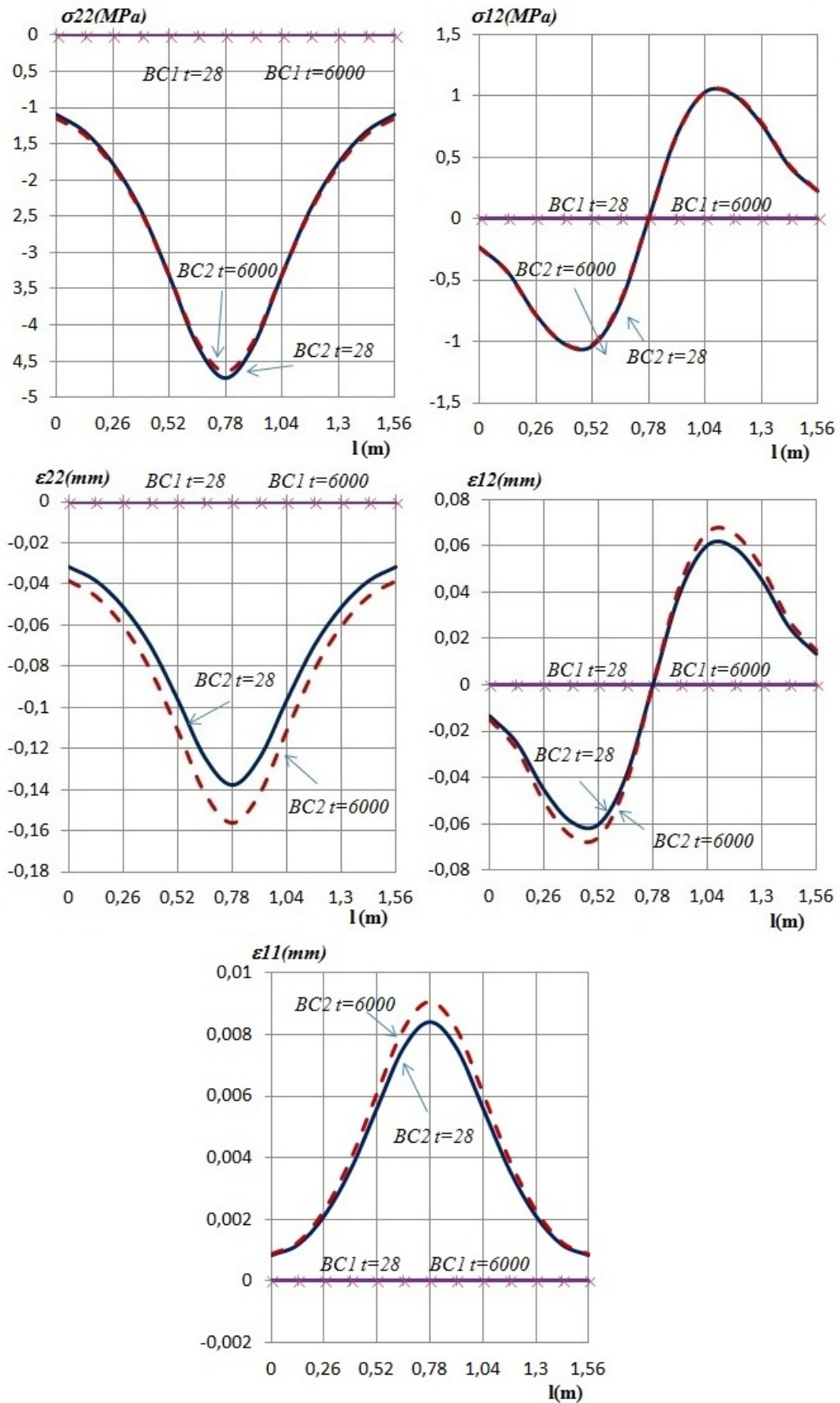


FIGURE H.3 – Mortier (S7) de type USBR à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ϵ_{22} , ϵ_{12} et ϵ_{11} au niveau de la coupe "A-A".

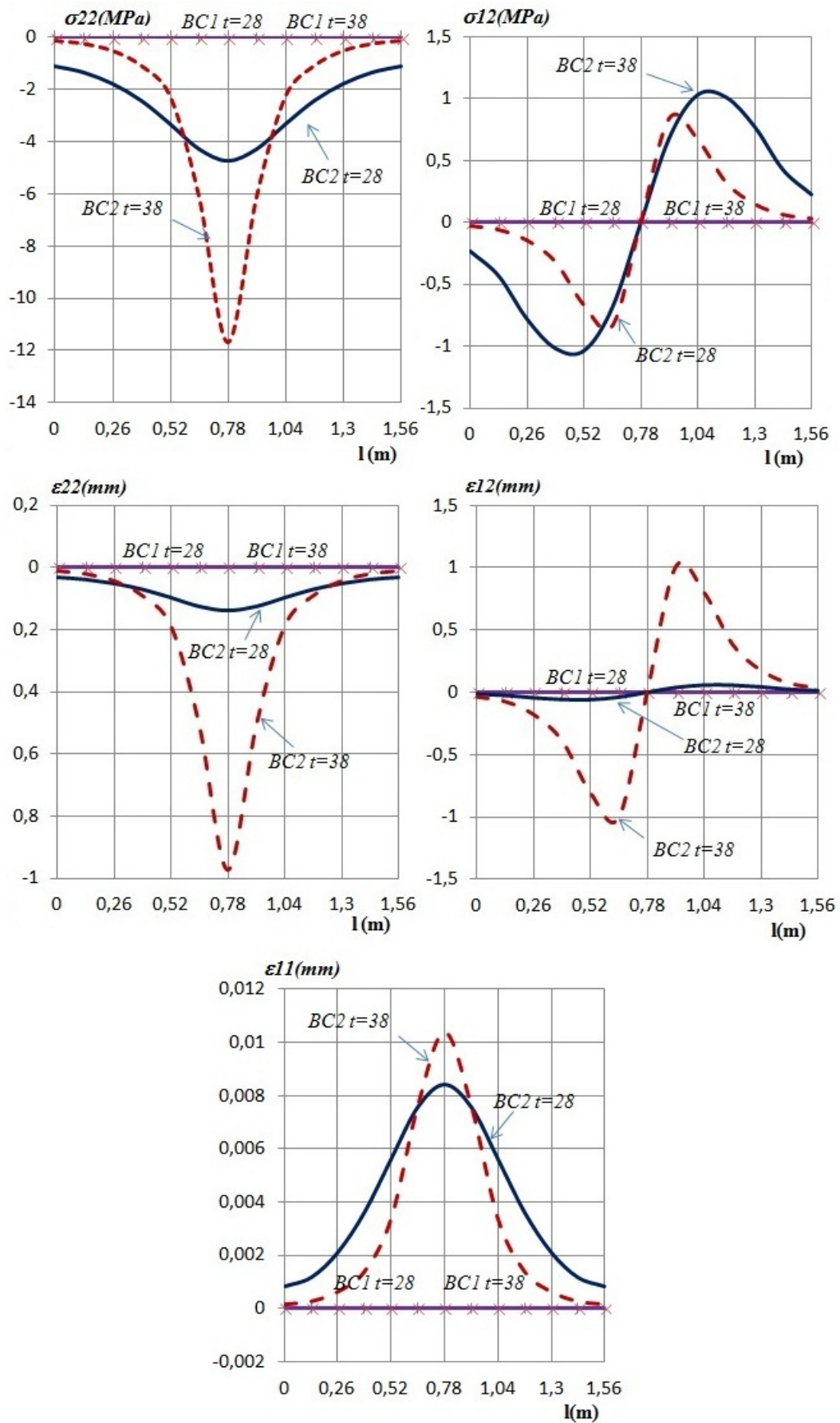


FIGURE H.4 – Mortier (S7) de type Burgers à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ε_{22} , ε_{12} et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".

