

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES,
INFORMATIQUE, PHYSIQUE THÉORIQUE ET
INGÉNIERIE DES SYSTÈMES (MIPTIS)
LABORATOIRE : MAPMO

Thèse présentée par :

Mathilde LEGRAND

soutenue le : 3 novembre 2016

pour obtenir le grade de : Docteur de l'Université d'Orléans

Discipline : Mathématiques

Étude mathématique de modèles de couches visqueuses pour des écoulements naturels

Thèse dirigée par :

François JAMES

Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Didier BRESCH

Directeur de recherche CNRS, Université
Savoie Mont Blanc

David GERARD-VARET

Professeur, Université Paris Diderot

JURY :

Didier BRESCH

Directeur de recherches CNRS, Université
Savoie Mont Blanc

David GERARD-VARET

Professeur, Université Paris Diderot

François JAMES

Professeur, Université d'Orléans

Pierre-Yves LAGREE

Directeur de recherches CNRS, Université
Pierre et Marie Curie

Magali RIBOT

Professeur, Université d'Orléans (Présidente
du jury)

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier François JAMES sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour. En cours en master, puis durant mes deux mémoires de master et mes quatre années de thèse, François a toujours été là pour me soutenir, étant toujours joignable et réactif, au minimum "au bout du mail" lorsque nos emplois du temps étaient incompatibles. Merci de m'avoir guidée dans cette aventure sur la thématique des équations différentielles partielles appliquées à la mécanique des fluides, me faisant rencontrer Pierre-Yves LAGREE, personnage clef dans notre compréhension des équations étudiées et surtout des phénomènes associés.

Je remercie tout particulièrement Pierre-Yves pour sa bonne humeur, son dynamisme et ses convictions sur la bonne orientation des travaux, mais aussi pour son cours de M2 "Multiscale Hydrodynamic Phenomena" que j'ai eu grand plaisir à suivre, accompagné de la découverte des différents stands alimentaires des alentours de Jussieu avant l'après-midi de réflexions avec François.

Je désire aussi remercier chaleureusement Didier BRESCH et David GERARD-VARET d'avoir accepté avec enthousiasme de rapporter cette thèse et de m'avoir, par leurs commentaires, permis de mieux situer mes travaux au sein des nombreuses études sur les écoulements en eaux peu profondes. Je remercie également Magali RIBOT de sa participation au jury de cette thèse.

Pour terminer les remerciements sur le plan du travail de thèse, j'adresse de profonds remerciements à tous les membres du projet CRuE : Frédéric, Carine, Christian, Stéphane, Amina et Minh. Vous m'avez accueillie dans vos réunions dès mes premiers jours au laboratoire me permettant de découvrir diverses possibilités de travail dans la thématique tout en m'expliquant les rouages derrière la soumission d'articles pour ne citer qu'un exemple. Alors oui merci pour ces réunions régulières, pour votre implication et votre bienveillance.

Je tiens aussi plus généralement à remercier toute l'équipe du MAPMO qui a constitué mon environnement quotidien durant ces années de thèse. En particulier je remercie Marie-Laurence et Anne qui ont toujours été là pour me faciliter les tâches administratives mais surtout qui ont été continuellement présentes pour m'aérer l'esprit et me soutenir par des temps de discussions réguliers.

Dans la team des doctorants et post-doctorants, je remercie bien évidemment Sylvain et Ala'a pour leur expérience communiquée du monde des doctorants, pour leur humour reposant sur les temps de pause. Merci à Erica pour le temps de partage de bureau, et la gaité qu'elle y a introduite. Je remercie infiniment Manon et Rémi pour les deux dernières années passées en leur compagnie : un soutien permanent, des échanges spontanés sur des points mathématiques mais aussi sur bien d'autres sujets... Bref une animation très bienvenue sur les années plus tendues ! Depuis plus d'un an, merci à Tien, Nhat et Julie d'avoir agrandi le cercle repas.

En lien avec cette équipe mouvante, au grès des soutenances, tout en étant en marge, je ne peux que dédier de profondes pensées à Perrine, rencontrée au premier jour de thèse, à notre complicité apparue autour des grilles de mots fléchés au café et à l'amitié qui en a résulté. Merci d'avoir été un point fixe d'appui durant ces quatre années !

Une dernière dédicace pour mes collègues d'enseignements, tout d'abord du GTE d'Orléans et depuis septembre 2015 du lycée Geoffroy Saint Hilaire, qui ont permis une ambiance décontractante dans laquelle enseigner est un plaisir.

Sommaire

1	Introduction	7
2	Les équations de Navier-Stokes et le scaling ondes longues	11
2.1	Les équations de Navier-Stokes en dimension 3	11
2.1.1	Théorèmes et notations	11
2.1.2	Équations de Navier-Stokes	13
2.1.3	Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible	14
2.2	Adimensionnement et scaling ondes longues	16
2.2.1	Adimensionnement	17
2.2.2	Scaling ondes longues	19
2.3	Les équations de Saint Venant	21
3	Étude de la couche visqueuse	27
3.1	Les équations de Prandtl	27
3.2	L'équation intégrée de von Kármán	31
3.3	Profil de vitesse dans la couche visqueuse	34
3.4	Solutions explicites de l'équation de von Kármán	37
4	Modèles étendus de Saint Venant	39
4.1	Équations intégrées de la masse et du moment	39
4.2	Fermeture des modèles	41
4.3	Solution stationnaire linéarisée sur fond plat	44
4.3.1	Solution linéarisée pour les équations de Saint-Venant	45
4.3.2	Solution linéarisée pour le modèle de Saint-Venant étendu	46
4.4	Saturation de l'épaisseur de déplacement	47
5	Illustrations numériques	53
5.1	Introduction du schéma numérique	53
5.1.1	Rappel sur les équations de conservations non linéaires	53
5.1.2	Schéma développé pour le système (4.10)	54
5.2	Comparaison du modèle de Saint Venant sans friction et du modèle étendu (4.10)	61
5.2.1	Écoulement fluvial	62
5.2.2	Écoulements transcritiques	62
5.3	Solution stationnaire sur un fond plat	65
5.4	Comportements sur une bosse du modèle (4.10)	66
5.4.1	Apport du terme de friction τ	67
5.4.2	Influence du paramètre $\bar{\delta}$	69
5.4.3	Influence des paramètres de forme	70
5.4.4	Influence du profil de vitesse	73

6	Modèles de transpiration et de topographie apparente	77
6.1	Modèle avec condition de transpiration	77
6.2	Topographie apparente	81
7	Conclusion	85
A	Équation d'énergie	87
	Bibliographie	92

Introduction

De nombreux phénomènes naturels, les océans comme les écoulements fluviaux, sont définis comme des écoulements en eaux peu profondes possédant une surface libre. Adhémar Barré de Saint Venant introduit en 1871 [4] les équations dites de Saint Venant ou équations en eaux peu profondes pour étudier les crues et les marées. Depuis lors, de multiples remaniements de ce modèle ont eu lieu et son utilisation s'est généralisée. Il est employé aussi bien pour modéliser des écoulements variés que pour effectuer des simulations numériques d'un certain nombre de phénomènes. On le retrouve notamment pour l'écoulement des rivières [12], la prévision des crues [13], le ruissellement [23, 25] le transport de polluants [32, 48], l'érosion des sols [42], la rupture de barrage [57, 31, 35], les tsunamis [26, 38, 45].

Malgré ces diverses utilisations pour décrire au mieux les phénomènes physiques, les équations de Saint Venant ne restent malgré tout qu'un modèle, soit des équations où les actions de certains termes ont été négligées pour réduire la complexité des équations initiales. Les équations pour les eaux peu profondes peuvent être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes pour des fluides incompressibles sous certaines conditions, en particulier en introduisant une hypothèse sur les échelles d'espace : la longueur caractéristique de l'écoulement est prépondérante par rapport à sa profondeur. Cette échelle, dite échelle ondes longues, apporte naturellement une pression suivant une loi hydrostatique et permet de négliger les effets de la viscosité dans la direction horizontale. Les équations de Navier-Stokes écrites sous cette forme, une intégration sur la hauteur d'eau fournit les équations moyennées d'eaux peu profondes [29, 59]. Les deux équations alors obtenues ne sont pourtant pas exploitables. Elles nécessitent une fermeture ad hoc au travers d'un profil vertical approché de la vitesse horizontale. Ce profil a une double influence dans les équations puisqu'il permet d'exprimer le flux de la quantité de mouvement mais est aussi au cœur de la friction, trace des conditions sur le fond.

Deux approximations du profil de vitesse sur la hauteur d'eau sont parfaitement répertoriées pour obtenir deux systèmes de Saint Venant fermés. Le plus simple des deux, et le plus simple de tous, est un profil de vitesse constant selon la verticale. Ce profil se relie au fluide parfait et ne peut alors être compatible avec les conditions au fond attendues par les équations de Navier-Stokes. La conséquence directe d'une approximation par un fluide parfait est la perte du terme de friction dans les équations. On retrouve alors les équations dites de Saint Venant sans friction qui correspondent aux équations originelles proposées par de Saint Venant [4], écrites sous une apparence différente et surtout obtenues par un tout autre moyen que celui employé par de Saint Venant. La friction peut malgré tout intervenir dans les équations en proposant a posteriori des lois empiriques de friction, telles que celles de Manning ou de Chézy [16]. Le second profil parfaitement déterminé est celui d'un écoulement de Nusselt [37], ou demi-écoulement de Poiseuille (l'écoulement de Poiseuille étant pour les tuyaux). Ce profil est une parabole partant du fond jusqu'à la surface. Il dérive d'une prise en compte de la viscosité du fluide dans une configuration particulière d'équilibre. Aussi ce profil conserve le terme de frottement, dit frottement laminaire, tout en permettant une intégration explicite du flux du

moment. Bien que ce profil de Nusselt présente une amélioration pour le terme de frottement par rapport à un profil constant selon la verticale, il reste de par trop restrictif. Ces deux profils sont en effet des profils cohérents dans des zones où l'écoulement est établi mais ne peuvent prendre en compte des perturbations locales des vitesses et donc du terme de viscosité pouvant apparaître notamment en présence d'un relief sur le fond de l'écoulement (voir figure 1.1).

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'établissement d'un système proposant une fermeture des équations en eaux peu profondes obtenue grâce à l'étude de la couche visqueuse de l'écoulement. Au cours des travaux présentés, cinq formulations équivalentes sont établies. Deux d'entre elles comportent explicitement deux équations semblables au système de Saint Venant portant sur une vitesse moyennée du fluide. Les trois autres formulations mettent plus particulièrement en valeur une vitesse de fluide parfait comportant des termes correctifs. Toutes ces écritures reposent sur l'étude préalable de la couche visqueuse de l'écoulement.

L'adhérence exigée par la viscosité du fluide suggère en effet l'existence d'une couche, potentiellement mince, où se concentrent les effets visqueux avant que le fluide retrouve un comportement proche de celui d'un fluide parfait. L'étude de cette couche visqueuse, raccordée à un écoulement de fluide parfait, s'effectue dans l'inspiration de la théorie des couches limites [46, 51]. Dans les deux théories la couche est quantifiée par un petit paramètre $\bar{\delta}$ strictement positif, qui sera pour la couche visqueuse relié à l'inverse du nombre de Reynolds. Mais dans le cas de la couche visqueuse étudiée ici, contrairement à celui des couches limites, ce paramètre reste fixe sans aucun passage à la limite. La couche visqueuse, de même que les couches limites, est caractérisée par deux quantités [51] : l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement. Ces deux fonctions conduisent à une nouvelle écriture du flux pour les équations en eaux peu profondes. Elle se compose d'un terme identique à celui des équations de Saint Venant mais corrigé par un terme, assimilable à une loi de pression supplémentaire, dont l'ordre est $\bar{\delta}$. De plus, le frottement qui apparaît dans ces équations se trouve être lui aussi d'ordre $\bar{\delta}$, et non plus d'ordre $\bar{\delta}^2$ comme c'est le cas pour l'écoulement de Nusselt. Aussi les deux équations obtenues proposent en effet une extension des équations de Saint Venant sans frottement. Lorsque $\bar{\delta} = 0$, les équations sont identiques et lorsque la viscosité est activée des corrections y sont apportées. Néanmoins cette expression du flux ne donne pas en soi une fermeture du système puisqu'elle fait apparaître les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement, ainsi que la vitesse du fluide parfait en surface utilisée dans le couplage avec la couche visqueuse. Les deux équations semblables au modèle de Saint Venant sont donc couplées avec deux équations supplémentaires permettant de décrire l'évolution des quantités introduites dans l'écriture du flux. La première de ces équations est celle vérifiée par le fluide parfait à la surface, obtenue grâce aux équations d'Euler. L'étude des équations de la couche visqueuse, soit les équations de Prandtl, couplées avec l'équation sur le fluide parfait à la surface permet d'obtenir une équation intégrée selon la verticale : l'équation de von Kármán. Cette équation fait intervenir les différentes quantités apparues dans l'écriture du flux, ainsi que le terme de friction. Plus précisément elle décrit l'évolution de l'épaisseur de déplacement. Un choix de profil de vitesse au cœur de la couche visqueuse est nécessaire pour permettre l'obtention finale d'un système fermé de quatre équations.

Comme les limites d'un écoulement de Poiseuille consistaient dans sa non-adaptabilité à la présence d'une bosse, le comportement de ce système de quatre équations sera observé dans la configuration d'un fond comportant une bosse comme on peut le voir dans la figure 1.1. Les simulations numériques mettent en évidence que le terme de friction obtenu naturellement dans les équations possède la caractéristique recherchée : son maximum local se situe en amont de la bosse. Ce terme propose donc une amélioration des termes de friction usuellement introduits dans les systèmes de Saint Venant.

Ce système d'équations, bien qu'apportant un comportement cohérent du terme de frottement, est restreint par la nécessité d'un couplage entre la couche visqueuse et un écoulement de fluide parfait. A cet titre, il ne peut modéliser un développement de la couche visqueuse sur l'intégralité de la hauteur d'eau. En particulier, il ne peut contenir l'écoulement de Nusselt dans la forme présentée dans cette thèse, même si une possibilité d'un terme de relaxation sera avancée. L'importance de la présence d'un fluide parfait est particulièrement mise en évidence

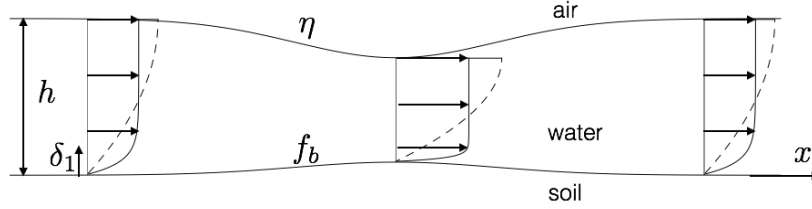


Figure 1.1: Domaine d'étude : la hauteur d'eau est définie par la variable h , le fond est la donnée de f_b et la surface libre est représentée par la fonction η . Ce schéma, par anticipation sur les parties 2.3 et 3, présente deux familles de profils de vitesse pour l'écoulement. D'un part la solution de Nusselt (tracé discontinu), semi-parabole décrite dans la section 2.3, et d'autre part un profil plat en dehors de la couche visqueuse modélisée par l'épaisseur de déplacement δ_1 présenté dans la section 3.3. Le cisaillement, dérivée de la vitesse au fond, dépend considérablement du profil choisi.

dans les deux dernières formulations exposées. En effet, ces deux écritures sont obtenues en observant un écoulement de fluide parfait, dont les conditions de bords sont modifiées afin de prendre en compte les phénomènes de la couche visqueuse.

Dans le chapitre 2 de cette thèse, nous nous intéressons à l'écriture des équations de Navier-Stokes, pour des écoulements Newtoniens incompressibles et en régime laminaire, afin de comprendre le rôle de tous les termes présents dans ces équations. Elles sont ensuite adimensionnalisées afin de pouvoir introduire un facteur d'échelle : le scaling ondes longues. Ce scaling permet de connaître la loi de pression et de négliger une composante de la viscosité. Les équations de Navier-Stokes ont alors l'aspect sous lequel elles sont classiquement intégrées pour obtenir les équations en eaux peu profondes. Un rappel sur le modèle de Saint Venant usuel est effectué pour mettre en valeur l'importance de la fermeture du flux du moment, et par conséquent l'importance d'un profil vertical pour la vitesse horizontale.

Le chapitre 3 se consacre à l'étude de la couche visqueuse. Les équations de Prandtl sont présentées ainsi que la définition des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement. L'équation de von Kármán, élément clef du système recherché, s'établit en intégrant verticalement sur la couche visqueuse l'équation décrivant l'écart entre la vitesse horizontale visqueuse et la vitesse du fluide parfait à la surface. Suite à cette équation faisant apparaître de multiples quantités, l'importance du profil de vitesse dans la couche visqueuse est mise en évidence. Ce profil permet en effet d'exprimer chaque quantité en fonction de l'épaisseur de déplacement et de la vitesse du fluide parfait. Il apporte de plus un éclaircissement sur l'interprétation du terme de friction résultant des contraintes pariétales. La dernière partie de ce chapitre 3 est réservée à l'étude de solutions pour l'équation de von Kármán sous certaines hypothèses. Cette étude nous permettra d'interpréter les résultats obtenus lors des simulations numériques du chapitre 5.

Le chapitre 4 rappelle tout d'abord l'intégration des équations de Navier-Stokes avec le scaling ondes longues. Ces équations font apparaître un terme de flux qu'il est nécessaire d'exprimer en fonction des autres inconnues du système. La connaissance de l'équation de von Kármán permet de proposer une écriture de ce flux aboutissant à l'obtention de trois formulations équivalentes du même système. Deux d'entre elles présentent deux équations semblables au système de Saint Venant faisant intervenir en supplément des termes d'ordre $\bar{\delta}$. Le troisième modèle est écrit sous une formulation plus aérodynamique ne présentant pas l'équation intégrée de la quantité de mouvement. Cette dernière formulation permet d'obtenir simplement une solution stationnaire sur fond plat, linéarisée autour du paramètre $\bar{\delta}$, pour le système de quatre équations.

Des simulations numériques sont présentées dans le chapitre 5. La cohérence avec les schémas connus pour les équations de Saint Venant a conduit à l'écriture d'un schéma numérique pour une des formulations de type Saint Venant. Le schéma a été établi dans l'intention d'obtenir rapidement des informations qualitatives sur le comportement des solutions du système en présence d'un relief sur le fond. De ce fait, le schéma est resté naïf. Ses résultats sont étayés par le fait

qu'il redonne les solutions des équations de Saint Venant pour une très petite valeur de $\bar{\delta}$. Il récupère de plus la bonne évolution de l'épaisseur de déplacement sur fond plat. Les simulations sur un fond gaussien montrent que le système obtenu met en jeu un terme de frottement cohérent avec les attentes physiques. Ce frottement présente en effet un maximum local en amont d'une bosse et se distingue ainsi des frottements usuels dans les équations de Saint Venant qui ont un maximum local sur le sommet de la bosse.

Le chapitre 6 est écrit sous un autre angle d'approche. Deux modèles y sont présentés qui sont équivalents à la formulation aérodynamique déjà obtenue. Pour ces modèles, la vitesse d'intérêt est la vitesse du fluide parfait. L'incompatibilité entre les équations de Navier-Stokes, et la condition d'adhérence, et un écoulement de fluide parfait nous a conduits à proposer une modification de l'environnement du fluide parfait qui permettrait de contenir les effets de la viscosité. Dans le premier modèle, la condition de glissement usuelle du fluide parfait est modifiée. L'analyse du raccord entre la couche visqueuse et le fluide parfait à la surface déjà introduit dans le chapitre 3 permet d'obtenir une rectification d'ordre $\bar{\delta}$ de la condition de glissement. L'intégration des équations d'Euler en utilisant cette condition dite de transpiration permet alors d'obtenir un système portant sur la vitesse du fluide parfait mais contenant naturellement une correction, toujours d'ordre $\bar{\delta}$, qui en étant reliée à l'équation de von Kármán traduit le terme de frottement. Le deuxième modèle proposé concerne un fluide parfait dont la condition de glissement est conservée. La modification de l'environnement apportée consiste à observer ce fluide sur un domaine dont la topographie a été modifiée. La définition de l'épaisseur de déplacement et certaines analogies avec les équations de Saint Venant présentent l'épaisseur de déplacement comme jouant l'effet d'une topographie supplémentaire pour le fluide parfait. C'est pourquoi pour ce modèle le fluide parfait est considéré sur le fond relevé de l'épaisseur de déplacement. La condition de glissement obtenue sur ce fond modifié fait alors apparaître l'épaisseur de déplacement qui, reliée à nouveau à l'équation de von Kármán, prend en compte les frottements dans ce modèle intégré pour un fluide parfait.

2

Les équations de Navier-Stokes et le scaling ondes longues

Dans la partie 2.1, nous rappelons en toute généralité l'obtention des équations de Navier-Stokes en trois dimensions d'espace pour des fluides isothermes à partir de deux principes physiques : la conservation de la masse et la seconde loi de Newton pour la quantité de mouvement. L'établissement présenté ici s'effectue par étapes. Dans la section 2.1.2, nous traduisons les principes sur des sous-domaines dépendant du temps à l'aide d'expressions intégrales. Le travail effectué sur ces intégrales nécessite des outils, rappelés dans la section 2.1.1, pour les intégrales sur des domaines dépendant du temps ou sur leurs frontières. Une expression locale sera ensuite obtenue de ces équations. Lors de la section 2.1.3, le type d'écoulements considérés permettra de spécifier le tenseur de contraintes apparaissant dans les équations de Navier-Stokes. La partie 2.2 concerne l'adimensionnement des équations de Navier-Stokes en deux dimensions d'espace et l'introduction du scaling ondes longues propre aux écoulements en eaux peu profondes étudiés dans cette thèse.

2.1 Les équations de Navier-Stokes en dimension 3

2.1.1 Théorèmes et notations

L'établissement des équations de Navier-Stokes exige de connaître la dérivation d'une intégrale sur un domaine et le passage d'une intégrale sur un domaine à une intégrale sur sa frontière. Nous présentons donc ici les théorèmes nécessaires à ces manipulations. Le théorème 2.1 donne la réécriture d'une intégrale sur une frontière en une intégrale sur le domaine. Les théorèmes 2.2, 2.3 (ainsi que sa généralisation pour un vecteur dans la remarque 2.5) donnent les règles de dérivation des intégrales sur des domaines variables.

Théorème 2.1 (Théorème de Stokes-Ostrogradski-Green-Gauss). *Soit Ω un domaine ayant pour frontière Γ muni d'un vecteur normal $\vec{n}$. Alors :*

$$\int_{\Gamma} f \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(f \vec{u}) d\Omega \quad (2.1)$$

Théorème 2.2. [Formule de Leibnitz] *Soit A, B deux fonctions scalaires de $\mathbb{R}^2$ et F une fonction scalaire de $\mathbb{R}^3$. On a une formule pour la dérivée d'une intégrale à bornes variables :*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A^B F dz \right) = \int_A^B \frac{\partial F}{\partial x} dz + F(x, y, B) \frac{\partial B}{\partial x} - F(x, y, A) \frac{\partial A}{\partial x}$$

Théorème 2.3. [Théorème de transport] Soit $\omega(t)$ un volume de contrôle et f une fonction scalaire $f(t, x)$ définie pour $x \in \omega(t)$. Alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} f(t, x) dx \right) = \int_{\omega(t)} (\partial_t f(t, x) + \operatorname{div}(u(t, x)f(t, x))) dx \quad (2.2)$$

avec $u : (t, x) \mapsto u(t, x)$ le champ de vitesses pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$.

Preuve. Définissons la fonction M de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante

$$M(t) = \int_{\omega(t)} f(t, x) dx.$$

Afin de pouvoir dériver formellement la fonction M , nous introduisons un changement de variables afin de réécrire l'intégrale sur le volume $\omega_0 = \omega(0)$. Pour cela, nous introduisons le flot X associé au champ de vitesses u vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t X(t, s, x) = u(t, X(t, s, x)) \\ X(s, s, x) = x. \end{cases}$$

Ce flot, lorsqu'il est bien posé, définit une bijection entre le volume au temps t et le volume au temps s . Plus particulièrement, pour tout $x \in \omega(t)$ il existe un unique $y \in \omega_0$ tel que $x = X(t, 0, y)$.

Cela définit un changement de variables avec le jacobien associé $J(t, 0, y) = \det(D_y X(t, 0, y))$:

$$dx = J(t, 0, y) dy.$$

Nous pouvons alors écrire l'expression $M(t)$ sous la forme :

$$M(t) = \int_{\omega_0} f(t, X(t, 0, y)) J(t, 0, y) dy.$$

En dérivant formellement en temps cette équation, nous obtenons :

$$M'(t) = \int_{\omega_0} \frac{d}{dt} [f(t, X(t, 0, y)) J(t, 0, y) + f(t, X(t, 0, y)) \partial_t J(t, 0, y)] dy. \quad (2.3)$$

Or le jacobien vérifie l'équation différentielle suivante pour y fixé :

$$\partial_t J(t, 0, y) = \operatorname{div}(u(t, X(t, 0, y))) J(t, 0, y).$$

Nous pouvons ainsi reformuler l'équation 2.3 :

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int_{\omega_0} [\partial_t f(t, X(t, 0, y)) + u(t, X(t, 0, y)) \cdot \nabla f(t, X(t, 0, y))] J(t, 0, y) \\ &\quad + f(t, X(t, 0, y)) \operatorname{div}(u(t, X(t, 0, y))) J(t, 0, y) dy \\ M'(t) &= \int_{\omega_0} [\partial_t f(t, X(t, 0, y)) + \operatorname{div}(u(t, X(t, 0, y)) f(t, X(t, 0, y)))] J(t, 0, y) dy \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variables $dx = J(t, 0, y) dy$ pour revenir sur le volume $\omega(t)$, l'équation 2.2 est obtenue. $\square$

Remarque 2.4. Dans le cas d'un domaine ω fixé, le théorème 2.3 combiné avec le théorème 2.1 conduit à l'écriture classique de la conservation d'une quantité f :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega} f(t, x) dx \right) = - \int_{\partial\omega} f(t, x) \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (2.4)$$

Cette relation est utilisée notamment dans la théorie des volumes finis [8, 21] où le domaine ω représente une maille d'espace. Elle conduit à l'équation (5.2) présentée dans le chapitre 5 pour définir un schéma numérique.

Rappel.

- *Produit tensoriel entre deux vecteurs :*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

- *La divergence, notée $\vec{\nabla} \cdot$, d'un tenseur d'ordre 2 renvoie un vecteur ayant pour coordonnées*

$$(\vec{\nabla} \cdot T)_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

où T_{ij} sont les coordonnées du tenseur T .

Remarque 2.5. Soit $\omega(t)$ un volume de contrôle. Le théorème 2.3 s'écrit aussi pour un vecteur $\vec{b}(t, x)$ défini pour $x \in \omega(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \vec{b}(t, x) dx \right) = \int_{\omega(t)} \partial_t \vec{b}(t, x) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{b}(t, x) \otimes u(t, x)) dx.$$

2.1.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes présentées ici représentent l'écoulement d'un fluide isotherme sur un domaine $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^3$ pour un temps t dans un ouvert. Les équations mises en place considèrent un volume de contrôle $\omega(t)$, sous-domaine de $\Omega(t)$, tel que $\overline{\omega(t)} \subset \Omega(t)$.

Remarque 2.6. Tout écoulement nécessite un certain nombre de conditions aux limites du domaine. Nous verrons, une fois les équations formelles établies, celles qui nous seront nécessaires pour la description du fluide considéré.

Deux principes physiques sont traduits par les équations de Navier-Stokes présentées ici : la conservation de la masse (parfois appelée équation de continuité) et la conservation de la quantité de mouvement selon le principe de la seconde loi de Newton. Notons ρ la masse volumique du fluide et $\vec{U} = (U; V; W)$ son vecteur vitesse.

La conservation de masse s'exprime par l'invariance en temps de la masse dans un domaine. Pour tout volume de contrôle $\omega(t)$ tel que $\overline{\omega(t)} \subset \Omega(t)$, la masse volumique vérifie :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho dx \right) = 0 \quad (2.5)$$

Le théorème de transport 2.3 pour une fonction scalaire permet d'écrire cela sous la forme :

$$\int_{\omega(t)} (\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{U})) dx = 0$$

On peut donc en déduire une expression locale de l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (2.6)$$

Une seconde équation, portant sur la quantité de mouvement, s'obtient grâce à la seconde loi de Newton qui établit que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces appliquées. La quantité de mouvement sur le volume de contrôle $\omega(t)$ se traduit par $\int_{\omega(t)} \rho \vec{U} dx$. Le terme à étudier est donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho \vec{U} dx \right).$$

Cette fois encore on utilise le théorème de transport, mais pour un vecteur, 2.5 :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho \vec{U} dx \right) = \int_{\omega(t)} \partial_t(\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) dx.$$

La seconde loi de Newton donne l'égalité entre cette dérivée de la quantité de mouvement et la somme des forces appliquées au système formé par le fluide et son domaine, que nous noterons $\vec{f}$. Les forces se décomposent en :

- la gravité du fluide $\vec{g}$;
- $\vec{F}$ l'ensemble des autres forces externes appliquées au fluide, telle que la force de Coriolis ;
- Les forces de contact appliquées à un élément de surface $d\gamma$ (ayant $\vec{n}$ comme norme extérieure) qui s'expriment par $d\vec{F} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} d\gamma$ où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes. Ce tenseur est une inconnue pour le système.

On obtient alors pour tout volume de contrôle $\omega(t)$, et en notant $\gamma(t)$ sa surface, l'équation intégrale suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho \vec{U} d\omega \right) = \int_{\omega(t)} \rho(\vec{F} + \vec{g}) dx + \int_{\gamma(t)} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} d\gamma$$

Le théorème de Stokes-Ostragradski 2.1 permet d'écrire toutes les intégrales sur le volume $\omega(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho \vec{U} d\omega \right) = \int_{\omega(t)} (\rho(\vec{F} + \vec{g}) + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) dx$$

Comme précédemment, on en déduit une expression locale de l'équation sur la quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho(\vec{F} + \vec{g}) + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.7)$$

En regroupant (2.6) et (2.7), on obtient les équations de Navier-Stokes dites sous forme conservative :

<u>Masse</u>	$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0$	(2.8)
<u>Quantité de mouvement</u>	$\partial_t(\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho(\vec{F} + \vec{g}) + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$	(2.9)

Les équations présentées ci-dessus ont été établies pour tout domaine d'étude $\Omega(t)$ sans se préoccuper ni du type de fluide considéré (gaz ou liquide), ni des conditions aux limites du domaine. Dans la section suivante, nous spécifions ces équations de Navier-Stokes pour le type d'écoulements que nous considérons dans cette thèse.

2.1.3 Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

Au cours de cette thèse, nous nous sommes consacrés à des écoulements gravitaires. Cette spécificité restreint les forces extérieures appliquées au fluide à la seule force de gravité $\vec{g}$. Par ailleurs nous nous sommes limités à des fluides Newtoniens en régime laminaire. Sous ces hypothèses, le tenseur de contraintes possède une formulation explicite, composée d'une contrainte de pression et d'une de déformation.

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

où la fonction scalaire p est la pression exprimée en Pa (qui reste une inconnue à part entière pour le système isotherme étudié ici) ;

$\underline{\underline{\delta}}$ est le tenseur identité ;

μ est le coefficient de viscosité dynamique dépendant du fluide et pouvant être écrit $\mu = \rho \nu$ où

ν est le coefficient de viscosité cinématique (en $m^2.s^{-1}$) ;

$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \otimes \vec{U} + {}^t(\vec{\nabla} \otimes \vec{U}))$ est le tenseur du taux de déformation.

Notre étude s'oriente vers des écoulements d'eau en rivière, ou tout du moins des écoulements de liquides. Les liquides, contrairement aux gaz, ont la propriété d'évolution isovolume (mouvement sans modification de la valeur initiale du volume de chaque particule fluide), qui se traduit par : $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ [15]. Cette condition combinée avec l'équation (2.8) présente la masse volumique comme solution de l'équation de transport :

$$\partial_t \rho + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0.$$

Pour un fluide initialement homogène, c'est-à-dire dont la densité est constante, la masse volumique ρ est alors une fonction constante en temps et en espace. Par abus de langage, l'équation (2.8) est remplacée par $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ toujours désignée par l'appellation conservation de la masse.

Pour obtenir les équations de Navier-Stokes sous leur forme utilisée dans les sections suivantes, il faut écrire l'équation de quantité de mouvement sous une forme-non conservative :

$$\partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \vec{g}. \quad (2.10)$$

Preuve. Intéressons-nous au terme $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U})$, et plus précisément pour commencer à : $\rho \vec{U} \otimes \vec{U}$.

$$\rho \vec{U} \otimes \vec{U} = \begin{pmatrix} \rho U^2 & \rho UV & \rho UW \\ \rho VU & \rho V^2 & \rho VW \\ \rho WU & \rho WV & \rho W^2 \end{pmatrix}$$

Par définition de la divergence, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \begin{pmatrix} \partial_x(\rho U^2) + \partial_y(\rho UV) + \partial_z(\rho UW) \\ \partial_x(\rho UV) + \partial_y(\rho V^2) + \partial_z(\rho VW) \\ \partial_x(\rho WU) + \partial_y(\rho WV) + \partial_z(\rho W^2) \end{pmatrix}$$

L'exemple de la première coordonnée nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_x(\rho U^2) + \partial_y(\rho UV) + \partial_z(\rho UW) &= U^2 \partial_x \rho + UV \partial_y \rho + UW \partial_z \rho + \rho U \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \\ &\quad + \rho(U \partial_x U + V \partial_y V + W \partial_z U) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x(\rho U^2) + \partial_y(\rho UV) + \partial_z(\rho UW) &= U((\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{U}) + \rho U \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \\ &\quad + \rho(U \partial_x U + V \partial_y V + W \partial_z U) \end{aligned}$$

$$\partial_x(\rho U^2) + \partial_y(\rho UV) + \partial_z(\rho UW) = U \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) + \rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) U$$

L'équation de continuité (2.8) permet de réécrire $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = -\partial_t \rho$

$$\partial_x(\rho U^2) + \partial_y(\rho UV) + \partial_z(\rho UW) = -U \partial_t \rho + \rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) U$$

En itérant sur chaque coordonnée, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = -\vec{U} \partial_t \rho + \rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \quad (2.11)$$

En utilisant la relation (2.11) et la dérivation d'un produit pour traiter la dérivée en temps, on obtient :

$$\partial_t(\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho \partial_t \vec{U} + \rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}$$

La masse volumique du fluide ρ vérifiant $\rho > 0$, une division par ρ permet d'obtenir l'équation (2.10). $\square$

Proposition 2.7. *Les équations de Navier-Stokes, projetées sur chaque axe s'écrivent donc*

$$\partial_x U + \partial_y V + \partial_z W = 0 \quad (2.12)$$

$$\partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U + W \partial_z U = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu \Delta U \quad (2.13)$$

$$\partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V + W \partial_z V = -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \nu \Delta V \quad (2.14)$$

$$\partial_t W + U \partial_x W + V \partial_y W + W \partial_z W = -\frac{1}{\rho} \partial_z p - g + \nu \Delta W \quad (2.15)$$

Preuve. Il nous reste uniquement à justifier l'introduction du Laplacien dans les seconds membres. μ est constant en espace aussi $\vec{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{D}}) = 2\mu \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{D}}$.

Par ailleurs,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \partial_{x_i} U_j + \partial_{x_j} U_i.$$

Or par définition

$$(\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{D}})_i = \sum_j \partial_{x_j} D_{ij}.$$

On en déduit que :

$$(\vec{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{D}}))_i = \mu \sum_j \partial_{x_j}^2 U_i + \mu \sum_j \partial_{x_i} (\partial_{x_j} U_j)$$

L'équation de continuité 2.12 nous permet une simplification :

$$(\vec{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{D}}))_i = \mu \Delta(U_i) + \underbrace{\mu \partial_{x_i} \left(\sum_j \partial_{x_j} U_j \right)}_{=0}$$

Et enfin, en remplaçant μ par $\nu\rho$ et en divisant par ρ selon l'équation (2.10), on obtient bien les $\nu\Delta(U_i)$ apparus dans cette nouvelle écriture. $\square$

2.2 Adimensionnement et scaling ondes longues

Dans la partie précédente, il a été rappelé comment dériver les équations de Navier-Stokes pour des écoulements laminares de fluide newtonien et incompressible en trois dimensions d'espace. La problématique de la thèse concernait avant tout l'obtention d'un modèle de type Saint Venant pour les rivières. Dans cette optique, deux dimensions principales sont retenues dans le restant des travaux : une variable d'espace pour le fond et une pour la hauteur d'eau. Ce choix de se limiter à deux dimensions, puis à une dimension lorsque les équations seront intégrées (voir chapitre 4), permet d'alléger les notations et ainsi de gagner en clarté dans les calculs présentés. Par ailleurs, le passage de trois dimensions à deux dimensions étant très similaire pour les équations de Saint Venant, cela ne dénature pas la démarche employée. Cette restriction ne pose bien entendu aucun problème pour retrouver les équations de Navier-Stokes en deux dimensions à partir de celles à trois dimensions.

Les équations de Navier-Stokes dans leur intégralité pour des écoulements à surface libre sont des équations complexes. Dans ce qui suit, nous cherchons à obtenir des équations modifiées en négligeant les termes dont l'effet, dans un certain scaling, est moins important. Mais avant même de rechercher des phénomènes d'échelle, il faut commencer par écrire les équations de Navier-Stokes sans dimension. En effet, un système écrit avec ses dimensions ne permet pas de juger les aspects quantitatifs obtenus. Aussi il nous faut fixer des quantités caractéristiques à partir desquelles des nouvelles variables sans dimension vont être définies.

2.2.1 Adimensionnement

Par commodité, nous noterons par des variables étoilées les variables dimensionnelles.

L'écoulement est délimité en hauteur par :

- Le fond localisé par $y^* = f_b^*(x^*)$. La topographie est une donnée de l'écoulement (en espace), ce qui signifie que l'érosion en particulier n'est pas prise en compte dans l'étude effectuée.
- La surface libre représentée par la fonction $y^* = \eta^*(t^*, x^*)$. Les effets de l'air au niveau de cette interface sont complètement négligés, cela influera sur les conditions de bord considérées.

La hauteur d'eau h^* s'exprime donc par $h^*(t^*, x^*) = \eta^*(t^*, x^*) - f_b^*(x^*)$. On a les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, supposé laminaire, pour un vecteur vitesse $\vec{U}^* = (u^*, v^*)$:

$$\partial_{x^*} u^* + \partial_{y^*} v^* = 0 \quad (2.16)$$

$$\partial_{t^*} u^* + u^* \partial_{x^*} u^* + v^* \partial_{y^*} u^* = -\frac{1}{\rho} \partial_{x^*} p^* + \nu \Delta u^* \quad (2.17)$$

$$\partial_{t^*} v^* + u^* \partial_{x^*} v^* + v^* \partial_{y^*} v^* = -g - \frac{1}{\rho} \partial_{y^*} p^* + \nu \Delta v^* \quad (2.18)$$

Dans ces différentes équations, nous avons des variables dimensionnelles. Cependant, il est crucial d'écrire nos équations avec des variables sans dimension. Cela permet en effet d'observer ensuite les résultats (et les ordres de grandeurs) par rapport à des longueurs caractéristiques. Fixons donc des quantités de référence :

- Pour le temps : $t^* = t_0 t$;
- Pour les longueurs, nous introduisons un h_0 car une dimension caractéristique va être la hauteur d'eau : $x^* = h_0 x$ et $y^* = h_0 y$;
- Pour conserver les rapports, on introduit $u_0 = \frac{h_0}{t_0}$ pour définir les composantes du vecteur vitesse: $u^* = u_0 u$ et $v^* = u_0 v$;
- Pour la pression : $p^* = \rho u_0^2 p$ (p est bien sans dimension car ρu_0^2 est homogène à une pression comme on peut le voir dans l'expression de la pression dynamique $\frac{\rho u^2}{2}$) ;
- Afin de simplifier les écritures des conditions de bord, on introduit aussi des fonctions adimensionnées pour la surface, le fond et la hauteur d'eau qui définissent le domaine d'étude illustré dans la figure 2.1 :

- $\eta(t, x) = \frac{1}{h_0} \eta^*(t^*, x^*)$;
- $f_b(x) = \frac{1}{h_0} f_b^*(x^*)$;
- $h(t, x) = \frac{1}{h_0} h^*(t^*, x^*)$.

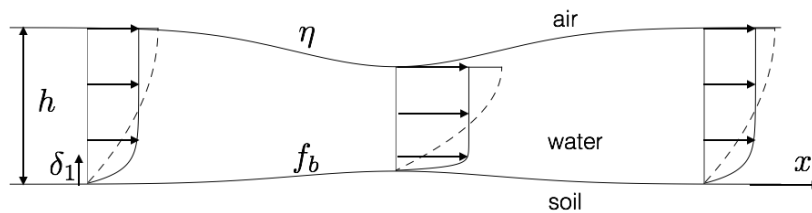


Figure 2.1: Domaine d'étude : la hauteur d'eau est définie par la variable h , le fond est la donnée de f_b et la surface libre est représentée par la fonction η .

Proposition 2.8.

On obtient à partir de ces dernières expressions, les équations de Navier-Stokes avec des variables sans dimension :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (2.19)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p + \frac{1}{Re_h} \Delta u \quad (2.20)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v = -\partial_y p - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re_h} \Delta v \quad (2.21)$$

où $Re_h = \frac{u_0 h_0}{\nu}$ est le nombre de Reynolds (rapport entre les forces d'inertie et de viscosité) et $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{g h_0}}$ est le nombre de Froude (rapport entre les forces liées à la vitesse et la force de pesanteur).

Avec les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} u = v = 0 \text{ quand } y = f_b(x) \\ v = \partial_t \eta + u \partial_x \eta \text{ quand } y = \eta(t, x) \\ \underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{0} \text{ quand } y = \eta(t, x). \end{cases}$$

Preuve. 1. Les équations :

Exprimons chaque terme apparaissant dans (2.16-2.18) à l'aide des variables sans dimension :

- $u^* \partial_{x^*} u^* = u_0^2 u \partial_{x^*} u = u_0^2 u \partial_{x^*} x \partial_x u$ et $x^* = h_0 x$

Donc

$$u^* \partial_{x^*} u^* = \frac{u_0^2}{h_0} u \partial_x u.$$

- De même, on obtient :

$$v^* \partial_{y^*} u^* = \frac{u_0^2}{h_0} v \partial_y u.$$

- $\partial_{x^*} p^* = \rho u_0^2 \partial_{x^*} p = \rho \frac{u_0^2}{h_0} \partial_x p$

D'où

$$-\frac{1}{\rho} \partial_{x^*} p^* = -\frac{u_0^2}{h_0} \partial_x p.$$

- $\partial_{t^*} u^* = u_0 \partial_{t^*} t \partial_t u = \frac{u_0}{t_0} \partial_t u$ et $t_0 = \frac{h_0}{u_0}$

Donc

$$\partial_{t^*} u^* = \frac{u_0^2}{h_0} \partial_t u.$$

- Les laplaciens, trace du tenseur de contrainte, sont adimensionnés en revenant à leur définition

$$\begin{aligned} \nu \Delta u^* &= \nu (\partial_{x^*}^2 u^* + \partial_{y^*}^2 u^*) \\ \nu \Delta u^* &= \nu (\partial_{x^*} (\frac{u_0}{h_0} \partial_x u) + \partial_{y^*} (\frac{u_0}{h_0} \partial_y u)) \\ \nu \Delta u^* &= \nu \frac{u_0}{h_0^2} \Delta u. \end{aligned}$$

On montre de même que $\nu \Delta v^* = \nu \frac{u_0}{h_0^2} \Delta v$.

Aussi en réinjectant tout cela dans les équations (2.16-2.18) et en divisant par $\frac{u_0^2}{h_0}$, on obtient bien les équations (2.19)-(2.21).

2. Les conditions aux limites [33] :

- La première condition exprime l'adhérence au fond, phénomène lié à la viscosité du fluide.
- La seconde exprime que la surface libre est une ligne de courant. L'équation de cette surface est $F(t, x, y) = y - \eta(t, x) = 0$. Si un point est situé sur une ligne de courant, il doit y rester. Ceci se traduit par :

$$\frac{dF(t, x, y)}{dt} = 0 \quad \forall t. \quad (2.22)$$

Or,

$$\frac{dF}{dt} = \partial_t F + u \partial_x F + v \partial_y F = -\partial_t \eta - u \partial_x \eta + v.$$

L'injection de cette expression dans l'équation (2.22) donne la condition dite cinématique à la surface libre.

- La troisième condition traduit la continuité du tenseur de contrainte $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 2\partial_x u - p & \partial_x v + \partial_y u \\ \partial_y u + \partial_x v & 2\partial_y v - p \end{pmatrix}$ à l'interface entre l'air et l'eau avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} \partial_x \eta \\ -1 \end{pmatrix}$

□

Remarque 2.9. L'adimensionnement a été effectué volontairement avec la même longueur caractéristique h_0 pour les abscisses et les ordonnées, et s'assimile à une hauteur d'eau caractéristique qui se retrouve dans les nombres de Reynolds et de Froude.