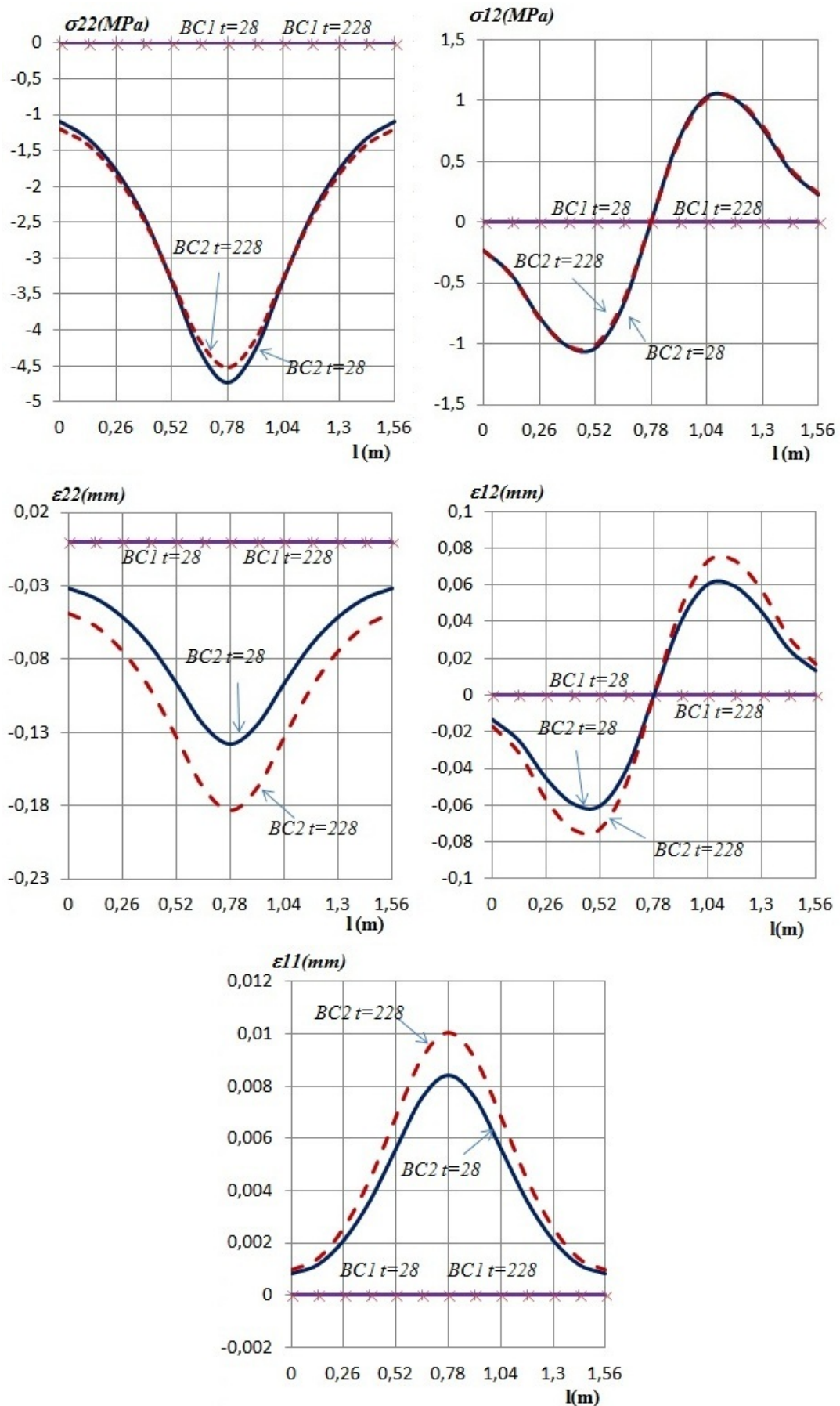


FIGURE H.5 – Mortier (S7) de type MM à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ε_{22} , ε_{12} et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".

Modèle	t (jours)	$\tilde{E}_1$ (MPa)	$\tilde{E}_2$ (MPa)	$\tilde{\nu}_{12}$	$\tilde{\mu}_{12}$ (MPa)
USBR S7	28	32191,1	4085,0	0,13	2055,3
	6000	29714,1	3535,4	0,125	1872,4
Burgers S7	28	32191,1	4085,0	0,13	2055,3
	38	17028,9	1431	0,09	100,0
MM S7	28	32191,1	4085,0	0,13	2055,3
	228	26719,1	2937,3	0,119	1657,5

TABLE H.1 – Propriétés effectives d'une cellule périodique (2D) de maçonnerie.

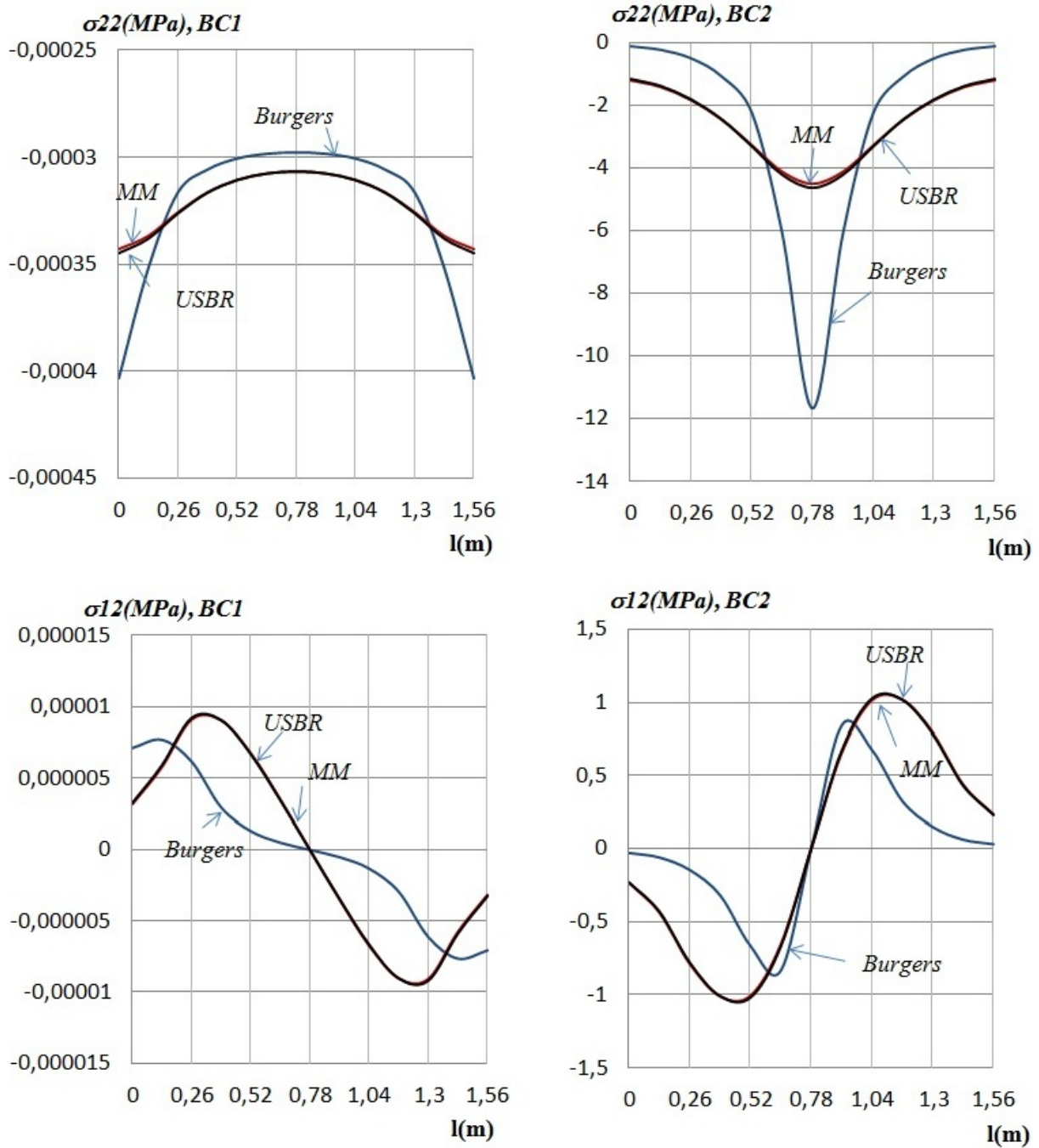


FIGURE H.6 – Comparaison des contraintes locales pour les deux cas de chargements BC1 et BC2. Mortier (S7) sain de type USBR (6000 jours), Burgers (38 jours) et MM (228 jours).