2.2.2 Scaling ondes longues

À présent que les équations de Navier-Stokes sont sous une forme adimensionnée, nous pouvons prendre en compte des hypothèses d'échelle. Ces échelles permettront d'alléger les équations en mettant en évidence les termes qui ne sont pas prédominants dans ce cadre d'hypothèses. C'est pourquoi il est important de les rechercher afin de simplifier les équations de Navier-Stokes très complexes, stratégie particulièrement évoquée dans [9] pour présenter différents régimes d'écoulements. Nous travaillons ici dans un objectif d'application à des rivières qui présentent les caractéristiques suivantes, introduisant ces échelles de grandeur recherchées :

- la composante horizontale de la vitesse a de faibles variations selon la verticale ;
- le nombre de Reynolds est important ;
- la composante verticale de la vitesse est petite par rapport à celle horizontale.

Regardons tout d'abord les conséquences de la troisième caractéristique. Elle justifie l'introduction d'un petit paramètre ε permettant le changement de variables suivant :

$$v = \varepsilon \tilde{v} \quad u = \tilde{u}.$$

L'équation de conservation de la masse (2.19) doit impérativement être conservée par ce changement de variables. Or en l'état nous avons :

$$0 = \partial_x y + \partial_y v = \partial_x \tilde{u} + \varepsilon \partial_y \tilde{v}.$$

Aussi ce changement de variables impose un changement de variables sur les coordonnées d'espace de façon à conserver $y \ll x$. Il y a deux possibilités pour satisfaire cela :

1. Le scaling ondes longues qui traduit une étude sur un long domaine d'écoulement par rapport à une hauteur d'eau donnée :

$$x = \frac{\tilde{x}}{\varepsilon} \quad y = \tilde{y}.$$

Si l'on considère que ε est un ratio de deux longueurs $\varepsilon = \frac{h_0}{L}$, on retrouve par ce changement de variable un adimensionnement des équations de Navier-Stokes avec deux longueurs

caractéristiques différentes : L pour la variable horizontale et h_0 pour celle verticale [29]. Ce scaling doit être complété par $t = \frac{\tilde{t}}{\varepsilon}$ pour rester cohérent, il impose donc une étude en temps long. De plus, la pente physique doit être elle-même faible puisque $f_b(x) = \tilde{f}_b(\tilde{x})$ et par conséquent $f'_b(x) = \varepsilon \tilde{f}'_b(\tilde{x})$.

2. Le scaling de couche mince [51] qui, comme son nom l'indique, fait porter à la variable verticale le caractère de petitesse :

$$x = \tilde{x} \quad y = \varepsilon \tilde{y} \quad t = \tilde{t}.$$

Ce scaling ne permet pas d'observer n'importe quel écoulement, uniquement ceux présentant dès le début une couche mince.

C'est pourquoi le scaling retenu ici, comme le seul pertinent pour répondre à la condition que la composante verticale de la vitesse soit petite devant celle horizontale, est le scaling ondes longues. Ce scaling est omniprésent dans les études associées aux modèles de Saint Venant, mais se retrouve aussi dans d'autres approches comme par exemple dans l'étude d'équations des vagues pour des fluides irrotationnels [14]. Nous avons ici établi ce scaling en observant l'équation de conservation de la masse mais voyons à présent ses conséquences sur le jeu d'équations (2.19)-(2.21) complet.

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{u} + \partial_{\tilde{y}} \tilde{v} = 0$$

$$\varepsilon [\partial_{\tilde{t}} \tilde{u} + \tilde{u} \partial_{\tilde{x}} \tilde{u} + \tilde{v} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}] = -\varepsilon \partial_{\tilde{x}} \tilde{p} + \frac{1}{Re_h} [\varepsilon^2 \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{u} + \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{u}] \quad (2.23)$$

$$\varepsilon^2 [\partial_{\tilde{t}} \tilde{v} + \tilde{u} \partial_{\tilde{x}} \tilde{v} + \tilde{v} \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}] = -\frac{1}{Fr^2} - \partial_{\tilde{y}} \tilde{p} + \frac{\varepsilon}{Re_h} [\varepsilon^2 \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{v} + \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{v}] \quad (2.24)$$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{quand} \quad \tilde{y} = \tilde{f}_b$$

$$\tilde{v} = \partial_{\tilde{t}} \tilde{\eta} + \tilde{u} \partial_{\tilde{x}} \tilde{\eta} \quad \text{quand} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon((2\varepsilon \partial_{\tilde{x}} \tilde{u} - \tilde{p}) \partial_{\tilde{x}} \tilde{\eta} - \varepsilon \partial_{\tilde{x}} \tilde{v}) - \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} \\ \varepsilon(\partial_{\tilde{x}} \tilde{\eta} (\partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \varepsilon \partial_{\tilde{x}} \tilde{v}) - 2 \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}) - \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{quand} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (2.25)$$

Dans ce cadre d'étude, le paramètre ε tend à être petit. Aussi nous pouvons prendre une approximation de ce système en $O(\varepsilon)$, en n'oubliant pas que Re_h est lui grand. Cette approximation détermine trois caractéristiques du scaling ondes longues :

- La continuité du tenseur de contrainte à la surface (2.25) se résume à $\partial_{\tilde{y}} \tilde{u} = 0$ et $\tilde{p} = 0$ lorsque $\tilde{y} = \tilde{\eta}$.
- La pression, grâce à l'équation (2.24), n'est plus une inconnue mais s'établit comme une pression hydrostatique parfaitement déterminée avec la condition $\tilde{p} = 0$ à la surface.

$$\partial_{\tilde{y}} \tilde{p} = -\frac{1}{Fr^2} \iff \tilde{p} = \frac{1}{Fr^2} (\tilde{\eta} - \tilde{y}).$$

- La trace de la viscosité, contenue précédemment dans $\frac{1}{Re_h} \Delta u$, disparaît dans la direction horizontale, ce qui ramène l'équation (2.23) simplement sous la forme :

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{u} + \tilde{u} \partial_{\tilde{x}} \tilde{u} + \tilde{v} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} = -\partial_{\tilde{x}} \tilde{p} + \frac{1}{\varepsilon Re_h} \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{u}.$$

Remarque 2.10. La pression hydrostatique est souvent présentée comme une hypothèse pour travailler avec les équations de Saint Venant, ou plus généralement dans le cadre des eaux peu profondes. Elle n'est pourtant qu'une conséquence directe du scaling ondes longues caractérisant les eaux peu profondes.

Avant de poursuivre plus loin l'étude, rappelons tout d'abord le système complet des équations de Navier-Stokes avec l'approximation ondes longues qui sera notre système de Navier-Stokes de référence pour la suite. C'est d'ailleurs pourquoi, dans un souci de clarté visuelle, nous oublierons dorénavant le tilde sur les variables.

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (2.26)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p + \frac{1}{\varepsilon Re_h} \partial_y^2 u \quad (2.27)$$

$$\partial_y p = -\frac{1}{Fr^2} \quad (2.28)$$

$$u = v = 0 \quad \text{quand} \quad y = f_b \quad (2.29)$$

$$v = \partial_t \eta + u \partial_x \eta \quad \text{quand} \quad y = \eta \quad (2.30)$$

$$\partial_y u = 0 \quad \text{quand} \quad y = \eta. \quad (2.31)$$

Remarque 2.11. *Il est important de noter que le nombre de Reynolds effectif dans le reste des travaux est εRe_h .*

2.3 Les équations de Saint Venant

L'objectif de cette thèse est d'établir un modèle de Saint Venant modifié afin de mieux prendre en compte la friction inhérente à la viscosité. Aussi avant d'étudier la couche visqueuse dans le chapitre 3 qui permettra cette amélioration, nous présentons ici les équations de Saint Venant sous leur forme habituelle.

En notant U la vitesse moyenne du fluide et h la hauteur d'eau, les équations de Saint Venant sans frottement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hU) &= 0 \\ \partial_t(hU) + \partial_x(hU^2 + \frac{h^2}{2Fr^2}) &= -\frac{hf'_b}{Fr^2}. \end{aligned}$$

Ces équations, sous un formalisme différent, ont été établies par Barré de Saint Venant en 1871 à l'aide d'équations bilans [4] pour un fluide sans viscosité et sur un fond plat.

Nous rappelons rapidement dans ce qui suit la façon d'obtenir ces équations de nos jours à partir des équations d'Euler hydrostatiques et comment elles peuvent être généralement améliorées afin de prendre en compte plus de phénomènes.

Les équations d'Euler s'obtiennent à partir du système (2.26)-(2.30) en faisant tendre le nombre de Reynolds vers l'infini :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (2.32)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p \quad (2.33)$$

$$\partial_y p = -\frac{1}{Fr^2} \quad (2.34)$$

$$\partial_t \eta + u \partial_x \eta = v \quad \text{quand} \quad y = \eta \quad (2.35)$$

La condition d'adhérence ne peut cependant pas être conservée, du fait de la perte complète des dérivées d'ordre 2 de la vitesse dans l'équation (2.33), et se remplace par une condition dite de glissement :

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = -u f'_b + v = 0 \quad \text{quand} \quad y = f_b$$

où $\vec{n}$ est la normale au fond, orientée vers l'intérieur du domaine.

Les équations de Saint Venant, sans friction, peuvent alors s'obtenir en moyennant les équations d'Euler ci-dessus sur la hauteur d'eau du fluide en utilisant les conditions au bord. Les calculs seront détaillés dans la section 4.1.

Définition 2.12. La vitesse moyenne U du fluide se définit naturellement, lorsque $h > 0$, par la relation

$$hU = \int_{f_b}^{\eta} u \, dy.$$

L'intégration des équations d'Euler (2.32)-(2.35) sur la hauteur d'eau conduit aux deux équations intégrées suivantes :

$$\partial_t h + \partial_x(hU) = 0, \quad (2.36)$$

$$\partial_t(hU) + \partial_x\left(\int_{f_b}^{\eta} u^2 \, dy\right) = -\frac{1}{Fr^2}h(\partial_x h + f'_b). \quad (2.37)$$

Autant l'équation (2.36) s'écrit naturellement en fonction des inconnues h et U , autant l'équation (2.37) nécessite une fermeture pour le terme de flux $\int_{f_b}^{\eta} u^2 \, dy$ qui apparaît comme une troisième inconnue pour seulement deux équations. En l'absence d'équations supplémentaires, une hypothèse sur le profil de la vitesse u , sur toute la hauteur d'eau, doit être faite. Dans le cas d'un fluide supposé parfait sous l'hypothèse eaux peu profondes, un profil de vitesse plat convient comme nous le justifierons dans la remarque 3.6. Il permet de réécrire le terme de flux sous la forme $\int_{f_b}^{\eta} u^2 \, dy = \frac{1}{h}(\int_{f_b}^{\eta} u \, dy)^2 = hU^2$ et ainsi d'obtenir les équations dites de Saint Venant :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hU) &= 0 \\ \partial_t(hU) + \partial_x(hU^2 + \frac{h^2}{2Fr^2}) &= -\frac{hf'_b}{Fr^2}. \end{aligned}$$

Partir des équations d'Euler et de l'hypothèse d'un fluide parfait ne permet néanmoins pas de prendre en compte le moindre effet de la viscosité dans les équations intégrées. Une alternative consiste donc à utiliser le même procédé mais en partant des équations de Navier-Stokes [29] avec le scaling ondes longues (2.26)-(2.30). L'équation intégrée de la conservation de la masse reste la même que (2.36), par contre l'équation de la conservation du moment fait apparaître un terme supplémentaire s'interprétant comme un frottement au fond

$$\partial_t(hU) + \partial_x\left(\int_{f_b}^{\eta} u^2 \, dy\right) = -\frac{1}{Fr^2}h(\partial_x h + f'_b) - \frac{1}{\varepsilon Re}\partial_y u|_{y=f_b}. \quad (2.38)$$

Là encore, une fermeture doit être faite sur la vitesse u , sur toute la lame d'eau, pour gérer le terme de flux mais aussi pour exprimer le cisaillement $\partial_y u|_{y=f_b}$. Des formules explicites sont répertoriées dans [35] selon l'indice du fluide, l'indice 1 correspondant à un fluide Newtonien. Dans le cadre des fluides Newtoniens, la fermeture est la solution du demi-Poiseuille, ou solution de Nusselt obtenue dans la configuration d'une pente négative constante. Par des principes de solutions similaires, elle s'étend ensuite au cas général. L'importance de cette solution de référence se retrouve dans l'analyse proposée dans [10] sur le bien-fondé du scaling d'eaux peu profondes.

Proposition 2.13. Dans le cas d'un écoulement laminaire sur une pente négative constante (voir la figure 2.2 pour une représentation), l'équilibre entre la friction et la force d'entraînement de la pente donne une solution semi-parabolique, la solution du demi-Poiseuille ou de Nusselt [37, 49] :

$$u(t, x, y) = -\frac{3U_m}{2}\left(\frac{y - f_b}{h}\right)\left(\frac{y - f_b}{h} - 2\right) \quad (2.39)$$

avec $U_m = -\frac{\varepsilon Re_h f'_b}{3Fr^2}h^2$ qui est un terme constant positif du fait que f'_b soit négatif et constant.

Preuve.

Plaçons-nous dans le repère incliné, dénoté par les variables $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y - f_b(x))$, et étudions-y les équations de Navier-Stokes avec le scaling ondes longues. Dans ce repère, être à l'équilibre pour le fluide se traduit par l'invariance par translation selon $\tilde{x}$ de la vitesse $\tilde{u}$ et de la hauteur d'eau $\tilde{h}$, et un caractère stationnaire (indépendance du temps). En particulier, nous avons $\partial_{\tilde{x}}\tilde{h} = 0$ ce qui réduit le terme de pression de l'équation de conservation du moment à $-\frac{1}{Fr^2}f'_b$. L'invariance de $\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}$, combinée avec l'équation de conservation de la masse ainsi que l'adhérence, conduit à déterminer totalement la composante verticale de la vitesse : $\tilde{v} = 0$.

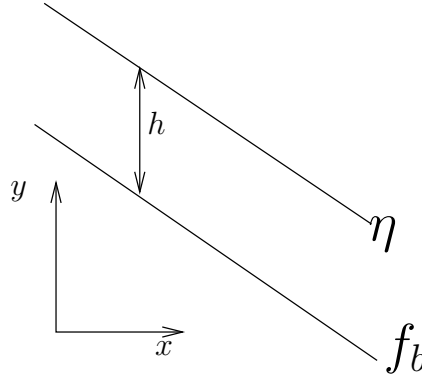


Figure 2.2: Situation d'étude pour l'écoulement de Nusselt (2.39) : fond de pente constante et hauteur de l'écoulement constante.

Remarque 2.14. Le changement de variables $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y - f_b(x))$ ne modifie pas la vitesse horizontale $u(t, x, y) = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$. Ainsi les calculs d'intégrales présents dans l'équation (2.38) se feront sans difficultés avec $\tilde{u}$ en changeant simplement les bornes d'intégration.

Aussi dans l'équation de quantité de mouvement, les seuls termes persistants sont :

$$0 = -\frac{1}{Fr^2} f'_b + \frac{1}{\varepsilon Re_h} \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{u}.$$

Cela permet d'obtenir une expression parabolique pour $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon Re_h f'_b}{3Fr^2} \tilde{y}^2 + b\tilde{y} + c = -\frac{3U_m}{2} \frac{\tilde{y}^2}{h^2} + b\tilde{y} + c$$

où b et c sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions de bord et U_m la constante introduite dans l'énoncé de la proposition.

Grâce à l'invariance de la vitesse, la détermination des constantes b et c peut s'effectuer en tout point x . Afin de simplifier les calculs, nous nous plaçons au point tel que $f_b(x) = 0$ (ou, exprimé autrement, $h = \eta$).

Les conditions de bord permettent d'obtenir directement les constantes recherchées :

- L'adhérence au fond : $\tilde{u}(0) = 0 \Rightarrow c = 0$;
- La continuité du tenseur des contraintes : $\partial_{\tilde{y}} \tilde{u}|_{\tilde{y}=h} = 0 \Rightarrow b = \frac{3U_m}{h}$.

Aussi le profil de vitesse de $\tilde{u}$ est entièrement déterminé et peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = -\frac{3U_m}{2} \frac{\tilde{y}}{h} \left(\frac{\tilde{y}}{h} - 2 \right). \quad (2.40)$$

Ce qui, écrit dans les variables (t, x, y) donne bien l'expression (2.39). □

Remarque 2.15. Le choix volontaire d'introduire un signe négatif dans U_m est simplement dicté par l'obtention d'un terme U_m , homogène à une vitesse, positif, or f'_b est par hypothèse négatif. Comme cela sera vu dans la proposition suivante, le facteur 3 introduit dans l'expression de U_m permet de définir U_m comme la vitesse moyenne de $\tilde{u}$ sur la hauteur d'eau.

Proposition 2.16. Les équations de Saint Venant avec frottement pour un fluide Newtonien laminaire, obtenues en considérant que l'écoulement n'est pas trop éloigné d'un écoulement de Nusselt et à partir de l'équation de conservation du moment (2.38), se présentent sous la forme suivante comme rappelé dans [44] :

$$\partial_t h + \partial_x(hU) = 0 \quad (2.41)$$

$$\partial_t(hU) + \partial_x\left(\frac{6}{5}hU^2 + \frac{h^2}{2Fr^2}\right) = -\frac{hf'_b}{Fr^2} - \frac{3}{\varepsilon Re_h} \frac{U}{h}. \quad (2.42)$$

Preuve. Continuons tout d'abord avec la solution de Nusselt (2.39) dans le repère incliné $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y - f_b(x))$ précédent. La vitesse $\tilde{u}$ (et donc u) étant connue, nous pouvons faire les calculs explicites présents dans l'équation (2.38). Comme dans le cas des équations de Saint Venant sans frottement nous désignons par U la vitesse moyenne définie par $hU = \int_{f_b}^{\eta} u dy = \int_0^h \tilde{u} d\tilde{y}$.

1. Relions cette vitesse moyenne U à la constante positive U_m introduite :

$$hU = \int_0^h -\frac{3U_m}{2} \frac{\tilde{y}}{h} (\frac{\tilde{y}}{h} - 2) d\tilde{y} = U_m \int_0^h -\frac{3}{2} \frac{\tilde{y}}{h} (\frac{\tilde{y}}{h} - 2) d\tilde{y} = hU_m.$$

La constante U_m a donc été explicitement choisie afin de factoriser la vitesse $\tilde{u}$ par sa vitesse moyenne et un facteur dont l'intégrale vaut simplement h . Cette manière de faire sera réutilisée pour la généralisation traitée ensuite.

2. Regardons à présent le terme de flux :

$$\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy = \int_0^h \tilde{u}^2(\tilde{y}) d\tilde{y} = \frac{6U_m^2}{5} h = \frac{6}{5} hU^2.$$

3. Le terme de friction a lui une forme explicite le reliant à h et U , et sous cette forme uniquement dans le cas d'un fluide laminaire :

$$\frac{1}{\varepsilon Re_h} \partial_y u|_{y=f_b} = \frac{1}{\varepsilon Re_h} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} = \frac{1}{\varepsilon Re_h} \frac{3U_m}{h} = \frac{3}{\varepsilon Re_h} \frac{U}{h}.$$

On obtient ainsi l'équation (2.42) recherchée pour une solution de Nusselt (2.39) initiale pour l'écoulement.

Les principes de solutions similaires permettent de généraliser ce résultat à des écoulements dont la vitesse n'est pas la solution de Nusselt (2.39) mais peut y être reliée en considérant que la vitesse présente une composante parabolique couplée avec une vitesse moyenne $u_m(t, x)$ non constante et inconnue

$$u(t, x, y) = -\frac{3}{2} u_m(t, x) \left(\frac{y - f_b}{h} \right) \left(\frac{y - f_b}{h} - 2 \right).$$

La vitesse moyenne proposée ne dépendant pas de la variable y , les calculs explicites précédents ne sont pas modifiés et on retrouve $U(t, x) = u_m(t, x)$ ainsi que l'équation (2.42). $\square$

Remarque 2.17. On observe dans l'équation (2.42) une modification de la relation entre le terme de flux et hU^2 par rapport au cas de Saint Venant sans friction. Dans ce dernier le coefficient valait 1 alors qu'ici il vaut $6/5$. Plus généralement, on peut retrouver dans la littérature sur les équations de Saint Venant des équations présentant un βhU^2 où $\beta = 1 + \int_{f_b}^{\eta} (1 - \frac{u}{U})^2 dy$, comme par exemple dans [35, 16].

Remarque 2.18. On retrouvera un terme de frottement laminaire dans les équations de la partie 4.1. On peut dès à présent remarquer que ce terme se présente comme le produit de $\frac{1}{\varepsilon Re_h}$ et de la vitesse moyenne U divisée par la hauteur d'eau sur laquelle on considère l'influence de la friction, ici h .

Remarque 2.19. Sur le modèle de l'équation (2.42) où le terme de frottement apparaît comme un terme reliant h et U au second membre, il est courant que les équations de Saint Venant soient écrites avec une loi de friction ajoutée, sans modifier cependant le terme de flux hU^2 . Ce terme de frottement peut être mis sous la forme $C_1 \frac{U}{h}$ respectant le caractère laminaire du fluide, ou être défini par une toute autre loi telle qu'une loi de Chézy ($U|U|$) ou de Manning ($\frac{U|U|}{h^{\frac{1}{3}}}$) [16].

Cependant le profil plat des équations de Saint Venant, comme le profil parabolique, définissent une fois pour toute un profil de vitesse sur toute la hauteur d'eau. Aussi si le fond, de par une bosse par exemple, entraîne de fortes variations de vitesse les termes de frottement ne sont pas capables de prendre en compte ces changements. Un raffinement de profils sur la hauteur d'eau se retrouve dans les travaux de Ruyer-Quil et Manneville [50] sur les résidus pondérés (l'ordre 0 étant justement le profil de Nusselt 2.39). Nous allons présenter ici un système de Saint Venant modifié par l'ajout d'équations de fermeture qui pourront évoluer, grâce à l'étude d'une couche visqueuse permettant de se dédouaner d'une étude de profil sur toute la hauteur d'eau, et nous obtiendrons ainsi un terme de frottement plus adapté à un fond variable.