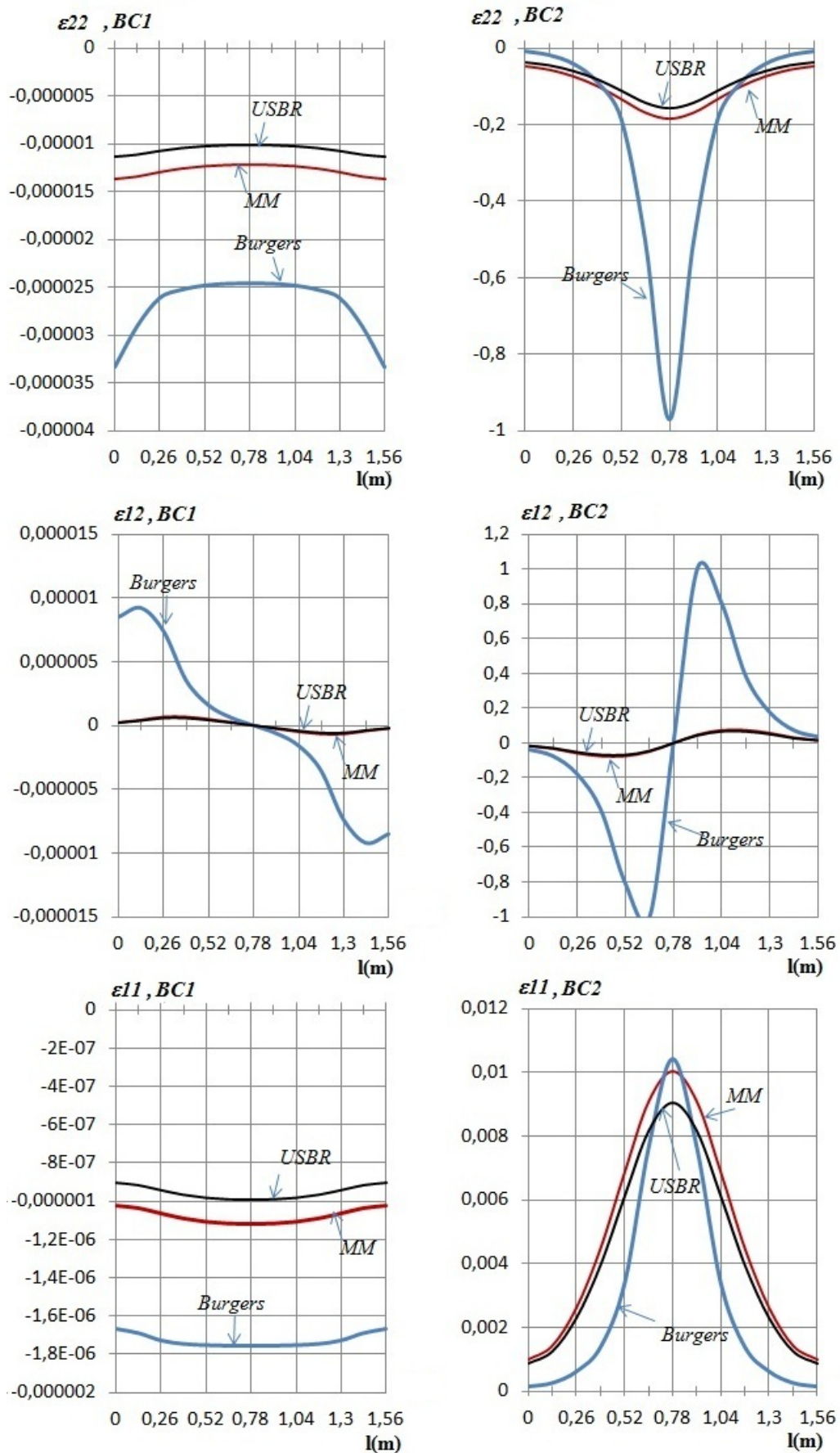


FIGURE H.7 – Comparaison des déformations locales pour les deux cas de chargements BC1 et BC2. Mortier (S7) sain de type USBR (6000 jours), Burgers (38 jours) et MM (228 jours).

Bibliographie

- [1] A. Cecchi and K. Sab, "A comparison between a 3d discrete model and two homogenised plate models for periodic elastic brickwork," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, no. 9 - 10, pp. 2259 - 2276, 2004.
- [2] A. Zucchini and P. Lourenço, "A micro-mechanical homogenisation model for masonry : Application to shear walls," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, no. 3 - 4, pp. 871 - 886, 2009.
- [3] L. Abdou, R. A. Saada, F. Meftah, and A. Mebarki, "Experimental investigations of the joint-mortar behaviour," *Mechanics Research Communications*, vol. 33, no. 3, pp. 370 - 384, 2006.
- [4] K. Andreev, S. Sinnema, A. Rekik, S. Allaoui, E. Blond, and A. Gasser, "Compressive behaviour of dry joints in refractory ceramic masonry," *Construction and Building Materials*, vol. 34, pp. 402 - 408, 2012.
- [5] T. Nguyen, E. Blond, A. Gasser, and T. Prietl, "Homogénéisation d'une maçonnerie réfractaire sans mortier," in *Matériaux 2006*, (Dijon, France), 2006.
- [6] M. Landreau, *Modélisation thermomécanique d'un piédroit de four à coke*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université d'Orléans, 2009.
- [7] S. Pietruszczak and X. Niu, "A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, no. 5, pp. 531 - 546, 1992.
- [8] S. Bati, G. Ranocchiali, G. Ranocchiali, and L. Rovero, "A micromechanical model for linear homogenization of brick masonry," *Materials and Structures*, vol. 32, no. 1, pp. 22 - 30, 1999.
- [9] Y. H. Zhao and G. J. Weng, "Effective elastic moduli of ribbon-reinforced composites," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, no. 1, pp. 158 - 167, 1990.
- [10] K. Tanaka and T. Mori, "The hardening of crystals by non-deforming particles and fibres," *Acta Metallurgica*, vol. 18, no. 8, pp. 931-941, 1970.
- [11] T. Mori and K. Tanaka, "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions," *Acta Metallurgica*, vol. 21, no. 5, pp. 571 - 574, 1973.
- [12] P. Lourenço and J. Rots, "On the use of homogenisation techniques for the analysis of masonry structures," *Masonry International*, vol. 11, no. 1, pp. 26 - 32, 1997.
- [13] P. Lourenço, *Computational strategies for masonry structures*. Delft University Press, 1996.
- [14] J. Brooks, "Composite modelling of masonry deformation," *Materials and Structures*, vol. 23, no. 4, pp. 241-251, 1990.
- [15] C. R., "O dynamicznych modulach sprzyzystosci murow z cegly.," *XLV Konferencja Naukowa Wroclaw - Krynica*, pp. 117-124, 1999.
- [16] P. A. Cundall, "A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems," in *Proc. Symp. Int. Rock Mech.*, vol. 2, (Nancy), 1971.
- [17] A. Rafiee, M. Vinches, and C. Bohatier, "Modelling and analysis of the nîmes arena and the arles aqueduct subjected to a seismic loading, using the non-smooth contact dynamics method," *Engineering Structures*, vol. 30, no. 12, pp. 3457 - 3467, 2008.
- [18] S. Ali and A. Page, "Finite element model for masonry subjected to concentrated loads," *Journal of Structural Engineering*, vol. 114, no. 8, pp. 1761-1784, 1988.
- [19] G. Alfano and E. Sacco, "Combining interface damage and friction in a cohesive-zone model," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 68, no. 5, pp. 542 - 582, 2006.
- [20] C. Mauge and M. Kachanov, "Interacting arbitrarily oriented cracks in anisotropic matrix. stress intensity factors and effective moduli," *International Journal of Fracture*, vol. 58, pp. 69-74, 1992.

- [21] C. Mauge and M. Kachanov, "Anisotropic material with interacting arbitrarily oriented cracks. stress intensity factors and crack-microcrack interactions," *International Journal of Fracture*, vol. 65, pp. 115–139, 1994.
- [22] R. Cardona, "Two theories for fluid substitution in porous rocks with aligned cracks.," in *Proceedings*, (SEG), p. 173–176, 2002.
- [23] P. B. Lourenço, G. Milani, A. Tralli, and A. Zucchini, "Analysis of masonry structures : review of and recent trends in homogenization techniques," this article is one of a selection of papers published in this special issue on masonry., *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 34, no. 11, pp. 1443–1457, 2007.
- [24] A. Anthoine, "Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 2, pp. 137 – 163, 1995.
- [25] G. Pande, J. Liang, and J. Middleton, "Equivalent elastic moduli for brick masonry," *Computers and Geotechnics*, vol. 8, no. 3, pp. 243 – 265, 1989.
- [26] A. Cecchi and K. Sab, "A multi-parameter homogenization study for modeling elastic masonry," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21, no. 2, pp. 249 – 268, 2002.
- [27] A. Zaoui and D. d. p. Ecole polytechnique, *Matériaux hétérogènes et composites*. Palaiseau : Ecole polytechnique, 1998.
- [28] R. Luciano and E. Sacco, "Variational methods for the homogenization of periodic heterogeneous media," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 17, no. 4, pp. 599 – 617, 1998.
- [29] G. Wang, S. Li, H. Nguyen, and N. Sitar, "Effective elastic stiffness for periodic masonry structures via eigenstrain homogenization," *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 19, no. 3, pp. 269 – 277, 2007.
- [30] A. Page, "Finite element model for masonry," *Journal of the Structural Division*, vol. 104, no. 8, pp. 1267–1285, 1978.
- [31] A. Cecchi and K. Sab, "A homogenized reissner-mindlin model for orthotropic periodic plates : Application to brickwork panels," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 18-19, pp. 6055 – 6079, 2007.
- [32] A. Cecchi and K. Sab, "Out of plane model for heterogeneous periodic materials : the case of masonry," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21, no. 5, pp. 715 – 746, 2002.
- [33] A. Cecchi and R. D. Marco, "Homogenization of masonry walls with a computational oriented procedure. rigid or elastic block?," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 19, no. 3, pp. 535 – 546, 2000.
- [34] C. A. and B. A., "Homogenisation procedure to evaluate the effectiveness of masonry strengthening by cfrp repointing technique," *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, pp. 12 – 27, 2008.
- [35] A. Barbieri and A. Cecchi, "Analysis of masonry columns by a 3d f.e.m. homogenisation procedure," *Proceedings of the 2nd IASME / WSEAS International Conference on Continuum Mechanics*, pp. 68 – 75, 2007.
- [36] A. Cecchi and A. Tralli, "A homogenized viscoelastic model for masonry structures," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, no. 13, pp. 1485–1496, 2012.
- [37] L. Dormieux, D. Kondo, and F.-J. Ulm, *Microporomechanics*. John Wiley & Sons, 2006.
- [38] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini, *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermes science, 2001.
- [39] M. A. Biot, "Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena," *Journal of Applied Physics*, vol. 25, no. 11, pp. 1385 – 1391, 1954.
- [40] S. T. Nguyen, *Propagation de fissures et endommagement par microfissures des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants*. PhD thesis, 2010.
- [41] T. Mura, *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff, 1987.
- [42] P. Castaneda and J. Willis, "The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, no. 12, pp. 1919 – 1951, 1995.

- [43] Y. Benveniste, "A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials," *Mechanics of Materials*, vol. 6, no. 2, pp. 147 – 157, 1987.
- [44] L. Dormieux and D. Kondo, "Stress-based estimates and bounds of effective elastic properties : The case of cracked media with unilateral effects," *Computational Materials Science*, vol. 46, no. 1, pp. 173 – 179, 2009.
- [45] S. Beurthey and A. Zaoui, "Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 19, no. 1, pp. 1 – 16, 2000.
- [46] M. Bornert, C. Stolz, and A. Zaoui, "Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, no. 3, pp. 307 – 331, 1996.
- [47] A. Zaoui, "Structural morphology and constitutive behaviour of microheterogeneous materials," in *Continuum Micromechanics* (P. Suquet, ed.), vol. 377 of *International Centre for Mechanical Sciences*, pp. 291–347, Springer Vienna, 1997.
- [48] A. Zaoui, "Continuum micromechanics : Survey," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, no. 8, pp. 808–816, 2002.
- [49] S. Nguyen, L. Jeannin, L. Dormieux, and F. Renard, "Fracturing of viscoelastic geomaterials and application to sedimentary layered rocks," *Mechanics Research Communications*, vol. 49, pp. 50 – 56, 2013.
- [50] L. Thomsen, "Elastic anisotropy due to aligned cracks in porous rock1," *Geophysical Prospecting*, vol. 43, no. 6, pp. 805 – 829, 1995.
- [51] R. Brown and J. Korrington, "On the dependence of the elastic properties of a porous rock on the compressibility of the pore fluid," *Geophysics*, vol. 40, no. 4, pp. 608 – 616, 1975.
- [52] B. Shafiro and M. Kachanov, "Materials with fluid-filled pores of various shapes : Effective elastic properties and fluid pressure polarization," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, no. 27, pp. 3517 – 3540, 1997.
- [53] V. Levin, S. Kanaun, and G. R. Jarillo, "Effective properties of viscoelastic media with crack-like inclusions," *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 53, pp. 1–9, 2012.
- [54] F. Gassmann, "On elasticity of porous media," 1951. en allemagne.
- [55] S. Kanaun and V. Levin, "Propagation of elastic waves through media with thin crack-like inclusions," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 50, no. 2, pp. 231 – 239, 1986.
- [56] S. Kanaun and V. Levin, *Self-Consistent Methods for Composites. Vol.1 : Static Problems*. Berlin : Springer, 2008.
- [57] J. Korrington and D. D. Thompson, "Comment on the self-consistent imbedding approximation in the theory of elasticity of porous media," *Journal of Geophysical Research*, vol. 82, no. 5, pp. 933 – 934, 1977.
- [58] V. Levin, M. Markov, and S. Kanaun, "Effective field method for seismic properties of cracked rocks," *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 109, no. B8, 2004.
- [59] A. Rekik and F. Lebon, "Un modèle multi-échelle d'interface : application aux interfaces mortier/brique," in *9eme Colloque National en Calcul des Structures*, (Giens, France), p. 6, 2009.
- [60] A. Zucchini and P. Lourenço, "A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, no. 12, pp. 3233 – 3255, 2002.
- [61] F. Fouchal, F. Lebon, and I. Titeux, "Contribution to the modelling of interfaces in masonry construction," *Construction and Building Materials*, vol. 23, no. 6, pp. 2428 – 2441, 2009.
- [62] J. Idris, T. Verdel, and M. Al-Heib, "Numerical modelling and mechanical behaviour analysis of ancient tunnel masonry structures," *Tunnelling and Underground Space Technology*, vol. 23, no. 3, pp. 251 – 263, 2008.
- [63] A. Rekik and F. Lebon, "Homogenization methods for interface modeling in damaged masonry," *Advances in Engineering Software*, vol. 46, no. 1, pp. 35 – 42, 2012.
- [64] A. Rekik and F. Lebon, "Identification of the representative crack length evolution in a multi-level interface model for quasi-brittle masonry," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, no. 22 - 23, pp. 3011 – 3021, 2010.

- [65] A. Gabor, E. Ferrier, E. Jacquelin, and P. Hamelin, "Analysis and modelling of the in-plane shear behaviour of hollow brick masonry panels," *Construction and Building Materials*, vol. 20, no. 5, pp. 308 – 321, 2006.
- [66] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, and S. Pagano, "Micromechanical-based criteria for the calibration of cohesive zone parameters," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 246, pp. 206 – 214, 2013.
- [67] L. Abdou, R. Ami Saada, F. Meftah, and A. Mebarki, "Cisaillement de la maçonnerie : aspects expérimentaux et modélisation," in *17ème Congrès Français de Mécanique*, (Troyes, France), pp. 83–88, 2005.
- [68] M. Shahidi, B. Pichler, and C. Hellmich, "Viscous interfaces as source for material creep : A continuum micromechanics approach," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 45, pp. 41 – 58, 2014.
- [69] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu, "A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, no. 34, pp. 383 – 399, 1999.
- [70] A. Alberto, P. Antonaci, and S. Valente, "Damage analysis of brick-to-mortar interfaces," *Procedia Engineering*, vol. 10, pp. 1151 – 1156, 2011.
- [71] L. Macorini and B. Izzuddin, "Nonlinear analysis of masonry structures using mesoscale partitioned modelling," *Advances in Engineering Software*, vol. 60-61, pp. 58–69, 2013.
- [72] L. Macorini and B. A. Izzuddin, "A non-linear interface element for 3d mesoscale analysis of brick-masonry structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, no. 12, pp. 1584 – 1608, 2010.
- [73] M. Cocu, "Existence of solutions of signorini problems with friction," *International Journal of Engineering Science*, vol. 22, no. 5, pp. 567 – 575, 1984.
- [74] H. C. Biscaia, C. Chastre, and M. A. Silva, "Modelling gfrp-to-concrete joints with interface finite elements with rupture based on the mohr-coulomb criterion," *Construction and Building Materials*, vol. 47, pp. 261 – 273, 2013.
- [75] V. Acary, *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés*. PhD thesis, 2001.
- [76] B. Chetouane, F. Dubois, M. Vinches, and C. Bohatier, "Nscd discrete element method for modelling masonry structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, no. 1, pp. 65 – 94, 2005.
- [77] M. Anitescu, "Optimization-based simulation of nonsmooth rigid multibody dynamics," 2004.
- [78] F. Lebon, R. Rizzoni, and S. Ronel-Idrissi, "Asymptotic analysis of some non-linear soft thin layers," *Computers & Structures*, vol. 82, no. 2326, pp. 1929 – 1938, 2004.
- [79] C. Mauge and M. Kachanov, "Effective elastic properties of an anisotropic material with arbitrarily oriented interacting cracks," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 42, no. 4, pp. 561 – 584, 1994.
- [80] A. Gabor, A. Bennani, E. Jacquelin, and F. Lebon, "Modelling approaches of the in-plane shear behaviour of unreinforced and frp strengthened masonry panels," *Composite Structures*, vol. 74, no. 3, pp. 277 – 288, 2006.
- [81] O. Avila-Pozos, A. Klarbring, and A. Movchan, "Asymptotic model of orthotropic highly inhomogeneous layered structure," *Mechanics of Materials*, vol. 31, no. 2, pp. 101 – 116, 1999.
- [82] A. Klarbring and A. Movchan, "Asymptotic modelling of adhesive joints," *Mechanics of Materials*, vol. 28, no. 1–4, pp. 137 – 145, 1998.
- [83] K.-K. Choi, S. L. Lissel, and M. M. Reda Taha, "Rheological modelling of masonry creep," *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 34, no. 11, pp. 1506–1517, 2007.
- [84] S. Ignoul, L. Schueremans, J. Tack, L. Swinnen, S. Feytons, L. Binda, D. V. Gemert, and K. V. Balen, "Creep behavior of masonry structures - failure prediction based on a rheological model and laboratory tests," *Conference : Structural Analysis of Historical Constructions*, no. 8, pp. 913–920, 2006.
- [85] A. A. Griffith, "The phenomena of rupture and flow in solids," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 221, no. 582-593, pp. 163–198, 1921.