3

Étude de la couche visqueuse

La stratégie développée dans cette thèse afin d'obtenir un système de type Saint Venant comportant un terme de frottement plus réaliste par son comportement physique est de passer par le biais d'une couche visqueuse. En mécanique des fluides, il est courant de se pencher sur les couches dites limites en introduisant un petit paramètre et en le faisant tendre ensuite vers 0. On trouve notamment des travaux avec des couches limites au passage d'un fluide visqueux sur un objet immergé dans le fluide, comme par exemple une aile d'avion, ou un cylindre (voir entre autres [46], [51]) ou encore l'écoulement visqueux dans des tuyaux [5, 41, 52]. Le principe de cette théorie est de condenser tous les effets de la viscosité dans une fine couche près de la paroi et de considérer ailleurs un fluide parfait connu par exemple au travers des équations d'Euler. Nous allons ici développer une théorie semblable, celle de la couche visqueuse qui, tout en restant fine, ne tend pas vers zéro à terme comme c'est le cas pour les couches limites. Cette couche condense les effets de la viscosité et au-dessus de cette couche se place le fluide supposé parfait. Un nouveau jeu d'équations est tout d'abord présenté en exploitant le principe de moindre dégénérescence [58], parfois désignées comme les équations RNSP (Reduced Navier-Stokes/Prandtl, voir par exemple [39]). Nous pourrions alors introduire des quantités physiques, en particulier l'épaisseur de déplacement, qui seront prédominantes pour la nouvelle forme de l'équation de quantité de mouvement de type Saint Venant. L'évolution de l'épaisseur de déplacement pourra s'observer au travers de l'équation de von Kármán que nous établirons dans ce chapitre.

3.1 Les équations de Prandtl

Dans le chapitre précédent, nous avons pu voir que le scaling ondes longues introduit dans les équations de Navier-Stokes permettaient de négliger la composante visqueuse dans la direction horizontale et d'obtenir l'expression explicite de pression hydrostatique. Ce scaling et les simplifications inhérentes ont pu être effectuées grâce à deux hypothèses d'échelle :

- le nombre de Reynolds est élevé ;
- la composante verticale de la vitesse est petite par rapport à celle horizontale.

Malgré tout étudier directement le fluide visqueux grâce aux équations de Navier-Stokes sur toute la hauteur reste difficile en raison de la surface libre. Cependant une troisième observation avait été apportée avec les deux autres que nous n'avons pas encore exploitée : la composante horizontale de la vitesse a de faibles variations selon la verticale. Une composante horizontale qui ne varierait pas selon la verticale recoupe l'hypothèse de fluide parfait. On souhaiterait donc voir le fluide étudié comme parfait ou presque, or un fluide parfait ne satisfait pas la condition d'adhérence. C'est pourquoi l'idée est de voir le fluide comme composé de deux couches :

- Une couche de fluide parfait décrite par les équations d'Euler déjà énoncées dans la section 2.3 ;

- Une fine couche visqueuse concentrant les effets de la viscosité, gardant la condition d'adhérence.

Nous allons dans les lignes qui suivent nous consacrer exclusivement à cette couche visqueuse, mais nous pouvons dès à présent souligner que ces deux couches devront bien évidemment être connectées afin de traduire l'évolution complète du fluide. Cette stratégie de découper un fluide en plusieurs couches, chacune raccordée à ses voisines sans transport de matière, se retrouve par exemple dans le traitement en multi-couches [3]. Mais ici les deux couches jouent des rôles très différents dans l'écoulement.

Le caractère visqueux du fluide prend tout son sens dans le frottement sur le fond de l'écoulement. Aussi la couche visqueuse doit naturellement être localisée proche du fond. Nous allons donc introduire un nouveau changement de variables dans les équations de Navier-Stokes (avec le scaling ondes longues déjà présent) traduisant que la variable verticale reste près du fond. Pour cela, nous introduisons un petit paramètre $\bar{\delta}$. L'ordre de grandeur précis sera déterminé dans ce qui suit afin de prendre en compte le plus de phénomènes. Ce paramètre permet de mettre en place la transformation de Prandtl :

$$t = \bar{t}, \quad x = \bar{x}, \quad y = \bar{\delta}\bar{y} + f_b.$$

La présence de la fonction d'espace f_b dans l'expression de $\bar{y}$ influe particulièrement sur les dérivées partielles en espace :

$$\partial_y = \frac{1}{\bar{\delta}}\partial_{\bar{y}}, \quad \partial_x = \partial_{\bar{x}} - \frac{f'_b}{\bar{\delta}}\partial_{\bar{y}} \quad (3.1)$$

Le changement des variables d'espace par ce scaling s'est fait naturellement mais il faut déterminer ce que l'on doit faire pour les inconnues de vitesse et de pression. L'équation de conservation de la masse (2.26) est fondamentale et doit rester valide pour tous les changements d'espace considérés. C'est donc elle qui va nous guider dans les choix de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ une fois écrite dans les nouvelles variables :

$$\partial_{\bar{x}}u + \partial_{\bar{y}}\left(\frac{v - f'_bu}{\bar{\delta}}\right) = 0.$$

Ce qui donne $\bar{u} = u$ et $\bar{v} = \frac{v - f'_bu}{\bar{\delta}}$.

La pression est une variable intensive en thermodynamique. A ce titre, la fonction de la pression est conservée qu'elle soit considérée sur un volume de taille 1 pour les variables $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ ou sur un volume de taille $\bar{\delta}$ pour les variables (t, x, y) . Elle vérifie donc $p(t, x, y) = \bar{p}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$.

Avec la réunion de tous les changements occasionnés par la transformation de Prandtl, nous avons :

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{\delta}\bar{y} + f_b, \quad t = \bar{t}, \quad p = \bar{p}, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{v} = \frac{v - f'_bu}{\bar{\delta}}. \quad (3.2)$$

Introduire la transformation de Prandtl, en respectant bien les règles de dérivation, dans les équations (2.26)-(2.30) permet d'obtenir le système suivant :

$$\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \partial_{\bar{y}}\bar{v} = 0$$

$$\partial_{\bar{t}}\bar{u} + \bar{u}\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \bar{v}\partial_{\bar{y}}\bar{u} = -\partial_{\bar{x}}\bar{p} + \frac{f'_b}{\bar{\delta}}\partial_{\bar{y}}\bar{p} + \frac{1}{\varepsilon Re_h \bar{\delta}^2}\partial_{\bar{y}}^2\bar{u} \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{\bar{\delta}}\partial_{\bar{y}}\bar{p} = -\frac{1}{Fr^2} \quad (3.4)$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \quad \text{quand} \quad \bar{y} = 0.$$

Remarque 3.1. Nous perdons ici de vue les conditions du bord de cette couche visqueuse. Elles seront remplacées par un raccord entre la couche visqueuse et le fluide parfait.

Grâce aux équations (3.3)-(3.4), nous allons pouvoir fixer la taille du paramètre $\bar{\delta}$ en appliquant le principe de moindre dégénérescence (voir [58]). En effet la relation sur $\partial_{\bar{y}}\bar{p}$ obtenue dans l'équation (3.4) permet d'établir que l'expression

$$\partial_{\bar{t}}\bar{u} + \bar{u}\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \bar{v}\partial_{\bar{y}}\bar{u} + \partial_{\bar{x}}\bar{p} - \frac{f'_b}{\bar{\delta}}\partial_{\bar{y}}\bar{p}$$

est d'ordre 1. Selon la valeur de $\bar{\delta}$ par rapport au terme εRe_h les termes prédominants de l'équation (3.3) ne seront pas les mêmes :

- Si $\bar{\delta}$ vérifie $\varepsilon Re_h \bar{\delta}^2 \gg 1$, la trace selon y du laplacien de la vitesse u devient négligeable et on retrouve les équations d'Euler précédentes ;
- Si au contraire $\varepsilon Re_h \bar{\delta}^2 \ll 1$, seul le terme du laplacien est dominant. Cela conduit à $\partial_{\bar{y}}^2 \bar{u} = 0$. Cela donne uniquement un profil linéaire sur toute la hauteur d'eau. L'adhérence au fond et la continuité du tenseur de contrainte à la surface donnent alors $u \equiv 0$ ce qui n'est pas acceptable ;
- La dernière possibilité est de choisir $\bar{\delta}$ de façon à ce que $\varepsilon Re_h \bar{\delta}^2 \sim 1$. Ce choix permet de garder tous les termes de l'équation (3.3) (principe de moindre dégénérescence [58]), en particulier le terme de viscosité selon $\bar{y}$ est conservé.

Aussi pour le restant de ce document, nous utiliserons le scaling

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon Re_h}}. \quad (3.5)$$

Cette hypothèse faite, nous obtenons les équations de Prandtl (écrites dans les variables de la couche visqueuse) :

$$\partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} = 0 \quad (3.6)$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} - \frac{f'_b}{Fr^2} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u} \quad (3.7)$$

$$\partial_{\bar{y}} \bar{p} = -\frac{\bar{\delta}}{Fr^2} \quad (3.8)$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ quand } \bar{y} = 0 \quad (3.9)$$

Remarque 3.2. Les équations de Prandtl présentées dans [51], au chapitre VII, apparaissent sous une forme légèrement différente puisqu'elles sont établies sur fond plat. Notre équation (3.7) contient un terme supplémentaire $\frac{f'_b}{Fr^2}$. De plus, la pression selon la verticale étant prise constante par approximation l'équation (3.8) n'apparaît pas. Ces équations de Prandtl sur fond plat font l'objet encore aujourd'hui d'études sur leur caractère bien posé selon diverses hypothèses (voir par exemple [27]), mais ça ne sera pas l'objet des travaux qui suivent.

Remarque 3.3. L'équation (3.8) nous apprend de plus que $\partial_{\bar{x}} \bar{p}$ ne dépend pas de $\bar{y}$.

Maintenant que les équations régissant le fluide dans la couche visqueuse sont clairement établies, il nous faut regarder la condition de raccord manquante reliant cette couche visqueuse au fluide parfait. Le raccord se fait naturellement sur une ligne de courant du fluide, tout en respectant la transformation de Prandtl (3.2). Avant d'exposer le raccord choisi dans notre étude, voyons les propriétés des vitesses du fluide parfait observées sur une ligne de courant.

Proposition 3.4. Pour toute ligne de courant φ de l'écoulement de fluide parfait, la vitesse horizontale u_e définie pour tout t et x par $u_e(t, x) = u_{FP}(t, x, \varphi(t, x))$, où (u_{FP}, v_{FP}) satisfait les équations d'Euler, vérifie l'équation :

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\partial_x p|_{y=\varphi(t, x)} \quad (3.10)$$

Preuve. Par définition, nous savons que $u_e(t, x) = u_{FP}(t, x, \varphi(t, x))$. Les règles de dérivations partielles nous donnent

$$\partial_t u_e = (\partial_t u_{FP} + \partial_t \varphi \partial_y u_{FP})|_{y=\varphi} \quad \partial_x u_e = (\partial_x u_{FP} + \partial_x \varphi \partial_y u_{FP})|_{y=\varphi}.$$

Ainsi la vitesse u_e vérifie

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = [\partial_t u_{FP} + u_{FP} \partial_x u_{FP} + (\partial_t \varphi + u_{FP} \partial_x \varphi) \partial_y u_{FP}]|_{y=\varphi}$$

Or par définition d'une ligne de courant pour le fluide, la fonction φ satisfait $v_{FP}(t, x, \varphi(t, x)) = \partial_t \varphi + u_{FP} \partial_x \varphi$. D'où

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = [\partial_t u_{FP} + u_{FP} \partial_x u_{FP} + v_{FP} \partial_y u_{FP}]|_{y=\varphi}$$

Comme le vecteur vitesse (u_{FP}, v_{FP}) vérifie les équations d'Euler, cette expression se ramène simplement à

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\partial_x p|_{y=\varphi}$$

□

Corollaire 3.5. *Dans le cadre d'une pression hydrostatique, pour toute ligne de courant φ , $u_e(t, x) = u_{FP}(t, x, \varphi(t, x))$ vérifie :*

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\partial_x p \quad (3.11)$$

Par conséquent, pour un fluide parfait soumis à une pression hydrostatique, avec un profil plat initial pour la vitesse horizontale, on a $\partial_y u_{FP} = 0$.

Preuve. Soit y_1 et y_2 deux ordonnées de l'intervalle $[f_b, \eta]$. L'invariance de u_{FP} selon la verticale nécessite de vérifier que

$$\forall x, \forall t, u_{FP}(t, x, y_1) = u_{FP}(t, x, y_2).$$

Soit t et x , et soit φ_1 et φ_2 les lignes de courant telles que

$$\varphi_1(t, x) = y_1 \quad \varphi_2(t, x) = y_2$$

Deux vitesses sont définies : $u_{e1}(t, x) = u_{FP}(t, x, \varphi_1(t, x))$ et $u_{e2}(t, x) = u_{FP}(t, x, \varphi_2(t, x))$. Alors u_{e1} et u_{e2} vérifient la même équation (3.11). Ainsi, sous la condition qu'à un temps initial t_0 , $u_{e1}(t_0, x) = u_{e2}(t_0, x)$, on obtient que $u_{e1} \equiv u_{e2}$ et l'invariance est assurée. □

Remarque 3.6. *Le corollaire 3.5 justifie l'hypothèse classiquement faite d'un profil vertical pour la vitesse horizontale d'un écoulement de fluide parfait soumis à une pression hydrostatique, hypothèse que nous avons déjà observée dans la section 2.3.*

Grâce au corollaire 3.5, nous pouvons choisir sans aucune perte d'information la ligne de courant sur laquelle définir le raccord entre le fluide visqueux et le fluide parfait. Nous gardons à l'esprit que la couche visqueuse peut se développer sur toute la hauteur d'eau, aussi nous choisissons comme ligne de courant la surface libre η du fluide, soit un raccord en $\bar{y} = \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}$ selon le changement de variables (3.2). En posant $U_e(t, x) = (u_e(t, x), v_e(t, x)) = U_{FP}(t, x, \eta(t, x))$ la vitesse du fluide parfait à la surface, nous avons donc comme condition de raccord entre les deux couches :

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}) = u_e(\bar{t}, \bar{x}) \quad \bar{\delta} \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}) = v_e(\bar{t}, \bar{x}) - f'_b(\bar{x}) u_e(\bar{t}, \bar{x})$$

Remarque 3.7. *Le raccord dans le cadre d'une couche limite est $\lim_{\bar{y} \rightarrow +\infty} \bar{u} = u_e$, où u_e est vue comme la vitesse du fluide parfait au fond, ainsi que le raccord des gradients de pression [51, 17]. Aucun raccord n'est proposé pour les vitesses verticales.*

Pour la couche visqueuse présentée ici, le raccord n'est pas défini par une limite mais simplement par application de la transformation de Prandtl (3.2). Aussi chaque composante de la vitesse a sa propre égalité et le raccord des pressions également.

Néanmoins l'égalité pour la composante verticale n'est pas nécessaire pour l'étude de la couche visqueuse présentée dans ce chapitre 3. Dans le chapitre 6, nous verrons l'importance de cette relation pour obtenir une modification de la condition de bord pour un écoulement de fluide parfait.

3.2 L'équation intégrée de von Kármán

Nous avons mis en valeur deux vitesses pour le fluide sur la hauteur d'eau : $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ et $u_e(t, x)$. La vitesse moyenne $U(t, x)$ (définition 2.12) qui nous intéresse pour obtenir un modèle intégré de type Saint Venant doit pouvoir se relier à ces vitesses. Mais en quel sens ? Lorsque le fluide est parfait, le débit de l'écoulement s'écrit comme le produit de toute la hauteur d'eau et de u_e . Ici le fluide est visqueux, aussi hu_e serait un débit surestimé pour hU , représentant le vrai débit. Nous introduisons dans la définition suivante deux quantités physiques qui vont nous permettre de relier le débit réel, ainsi que le terme de flux $\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy$ que nous avons déjà mis en valeur dans la section 2.3, à la vitesse u_e .

Définition 3.8. Soit U la vitesse moyenne du fluide, vue à la définition 2.12 : $hU = \int_{f_b}^{\eta} u dy$. On définit :

- l'épaisseur de déplacement, δ_1 , caractérisée par

$$hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e, \quad (3.12)$$

- l'épaisseur de quantité de mouvement, δ_2 , décrite par

$$\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy = (h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))u_e^2. \quad (3.13)$$

Remarque 3.9. L'appellation d'épaisseur pour ces deux quantités se comprend aisément par les formules (3.12) et (3.13) où $\bar{\delta}\delta_1$ et $\bar{\delta}\delta_2$ apparaissent au même titre que la hauteur h . L'épaisseur de déplacement représente la hauteur de laquelle il faudrait déplacer le fond pour qu'un fluide parfait de vitesse u_e ait pour débit hU (illustration dans la figure 3.1). L'épaisseur de quantité de mouvement est une rectification supplémentaire pour conserver la quantité de mouvement.

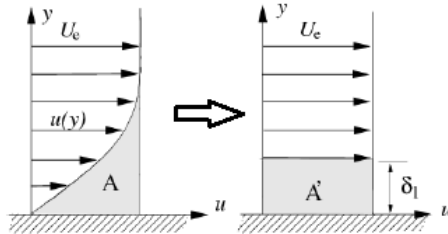


Figure 3.1: L'épaisseur $\bar{\delta}\delta_1$ est la surévaluation du fond nécessaire pour conserver le débit en considérant la vitesse u_e .

Ces deux quantités vont toujours de pair avec les études de couche limite comme on peut par exemple le voir dans [51]. Elles sont alors définies dans les variables de la couche limite par

$$\delta_1 = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U_\infty}\right) d\bar{y} \quad \delta_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\bar{u}}{U_\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U_\infty}\right) d\bar{y}$$

où U_∞ est une vitesse établie de l'écoulement. Nous sommes ici dans un cadre légèrement différent puisqu'au lieu d'une couche limite, se traduisant par $\bar{\delta} \rightarrow 0$, nous avons certes une couche où la viscosité domine mais le paramètre $\bar{\delta}$ a une valeur déterminée par le nombre de Reynolds. Malgré tout nous pouvons voir que les définitions proposées ici rejoignent celles plus classiques, avec u_e jouant le rôle de U_∞ . Le détail du va-et-vient est précisé pour δ_1 uniquement, mais la simple transformation vaut bien entendu aussi pour δ_2 . La définition macroscopique (3.12) nous permet d'exprimer $\bar{\delta}\delta_1 u_e$ en fonction de h , u_e et U :

$$\bar{\delta}\delta_1 u_e = hu_e - hU.$$

En utilisant la définition intégrale (2.12) de U , cette égalité s'écrit :

$$\bar{\delta}\delta_1 = \frac{1}{u_e} \int_{f_b}^{\eta} (u_e - u) dy = \int_{f_b}^{\eta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

En introduisant le changement de variables de la transformation de Prandtl, on a finalement

$$\delta_1 = \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) d\bar{y}.$$

On obtient alors la définition de l'épaisseur de déplacement pour la couche limite en faisant tendre $\bar{\delta}$ vers 0.

Dans cette formulation, comme u_e ne varie pas selon la verticale nous avons

$$u_e\delta_1 = \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} (u_e - \bar{u}) d\bar{y}, \quad u_e^2\delta_2 = \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \bar{u}(u_e - \bar{u}) d\bar{y}. \quad (3.14)$$

Proposition 3.10. *L'évolution des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement est décrite par une équation intégrée, l'équation de von Kármán, faisant apparaître la contrainte pariétale du fluide étudiée :*

$$\partial_t(u_e\delta_1) + u_e\delta_1\partial_x u_e + \partial_x(u_e^2\delta_2) = \tau, \quad (3.15)$$

où τ est la contrainte pariétale définie par

$$\tau = \partial_{\bar{y}}\bar{u}|_{\bar{y}=0}. \quad (3.16)$$

Preuve. Par sa définition même, l'épaisseur de déplacement, tout comme l'épaisseur de quantité de mouvement, met en valeur la différence entre la vitesse du fluide parfait u_e et la vitesse réelle de l'écoulement. L'obtention de l'équation de von Kármán passe donc par une comparaison entre l'équation (3.10) régissant la vitesse u_e et les équations de Prandtl (3.6)-(3.9). Ceci ne peut s'effectuer qu'après avoir appliqué à l'équation (3.10) la transformation de Prandtl :

$$\partial_{\bar{t}}\bar{u}_e + \bar{u}_e\partial_{\bar{x}}\bar{u}_e = -\partial_{\bar{x}}\bar{p}|_{\bar{y}=\frac{\eta-f_b}{\delta}} + \frac{f'_b}{\delta}\partial_{\bar{y}}\bar{p}|_{\bar{y}=\frac{\eta-f_b}{\delta}}$$

L'utilisation de l'équation (3.8) permet d'avoir simplement :

$$\partial_{\bar{t}}\bar{u}_e + \bar{u}_e\partial_{\bar{x}}\bar{u}_e = -\partial_{\bar{x}}\bar{p} - \frac{f'_b}{Fr^2},$$

Aussi en soustrayant l'équation (3.7) à cette dernière équation nous obtenons une équation où la dérivée en temps porte directement sur $u_e - \bar{u}$ et pourrait donc décrire l'évolution en temps du défaut de vitesse entre la vitesse du fluide parfait et la vitesse prenant en compte la viscosité.

$$\partial_{\bar{t}}(u_e - \bar{u}) + u_e\partial_{\bar{x}}u_e - \bar{u}\partial_{\bar{x}}\bar{u} - \bar{v}\partial_{\bar{y}}\bar{u} = -\partial_{\bar{y}}^2\bar{u}.$$

Compte tenu du fait que $\partial_{\bar{y}}\bar{v} = -\partial_{\bar{x}}\bar{u}$ et que $\bar{v} = 0$ au fond, on peut modifier l'équation précédente en remplaçant $\bar{v}$ par $-\int_0^{\bar{y}} \partial_{\bar{x}}\bar{u} d\bar{y}$:

$$\partial_{\bar{t}}(u_e - \bar{u}) + u_e\partial_{\bar{x}}u_e - \bar{u}\partial_{\bar{x}}\bar{u} - \left(-\partial_{\bar{y}}\bar{u} \int_0^{\bar{y}} \partial_{\bar{x}}\bar{u} d\bar{y}\right) = -\partial_{\bar{y}}^2\bar{u}.$$

Afin de mettre en évidence $u_e - \bar{u}$ dans les différents termes de l'équation, on ajoute et retranche le terme $\bar{u}\partial_{\bar{x}}u_e$. Ceci conduit à l'équation suivante où une intégration par parties permettra de pouvoir moyenner l'équation sur toute la hauteur de la couche visqueuse :

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{t}}(u_e - \bar{u}) + (u_e - \bar{u})\partial_{\bar{x}}u_e + \bar{u}\partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) + \partial_{\bar{y}}\bar{u} \int_0^{\bar{y}} \partial_{\bar{x}}\bar{u} d\bar{y} &= -\partial_{\bar{y}}^2\bar{u} \\ \partial_{\bar{t}}(u_e - \bar{u}) + (u_e - \bar{u})\partial_{\bar{x}}u_e + \bar{u}\partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) - \bar{u}\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \partial_{\bar{y}}(\bar{u} \int_0^{\bar{y}} \partial_{\bar{x}}\bar{u} d\bar{y}) &= -\partial_{\bar{y}}^2\bar{u} \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'équation est à présent sous une bonne forme pour intégrer selon la verticale $\bar{y}$ entre 0 et $\frac{\eta-f_b}{\delta}$.