- [86] H. Hoang-Duc and G. Bonnet, "A series solution for the effective properties of incompressible viscoelastic media," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 2, pp. 381 – 391, 2014.
- [87] T. L. COST, "Approximate laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis," *AIAA Journal*, vol. 2, pp. 2157–2166, 1964.
- [88] C. Donolato, "Analytical and numerical inversion of the laplace-carson transform by a differential method," *Computer Physics Communications*, vol. 145, no. 2, pp. 298 – 309, 2002.
- [89] M. Levesque, M. Gilchrist, N. Bouleau, K. Derrien, and D. Baptiste, "Numerical inversion of the laplace-carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media," *Computational Mechanics*, vol. 40, no. 4, pp. 771–789, 2007.
- [90] S. T. Nguyen and L. Dormieux, "A burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid," *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 20, no. 8, pp. 1116 – 1129, 2011.
- [91] R. Schapery, "A method of viscoelastic stress analysis using elastic solutions," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 279, no. 4, pp. 268 – 289, 1965.
- [92] A. Rekik, c. A. Fran M. Bornert, and A. Zaoui, "Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization : A methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 10, pp. 3468 – 3496, 2007.
- [93] T. L. Cost and E. B. Becker, "A multidata method of approximate laplace transform inversion," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 2, no. 2, pp. 207–219, 1970.
- [94] J. Salencon, *Viscoélasticité pour le calcul des structures*, vol. 1. Palaiseau : Editions de l'école polytechnique les Presses des Ponts et chaussées, 2009.
- [95] D. Georgievskii, "Methods of investigation of boundary value problems in viscoelasticity theory," *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 14, no. 3, pp. 262–274, 2007.
- [96] Q. V. Le, *Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes : application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enceintes de centrales nucléaires*. PhD thesis, 2008.
- [97] D. Elliott, "The classical collocation method for singular integral equations," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 19, no. 4, pp. 816–832, 1982.
- [98] Y. M. Wang and G. J. Weng, "The influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 59, no. 9, pp. 510 – 518, 1992.
- [99] A. Rekik and R. Brenner, "Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization," *Mechanics Research Communications*, vol. 38, no. 4, pp. 305 – 308, 2011.
- [100] J. Zhu, Y. Cao, and J. Chen, "Transversal inertial effect on relaxation/retardation time of cement mortar under harmonic wave," *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 21, no. 1, pp. 44 – 50, 2008.
- [101] E. Verstrynge, L. Schueremans, and D. Gemert, "Time-dependent mechanical behavior of lime-mortar masonry," *Materials and Structures*, vol. 44, no. 1, pp. 29–42, 2011.
- [102] M. Kaliske and H. Rothert, "Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains," *Computational Mechanics*, vol. 19, no. 3, pp. 228–239, 1997.
- [103] A. Cecchi and A. Taliercio, "A comparison between numerical and analytical homogenized models for visco-elastic brickwork," in *XXI Congresso AIMETA Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata*, (Torino, Italy), pp. 1–10, 2013.
- [104] E. Harboe and U. S. B. of Reclamation, *Creep of Concrete Under High Intensity Loading*. Bureau of Reclamation, 1956. Book.
- [105] G. L. England and I. J. Jordaan, "Time-dependent and steady-state stresses in concrete structures with steel reinforcement, at normal and raised temperatures," *Magazine of Concrete Research*, vol. 27, pp. 131 – 142, 1975.
- [106] S. T. Nguyen, L. Dormieux, Y. L. Pape, and J. Sanahuja, "Crack propagation in viscoelastic structures : Theoretical and numerical analyses," *Computational Materials Science*, vol. 50, no. 1, pp. 83 – 91, 2010.
- [107] N. G. Shrive, E. Y. Sayed-Ahmed, and D. Tilleman, "Creep analysis of clay masonry assemblages," *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 24, no. 3, pp. 367–379, 1997.
- [108] G. Pande, J. Middleton, and B. Kralj, *Computer Methods in Structural Masonry - 4 Fourth International Symposium*. Routledge, 2004.

- [109] D. Lenczner, "Creep and prestress losses in brick masonry," *The Structural Engineer*, vol. 64, no. 3, pp. 57–62, 1986.
- [110] G. Milani, P. Lourenço, and A. Tralli, "Homogenised limit analysis of masonry walls, part i : Failure surfaces," *Computers & Structures*, vol. 84, no. 3-4, pp. 166 – 180, 2006.
- [111] S. Churilov and E. Dumova-Jovanoska, "In-plane shear behaviour of unreinforced and jacketed brick masonry walls," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 50, pp. 85 – 105, 2013.
- [112] D. Bigoni and G. Noselli, "Localized stress percolation through dry masonry walls. part ii - modeling," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 29, no. 3, pp. 299 – 307, 2010.
- [113] P. Boisse, A. Gasser, and J. Rousseau, "Computations of refractory lining structures under thermal loadings," *Advances in Engineering Software*, vol. 33, no. 7-10, pp. 487 – 496, 2002.
- [114] P. Boisse, A. Gasser, J. Poirier, and J. Rousseau, "Simulations of thermomechanical behavior of composite refractory linings," *Composites Part B : Engineering*, vol. 32, no. 5, pp. 461 – 474, 2001.
- [115] J. Brulin, E. Blond, E. De Bilbao, A. Rekik, M. Landreau, A. Gasser, and Y. Colleville, "Experimental set-up for mortar / brick interface strength characterization at high temperature," in *UNITECR'11*, (Kyoto, Japan), 2011. CD-ROM.
- [116] J. D. Eshelby, "The continuum theory of lattice defects," vol. 3 of *Solid State Physics*, pp. 79 – 144, Academic Press, 1956.

Liste des tableaux

2.1	Propriétés élastiques du mortier et des briques d'après [59]	65
2.2	Propriétés élastiques (en MPa) du mortier sain avec pores secs ou saturés	66
2.3	Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures aléatoires avec ou sans pores à l'état sec.	66
2.4	Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures parallèles avec ou sans pores à l'état sec	68
2.5	Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures aléatoires saturées avec ou sans pores, $k_f = 2200$ MPa, $a_3/a = 0, 1$	68
2.6	Propriétés élastiques (en MPa) du mortier avec microfissures parallèles avec ou sans pores à l'état saturé, $k_f = 2200$ MPa, $a_3/a = 0, 1$	69
2.7	Propriétés élastiques (en MPa) du mortier à l'état saturé, $k_f = 2200$ MPa, $a_3/a = 0, 1$ (pour l'estimation de Levin) et $d_c = 0, 1$	74
3.1	Paramètres expérimentaux pour les données viscoélastiques.	97
3.2	Données viscoélastiques du mortier de type Burgers et MM	98
3.3	Modules et coefficients du mortier à l'état sain ($d_c = 0$) et microfissuré ($d_c = 0, 1, d_c = 0, 2$). Les données du mortier sain sont présentées dans la table (3.2) pour un mortier hybride.	98
3.4	Rigidités normales $\tilde{C}_{nn}$ effectives pour une colonne maçonnée saine et coefficients de Poisson $\tilde{\nu}^m$ effectifs pour un mortier à l'état sain.	104
3.5	Rigidités normales $\tilde{C}_{nn}$ effectives pour une colonne maçonnée microfissurée et coefficients de Poisson $\tilde{\nu}^m$ effectifs pour un mortier v.l.n.v. microfissuré ($d_c = 0, 1$).	104
3.6	Rigidités normales $\tilde{C}_{nn}$ et coefficients de Poisson $\tilde{\nu}_{nt}$ effectifs pour une cellule périodique (1D, $a^b = 55$ mm et $e^h = 10$ mm) avec mortier v.l.n.v. sain et microfissuré ($d_c = 0, 1$) aux instants $t = 0$, $t = 100$ et $t = 1000$ jours.	104
3.7	Modules effectifs de la cellule périodique (2D) de la maçonnerie avec mortier hybride viscoélastique à l'état sain ($d_c = 0$) et microfissuré ($d_c = 0, 1$) et briques élastiques avec $E^b = 100E^m(t_0)$	110
3.8	Modules effectifs de la cellule périodique (2D) de la maçonnerie avec mortier hybride viscoélastique à l'état sain ($d_c = 0$) et microfissuré ($d_c = 0, 1$) et briques rigides.	110
A.1	Propriétés de la base de Walpole	139
A.2	Propriétés de la base de Walpole	140
D.1	Limitation des modèles d'interaction.	151
H.1	Propriétés effectives d'une cellule périodique (2D) de maçonnerie.	192

Liste des figures

1	Structure type d'une poche à acier maçonnée, production de l'entreprise Calderys.	9
1.1	Approche "matrice-inclusion" d'après [8].	12
1.2	Exemples de cellule de base pour maçonnerie de type "running bond".	15
1.3	Milieu avec réseau de fissures en forme d'ellipse.	16
1.4	Pore de forme aplatie (a), pore de forme allongée (b), distribution isotrope transverse de pores ellipsoïdaux selon la direction horizontale (c), verticale (d) et distribution isotrope de pores ellipsoïdaux (e) d'après [42].	26
1.5	Milieu avec des fissures aléatoires (a), MMR (b) et le domaine équivalent de calcul (c) avec le maillage associé (d) d'après [40].	29
1.6	Milieu avec des fissures de distribution parallèle (a), MMR (b) et domaine équivalent de calcul (c) avec le maillage associé (d).	30
1.7	Estimations du module d'Young effectif $\tilde{E}^m$ et du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}^m$ d'un mortier élastique avec des pores sphériques en fonction de la fraction volumique des pores.	31
1.8	Estimations de $\tilde{E}_3$ et de $\tilde{\nu}_{31}$ pour un mortier élastique contenant des microfissures parallèles en fonction de la densité de fissures d_c	32
1.9	Estimation de $\tilde{k}(d_c)/k^m$ pour un mortier élastique contenant des microfissures aléatoires en fonction de la densité de fissures d_c	32
1.10	Estimations de $\tilde{E}$ et de $\tilde{\nu}$ pour un mortier élastique contenant des microfissures aléatoires.	33
1.11	Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées sans pores. $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0, 25$	43
1.12	Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées sans pores. $E^m=4000$ MPa, $\nu^m = 0, 3$	43
1.13	Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées avec pores saturés. $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0, 25$	43
1.14	Estimation de $\tilde{E}_3^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures parallèles saturées avec pores saturés. $E^m = 4000$ MPa, $\nu^m = 0, 3$	43
1.15	Estimation de $\tilde{E}^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures aléatoires saturées sans pores. $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0, 25$	44
1.16	Estimation de $\tilde{E}^m$ pour un mortier élastique contenant des fissures aléatoires saturées sans pores. $E^m = 4000$ MPa, $\nu^m = 0, 3$	44
1.17	Estimation de $\tilde{E}^m$ pour le milieu élastique contenant des fissures aléatoires avec pores, $E^m=2200$ MPa, $\nu^m = 0, 25$	44
1.18	Estimation de $\tilde{E}^m$ pour le milieu élastique contenant des fissures aléatoires avec pores, $E^m = 4000$ MPa, $\nu^m = 0, 3$	44
1.19	Mur maçonné (a), cellule périodique (b) et quart de cellule (c).	45
1.20	Conditions aux limites aux bords du domaine de calcul dans le cas de déformation simple selon y_1 (a), selon y_2 (b), selon y_1 et y_2 (c).	46
1.21	Modélisation des structures maçonnées (a) : approche micro-détaillée (b) et approche micro-simplifiée (c)	47
2.1	États considérés du mortier : Mortier sain sans pores sphériques ou ellipsoïdaux (a), Mortier sain avec pores (b), Mortier avec microfissures à distribution aléatoire et sans pores (c), Mortier avec microfissures à distribution parallèle et sans pores (d), Mortier poreux avec microfissures à distribution aléatoire (e), Mortier poreux avec microfissures à distribution parallèle (f).	50

2.2	Démarche générale suivie pour la définition de la loi d'interface ou interphase (a) et du comportement global de maçonnerie (b).	52
2.3	Méthodologie multi-échelle d'interface d'après [59].	53
2.4	Chargements considérés : compression uniaxiale (a), chargement axisymétrique (b), chargement mixte (c) et cisaillement longitudinal (d).	54
2.5	Méthodologie multi-échelle d'interface proposée : (a) cas d'un mortier épais, (b) cas d'un mortier fin.	56
2.6	Évolutions des raideurs d'interface C_N et C_T (en MPa) en fonction de E_d (en MPa) ($d_c = 0, 1$, $\nu_d = 0, 3$ et $e^h = 10mm$).	57
2.7	Évolutions des raideurs d'interface C_N et C_T (en MPa) en fonction de ν_d ($d_c = 0, 1$, $E_d = 4000$ MPa et $e^h = 10mm$).	58
2.8	Évolutions des raideurs d'interface C_N et C_T (en MPa) en fonction de d_c ($\nu_d = 0, 1$; $E_d = 4000$ MPa et $e^h = 10mm$).	58
2.9	Estimation des modèles de Thomsen, $B\&K$ et $S\&K$ de la raideur C_N en fonction de la compressibilité du fluide k_f dans le cas d'une distribution isotrope transverse de microfissures saturées pour $d_c = 0, 1$ et $\phi_p = 0, 05$. Les propriétés élastiques du mortier sain et sec sont données dans la table (2.1).	61
2.10	Évolutions des estimations de $S\&K$ des raideurs C_N et C_T en fonction du module de compressibilité du fluide k_f dans le cas de distribution isotrope de microfissures saturées. $d_c = 0, 1$ et $\phi_p = 0, 05$. Les propriétés élastiques du mortier sain et sec sont données dans la table (2.1).	62
2.11	A l'état sain : comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de ϕ_p (équation (2.35)). Les propriétés élastiques du mortier sain et sec sont données dans la table (2.1), $k_f = 2200$ MPa.	63
2.12	Distribution isotrope de fissures ($d_c = 0, 1$, $\gamma = 0, 1$, $k_f = 2200$ MPa, table (2.1)) : comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de ϕ_p .	63
2.13	Distribution isotrope transverse de fissures ($d_c = 0, 1$, $\gamma = 0, 1$, $k_f = 2200$ MPa, table (2.1)) : comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de ϕ_p .	64
2.14	Comparaison des évolutions des raideurs C_N et C_T (ou K' et K'' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de d_c ($\gamma = 0, 1$, $k_f = 2200$ MPa, table (2.1)).	64
2.15	Comparaison des courbes contrainte-déformation d'une cellule périodique maçonnée avec mortier sain et briques élastiques : cas d'un mortier sec avec ou sans pores (a) et cas d'un mortier poreux : sec ou saturé (b).	66
2.16	Cartes de la contrainte locale σ_{22} d'une maçonnerie à l'état sain soumise à une compression selon la direction y_2 : cas d'un mortier sans pores sans loi d'interface (a), cas d'un mortier sans pores et avec loi d'interface (b), cas d'un mortier avec pores secs sans loi d'interface (c), cas d'un mortier avec pores secs et avec loi d'interface (d), cas d'un mortier avec pores saturés sans loi d'interface (e), cas d'un mortier avec pores saturés avec loi d'interface (f).	67
2.17	Comparaison des courbes contrainte -déformation d'une cellule périodique maçonnée dans le cas d'un mortier microfissuré sec (avec ou sans pores) et briques élastiques : cas de fissures aléatoires (a) et cas de fissures parallèles (b).	68
2.18	Comparaison des courbes contrainte -déformation dans le cas d'un mortier microfissuré saturé avec ou sans pores saturés et briques élastiques : cas de fissures aléatoires (a) et cas de fissures parallèles (b).	69
2.19	Carte de la contrainte locale σ_{22} d'une maçonnerie à l'état fissuré sec soumise à une compression selon la direction y_2 : (a) cas d'un mortier fissuré isotrope sec sans pores sans loi d'interface, (b) cas d'un mortier fissuré isotrope sec sans pores avec loi d'interface, (c) cas d'un mortier fissuré isotrope sec avec pores sans loi d'interface, (d) cas d'un mortier fissuré isotrope sec avec pores et interface, (e) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec sans pores sans loi d'interface, (f) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec sans pores avec loi d'interface, (g) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec avec pores sans loi d'interface, (h) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse sec avec pores et interface.	70