Rappel. L'outil utilisé ici (et qui sera réutilisé aussi lors de l'obtention des équations de type Saint-Venant (partie 4.1)) est la dérivation d'une intégrale de fonctions à plusieurs variables que nous rappelons en toute généralité :

$$D_i \left(\int_{g(t,x)}^{h(t,x)} f(t, x, y) dy \right) = \int_{g(t,x)}^{h(t,x)} D_i f(t, x, y) dy + f(t, x, h(t, x)) D_i h(t, x) - f(t, x, g(t, x)) D_i g(t, x) \quad (3.18)$$

Le réarrangement de l'équation s'effectue en plusieurs étapes :

- Grâce à la transformation de Prandtl (3.1), on sait que $\partial_{\bar{y}} \bar{u} = \bar{\delta} \partial_y u$. Or la continuité du tenseur de contrainte (2.31) assure que $\partial_y u|_{y=\eta} = 0$. Le membre de droite s'intègre donc directement avec $\partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=\frac{\eta-f_b}{\delta}} = 0$:

$$\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u} d\bar{y} = -\partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0}.$$

- En appliquant la formule (3.18) où $D_i = \partial_{\bar{t}}$:

$$\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \partial_{\bar{t}}(u_e - \bar{u}) d\bar{y} = \partial_{\bar{t}} \left(\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} (u_e - \bar{u}) d\bar{y} \right) - (u_e - \bar{u})|_{\bar{y}=\frac{\eta-f_b}{\delta}} \partial_{\bar{t}} \eta = \partial_{\bar{t}} \left(\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} (u_e - \bar{u}) d\bar{y} \right)$$

puisque par définition du raccord entre la couche visqueuse et le fluide parfait $u_e(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\eta-f_b}{\delta})$.

- $\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} (u_e - \bar{u}) \partial_{\bar{x}} u_e d\bar{y} = \partial_{\bar{x}} u_e \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} (u_e - \bar{u}) d\bar{y}$ puisque u_e est invariant selon la verticale.
- Les trois derniers termes du membre de gauche vont être traités ensemble afin de reconnaître un produit

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \left(\bar{u} \partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) - \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}}(\bar{u} \int_0^{\bar{y}} \partial_{\bar{x}} \bar{u} d\bar{y}) \right) d\bar{y} &= \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \bar{u} \partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) d\bar{y} - \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} d\bar{y} \\ &\quad + u_e \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \partial_{\bar{x}} \bar{u} d\bar{y} \end{aligned}$$

Comme $\partial_{\bar{x}}(\bar{u}(u_e - \bar{u})) = \bar{u} \partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) - \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + u_e \partial_{\bar{x}} \bar{u}$ et qu'à nouveau les termes aux bornes dans la formule (3.18) sont nuls, on obtient que :

$$\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \left(\bar{u} \partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) - \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}}(\bar{u} \int_0^{\bar{y}} \partial_{\bar{x}} \bar{u} d\bar{y}) \right) d\bar{y} = \partial_{\bar{x}} \left(\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \bar{u}(u_e - \bar{u}) d\bar{y} \right).$$

Finalement l'équation (3.17) une fois intégrée sur la hauteur s'écrit

$$\partial_{\bar{t}} \left(\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} (u_e - \bar{u}) d\bar{y} \right) + \partial_{\bar{x}} u_e \int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} (u_e - \bar{u}) d\bar{y} + \partial_{\bar{x}} \left(\int_0^{\frac{\eta-f_b}{\delta}} \bar{u}(u_e - \bar{u}) d\bar{y} \right) = -\partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0}.$$

Les expressions de δ_1 et δ_2 vues dans la relation (3.14) conduisent en effet à l'équation (3.15), en utilisant de plus que $\bar{t} = t$ et $\bar{x} = x$.

□

3.3 Profil de vitesse dans la couche visqueuse

L'équation de von Kármán (3.15) donne des informations sur l'évolution de la couche visqueuse. Écrite comme cela, elle fait apparaître quatre inconnues : u_e , δ_1 , δ_2 et τ_1 . A moins de déterminer des équations supplémentaires afin d'avoir suffisamment d'informations par rapport au nombre d'inconnues, il faut impérativement avoir un outil pour relier ces inconnues entre elles. Le principe généralement exploité (comme dans [51]) dans les couches limites, et qui peut s'adapter ici à la couche visqueuse, est de définir un profil de vitesse φ pour la composante horizontale de la vitesse visqueuse. En toute généralité ce profil doit dépendre : du temps pour prendre en compte l'évolution de la couche visqueuse, des deux variables d'espace pour exprimer les variations de la vitesse visqueuse $\bar{u}$ passant de 0 au fond (adhérence) à la vitesse du fluide parfait u_e pour que le raccord entre les deux couches puissent s'effectuer. Théoriquement les variations peuvent s'effectuer sur toute la hauteur de la couche visqueuse. Dans la pratique, comme cela est déjà utilisé dans [51], il est commode d'introduire une borne $\Delta(\bar{t}, \bar{x})$ pour les variations de la vitesse visqueuse $\bar{u}$ avant d'atteindre u_e . Cela impose naturellement que $\Delta \leq \frac{(\eta - f_b)}{\delta}$. Le choix de Δ reste très théorique puisque il apparaît comme un outil de formalisme mais ne transparaît pas dans les relations finales. On souhaite que le profil vérifie :

$$\varphi(\bar{t}, \bar{x}, \zeta) = \varphi\left(t, x, \frac{\bar{y}}{\Delta(\bar{t}, \bar{x})}\right) = \frac{\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})}{u_e(\bar{t}, \bar{x})} \quad \text{quand } 0 \leq \bar{y} \leq \Delta.$$

Avec de plus les conditions exigées par les conditions aux limites

$$\varphi(\bar{t}, \bar{x}, 0) = 0, \quad \varphi\left(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\bar{y}}{\Delta}\right) = 1 \quad \text{lorsque } \Delta \leq \bar{y} \leq \frac{(\eta - f_b)}{\delta}. \quad (3.19)$$

Voyons en quoi l'introduction de ce profil permet de relier entre elles les différentes variables inconnues :

- L'épaisseur de déplacement δ_1 :

$$\delta_1(t, x) = \int_0^{\frac{\eta - f_b}{\delta}} \left(1 - \frac{\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})}{u_e(\bar{t}, \bar{x})}\right) d\bar{y} = \int_0^{\frac{(\eta - f_b)}{\delta}} (1 - \varphi(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\bar{y}}{\Delta})) d\bar{y} = \Delta \int_0^1 (1 - \varphi) d\zeta$$

Aussi en désignant par $\alpha_2(t, x) = \int_0^1 (1 - \varphi(t, x, \zeta)) d\zeta$, on a la relation :

$$\delta_1(t, x) = \Delta(t, x) \alpha_2(t, x) \quad (3.20)$$

- L'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 :

$$\delta_2(t, x) = \int_0^{\frac{\eta - f_b}{\delta}} \frac{\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})}{u_e(\bar{t}, \bar{x})} \left(1 - \frac{\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})}{u_e(\bar{t}, \bar{x})}\right) d\bar{y} = \Delta \int_0^1 \varphi(1 - \varphi) d\zeta.$$

En considérant $\alpha_1(t, x) = \int_0^1 \varphi(t, x, \zeta)(1 - \varphi(t, x, \zeta)) d\zeta$ et $H(t, x) = \frac{\alpha_2(t, x)}{\alpha_1(t, x)}$, on obtient l'expression :

$$\delta_2(t, x) = \Delta(t, x) \alpha_1(t, x) = \frac{\delta_1(t, x)}{H(t, x)}. \quad (3.21)$$

- La contrainte pariétale $\partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0}$ peut, elle aussi, s'exprimer à l'aide du profil de vitesse :

$$\tau(t, x) = \partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0} = \frac{u_e(t, x)}{\Delta(t, x)} \partial_{\zeta} \varphi|_{\zeta=0} = \frac{u_e(t, x) \alpha_2(t, x)}{\delta_1(t, x)} \partial_{\zeta} \varphi|_{\zeta=0}. \quad (3.22)$$

Remarque 3.11. La définition de H , comme l'écriture de δ_2 en fonction de δ_1 , nécessitent que les facteurs α_1 et α_2 soient non nuls. Pour des profils φ fixés ne dépendant que de ζ , ces coefficients sont des constantes. Aussi un choix préalable du profil assure le signe de ces facteurs. Dans le cas de profils plus complexes avec des variations suivant les trois variables, l'annulation des termes peut se produire.

- La définition de $\alpha_2(t, x) = \int_0^1 (1 - \varphi(t, x, \zeta)) d\zeta$ garantit que $\alpha_2 > 0$ tant que la valeur moyenne de φ est strictement inférieure à 1. Cette condition peut ne pas être respectée si le fluide visqueux est pulsé ce qui se passe dans les artères où les parois sont visco-élastiques [60]. Il est cependant raisonnable, lorsqu'aucun phénomène extérieur entre en compte, que la couche visqueuse ne possède pas une vitesse accélérée par rapport à celle du fluide parfait.
- Pour α_1 la stricte positivité n'est pas garantie car lorsqu'une recirculation a lieu dans une couche visqueuse $\partial_\zeta \varphi|_{\zeta=0} < 0$ ainsi $\varphi(1 - \varphi)$ change de signe. Aussi l'utilisation d'un profil adaptatif pour une étude spécifique de recirculation peut engendrer une mauvaise définition, en tout point d'espace et de temps, des paramètres.

Finalement l'équation de von Kármán peut s'écrire uniquement à l'aide de l'épaisseur de déplacement et des 3 fonctions α_2 , H et τ qui dépendent directement du choix du profil de vitesse φ :

$$\partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) = \frac{u_e \alpha_2}{\delta_1} \partial_\zeta \varphi|_{\zeta=0}. \quad (3.23)$$

Différents types de profils de vitesse peuvent être choisis, plus ou moins raffinés selon les propriétés physiques du fluide que l'on souhaite observer. Un certain nombre de possibilités sont exposées dans [51], chapitre X pour obtenir des profils laminaires. Une première simplification, qui s'appuie sur les principes de similitude sur les fonds plats, consiste à voir les profils de vitesse comme uniquement dépendant la composante verticale ζ . Dans ces cas, les termes α_2 , H et τ deviennent simplement des constantes explicites. Nous détaillerons ci-après les deux premiers exemples de profils polynomiaux : un profil linéaire et un profil parabolique. Mais de nombreux autres polynômes sont présentés dans [51]. Cependant ces choix de profils ne dépendant que de la composante verticale ne permettent pas une adaptation du profil qui peut s'avérer nécessaire pour des phénomènes plus fins. Un exemple de phénomène qu'il peut être souhaitable de reproduire est la recirculation du fluide en aval du bosse qui entraîne une séparation, déjà connue en mécanique des fluides, de la couche visqueuse. Il est ainsi parfois nécessaire d'avoir aussi une dépendance en la variable horizontale pour s'adapter à la topographie. Cette nécessité se justifie dans les études de séparation où le critère pour l'émergence du phénomène est l'annulation du terme de friction selon la variable x , comme cela est rappelé notamment dans [19]. Nous présenterons un exemple d'un profil de ce type qui est donné dans [5].

- Profil linéaire : Nous recherchons une fonction φ telle que $\varphi(\zeta) = a\zeta + b$ si $0 \leq \zeta \leq 1$.
 - L'adhérence au fond impose que $\varphi(0) = 0$. On sait donc que $\varphi(\zeta) = a\zeta$.
 - Le raccord avec le fluide parfait nous donne de plus la condition $\varphi(\zeta) = \varphi(\frac{\bar{y}}{\Delta}) = 1$ si $\Delta \leq \bar{y} \leq \frac{\eta - f_b}{\delta}$.

Ainsi $\varphi(\zeta) = \zeta$ permet de vérifier les deux conditions limites imposées pour la couche visqueuse. Grâce à cette expression explicite, nous pouvons à présent calculer les facteurs exigés par l'équation de von Kármán.

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \int_0^1 (1 - \zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 &= \int_0^1 \zeta(1 - \zeta) d\zeta = \frac{1}{6} \\ H &= 3 \\ \varphi'(0) &= 1. \end{aligned}$$

- Profil parabolique : Cette fois-ci le profil de vitesse φ est un polynôme du second degré, $\varphi(\zeta) = a\zeta^2 + b\zeta + c$ lorsque si $0 \leq \zeta \leq 1$.
 - A nouveau l'adhérence au fond annule la constante : $\varphi(\zeta) = a\zeta^2 + b\zeta$.

- Le raccord entre le fluide parfait et la couche visqueuse s'exprime par $\varphi(1) = 1$, soit $a + b = 1$.
- Une troisième condition est ici requise par rapport au cas linéaire. Nous exploitons la continuité du tenseur de contrainte, vu à la surface, et appliqué ici en Δ . Nous devons avoir $\partial_{\bar{y}}\bar{u}|_{\bar{y}=\Delta} = 0$, ce qui se traduit en terme de profil de vitesse par $\varphi'(1) = 0$. Aussi nous obtenons également la relation $2a + b = 0$.

En combinant les trois conditions, le profil de vitesse parabolique φ a pour expression $\varphi(\zeta) = -\zeta^2 + 2\zeta$. A partir de cette expression, nous calculons les termes recherchés pour l'équation de von Kármán.

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \int_0^1 (1 + \zeta^2 - 2\zeta) d\zeta = \frac{1}{3} \\ \alpha_1 &= \int_0^1 (-\zeta^2 + 2\zeta)(1 + \zeta^2 - 2\zeta) d\zeta = \frac{2}{15} \\ H &= \frac{5}{2} \\ \varphi'(0) &= 2.\end{aligned}$$

Profil de vitesse ($0 \leq \zeta \leq 1$)	α_2	H	$\varphi'(0)$
$\varphi(\zeta) = \zeta$	$\frac{1}{2}$	3	1
$\varphi(\zeta) = -\zeta^2 + 2\zeta$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$	2

Table 3.1: Valeurs des paramètres pour les profils de vitesse linéaire et parabolique sur une couche de hauteur fixée Δ .

- Profil adaptatif dans un cadre stationnaire énoncé dans [5] dont les paramètres vérifient pour $\Lambda_1 = \delta_1^2 \frac{du_e}{dx}$:

$$\begin{aligned}H &= \begin{cases} 2,5905e^{-0,37098\Lambda_1} & \text{si } \Lambda_1 < 0,6 \\ 2,074 & \text{si } \Lambda_1 \geq 0,6 \end{cases} \\ \alpha_2 \varphi'(0) &= 1,05(-H^{-2} + 4H^{-3}).\end{aligned}$$

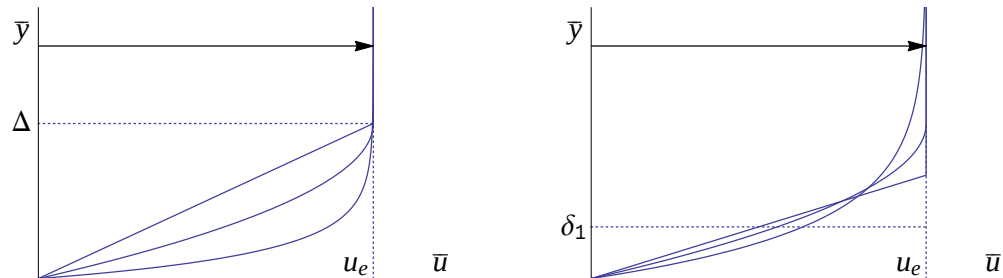


Figure 3.2: Illustration de trois profils de vitesse. L'image de gauche présente des profils établis avec le même facteur de couche visqueuse Δ . On peut observer de haut en bas un profil linéaire, un profil parabolique et un profil de Blasius [34]. L'image de gauche présente les mêmes types de profils mais cette fois-ci déterminés de façon à ce que l'épaisseur de déplacement δ_1 soit conservée.

Remarque 3.12. La définition du profil de vitesse et celles des paramètres $\alpha_1(t, x)$ et $\alpha_2(t, x)$ permettent d'avoir une information sur les valeurs possibles pour le facteur de forme $H(t, x)$.

- L'hypothèse, déjà faite plus haut pour le paramètre α_2 , est que dans la couche visqueuse la vitesse du fluide visqueux ne dépasse pas celle du fluide parfait u_e , ce qui se traduit pour le profil de vitesse par $\varphi(t, x, \zeta) \leq 1$. Aussi, par croissance de l'intégrale, $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ou autrement dit pour le facteur de forme $H(t, x) \geq 1$.
- Le cas $H \equiv 1$ n'est en réalité pas acceptable car cela conduit à un terme de friction singulier. En effet $H(t, x) = 1$ si $\alpha_1(t, x) = \alpha_2(t, x)$. En terme intégrale cela revient à $\int_0^1 (1 - \varphi(t, x, \zeta))^2 d\zeta = 0$. Même si φ n'est pas une fonction continue, elle vérifie $\varphi(t, x, \zeta) = 1$ pour presque tout $\zeta \in [0; 1]$. Comme $\varphi(t, x, 0) = 0$, il y a au moins une discontinuité à l'origine créant un terme de frottement infini puisqu'il est porté par $\partial_\zeta \varphi|_{\zeta=0}$.

On pourra donc conserver en mémoire que $H(t, x) > 1$ pour tout temps t et toute valeur de x .

3.4 Solutions explicites de l'équation de von Kármán

L'équation de von Kármán (3.15) établie au-dessus décrit l'évolution en temps de la quantité $u_e \delta_1$ et par conséquent, couplée avec l'équation sur le fluide parfait (3.10), l'évolution de δ_1 . Mais à quel comportement limite peut-on s'attendre pour la quantité de déplacement δ_1 ? C'est ce que nous allons étudier ici en se plaçant dans le cas particulier où le fond est plat, le profil de vitesse φ est fixé et la vitesse u_e du fluide parfait constante. L'équation de von Kármán se ramène alors à l'équation suivante :

$$u_e \partial_t(\delta_1) + \frac{u_e^2}{H} \partial_x(\delta_1) = \frac{\alpha_2 u_e \varphi'(0)}{\delta_1}$$

En simplifiant par u_e (non nul) et en multipliant par δ_1 , on obtient :

$$\partial_t(\delta_1^2) + \frac{u_e}{H} \partial_x(\delta_1^2) = 2\alpha_2 \varphi'(0).$$

Cette équation est une équation de transport pour la fonction $f(t, x) = \delta_1^2(t, x)$ avec une vitesse constante $c = \frac{u_e}{H} > 0$ et un second membre constant $\psi = 2\alpha_2 \varphi'(0)$. L'étude se place dans le quart de plan $[0; +\infty[\times [0; +\infty[$:

$$\begin{cases} \partial_t f + c \partial_x f = \psi & x \geq 0, \quad t \geq 0 \\ f(0, x) = b_0(x) & x \geq 0 \\ f(t, 0) = b_1(t) & t > 0 \end{cases}$$

où b_0 et b_1 sont deux fonctions données.

Remarque 3.13. De par la définition de $f = \delta_1^2$, les deux fonctions b_0 et b_1 sont bien entendues des fonctions positives.

La méthode des caractéristiques appliquée à ce système donne comme résultat que l'on retrouve dans les travaux de Stewartson [54], section 3 :

$$f(t, x) = \begin{cases} b_0(x - ct) + \psi t & \text{si } x \geq \frac{u_e}{H} t \\ b_1(t - \frac{x}{c}) + \psi \frac{x}{c} & \text{si } x < \frac{u_e}{H} t. \end{cases}$$

Nous obtenons finalement comme solution, nommée solution de Blasius ou solution de Rayleigh, pour l'épaisseur de déplacement δ_1 :

$$\delta_1(t, x) = \begin{cases} \sqrt{b_0(x - ct) + 2\alpha_2 \varphi'(0)t} & \text{si } x \geq \frac{u_e}{H} t \\ \sqrt{b_1(t - \frac{x}{c}) + 2\alpha_2 \varphi'(0)\frac{x}{c}} & \text{si } x < \frac{u_e}{H} t. \end{cases} \quad (3.24)$$

Ainsi nous connaissons à présent le comportement théorique sur fond plat avec un profil de vitesse fixe et la vitesse de fluide parfait constante : l'épaisseur de déplacement a un comportement de racine carrée.

On peut remarquer que pour un temps suffisamment grand, la valeur initiale b_0 de l'épaisseur de déplacement n'a plus d'importance sur la solution obtenue. D'un point de vue numérique, il nous faudra donc choisir un temps de simulation adéquat de façon à ce que la donnée initiale pour la simulation n'influe plus sur la solution numérique obtenue. Nous empiétons ici sur le chapitre 5, consacré plus exclusivement à l'utilisation numérique pour illustrer les propriétés du modèle établi, pour présenter dès à présent cette solution de Rayleigh. La figure 3.3 illustre la création et le développement d'une couche visqueuse au point d'abscisse $x = 0$. Les conditions aux bords nécessaires sont alors $b_0 \equiv 0$ et $b_1 \equiv 0$, et $u_e \equiv 1$. La solution analytique s'écrit alors

$$\delta_1(t, x) = \begin{cases} \sqrt{2\alpha_2\varphi'(0)t} & \text{si } x \geq \frac{u_e}{H}t \\ \sqrt{\frac{2\alpha_2\varphi'(0)H}{u_e}}x & \text{si } x < \frac{u_e}{H}t. \end{cases}$$

Sur la figure 3.3, la courbe de Blasius fait référence à $\sqrt{\frac{2\alpha_2\varphi'(0)H}{u_e}}x$. On peut voir que la solution calculée pour des temps croissants de simulation T se positionne bien progressivement sur cette solution de Blasius. Cette solution de Blasius pour l'équation de von Kármán avec $u_e \equiv 1$ est

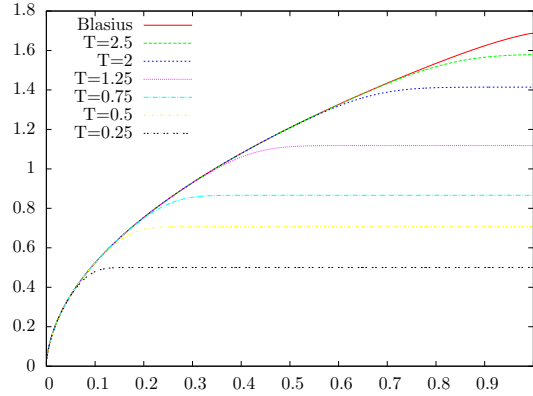


Figure 3.3: Évolution en temps de l'épaisseur de déplacement δ_1 – La solution à différents temps de simulation présente bien une partie positionnée sur la solution de Blasius tant que $x \leq \frac{u_e}{H}T$ et pour les autres positions en espace elle conserve la valeur $\sqrt{2\alpha_2\varphi'(0)T}$. – Simulations faites avec $J = 800$, $\bar{\delta} = 10^{-\frac{9}{2}}$, un profil de vitesse φ linéaire (voir section 3.3), $\bar{\delta} = 10^{-\frac{9}{2}}$.

simplement la résolution d'une équation de transport sans aucun regard pour une signification physique à notre problème. En effet, cette solution crée une couche visqueuse infinie en espace, et ce sans prendre en compte la limitation de la hauteur d'eau. Elle ne peut donc être considérée comme satisfaisante pour de grandes valeurs d'espace ou de temps, même si elle donne une bonne approximation pour des temps et espaces courts. Nous recroiserons cette solution dans la section 4.3.2 mais combinée avec les autres quantités d'intérêt pour l'écoulement considéré (u_e , la hauteur d'eau h et la vitesse moyenne U).

4

Modèles étendus de Saint Venant

Nous allons à présent établir un modèle de Saint Venant étendu, comprenant une fermeture naturelle des équations intégrées de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'étude de la couche visqueuse nous a fourni les outils pour cette fermeture au travers de l'équation de von Kármán et de l'équation sur l'évolution de la vitesse du fluide parfait u_e . Avant de pouvoir formaliser pleinement les différents modèles exploitables, il nous reste donc à écrire proprement l'intégration des deux équations de conservation comme cela avait été annoncé dans la section 2.3 sur les équations de Saint Venant.

4.1 Équations intégrées de la masse et du moment

La démarche adoptée ici est la technique usuelle [29, 55] pour obtenir les équations de Saint Venant. L'équation de conservation de la masse ne présente aucune particularité. En revanche l'équation de conservation du moment comporte une spécificité du fait du terme de viscosité conservé dans les équations. Ce terme, d'ordre $\bar{\delta}$, se trouve être la contrainte pariétale τ introduite dans l'équation de von Kármán. Cette occurrence justifie le couplage entre les équations intégrées de type Saint Venant avec l'équation de von Kármán, et par conséquent l'usage des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement, δ_1 et δ_2 pour la fermeture du flux. Enfin rappelons que la vitesse moyenne U est définie naturellement par la relation $hU = \int_{f_b}^{\eta} u dy$.

Proposition 4.1 (Équation de la masse). *L'intégration de la conservation de la masse produit l'équation usuelle de Saint Venant pour la hauteur d'eau h :*

$$\partial_t h + \partial_x(hU) = 0. \quad (4.1)$$

Preuve. Nous partons de l'équation de conservation de la masse (2.26) que nous intégrons entre le fond f_b et la surface η .

$$\begin{aligned} \partial_y v &= -\partial_x u \\ v(t, x, \eta) - v(t, x, f_b) &= - \int_{f_b}^{\eta} \partial_x u dy \\ v(t, x, \eta) - v(t, x, f_b) &= -\partial_x \left(\int_{f_b}^{\eta} u dy \right) + u(t, x, \eta) \partial_x \eta - u(t, x, f_b) f'_b. \end{aligned}$$

L'adhérence au fond (2.29) apporte une première simplification puisque $u(t, x, f_b) = v(t, x, f_b) = 0$. Par ailleurs la condition cinématique à la surface (2.30) permet une deuxième simplification puisque $v(t, x, \eta) - u(t, x, \eta) \partial_x \eta = -\partial_t \eta$. Pour finir l'indépendance en temps du fond permet de remplacer $\partial_t \eta$ par $\partial_t h$. On obtient donc l'équation (4.1).

Remarque 4.2. *Dans le cas des équations d'Euler, le résultat est le même mais c'est le glissement qui permet la première simplification puisque alors $v(t, x, f_b) = u(t, x, f_b) f'_b$.*

□

Proposition 4.3. *L'équation intégrée de la conservation du moment s'écrit :*

$$\partial_t(hU) + \partial_x \left(\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy \right) = -h\partial_x p - \bar{\delta}\tau, \quad (4.2)$$

où la fonction τ représente la contrainte pariétale définie par l'équation (3.16).

Preuve. L'équation intégrée s'obtient de la même façon que pour la conservation de la masse en intégrant l'équation du moment (2.27) entre le fond f_b et η , où préalablement on remplace $\frac{1}{\varepsilon Re_h}$ par $\bar{\delta}^2$ comme défini dans le scaling (3.5).

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u &= -\partial_x p + \bar{\delta}^2 \partial_y^2 u \\ \int_{f_b}^{\eta} \partial_t u dy + \int_{f_b}^{\eta} u\partial_x u dy + \int_{f_b}^{\eta} v\partial_y u dy &= - \int_{f_b}^{\eta} \partial_x p dy + \int_{f_b}^{\eta} \bar{\delta}^2 \partial_y^2 u dy \end{aligned}$$

Le dernier terme s'intègre en utilisant la continuité du tenseur de contraintes (2.31) et, comme précisé dans la remarque 3.3, le terme $\partial_x p$ est indépendant de la variable y .

$$\int_{f_b}^{\eta} \partial_t u dy + \int_{f_b}^{\eta} u\partial_x u dy + \int_{f_b}^{\eta} v\partial_y u dy = -h\partial_x p - \bar{\delta}^2 \partial_y u|_{y=f_b}.$$

De plus, grâce à la transformation de Prandtl, nous avons l'égalité

$$\partial_y u|_{y=f_b} = \frac{1}{\bar{\delta}} \partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0} = \frac{\tau}{\bar{\delta}}$$

d'après l'expression (3.16). Nous allons à présent nous intéresser au membre de gauche. Tout d'abord nous allons intervertir l'intégrale et la dérivation en temps, ainsi qu'utiliser une intégration par partie pour le dernier terme.

$$\partial_t \left(\int_{f_b}^{\eta} u dy \right) - u(t, x, \eta) \partial_t \eta + \int_{f_b}^{\eta} u\partial_x u dy + [uv]_{f_b}^{\eta} - \int_{f_b}^{\eta} u\partial_y v dy = -h\partial_x p - \bar{\delta}\tau$$

Grâce à la conservation de la masse (2.26), le terme $\partial_y v$ est remplacé par $-\partial_x u$.

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int_{f_b}^{\eta} u dy \right) - \int_{f_b}^{\eta} 2u\partial_x u dy - u(t, x, \eta) \partial_t \eta + [uv]_{f_b}^{\eta} &= -h\partial_x p - \bar{\delta}\tau \\ \partial_t \left(\int_{f_b}^{\eta} u dy \right) + \int_{f_b}^{\eta} \partial_x(u^2) dy - u(t, x, \eta) \partial_t \eta + [uv]_{f_b}^{\eta} &= -h\partial_x p - \bar{\delta}\tau \\ \partial_t \left(\int_{f_b}^{\eta} u dy \right) + \partial_x \left(\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy \right) - u^2(t, x, \eta) \partial_x \eta + u^2(t, x, f_b) f'_b &- u(t, x, \eta) \partial_t \eta + [uv]_{f_b}^{\eta} \\ &= -h\partial_x p - \bar{\delta}\tau \end{aligned}$$

Pour conclure et retrouver l'équation (4.2), il suffit d'exploiter les conditions d'adhérence au fond et la condition cinématique à la surface. □

Remarque 4.4. *Une fois encore, l'annulation des termes évalués sur le fond f_b reste valide si le fluide considéré vérifie seulement une condition de glissement.*

Remarque 4.5. *On peut observer que le choix d'un profil de vitesse φ conduit à un terme de friction de type laminaire $\tau = \frac{u_e \alpha_2 \partial_{\zeta} \varphi|_{\zeta=0}}{\bar{\delta} \delta_1}$, simplement la hauteur où se concentre cette friction est $\bar{\delta} \delta_1$. On se retrouve ainsi dans une configuration similaire au frottement de Poiseuille présenté dans la remarque 2.18. La hauteur considérée étant de taille $\bar{\delta}$, le terme final de friction est ici seulement d'ordre $\bar{\delta}$ et non d'ordre $\bar{\delta}^2$ comme c'était le cas pour le frottement de Poiseuille.*

4.2 Fermeture des modèles

Nous avons donc à présent deux équations intégrées (4.1) et (4.2) similaires à celles formant le système de Saint Venant. Deux différences importantes sont néanmoins à noter : le terme de flux $\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy$ et le terme de friction. Comme cela a été rappelé dans la partie 2.3, la fermeture des équations dans le cas des équations de Saint Venant consiste à supposer que la variation verticale de la vitesse est négligeable, et le terme de friction est exprimé en fonction de la vitesse moyenne U et de la hauteur h . Dans notre cas, la définition de l'épaisseur de quantité de mouvement (3.13) nous donne à penser que la fermeture pourrait résider dans l'observation de la couche visqueuse présentée dans le chapitre 3. En ce qui concerne le terme de friction, il se retrouve dans l'équation de von Kármán et il a déjà été remarqué que la donnée d'un profil de vitesse φ permettait de l'exprimer en fonction de u_e et de l'épaisseur de déplacement δ_1 . Nous allons donc uniquement dans cette section nous focaliser sur la fermeture des équations, c'est-à-dire sur l'expression du terme de flux

$$J = \int_{f_b}^{\eta} u^2 dy. \quad (4.3)$$

Trois équations sont d'ores et déjà acquises :

$$\partial_t h + \partial_x(hU) = 0 \quad (4.4)$$

$$\partial_t(hU) + \partial_x J = -h\partial_x p - \bar{\delta}\tau \quad (4.5)$$

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\partial_x p, \quad (4.6)$$

il ne nous reste qu'à observer qu'un choix judicieux de la fermeture pour le flux J (4.3) permet de retrouver l'équation de von Kármán à partir de ces équations.

Proposition 4.6. *Considérons (h, U, u_e, J) solution des équations (4.4), (4.5) et (4.6). Nous faisons de plus l'hypothèse que l'épaisseur de déplacement δ_1 est définie par la relation (3.12). En ce cas, δ_1 et δ_2 sont solutions de l'équation de von Kármán (3.15) si et seulement si le terme de flux J vérifie*

$$J = (h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))u_e^2. \quad (4.7)$$

Preuve. Voyons tout d'abord le sens direct, c'est-à-dire supposons que l'équation de von Kármán est vérifiée par δ_1 et δ_2 . Dans cette équation nous allons insérer la définition de l'épaisseur de déplacement (3.12) :

$$\begin{aligned} \partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1) + u_e \bar{\delta} \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x(u_e^2 \bar{\delta} \delta_2) &= \bar{\delta}\tau \\ \partial_t(hu_e) - \partial_t(hU) + (hu_e - hU)\partial_x u_e + \bar{\delta}\partial_x(u_e^2 \delta_2) &= \bar{\delta}\tau. \end{aligned}$$

Si à cette dernière équation, on ajoute l'équation intégrée (4.5), les termes de friction sont compensés et l'équation devient :

$$\begin{aligned} \partial_t(hu_e) + \partial_x J + hu_e \partial_x u_e - hU \partial_x u_e + \bar{\delta}\partial_x(u_e^2 \delta_2) &= -h\partial_x p \\ h(\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e) + u_e \partial_t h + \partial_x J - hU \partial_x u_e + \partial_x(\bar{\delta} u_e^2 \delta_2) &= -h\partial_x p. \end{aligned}$$

L'équation (4.6) permet de simplifier cette expression. Pour finir nous exploitons l'équation (4.4) :

$$\begin{aligned} -u_e \partial_x(hU) + \partial_x J - hU \partial_x u_e + \partial_x(\bar{\delta} u_e^2 \delta_2) &= 0 \\ \partial_x(J - (hU u_e - \bar{\delta} \delta_2 u_e^2)) &= 0. \end{aligned}$$

Au détail d'une constante pouvant être prise nulle en considérant que si les vitesses sont nulles le flux l'est aussi, on obtient ainsi la relation (4.7) en utilisant à nouveau la définition de δ_1 :

$$J = hU u_e - \bar{\delta} \delta_2 u_e^2 = (h - \bar{\delta}_1)u_e^2 - \bar{\delta} \delta_2 u_e^2 = (h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))u_e^2.$$

Pour le sens indirect, nous considérons que $J = (h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))u_e^2$ et nous démarrons de la relation (3.12) pour δ_1 :

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1) = \partial_t(hu_e) - \partial_t(hU).$$

L'équation (4.5) associée à la définition du flux J (4.7) permet de modifier $\partial_t(hU)$:

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1) = u_e \partial_t h + h \partial_t u_e + \partial_x((h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))u_e^2) + h \partial_x p + \bar{\delta} \tau.$$

L'équation (4.4) est utilisée pour la dérivée en temps de h et l'équation (4.6) permet quant à elle de réécrire la dérivée en temps de u_e :

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1) = -u_e \partial_x(hU) - hu_e \partial_x u_e - h \partial_x p + \partial_x(hu_e^2) - \bar{\delta} \partial_x((\delta_1 + \delta_2)u_e^2) + h \partial_x p + \bar{\delta} \tau$$

Il nous faut à nouveau ré-exprimer U à l'aide de la relation (3.12)

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1) = -u_e \partial_x(hu_e) + u_e \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e) - hu_e \partial_x u_e + \partial_x(hu_e^2) - \bar{\delta} \partial_x((\delta_1 + \delta_2)u_e^2) + \bar{\delta} \tau$$

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1) = -\bar{\delta}(-u_e \partial_x(\delta_1 u_e) + \partial_x((\delta_1 + \delta_2)u_e^2) - \tau).$$

Pour finir, comme $u_e \partial_x(\delta_1 u_e) = \partial_x(\delta_1 u_e^2) - u_e \delta_1 \partial_x u_e$, on retrouve bien l'équation de von Kármán

$$\partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x(u_e^2 \delta_2) = \tau.$$

□

Nous venons d'observer le système composé des trois équations (4.4), (4.5) et (4.6) couplées avec la définition physique de l'épaisseur de déplacement (3.12) qui redonne l'équation de von Kármán établie dans le chapitre 3. La question qui se pose est : que devient le système si on oublie cette définition physique (3.12) et que l'on considère uniquement l'équation de von Kármán couplée avec les trois équations (4.4), (4.5) et (4.6) ? Nous allons voir dans la proposition suivante que, dans un certain sens, ces quatre équations contiennent la définition physique de l'épaisseur de déplacement.

Proposition 4.7. *Considérons que le flux J (4.3) est défini par la relation (4.7), et que (h, U, u_e, δ_1) forme une solution du système composé des équations (4.4), (4.5), (4.6) et de l'équation de von Kármán (3.15). Désignons par δ_1^* l'épaisseur de déplacement définie par l'interprétation physique (3.12). Il se trouve alors que δ_1 et δ_1^* sont reliés par l'équation de transport suivante :*

$$\partial_t(u_e(\delta_1 - \delta_1^*)) - u_e \partial_x(u_e(\delta_1 - \delta_1^*)) = 0. \quad (4.8)$$

On peut donc en conclure que l'erreur résultant de la différence entre δ_1 et δ_1^ est conservée le long des caractéristiques associées au fluide parfait de vitesse u_e . En particulier, si initialement $\delta_1 = \delta_1^*$ alors c'est toujours le cas et le système de quatre équations (4.4), (4.5), (4.6) et (3.15) contient la définition physique de l'épaisseur de déplacement.*

Preuve. Nous allons utiliser la définition de δ_1^* pour étudier la dérivée en temps de $u_e \bar{\delta} \delta_1^*$. Nous appliquons la même série d'opération que pour le sens inverse de la proposition 4.6 avec les équations (4.4), (4.5) et (4.6) :

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1^*) = \partial_t(hu_e) - \partial_t(hU)$$

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1^*) = u_e \partial_t h + h \partial_t u_e + \partial_x((h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))u_e^2) + h \partial_x p + \bar{\delta} \tau$$

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1^*) = -u_e \partial_x(hU) - hu_e \partial_x u_e - h \partial_x p + \partial_x(hu_e^2) - \bar{\delta} \partial_x((\delta_1 + \delta_2)u_e^2) + h \partial_x p + \bar{\delta} \tau$$

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1^*) = -u_e \partial_x(hu_e) + u_e \partial_x(\bar{\delta} \delta_1^* u_e) - hu_e \partial_x u_e + \partial_x(hu_e^2) - \bar{\delta} \partial_x((\delta_1 + \delta_2)u_e^2) + \bar{\delta} \tau$$

$$\partial_t(u_e \bar{\delta} \delta_1^*) = -\bar{\delta}(-u_e \partial_x(\delta_1^* u_e) + \partial_x((\delta_1 + \delta_2)u_e^2) - \tau).$$

Il nous reste à utiliser l'équation de von Kármán pour obtenir une équation faisant uniquement apparaître u_e , δ_1 et δ_1^* :

$$\bar{\delta} \partial_t(u_e \delta_1^*) = -\bar{\delta}(-u_e \partial_x(u_e \delta_1^*) + \partial_x(\delta_1 u_e^2) - \partial_t(u_e \delta_1) - u_e \delta_1 \partial_x u_e + \tau - \tau)$$

$$\bar{\delta} \partial_t(u_e \delta_1^*) = -\bar{\delta}(-u_e \partial_x(u_e(\delta_1^* - \delta_1)) - \partial_t(u_e \delta_1)),$$

D'où l'équation de transport

$$\partial_t(u_e(\delta_1 - \delta_1^*)) - u_e \partial_x(u_e(\delta_1 - \delta_1^*)) = 0.$$

□

Les propositions 4.6 et 4.7 permettent donc de proposer deux systèmes d'équations équivalents contenant deux équations semblables aux équations de Saint Venant, où le flux J (4.3) présent est systématiquement défini par la relation (4.7). Néanmoins pour que ces deux systèmes soient fermés, il faut se rappeler que la pression est considérée comme hydrostatique dans cette approche ondes longues et il faut de plus fixer un profil de vitesse φ comme cela a été expliqué dans la section 3.3 pour relier les quantités δ_1 , δ_2 et τ . Nous considérons à partir de maintenant que le profil de vitesse φ dépend exclusivement de la variable verticale. Dans cette configuration α_2 et H sont des constantes.

Le premier système est composé des deux équations de type Saint Venant, de l'équation sur u_e et de la définition macroscopique de δ_1 :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hU) = 0 \\ \partial_t(hU) + \partial_x\left(\frac{h^2}{2Fr^2} + (h - \bar{\delta}\delta_1(1 + \frac{1}{H}))u_e^2\right) = -\frac{hf'_b}{Fr^2} - \bar{\delta}\frac{u_e\alpha_2\varphi'(0)}{\delta_1} \\ \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\frac{1}{Fr^2}(\partial_x h + f'_b) \\ hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e. \end{cases} \quad (4.9)$$

Le second système substitue à la définition macroscopique de δ_1 l'équation de von Kármán et est ainsi composé de quatre équations de conservations :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hU) = 0 \\ \partial_t(hU) + \partial_x\left(\frac{h^2}{2Fr^2} + (h - \bar{\delta}\delta_1(1 + \frac{1}{H}))u_e^2\right) = -\frac{hf'_b}{Fr^2} - \bar{\delta}\frac{u_e\alpha_2\varphi'(0)}{\delta_1} \\ \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\frac{1}{Fr^2}(\partial_x h + f'_b) \\ \partial_t(u_e\delta_1) + u_e\delta_1\partial_x u_e + \partial_x\left(\frac{u_e^2\delta_1}{H}\right) = \tau \end{cases} \quad (4.10)$$

Remarque 4.8. *De par sa structure avec quatre équations de conservations, le système (4.10) se présente comme le meilleur candidat pour la construction d'un schéma numérique dans le chapitre 5 permettant une comparaison rapide avec les équations de Saint Venant usuelles.*

Une troisième écriture du modèle peut être présentée en s'éloignant de la structure des équations de Saint Venant. Cette formulation accorde plus d'importance à la vitesse du fluide parfait u_e et son impact sur la couche visqueuse. Elle se rapproche alors de la démarche de la couche limite interactive (Interactive Boundary Layer ou Viscous Inviscid Interaction) telle qu'elle est présentée dans [40]. Cette formulation sera utilisée notamment dans la section 4.3 afin de déterminer une solution stationnaire pour le modèle. Elle servira aussi dans le chapitre 6 pour démontrer l'équivalence entre les systèmes considérant un écoulement de fluide parfait et les formulations de ce chapitre 4.

Proposition 4.9. *Une approche plus aérodynamique ne prend pas en compte l'équation de quantité de mouvement (4.5) mais plutôt le système suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hU) = 0 \\ \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\frac{1}{Fr^2}(\partial_x h + f'_b) \\ \partial_t(u_e\delta_1) + u_e\delta_1\partial_x u_e + \partial_x\left(\frac{u_e^2\delta_1}{H}\right) = \tau \\ hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e. \end{cases} \quad (4.11)$$

Preuve. Nous allons donc utiliser tout à tour les équations du système (4.11) pour obtenir l'équation (4.5)

$$\begin{aligned}
\partial_t(hU) &= \partial_t(hu_e - \bar{\delta}\delta_1 u_e) \\
\partial_t(hU) &= u_e \partial_t h + h \partial_t u_e - \partial_t(\bar{\delta}\delta_1 u_e) \\
\partial_t(hU) &= -u_e \partial_x(hU) - hu_e \partial_x u_e - \frac{h}{Fr^2}(\partial_x h + f'_b) + \bar{\delta}u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \bar{\delta}\delta_2}{H} \right) - \bar{\delta}\tau \\
\partial_t(hU) + \partial_x \left(\frac{h^2}{2Fr^2} \right) &= -u_e \partial_x(hu_e - \bar{\delta}\delta_1 u_e) - hu_e \partial_x u_e + \bar{\delta}u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \bar{\delta}\delta_2}{H} \right) - \frac{hf'_b}{Fr^2} - \bar{\delta}\tau \\
\partial_t(hU) + \partial_x \left(\frac{h^2}{2Fr^2} \right) &= -\partial_x(hu_e^2) + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1 u_e^2) + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \bar{\delta}\delta_2}{H} \right) - \frac{hf'_b}{Fr^2} - \bar{\delta}\tau \\
\partial_t(hU) + \partial_x \left(\frac{h^2}{2Fr^2} + (h - \bar{\delta}\delta_1(1 + \frac{1}{H}))u_e^2 \right) &= -\frac{hf'_b}{Fr^2} - \bar{\delta}\tau.
\end{aligned}$$

Le système (4.11) est ainsi équivalent au modèle (4.9). $\square$

Remarque 4.10. *Les va-et-vient entre les différentes présentations du modèle étendu ont fait apparaître diverses formulations du flux J , en exploitant la définition (3.12). Rappelons ici une liste non exhaustive qui nous permettra un recoupement avec d'autres travaux effectués sur les fermetures de flux.*

$$\begin{aligned}
\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy &= (h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))u_e^2 \\
\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy &= hUu_e - \bar{\delta}\delta_2 u_e^2 \\
\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy &= \frac{(h - \bar{\delta}(\delta_1 + \delta_2))U^2}{(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h})^2} \\
\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy &= hU^2 + \bar{\delta}(\delta_1 - \delta_2 - \bar{\delta}\frac{\delta_1^2}{h})u_e^2.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

La dernière formulation permet d'observer le rapport entre les flux $\int_{f_b}^{\eta} u dy$ et $\int_{f_b}^{\eta} u^2 dy$ sur le modèle du coefficient β , évoqué dans la remarque 2.17, qui vérifie $\beta hU^2 = \int_{f_b}^{\eta} u^2 dy$:

$$\frac{h \int_{f_b}^{\eta} u^2 dy}{(\int_{f_b}^{\eta} u dy)^2} = 1 + \bar{\delta} \frac{(\delta_1 - \delta_2 - \bar{\delta}\frac{\delta_1^2}{h})u_e^2}{hU^2}. \tag{4.13}$$

Lorsque $\bar{\delta} = 0$ le terme de friction τ n'est pas activé au second membre et nous retrouvons le système sans friction de Saint Venant usuel avec un ratio ayant pour valeur 1. Néanmoins dès que les effets de la viscosité sont pris en compte, avec donc $\bar{\delta}$ différent de 0, le terme de flux comporte une correction composée ici d'un terme d'ordre $\bar{\delta}$ et d'un autre d'ordre $\bar{\delta}^2$. Cet effet était déjà visible dans l'équation (2.42) où le ratio n'avait plus pour valeur 1 mais $\frac{6}{5}$ lorsque le fluide était supposé proche d'un écoulement de Nusselt (2.39). Cette stratégie d'apporter au flux J une correction par rapport aux équations de Saint Venant usuelles se retrouve notamment dans [47] afin d'améliorer l'étude des roll-waves.