2.20	Carte de la contrainte locale σ_{22} à l'état fissuré saturé soumise à une compression selon la direction y_2 : (a) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé sans pores sans loi d'interface, (b) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé sans pores avec loi d'interface, (c) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé avec pores saturés sans loi d'interface, (d) cas d'un mortier fissuré isotrope saturé avec pores saturés et interface, (e) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé sans pores sans loi d'interface, (f) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé sans pores avec loi d'interface, (g) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé avec pores saturés sans loi d'interface, (h) cas d'un mortier fissuré isotrope transverse saturé avec pores saturés et interface.	71
2.21	Évolutions des modules de rigidité en fonction de d_c (en MPa), cas d'un mortier avec des fissures aléatoires ou parallèles avec ou sans pores, $a_3/a = 0, 1$	72
2.22	Évolutions des modules de rigidité en fonction de γ , cas d'un mortier non poreux avec des fissures aléatoires ou parallèles, $d_c = 0, 1$	73
3.1	Fonction de fluage (b) d'un matériau v.l.n.v. en réponse à un chargement en contrainte constante σ_0 pour $t \geq t_0$ (a).	77
3.2	Fonction de relaxation (b) d'un matériau v.l.n.v. en réponse à un chargement en déformation constante ε_0 pour $t \geq t_0$ (a).	78
3.3	Fonction de fluage d'un matériau v.l.n.v.	79
3.4	Modèle rhéologique de Maxwell (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type Maxwell sous l'effet d'une contrainte constante σ_0 (b).	86
3.5	Modèle de KV (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type KV à une contrainte constante σ_0 (b).	86
3.6	Modèle de Burgers (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type "Bu" à une contrainte constante σ_0 (b).	87
3.7	Modèle de Maxwell modifié (a) et la réponse en déformation (c) d'un matériau de type MM à une contrainte constante σ_0 (b).	88
3.8	Influence de la densité de fissures d_c sur les coefficients effectifs approchés par le modèle de Burgers (les données du mortier hybride sain sont fournies dans la table (3.2)).	95
3.9	Comparaison des solutions exacte et approchée (modèle de Burgers) de la déformation macroscopique dans le cas d'un mortier hybride microfissuré (cf. table (3.2)).	95
3.10	Influence de la densité de fissures d_c sur l'évolution des coefficients effectifs approchés par le modèle de MM (les données du mortier hybride sain sont fournies dans la table (3.2)).	96
3.11	Comparaison des solutions exacte et approchée (modèle de MM) de la déformation macroscopique dans le cas d'un mortier hybride microfissuré (cf. table (3.2)).	96
3.12	Évolutions de la fonction de fluage $\tilde{S}_{Bu}$ en fonction de d_c (a) et du temps (b) pour un mortier viscoélastique hybride (table (3.2)) microfissuré.	99
3.13	Évolutions des dérivées de $\tilde{S}_{Bu}(d_c)$ par rapport à la densité de fissures d_c pour t fixé (a) et par rapport au temps t pour d_c donné (b). Les données viscoélastiques du mortier hybride sont présentées dans la table (3.2).	99
3.14	Évolutions des dérivées de $\tilde{S}_{MM}(t, d_c)$ par rapport à la densité de fissures d_c pour t fixé (a) et par rapport au temps t pour d_c donné (b) pour le mortier hybride considéré (table (3.2)).	100
3.15	Évolutions de $\tilde{S}_{MM}$ en fonction de d_c (a) et du temps (b).	100
3.16	Évolution des temps de fluage en fonction de d_c pour des mortiers hybrides microfissurés de type Burgers (a) et MM (b).	101
3.17	Colonne maçonnée et sa cellule périodique (composite stratifié).	102
3.18	Cas 1D, mortier hybride sain : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution de $\frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)}$ pour les modèles de Burgers (a) et MM (b).	105
3.19	Cas 1D, mortier hybride sain : influence du paramètre géométrique α sur l'évolution de $\frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)}$ pour les modèles de Burgers (a_1, b_1) et MM (a_2, b_2).	106
3.20	Cas 1D, modèle de Burgers, mortier hybride : évolutions de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}^{Bu}(d_c)$ (MPa) à d_c fixé à $d_c = 0$ (cas sain) (a) et à $d_c = 0, 2$ (b) ou à t fixé à 1 jour (c) ou 100 jours (d).	108
3.21	Cas 1D, modèle de MM, mortier hybride : évolutions de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}^{MM}(d_c)$ (MPa) à d_c fixé à $d_c = 0$ (cas sain) (a) et à $d_c = 0, 2$ (b) ou à t fixé à 1 jour (c) ou 100 jours (d).	108

3.22	Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution des rapports $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour un mortier hybride sain avec ξ variable.	112
3.23	Cas 2D : influence du ratio $\xi = e^h/a^b$ sur l'évolution des rapports $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour $\alpha = 1$ avec un mortier hybride.	113
3.24	Cas 2D, mortier hybride de type Burgers : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{1111}^{Bu}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).	114
3.25	Cas 2D, mortier hybride de type MM : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{1111}^{MM}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d).	114
3.26	Comparaison des modules $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = \mathbf{E}^m, \nu^b = 0, 2, e^m = 10mm$, modèle de MM, mortier hybride à l'état sain.	115
3.27	Comparaison des modules $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = 100\mathbf{E}^m, \nu^b = 0, 2, e^m = 10mm$, modèle de MM, mortier hybride à l'état sain.	116
3.28	Comparaison des modules $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = \infty, \nu^b = 0, 2, e^m = 2mm$, modèle de MM, mortier hybride à l'état sain.	116
3.29	Comparaison des modules $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ et $\tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = 11000$ MPa ($E^b \approx 2E^m(t_0)$), $\nu^b = 0, 2, e^m = 10mm$, mortier hybride microfissuré de type MM avec $d_c = 0, 1$	118
3.30	Comparaison des modules $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{\nu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = 100\mathbf{E}^m(\mathbf{t}_0, \mathbf{0}), \nu^b = 0, 2, e^m = 10$ mm, mortier hybride microfissuré de type MM avec $d_c = 0, 1$	118
3.31	Comparaison des modules $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{\nu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = \infty, \nu^b = 0, 2, e^m = 2$ mm, mortier hybride microfissuré de type MM avec $d_c = 0, 1$	119
3.32	Une colonne maçonnée périodique (a) et ses cellules périodiques pour la solution numérique "INC-EF" (b1) et analytique "E.C-T" (b2) pour sa section (c) d'après [36].	119
3.33	Déplacement horizontal à mi-section d'une colonne maçonnée avec mortier v.l.n.v. microfissuré ($d_c = 0, 1$) aux instants $t = 0$ et $t = 100$ jours.	121
3.34	Carte de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) à $t = 0$ (a) et $t = 100$ jours (b) pour une colonne maçonnée avec briques élastiques et mortier sain de type Burgers et MM.	122
3.35	Carte de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) à $t = 0$ (a) et $t = 100$ jours (b) pour une colonne maçonnée avec briques rigides et mortier sain de type Burgers et MM.	123
3.36	Mur maçonné : conditions (BC1) (a) et (BC2) (b) de chargements.	124
3.37	Cas 2D, mortier hybride de type Burgers à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22}, σ_{12} et déformations $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".	125
3.38	Cas 2D, mortier hybride de type MM à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22}, σ_{12} et déformations $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".	126
3.39	Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de contrainte σ_{22} (coupe "A-A") à $t=100$ jours pour les modèles de Burgers et MM, cas BC1 (a) et cas BC2 (b).	127
3.40	Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de contrainte σ_{12} (coupe "A-A") pour les modèles de Burgers et MM, cas BC1 (a) et cas BC2 (b).	127
3.41	Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de déformation ε_{22} (coupe "A-A") à $t=0$ jour (a) et 100 jours (b) pour les modèles de Burgers et MM.	128
3.42	Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de déformation ε_{12} (coupe "A-A") à $t=0$ jour (a) et 100 jours (b) pour les modèles de Burgers et MM.	128
3.43	Cas 2D, mortier hybride à l'état sain : comparaison des évolutions de déformation ε_{11} (coupe "A-A") à $t=0$ jour et 100 jours pour les modèles de Burgers et MM.	129
3.44	Cas 2D, mortier hybride : comparaison entre deux états de mortier des évolutions de déformation ε_{ij} (coupe "A-A") à $t=0$ jour et 100 jours pour le modèle de Burgers.	130
3.45	Cas 2D, mortier hybride : comparaison entre deux états de mortier des évolutions de déformation ε_{ij} (coupe "A-A") à $t=0$ jour et 100 jours pour le modèle de MM.	131
3.46	Comparaison des cartes de contraintes σ_{22} à 0 jour (a) et à 100 jours (b) de deux modèles, cas de brique rigide, mortier sain. Les modules effectifs de la cellule périodique 2D sont présentés dans la table (3.8).	132
3.47	Comparaison des cartes de déplacements u_2 (mm) à 0 jour (a) et à 100 jours (b) de deux modèles, cas de brique rigide, mortier sain. Les modules effectifs de la cellule périodique 2D sont présentés dans la table (3.8)	132

B.1	Inclusion ellipsoïdale	142
B.2	Fissure ellipsoïdale aplatie	143
D.1	Comparaison des évolutions de raideur C_N (ou K' pour le modèle de $K\&L$) en fonction de k_f ($d_c = 0, 1$, $\phi_p = 0, 05$ MPa, table (2.1)).	150
E.1	Modèle de MG.	159
E.2	Modèle de KG.	160
E.3	Modèle de Ross (a) et sa réponse (c) sous l'effet d'une contrainte constante σ_0 (b).	160
E.4	Modèle de l'US bureau de Réclamation.	161
F.1	Évolution des fonctions visqueuse $\Phi^m(t)$ et de fluage $S^m(t)$ pour le mortier S7 de type Burgers, MM et USBR.	163
F.2	Cas 1D, mortier (S7) à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution temporelle de $\frac{\tilde{C}_{nn}(t, \xi)}{\tilde{C}_{nn}(t_0)}$ pour les modèles de USBR (a), Burgers (b) et MM (c).	164
F.3	Cas 1D, mortier (S7) de type USBR à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas α fixé.	164
F.4	Cas 1D, mortier (S7) de type Burgers à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas α fixé.	165
F.5	Cas 1D, mortier (S7) de type MM à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas α fixé.	165
F.6	Cas 1D, mortier (S7) de type USBR à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas ξ fixé.	166
F.7	Cas 1D, mortier (S7) de type Burgers à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas ξ fixé.	166
F.8	Cas 1D, mortier (S7) de type MM à l'état sain : influence du paramètre géométrique ξ et du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas ξ fixé.	167
F.9	Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers (a) et MM (b) : influence du paramètre d_c sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas de briques rigides et $\xi = 0, 1$	168
F.10	Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E^b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E^b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).	169
F.11	Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type MM : influence du paramètre géométrique ξ sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E^b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E^b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).	169
F.12	Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers : influence du paramètre d_c sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E_b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E_b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).	170
F.13	Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type MM : influence du paramètre d_c sur l'évolution temporelle de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$, cas $E_b = E^m(t_0, d_c)$ (a) et cas $E_b = 100E^m(t_0, d_c)$ (b).	170
F.14	Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type Burgers : évolutions temporelles de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$ avec d_c variable et pour différents ratios $\alpha = E^b/E^m$, $\xi = 0, 1$	171
F.15	Cas 1D, mortier hybride microfissuré de type MM : évolutions temporelles de la rigidité effective normale $\tilde{C}_{nn}$ avec d_c variable et pour différents ratios $\alpha = E^b/E^m$, $\xi = 0, 1$	171
F.16	Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour le modèle de USBR (S7).	172
F.17	Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour le modèle de Burgers (S7).	173
F.18	Cas 2D : influence du ratio $\alpha = E^b/E^m$ sur $\tilde{C}_{ijkl}(t, \xi)/\tilde{C}_{ijkl}(t_0)$ et $\frac{\tilde{C}_{iiii}/\tilde{C}_{ijij}(t, \xi)}{\tilde{C}_{iiii}(t_0)/\tilde{C}_{ijij}(t_0)}$ pour le modèle de MM (S7).	173

F.19	Cas 2D, mortier hybride de type Burgers : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{2222}^{Bu}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d). . .	174
F.20	Cas 2D, mortier hybride de type Burgers : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{1212}^{Bu}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d). . .	174
F.21	Cas 2D, mortier hybride de type MM : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{2222}^{MM}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d). . .	175
F.22	Cas 2D, mortier hybride de type MM : évolutions de la rigidité effective $\tilde{C}_{1212}^{MM}(d_c)$ (MPa) pour d_c fixé à $d_c = 0$ (a) et à $d_c = 0, 2$ (b), ou pour t fixé à 1 jour (c) et à 100 jours (d). . .	175
G.1	Comparaison entre la solution réelle et l'approximation par le modèle de MM - Comportement des maçonneries microfissurées. Les coefficients du mortier hybride sain sont donnés dans la table (3.2), $E^b = 11000$ MPa, $\nu^b = 0, 2$, $\varphi_b = 0, 8$	179
G.2	Comparaison entre la solution réelle et l'approximation par le modèle de MM - Comportement des maçonneries microfissurées. Les coefficients du mortier hybride sain sont donnés dans la table (3.2), $E^b = 11000$ MPa, $\nu^b = 0, 2$, $d_c = 0, 1$	180
G.3	Estimations des modules du comportement effectif d'une maçonnerie viscoélastique microfissurée selon le modèle "MT+ITLC". Les propriétés du mortier hybride sain de type MM sont données dans la table (3.2), $E^b = 11000$ MPa et $\nu^b = 0, 2$	180
G.4	Comparaison des modules $\tilde{E}_{11}$, $\tilde{E}_{22}$ et $\tilde{\mu}_{12}$ et coefficient $\tilde{\nu}_{12}$ pour $\mathbf{E}^b = \mathbf{E}^m$ - cas sain (cf. section (3.4.3.1)) (a) et $E^b \approx 2E^m(t_0)$ - cas microfissuré (cf. section (3.4.3.2)) (b) issus des modèles numérique et micromécanique "MT+ITLC".	181
G.5	Maillage de la sphère creuse, [106]	183
G.6	Déformation de fluage pour la fraction volumique $\varphi = 0, 125$	185
H.1	Cartes de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) de la colonne maçonnée sous compression à $t = 0$ jour (a) et $t = 100$ jours (b). Mortier hybride microfissuré ($d_c = 0, 1$) de type Burgers et MM - cas de briques élastiques.	187
H.2	Cartes de contraintes locales σ_{11} (I) et σ_{22} (II) de la colonne maçonnée sous compression à $t = 0$ jour (a) et $t = 100$ jours (b). Mortier hybride microfissuré ($d_c = 0, 1$) de type Burgers et MM - cas de briques rigides.	188
H.3	Mortier (S7) de type USBR à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ε_{22} , ε_{12} et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".	189
H.4	Mortier (S7) de type Burgers à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ε_{22} , ε_{12} et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".	190
H.5	Mortier (S7) de type MM à l'état sain : évolution des contraintes σ_{22} , σ_{12} et déformations ε_{22} , ε_{12} et ε_{11} au niveau de la coupe "A-A".	191
H.6	Comparaison des contraintes locales pour les deux cas de chargements BC1 et BC2. Mortier (S7) sain de type USBR (6000 jours), Burgers (38 jours) et MM (228 jours).	192
H.7	Comparaison des déformations locales pour les deux cas de chargements BC1 et BC2. Mortier (S7) sain de type USBR (6000 jours), Burgers (38 jours) et MM (228 jours).	193

Thi Thu Nga NGUYEN

Approches multi-échelles pour des maçonneries viscoélastiques

Résumé : Les structures maçonnées sont largement connues en génie civil comme constituant d'une partie des bâtiments, mais également en tant que garnissages réfractaires dans des structures utilisées à hautes températures, par exemple en sidérurgie. Malheureusement, les outils actuels ne sont pas suffisamment puissants pour prédire le comportement de ces structures avec l'apparition de fissures et pour tenir compte du comportement non linéaire d'un des deux constituants (le mortier par exemple).

Ce travail de thèse contribue à la modélisation multi-échelles des maçonneries classiques et des garnissages réfractaires avec un faible coût numérique grâce à la technique d'homogénéisation périodique. Les techniques de modélisation et de simulation du comportement des maçonneries sont présentées et développées. L'influence des lois d'interface entre briques et mortier, des paramètres géométriques et matériels, ainsi que de la densité des fissures sur le comportement effectif des maçonneries est étudié. Trois approches (une extension analytique de Cecchi et Tralli, une approche numérique et un modèle micromécanique) sont proposées pour la détermination du comportement effectif d'une cellule périodique dans le cas de maçonneries avec mortier viscoélastique microfissuré et briques saines élastiques ou rigides. Les résultats des calculs sur deux exemples de maçonneries (1D et 2D) ont confirmé que l'approche multi-échelle est une solution appropriée avec une grande capacité à exprimer le comportement des maçonneries viscoélastiques microfissurées. Ce travail, limité au cas sans propagation de fissures, peut être étendu aux mortiers à comportement viscoplastique.

Mots clés : Homogénéisation, Maçonnerie, Structure périodique, Viscoélasticité, Microfissures, Transformée de Laplace-Carson, Interface, Analyse asymptotique, Méthode des Éléments Finis, Approches Multi-échelles.

Multi-scale approaches for viscoelastic masonries

Abstract : Masonry structures are widely used in civil engineering as part of buildings or in refractory linings of structures working at high temperatures, like in steel industry. Unfortunately, the present tools are not powerful enough to predict the behavior of these structures at their micro-cracked state and/or if one of their constituents behaves nonlinearly (e.g. the mortar).

This research contributes to the multi-level modeling of classical masonries and refractory linings with a low numerical cost using basically the periodic homogenization technique. Modeling and simulation techniques of masonry behavior are presented and developed. The influence of interface law between bricks and mortar, of geometrical and material parameters, and of crack density on the effective masonry behavior is studied. Three approaches (analytical extension of Cecchi and Tralli, numerical approach and micromechanical modeling) were proposed to determine the effective behavior of a periodic masonry cell with micro-cracked viscoelastic mortar and safe elastic or rigid bricks. The results obtained on two examples of masonry (1D and 2D) confirmed that the multi-scale approach is a suitable solution with a great ability to model the effective behavior of microcracked viscoelastic masonry. This work, actually limited to the case without crack propagation, could be extended to mortars with viscoplastic behavior.

Keywords : Homogenization, Masonry, Periodic Structure, Viscoelasticity, Micro-cracks, Laplace-Carson Transform, Interface, Asymptotic Analysis, Finite Element Method, Multi-scale Approaches.



Laboratoire PRISME
8 rue Léonard de Vinci
45072 Orléans