4.3 Solution stationnaire linéarisée sur fond plat

Nous avons à notre disposition trois formulations d'un même modèle, dont deux formulations (4.10) et (4.9) présentent deux équations semblables à celles du modèle de Saint Venant. De ces formulations, nous cherchons, à présent, à extraire des informations sur le comportement du fluide. Dans le chapitre 5, nous présenterons des simulations numériques pour observer en particulier les effets d'une bosse sur le terme de frottement. Avant cela, nous nous consacrons ici à l'établissement d'une solution stationnaire pour le modèle, écrit sous sa formulation aéronautique (4.11), sur un fond plat.

4.3.1 Solution linéarisée pour les équations de Saint-Venant

La démarche entreprise, tout comme le résultat, présente des similitudes avec la solution linéarisée autour d'une petite bosse pour les équations de Saint Venant. Aussi nous détaillons en premier lieu les calculs pour celle-ci avant de procéder sur la formulation (4.11).

$$\begin{aligned}\partial_x(hU) &= 0 \\ \partial_x(hU^2 + \frac{1}{2Fr^2}h^2) &= -\frac{1}{Fr^2}hf'_b\end{aligned}$$

La démarche est de linéariser ce système de Saint Venant sans frottement par rapport à un petit paramètre ε quantifiant la variation du sol par rapport à un fond plat. Les différentes inconnues observées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\bullet h &= h^0 + \varepsilon h^1 & \bullet hU &= h^0U^0 + \varepsilon(h^1U^0 + h^0U^1) \\ \bullet U &= U^0 + \varepsilon U^1 & \bullet h^2 &= (h^0)^2 + 2\varepsilon h^0h^1 \\ \bullet f_b &= \varepsilon f & \bullet hU^2 &= h^0(U^0)^2 + \varepsilon(h^1(U^0)^2 + 2h^0U^0U^1)\end{aligned}$$

1. Les équations de Saint Venant, observées à l'ordre 0 en ε , sont vérifiées si h^0 et U^0 sont pris comme des constantes.
2. En gardant à l'esprit que h^0 et U^0 sont des constantes, les équations de Saint Venant prises à l'ordre ε comportent uniquement des termes dérivés de h^1 et U^1 . La conservation de la masse nous donne une relation entre la vitesse U^1 et la hauteur h^1 :

$$h^0\partial_x U^1 = -U^0\partial_x h^1. \quad (4.14)$$

Par ailleurs l'équation de quantité de mouvement prise à l'ordre ε s'écrit :

$$(U^0)^2\partial_x h^1 + 2h^0U^0\partial_x U^1 + \frac{h^0}{Fr^2}\partial_x h^1 = -\frac{h^0}{Fr^2}f'.$$

La relation (4.14) permet d'éliminer U^1 de l'équation précédente :

$$\left(\frac{h^0}{Fr^2} - (U^0)^2\right)\partial_x h^1 = -\frac{h^0}{Fr^2}f'.$$

En introduisant un nombre de Froude local, $Fr_0^2 = \frac{(U^0)^2}{\frac{h^0}{Fr^2}}$, h^1 est déterminé en fonction de la variation du fond f :

$$\begin{aligned}\partial_x h^1 &= \frac{1}{Fr_0^2 - 1}f' \\ h^1 &= \frac{1}{Fr_0^2 - 1}f\end{aligned}$$

De plus, comme U^1 est relié à h^1 , nous obtenons aussi

$$U^1 = \frac{U^0}{h^0} \frac{1}{1 - Fr_0^2}f.$$

La solution stationnaire pour les équations de Saint Venant linéarisée par rapport une variation de taille ε d'un fond plat est finalement :

$$h = h^0 + \varepsilon \frac{1}{Fr_0^2 - 1}f, \quad U = U^0 + \varepsilon \frac{U^0}{h^0} \frac{1}{1 - Fr_0^2}f. \quad (4.15)$$

4.3.2 Solution linéarisée pour le modèle de Saint-Venant étendu

L'objectif de cette section est de mettre en évidence une solution stationnaire linéarisée sur fond plat pour le modèle, en vision aéronautique (4.11), présenté au-dessus. Pour cela nous allons linéariser les différentes fonctions des équations par rapport au paramètre $\bar{\delta}$. Nous nous contenterons de développement à l'ordre $\bar{\delta}$, aussi les fonctions g étudiées seront de la forme $g = g^0 + \bar{\delta}g^1$. Les quatre équations observées en stationnaire et sur fond plat donnent le système suivant :

$$\partial_x(hU) = 0 \quad (4.16)$$

$$u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) = \tau \quad (4.17)$$

$$u_e \partial_x u_e = -\frac{1}{Fr^2} \partial_x h \quad (4.18)$$

$$hU = (h - \bar{\delta} \delta_1) u_e \quad (4.19)$$

Deux développements seront notamment utilisés dans cette section

$$\begin{aligned} hU &= h^0 U^0 + \bar{\delta} (h^1 U^0 + h^0 U^1) \\ (h - \bar{\delta} \delta_1) u_e &= h^0 u_e^0 + \bar{\delta} (h^1 u_e^0 + h^0 u_e^1 - \delta_1^0 u_e^0). \end{aligned}$$

Termes d'ordre 0

- La relation (4.19) prise à l'ordre 0 assure l'égalité $U^0 = u^0$. Cette relation pouvait se prévoir puisque $\bar{\delta} = 0$ s'interprète comme un fluide parfait, auquel cas les vitesses U et u_e sont en effet identiques.
- Les équations (4.16) et (4.18) s'écrivent :

$$\begin{aligned} h^0 \partial_x u_e^0 &= -u_e^0 \partial_x h^0 \\ u_e^0 \partial_x u_e &= -\frac{1}{Fr^2} \partial_x h^0. \end{aligned}$$

Aussi h^0 et u_e^0 peuvent être choisies comme des constantes, et par conséquent U^0 est, elle aussi, prise comme une constante.

- Une fois u_e^0 fixée comme une constante, l'équation de von Kármán (4.17) est à nouveau sous la forme étudiée dans la partie 3.4 dont la solution est la fonction de Blasius :

$$\delta_1^0 = \sqrt{\frac{2\alpha_2 H \varphi'(0)}{u_e^0}} x.$$

Termes d'ordre 1

- En utilisant la relation (4.19) dans l'équation (4.16), on obtient :

$$u_e^0 \partial_x h^1 + h^0 \partial_x u_e^1 - u_e^0 \partial_x \delta_1^0 = 0.$$

Or l'équation (4.18) nous donne une relation entre u_e^1 et h^1 :

$$\partial_x h^1 = -Fr^2 u_e^0 \partial_x u_e^1.$$

Ainsi

$$\partial_x u_e^1 = \frac{u_e^0}{h^0 - (u_e^0)^2 Fr^2} \partial_x \delta_1^0.$$

En définissant un nombre de Froude local $Fr_0 = \frac{(u_e^0)^2}{h^0 Fr^2}$, la vitesse u_e^1 s'écrit finalement en fonction de δ_1^0 comme suit :

$$u_e^1 = \frac{u_e^0}{h^0} \frac{1}{1 - Fr_0^2} \delta_1^0.$$

- Par la relation précédente entre u_e^1 et h^1 , on obtient par conséquent :

$$h^1 = \frac{(u_e^0)^2 Fr_0^2}{h^0} \frac{1}{Fr_0^2 - 1} \delta_1^0 = \frac{Fr_0^2}{Fr_0^2 - 1} \delta_1^0.$$

- Finalement en utilisant l'équation (4.16),

$$\begin{aligned} \partial_x U^1 &= -\frac{u_e^0}{h^0} \partial_x h^1 \\ U^1 &= \frac{u_e^0}{h^0} \frac{Fr_0^2}{1 - Fr_0^2} \delta_1^0. \end{aligned}$$

Remarque 4.11. *Chacune des égalités ci-dessus l'est à une constante près. Mais l'observation d'un fluide de vitesse nulle ou de hauteur nulle impose que la couche visqueuse ne se développe pas ce qui s'exprime par $\delta_1^0 = 0$. Les constantes qui apparaissent peuvent donc être choisies égales à 0 pour respecter ce phénomène.*

Conclusion

Ainsi le système d'équations admet une solution stationnaire linéarisée :

$$\begin{cases} \delta_1^0 = \sqrt{\frac{2\alpha_2 H}{u_e}} \varphi'(0) \sqrt{x} \\ u_e = u_e^0 + \bar{\delta} \frac{U^0}{h^0} \frac{1}{1 - Fr_0^2} \delta_1^0 \\ h = h^0 + \bar{\delta} \frac{Fr_0^2}{Fr_0^2 - 1} \delta_1^0 \\ U = U^0 + \bar{\delta} \frac{U^0}{h^0} \frac{Fr_0^2}{1 - Fr_0^2} \delta_1^0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Remarque 4.12. *Cette solution stationnaire linéarisée a été construite sur la même structure que celle rappelée dans la partie 4.3.1 pour les équations de Saint Venant sans frottement. Simplement la variation du fond n'est pas une fonction f connue au préalable mais la solution de Blasius (3.24) pour l'épaisseur de déplacement obtenue directement par l'équation de von Kármán. Cette constatation est à rapprocher de l'étude proposée dans la partie 6.2 qui consiste à observer l'écoulement comme un fluide parfait vivant dans un domaine où le fond est relevé de l'épaisseur de déplacement.*

4.4 Saturation de l'épaisseur de déplacement

La solution linéarisée (4.20), tout comme la solution de Rayleigh/Blasius (3.24), propose une évolution en racine carrée de l'épaisseur de déplacement δ_1 dans le cadre stationnaire sur fond plat. Cette racine carrée est obtenue avec l'équation de von Kármán où la vitesse u_e est vue comme une constante. La solution linéarisée (4.20) expose que la vitesse du fluide parfait à la surface u_e n'est constante qu'en première approximation. La solution de Rayleigh/Blasius (3.24) ne peut donc pas être le comportement global de l'épaisseur de déplacement δ_1 lorsque le système de quatre équations est pris en compte. Par ailleurs, même sans observer les équations formelles du système, nous savons que l'épaisseur de déplacement ne peut dépasser la hauteur d'eau du fluide. Ainsi l'épaisseur de déplacement ne peut être une fonction strictement croissante mais doit présenter une saturation. Nous allons voir dans cette partie 4.4 que la considération stationnaire sur fond plat du modèle aéronautique (4.11) permet d'exprimer la fonction δ_1 comme une équation différentielle ordinaire sous réserve de connaître l'expression de la hauteur d'eau h .

Le modèle aéronautique (4.11) stationnaire sur fond plat est composé des quatre équations :

$$\partial_x(hU) = 0 \quad (4.21)$$

$$u_e \partial_x u_e = -\frac{1}{Fr^2} \partial_x h \quad (4.22)$$

$$u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) = \frac{\alpha_2 \varphi'(0) u_e}{\delta_1} \quad (4.23)$$

$$hU = (h - \bar{\delta} \delta_1) u_e. \quad (4.24)$$

Proposition 4.13. *L'épaisseur de déplacement δ_1 vérifie, en régime stationnaire et sur un fond plat, l'équation suivante :*

$$\partial_x \delta_1 = \frac{H \alpha_2 \varphi'(0) (h - \bar{\delta} \delta_1)}{h U \delta_1 \left(1 + \frac{\bar{\delta} \delta_1 (2+H) (h - \bar{\delta} \delta_1)^2}{(h - \bar{\delta} \delta_1)^3 - (hU)^2 Fr^2} \right)}, \quad (4.25)$$

où hU est une constante et h reste une inconnue.

Preuve. L'équation de von Kármán (4.23) peut se réécrire, à la condition que H soit constant, sous la forme :

$$\delta_1 (2 + H) \frac{\partial_x u_e}{u_e} + \partial_x \delta_1 = \frac{H \alpha_2 \varphi'(0)}{u_e \delta_1}. \quad (4.26)$$

Afin d'obtenir une équation différentielle ordinaire pour δ_1 , il nous faut exprimer le terme $\partial_x u_e$ en fonction de δ_1 . Partons de l'équation (4.21) dans laquelle nous insérons la relation (4.24)

$$\begin{aligned} \partial_x(hU) &= 0 \\ (h - \bar{\delta} \delta_1) \partial_x u_e + u_e \partial_x h &= u_e \partial_x (\bar{\delta} \delta_1). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.22), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} (h - \bar{\delta} \delta_1) \partial_x u_e - Fr^2 u_e^2 \partial_x u_e &= u_e \partial_x (\bar{\delta} \delta_1) \\ \frac{\partial_x u_e}{u_e} (h - \bar{\delta} \delta_1 - Fr^2 u_e^2) &= \partial_x (\bar{\delta} \delta_1) \end{aligned}$$

En insérant finalement la relation (4.24) pour transformer les termes u_e , l'expression de $\frac{\partial_x u_e}{u_e}$ est :

$$\frac{\partial_x u_e}{u_e} = \frac{(h - \bar{\delta} \delta_1)^2 \partial_x (\bar{\delta} \delta_1)}{(h - \bar{\delta} \delta_1)^3 - Fr^2 (hU)^2}.$$

En insérant cette formulation dans l'équation (4.26) où la vitesse u_e du membre de droite est réécrite à l'aide de l'équation (4.24), on obtient :

$$\partial_x \delta_1 \left(1 + \frac{\bar{\delta} \delta_1 (2 + H) (h - \bar{\delta} \delta_1)^2}{(h - \bar{\delta} \delta_1)^3 - (hU)^2 Fr^2} \right) = \frac{H \alpha_2 \varphi'(0) (h - \bar{\delta} \delta_1)}{h U \delta_1}.$$

En isolant $\partial_x \delta_1$, l'équation (4.25) est établie. $\square$

Une expression explicite de la hauteur d'eau donne alors l'épaisseur de déplacement δ_1 solution de l'équation différentielle ordinaire (4.25). La figure 4.1 présente la solution numérique obtenue lorsque la hauteur d'eau h est considérée linéaire avec $\partial_x h = c$ où $c \neq 0$. Ce choix de prendre une hauteur d'eau variable s'appuie sur l'équation (4.22), qui ne permet pas $\partial_x h = 0$ sans entraîner $\partial_x u_e = 0$ ce qui est contradictoire avec l'établissement de l'équation (4.25). La figure 4.1 illustre bien un éloignement de la courbe associée à la solution de Blasius (3.24) sur la fenêtre de gauche comme c'est aussi le cas pour le schéma mis en place dans le chapitre 5. Cependant l'observation de la solution (4.25) sur un domaine plus conséquent, comme sur la fenêtre de droite, présente une décroissance de l'épaisseur de déplacement non attendue physiquement.

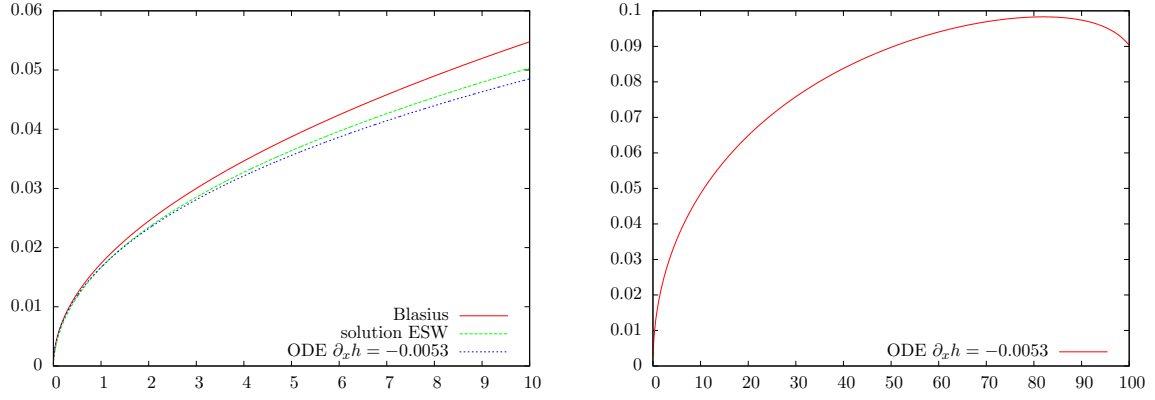


Figure 4.1: Différentes épaisseurs de déplacement $\bar{\delta}\delta_1$ – La fenêtre de gauche propose trois solutions de l'épaisseur de déplacement : la solution de Blasius (3.24), la solution ESW calculée par le schéma mis en place dans le chapitre 5 et la solution de l'équation (4.25) avec $\partial_x h = -0.0053$ sur le domaine $[0; 10]$. On y observe un éloignement de la solution de Blasius pour les deux solutions calculées. La fenêtre de droite illustre la même solution de l'équation (4.25) mais observée sur un domaine plus grand $[0; 100]$. L'épaisseur de déplacement décroît, ce qui n'est physiquement pas acceptable.– Calculs sur un fond plat, initialisation $\delta_1 = 0.001$, $\bar{\delta} = 10^{-2}$, $Fr \simeq 0.32$, hauteur initiale $h = 1$, débit $hU = 1$. Pour la solution ESW, temps de simulation $T = 30$ avec un profil φ linéaire.

Aussi dans la figure 4.2 nous oublions momentanément l'origine de l'équation (4.25) et prenons abruptement $\partial_x h = 0$ dans cette équation (4.25). Une saturation de l'épaisseur de déplacement est alors visible. Malheureusement la présence du terme $[(h - \bar{\delta}\delta_1)^3 - (hU)^2 Fr^2]$ apporte une saturation en deçà de celle escomptée $h = \bar{\delta}\delta_1$. De plus cette saturation dépend fortement de la valeur du nombre de Froude comme on peut l'observer sur la fenêtre gauche de la figure 4.2. La fenêtre de droite nous permet de voir que la valeur du paramètre $\bar{\delta}$ est importante quant à la vitesse de saturation de la solution calculée.

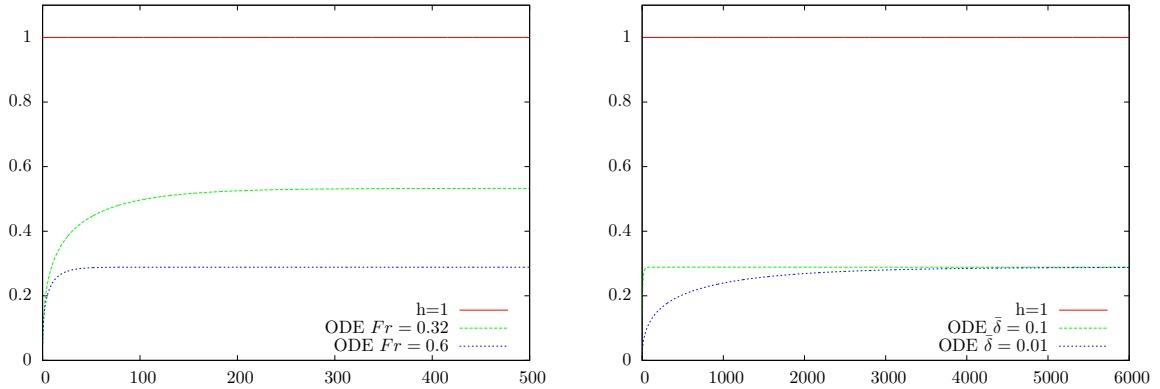


Figure 4.2: Différentes épaisseurs de déplacement $\bar{\delta}\delta_1$ – Les deux fenêtres comportent les solutions de l'équation (4.25) obtenues avec $\partial_x h = 0$. On remarque des saturations bien inférieures à la hauteur $h = 1$ imposée. Sur la fenêtre de gauche, les épaisseurs de déplacement sont calculées avec le même paramètre $\bar{\delta} = 0.1$ mais pour des nombres de Froude différents. On observe que la hauteur de saturation de la solution dépend du nombre de Froude. La fenêtre de droite propose, à nombre de Froude $Fr = 0.6$, deux solutions pour différentes valeurs de $\bar{\delta}$. La valeur de saturation est la même, mais un nombre $\bar{\delta}$ plus grand entraîne une saturation plus rapide en espace – Calculs sur un fond plat, initialisation $\delta_1 = 0.001$, hauteur $h = 1$, débit $hU = 1$.

Remarque 4.14. Le calcul de la solution de l'équation (4.25) peut néanmoins attraper la saturation désirée $h = \bar{\delta}\delta_1$ à la condition d'initialiser le calcul avec une valeur suffisamment haute

de l'épaisseur de déplacement. Mais cela n'illustre alors plus le développement de la couche visqueuse.

Pour la figure 4.2, nous avons pris arbitrairement $\partial_x h = 0$, ce qui bien que acceptable par l'équation (4.25), contredit l'équation (4.22) qui avait servi à son obtention. Nous présentons ici l'équation vérifiée par l'épaisseur de déplacement δ_1 lorsque l'équation (4.22) est proprement ignorée avec $\partial_x h = 0$.

Proposition 4.15. *La considération des équations (4.21), (4.23), (4.24) avec une hauteur d'eau h constante donne l'épaisseur de déplacement δ_1 solution de l'équation différentielle ordinaire [36] :*

$$\partial_x \delta_1 = \frac{H\alpha_2\varphi'(0)(h - \bar{\delta}\delta_1)}{hU\delta_1[1 + (2 + H)\frac{\bar{\delta}\delta_1}{h - \bar{\delta}\delta_1}]} \quad (4.27)$$

Remarque 4.16. *L'équation (4.27) est la même que l'équation (4.25) lorsque le nombre de Froude vérifie $Fr = 0$. Aussi de faibles valeurs du nombre de Froude donnent des résultats approchés pour les deux équations mais les différences deviennent significatives pour un nombre de Froude plus élevé.*

Dans la figure 4.3, nous observons la solution de l'équation (4.27) qui présente comme attendu une saturation de l'épaisseur de déplacement vers la hauteur d'eau h considérée. Cette saturation est néanmoins plus lente que celle précédemment observée pour l'équation (4.25).

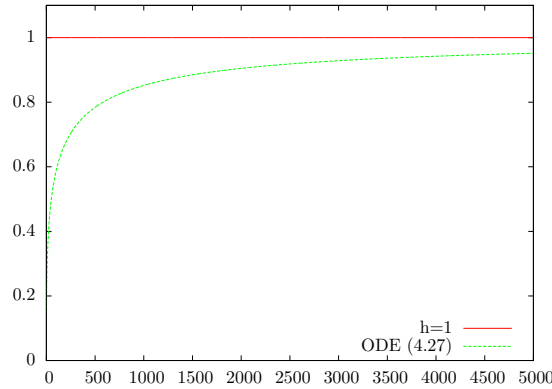


Figure 4.3: Épaisseur de déplacement $\bar{\delta}\delta_1$ – La solution de l'équation (4.27) avec une hauteur $h = 1$ présente bien une saturation vérifiant $h = \bar{\delta}\delta_1$. On peut néanmoins observer que cette saturation s'établit sur un domaine plus long que la solution de l'équation (4.25) obtenue pour une hauteur constante (voir figure 4.2, fenêtre de gauche) pour $\bar{\delta} = 0.1$ – Calculs sur un fond plat, initialisation $\delta_1 = 0.001$, hauteur $h = 1$, $Fr = 0.32$, $\bar{\delta} = 0.1$, débit $hU = 1$.

Il apparaît donc que l'équation (4.22) est l'élément clé du modèle ne permettant pas de simuler des écoulements établis sur la hauteur d'eau. Nous rappelons que cette équation donne le lien entre le gradient de pression et la vitesse du fluide parfait u_e . De plus, cette égalité obtenue grâce au scaling ondes longues, a permis d'établir l'équation de von Kármán dans la proposition 3.10 :

$$\partial_t(u_e\delta_1) + u_e\delta_1\partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{\delta_1 u_e^2}{H} \right) = \frac{u_e\alpha_2\varphi'(0)}{\delta_1}.$$

Voyons à présent l'expression obtenue si nous n'utilisons pas l'équation reliant la pression et u_e pour obtenir l'équation de von Kármán mais introduisons uniquement les dérivées partielles de u_e nécessaires. Sur le même modèle que la proposition 3.10, l'équation de von Kármán s'écrit alors :

$$\partial_t(u_e\delta_1) + u_e\delta_1\partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{\delta_1 u_e^2}{H} \right) = \frac{u_e\alpha_2\varphi'(0)}{\delta_1} + \frac{h}{\bar{\delta}}(\partial_t u_e + u_e\partial_x u_e + \partial_x p), \quad (4.28)$$

Cette équation (4.28), en stationnaire, contient pour des petites valeurs de x l'équation (4.22). Prenons le changement de variable $x = \beta \tilde{x}$ dans le cas stationnaire avec β petit. L'équation stationnaire s'écrit alors

$$\frac{1}{\beta} \left[u_e \delta_1 \partial_{\tilde{x}} u_e + \partial_{\tilde{x}} \left(\frac{\delta_1 u_e^2}{H} \right) \right] = \frac{u_e \alpha_2 \varphi'(0)}{\delta_1} + \frac{h}{\beta \bar{\delta}} (u_e \partial_{\tilde{x}} u_e + \partial_{\tilde{x}} p).$$

L'équation présente des termes de trois ordres différents : ordre 1, ordre $\frac{1}{\beta}$ et ordre $\frac{1}{\beta \bar{\delta}}$. On observe comme ordre de prédominance (décroissante) : termes de pression puis terme inertiel et pour finir terme de friction. En conservant uniquement le terme prédominant d'ordre $\frac{1}{\beta \bar{\delta}}$, on retrouve exactement l'équation (4.22) :

$$u_e \partial_x u_e = -\partial_x p.$$

Cette observation confirme que le modèle mis en place dans les chapitres 3 et 4 est valide pour l'entrée d'un écoulement établi générant le développement d'une couche visqueuse.

Si par contre, on applique à cette équation (4.28) un changement d'échelle pour x grand ($x = X \tilde{x}$, avec X grand), on obtient l'équation suivante

$$\frac{1}{X} \left[u_e \delta_1 \partial_{\tilde{x}} u_e + \partial_{\tilde{x}} \left(\frac{\delta_1 u_e^2}{H} \right) \right] = \frac{u_e \alpha_2 \varphi'(0)}{\delta_1} + \frac{h}{X \bar{\delta}} (u_e \partial_{\tilde{x}} u_e + \partial_{\tilde{x}} p).$$

L'application du principe de moindre dégénérescence [58] avec $X = \frac{1}{\bar{\delta}}$ [51] donne la relation suivante loin de l'entrée de l'écoulement :

$$\partial_x p = u_e \partial_x u_e - \frac{\tau}{h}.$$

Pour une vitesse u_e constante, on retrouve l'équilibre introduit pour l'écoulement de Nusselt (2.39) exposé dans la section 2.3. Ainsi, à la condition d'imposer $\partial_x u_e = 0$ ainsi que $\partial_x h = 0$ en sortie d'écoulement, cette équation (4.28), comportant une relaxation pour le terme de pression, peut permettre d'écrire un modèle retrouvant un écoulement de Nusselt sur un long espace de simulation.

5

Illustrations numériques

Afin de mieux appréhender les modèles étendus de Saint Venant exposés dans la section 4.2, nous présentons dans cette partie quelques illustrations numériques. Le modèle retenu pour établir un schéma numérique est le système de quatre équations conservatives (4.10), présentant à la fois une structure d'équations de Saint Venant sur laquelle de nombreux schémas équilibres ont été établis (voir par exemple [2], [8]) et une description évolutive de l'épaisseur de déplacement au travers de l'équation de von Kármán. L'objectif de ces résultats numériques n'est certes pas de développer un code sophistiqué ou optimisé en temps de calcul. Le code mis en place est relativement naïf pour obtenir de simples simulations mettant en évidence le lien très fort avec les résultats usuels pour les équations de Saint Venant pour de faibles valeurs du paramètre $\bar{\delta}$, et donnant un aspect qualitatif du comportement et réactions lorsque le fond présente une bosse.

Remarque 5.1. *Oltre le désir d'étudier un modèle comportant une structure similaire aux équations de Saint Venant, afin notamment de pouvoir mettre en place une reconstruction hydrostatique, l'apparition d'une relation d'état $hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e$ dans les modèles (4.9) et (4.11) a conforté le choix du modèle (4.10). En effet la relation d'état n'attrape pas de façon satisfaisante la solution de Blasius (3.24) contrairement à l'équation de von Kármán.*

5.1 Introduction du schéma numérique

Le schéma numérique développé pour ce modèle (4.10) s'inscrit dans la théorie sur les équations de conservations non linéaires traitées grâce à la méthode des volumes finis. Aussi, avant de s'intéresser explicitement au cas particulier du système (4.10), un bref rappel sur cette théorie va être présenté.

5.1.1 Rappel sur les équations de conservations non linéaires

La théorie s'applique à des systèmes d'équations de conservations non linéaires pouvant être mis sous la forme d'une seule et même équation vectorielle de la forme

$$\partial_t V + \partial_x G(V) = S(t, x, V). \quad (5.1)$$

Dans ce type d'équation, le vecteur $G(V)$ est le flux du système, exprimé en fonction des coordonnées du vecteur d'inconnues V , et S représente le terme source où on peut retrouver notamment des termes de frottement. De nombreuses méthodes ont été développées afin d'aborder ce type d'équation. Nous nous concentrons dans ce rappel sur la méthode appliquée ensuite dans notre schéma. Aussi à cette équation vectorielle une méthode de volumes finis est appliquée dans laquelle, pour une même pas de temps, l'équation conservative est tout d'abord résolue sans second membre puis la solution obtenue est modifiée par le terme source. En ce qui concerne l'équation homogène, un schéma explicite du premier ordre est utilisé avec trois points

d'espace ([8, 21]) traduisant la conservation de V sur les frontières d'une maille (voir l'équation (2.4)):

$$V_i^{n+1} = V_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (5.2)$$

où

- les indices se réfèrent à la position en espace, les exposants au temps ;
- Δt et Δx sont respectivement les pas de temps et d'espace ;
- $F_{i+\frac{1}{2}}^n = F(V_i^n, V_{i+1}^n)$ est l'approximation du flux sur une interface que l'on exprime à l'aide d'un flux numérique F évalué sur la solution numérique en deux positions successives en espace.

Le choix de ce flux numérique F détermine le type de schéma utilisé (Godunov, HLL,...). Pour notre part, nous utilisons un schéma HLL. Le flux numérique de ce schéma repose sur la connaissance des valeurs propres λ_k de la matrice $D_V G(V)$, et s'exprime théoriquement de la façon suivante :

$$F(V_l, V_r) = \begin{cases} G(V_l) & \text{si } c_1 > 0 \\ \frac{c_2 G(V_l) - c_1 G(V_r) + c_1 c_2 (V_r - V_l)}{c_2 - c_1} & \text{si } c_1 \leq 0 \leq c_2 \\ G(V_r) & \text{si } c_2 < 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

où $c_1 = \min_{V=V_l, V_r} (\min_i \lambda_i(V))$ et $c_2 = \max_{V=V_l, V_r} (\max_i \lambda_i(V))$ sont les deux vitesses extrémales de propagation.

5.1.2 Schéma développé pour le système (4.10)

L'utilisation d'un schéma HLL pour le système (4.10) nécessite donc de connaître les vitesses associées au système. Même si l'équation vectorielle du système ne peut être explicitement mise sous la forme (5.1), ce qui importe pour déterminer ces vitesses est d'obtenir les valeurs propres d'une matrice $A(V)$ telle que l'équation vectorielle

$$\partial_t V + A(V) \partial_x V = S(t, x, V)$$

représente le système à étudier.

Nous commencerons donc par déterminer les valeurs propres de cette matrice $A(V)$ identifiée pour notre modèle, ainsi que les vecteurs propres associés qui garantissent l'hyperbolicité (dans un sens précisé plus bas). Deux invariants de Riemann seront ensuite exhibés à partir des valeurs propres. Pour finir nous présenterons explicitement la différentiation des équations implémentées dans le schéma utilisé pour les simulations numériques durant la thèse.

Établissement des valeurs propres et vecteurs propres du système (4.10)

Avant toute chose, il nous faut identifier la matrice $A(V)$ pour le système de quatre équations (4.10). Ce système, écrit sous forme vectorielle, est le suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hU \\ u_e \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hU \\ \frac{h^2}{2Fr^2} + hU^2 + \bar{\delta} \delta_1 u_e^2 (1 - \frac{1}{H} - \bar{\delta} \frac{\delta_1}{h}) \\ \frac{u_e^2 \delta_1}{H} \\ \frac{h}{Fr^2} + \frac{u_e^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_e \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ hU \\ u_e \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{hf'_b}{Fr^2} - \bar{\delta} \tau \\ \tau \\ -\frac{f'_b}{Fr^2} \end{pmatrix}$$

En définissant le vecteur $V = \begin{pmatrix} h \\ hU \\ u_e \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix}$, la matrice $A(V)$ s'obtient en rassemblant les deux

matrices mises en valeur D_VF et $B(V)$ où

$$F(V) = \begin{pmatrix} hU \\ \frac{h^2}{2Fr^2} + hU^2 + \bar{\delta}\delta_1 u_e^2 (1 - \frac{1}{H} - \bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}) \\ \frac{u_e^2 \delta_1}{H} \\ \frac{h}{Fr^2} + \frac{u_e^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ \frac{v_1^2}{2Fr^2} + \frac{v_2^2}{v_1} + \bar{\delta}v_3 v_4 (1 - \frac{1}{H} - \frac{\bar{\delta}v_3}{v_1 v_4}) \\ \frac{v_3 v_4}{H} \\ \frac{v_1}{Fr^2} + \frac{v_4^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_e \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le regroupement de D_VF et $B(V)$ nous donne alors :

$$A(V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_1}{Fr^2} - \frac{v_2^2}{v_1^2} + \left(\frac{\bar{\delta}v_3}{v_1}\right)^2 & 2\frac{v_2}{v_1} & \bar{\delta}v_4(1 - \frac{1}{H}) - 2\frac{v_3}{v_1} & \bar{\delta}v_3(1 - \frac{1}{H}) \\ 0 & 0 & \frac{v_4}{H} & v_3(1 + \frac{1}{H}) \\ \frac{1}{Fr^2} & 0 & 0 & v_4 \end{pmatrix}$$

$$A(V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{h}{Fr^2} - U^2 + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}\right)^2 & 2U & \bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - \frac{2\bar{\delta}\delta_1}{h}) & \bar{\delta}\delta_1 u_e(1 - \frac{1}{H}) \\ 0 & 0 & \frac{u_e}{H} & u_e \delta_1(1 + \frac{1}{H}) \\ \frac{1}{Fr^2} & 0 & 0 & u_e \end{pmatrix}$$

Cette expression de $A(V)$ est celle nécessaire à l'application de la théorie des équations conservatives. Néanmoins, la présence du premier terme de la quatrième ligne ne nous permet pas de trouver une expression du polynôme caractéristique de cette matrice. Aussi pour tout ce qui concerne le traitement numérique du système (4.10) nous considérerons le gradient de pression de l'équation sur u_e comme un terme source malgré sa dépendance en la dérivée de la hauteur h . La matrice associée à cette modification est alors

$$\mathcal{A}(V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{h}{Fr^2} - U^2 + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}\right)^2 & 2U & \bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - \frac{2\bar{\delta}\delta_1}{h}) & \bar{\delta}\delta_1 u_e(1 - \frac{1}{H}) \\ 0 & 0 & \frac{u_e}{H} & u_e \delta_1(1 + \frac{1}{H}) \\ 0 & 0 & 0 & u_e \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Cette matrice $\mathcal{A}(V)$ est, elle, triangulaire par blocs et ne présente donc aucune difficulté pour établir son polynôme caractéristique :

$$\chi_{\mathcal{A}(V)}(X) = (X - u_e)(X - \frac{u_e}{H}) \left(X^2 - 2UX - \left(\frac{h}{Fr^2} - U^2 + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h} \right)^2 \right) \right)$$

$$\chi_{\mathcal{A}(V)}(X) = (X - u_e) \left(X - \frac{u_e}{H} \right) \left(X - \sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h} \right)^2} \right) \left(X + \sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h} \right)^2} \right)$$

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = u_e, \quad \lambda_2 = \frac{u_e}{H}, \quad \lambda_{\pm} = U \pm \sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h} \right)^2} \quad (5.5)$$

Dans les valeurs propres λ_+ et λ_- , on reconnaît la partie semblable aux équations de Saint Venant avec une perturbation d'ordre $\bar{\delta}$ de la vitesse caractéristique $\sqrt{\frac{h}{Fr^2}}$.

Proposition 5.2. *On peut partiellement ordonner ces valeurs propres (avec $h > 0$ nécessaire à la définition de U)*

$$\lambda_+ > \lambda_1 > \lambda_2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 > \lambda_-.$$

Preuve. Cet ordre s'obtient directement en utilisant la relation entre U et u_e : $U = u_e - \frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}$. On obtient alors

$$\lambda_+ = u_e - \frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h} + \sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}\right)^2} > u_e - \frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}\right)^2} \geq u_e.$$

Grâce au même développement $\lambda_- < u_e$ puisque $\lambda_- = u_e - \frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h} - \sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}\right)^2}$.

Enfin, nous avons en effet $u_e > \frac{u_e}{H}$ puisque $H > 1$ comme nous l'avons vu dans la section 3.3. $\square$

Remarque 5.3. La position de λ_2 par rapport à λ_- n'est pas établie. Néanmoins, dans un cas fluvial la valeur propre λ_- est négative alors que la valeur propre λ_2 reste positive. Aussi, dans la majeure partie des simulations proposées dans ce chapitre 5, l'ordre strict des valeurs propres est connu :

$$\lambda_+ > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_-$$

A présent que les valeurs propres sont connues, la démonstration de l'hyperbolicité, sous certaines conditions, nécessite de déterminer un vecteur propre associé pour chacune des valeurs propres. Afin d'alléger les notations nous définissons la vitesse caractéristique

$$c = \sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}\right)^2}. \quad (5.6)$$

Si on dénote par $r = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ , ses coordonnées doivent alors vérifier le système

$$\begin{cases} a_2 = \lambda a_1 \\ a_1(c^2 - U^2) + 2a_2U + a_3\bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - 2\frac{\bar{\delta}\delta_1}{h}) + a_4u_e\bar{\delta}\delta_1(1 - \frac{1}{H}) = \lambda a_2 \\ a_3\frac{u_e}{H} + a_4u_e\delta_1(1 + \frac{1}{H}) = \lambda a_3 \\ a_4u_e = \lambda a_4. \end{cases} \quad (5.7)$$

Lemme 5.4. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_- et λ_+ ont la même structure que ceux des équations de Saint Venant usuelles avec cette vitesse caractéristique c définie par l'équation (5.6). Un vecteur propre associé à $\lambda_{\pm}$ est

$$r_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ U \pm c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. En imposant $a_3 = a_4 = 0$, le système étudié se résume à un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} a_2 = \lambda_{\pm} a_1 \\ a_1(c^2 - U^2) + 2a_2U = \lambda_{\pm} a_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = \lambda_{\pm} a_1 \\ a_1(c^2 - U^2 + 2\lambda_{\pm}U - \lambda_{\pm}^2) = 0. \end{cases}$$

Il se trouve que $(c^2 - U^2 + 2\lambda_{\pm}U - \lambda_{\pm}^2) = 0$, le choix de la coordonnée a_1 est donc libre. La première équation du système nous donne la seconde coordonnée à partir de ce choix. Aussi avec $a_1 = 1$, on retrouve les vecteurs propres annoncés dans la proposition (5.4). $\square$

Lemme 5.5. Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = \frac{u_e}{H}$ est le vecteur

$$\begin{pmatrix} \bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}) \\ \bar{\delta}\frac{u_e^2}{H}(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}) \\ (U - \frac{u_e}{H})^2 - c^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où c est la vitesse caractéristique (5.6).

Preuve. Avec $\lambda = \frac{u_e}{H}$ le système (5.7) s'écrit

$$\begin{cases} a_2 = \frac{u_e}{H}a_1 \\ a_1(c^2 - U^2 + \frac{2u_eU}{H} - (\frac{u_e}{H})^2) + a_3\bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}) + a_4u_e\bar{\delta}\delta_1(1 - \frac{1}{H}) = 0 \\ a_4u_e\delta_1(1 + \frac{1}{H}) = 0 \\ a_4u_e = \frac{u_e}{H}a_4 \end{cases}$$

Les deux dernières équations imposent $a_4 = 0$, et a_2 est toujours entièrement déterminé par la connaissance de a_1 . Il ne reste donc qu'une équation d'importance pour deux inconnues. Un choix doit à nouveau être fait pour déterminer les coordonnées a_1 et a_3 qui vérifient l'équation

$$a_1(c^2 - (U - \frac{u_e}{H})^2) + a_3\bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}) = 0.$$

Une possibilité est de prendre $a_1 = \bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h})$ et $a_4 = (U - \frac{u_e}{H})^2 - c^2$. On retombe alors sur le vecteur propre proposé. $\square$

Lemme 5.6. Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = u_e$ est

$$\begin{pmatrix} 2\bar{\delta}\delta_1u_e \left(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}}\right) \\ 2\bar{\delta}\delta_1u_e^2 \left(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}}\right) \\ -\frac{\delta_1h}{Fr^2} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}} \\ -\frac{h}{Fr^2} \end{pmatrix}$$

Preuve. Avec cette valeur propre, le système (5.7) s'écrit

$$\begin{cases} a_2 = u_e a_1 \\ a_1(c^2 - U^2 + 2u_eU - u_e^2) + a_3\bar{\delta}u_e(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}) + a_4u_e\bar{\delta}\delta_1(1 - \frac{1}{H}) = 0 \\ a_3(1 - \frac{1}{H}) = a_4\delta_1(1 + \frac{1}{H}) \\ a_4u_e = a_4u_e \end{cases}$$

La dernière équation nous laisse toute liberté dans le choix de a_4 , et l'avant dernière permet d'exprimer a_3 en fonction de a_4 . On se retrouve une fois encore avec une équation pour deux inconnues

$$a_1(c^2 - (U - u_e)^2) + a_4\bar{\delta}\delta_1u_e \left(1 + \frac{1}{H} - 2\frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}} + 1 - \frac{1}{H}\right) = 0$$

Or, par sa définition $U - u_e = \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h}$.

$$\begin{aligned} a_1 \left(c^2 - \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \right)^2 \right) + 2a_4u_e\bar{\delta}\delta_1 \left(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}} \right) &= 0 \\ a_1 \frac{h}{Fr^2} + 2a_4u_e\bar{\delta}\delta_1 \left(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Une possibilité pour satisfaire cette équation est donc de prendre $a_1 = 2u_e\bar{\delta}\delta_1 \left(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}} \right)$ et $a_4 = -\frac{h}{Fr^2}$. Ce qui permet d'en déduire le vecteur propre énoncé dans le corps de la proposition. $\square$

Proposition 5.7. *En décidant de positionner le terme de pression comme un terme source dans l'équation (4.6) sur u_e , le système de quatre équations du modèle (4.10) est hyperbolique sous les conditions suivantes :*

- $h > 0$,
- $\lambda_2 \neq \lambda_-$.

Preuve. Les lemmes 5.4, 5.5 et 5.6 fournissent quatre vecteurs propres associés aux valeurs propres du système :

$$r_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ U \pm c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_1 = \begin{pmatrix} 2\bar{\delta}\delta_1 u_e \left(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}}\right) \\ 2\bar{\delta}\delta_1 u_e^2 \left(1 - \frac{\bar{\delta}\delta_1}{h} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}}\right) \\ -\frac{\delta_1 h}{Fr^2} \frac{1+\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}} \\ -\frac{h}{Fr^2} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \bar{\delta}u_e \left(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}\right) \\ \bar{\delta}\frac{u_e^2}{H} \left(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}\right) \\ \left(U - \frac{u_e}{H}\right)^2 - c^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$h > 0$ assure la définition des quantités (U n'étant défini que pour des valeurs $h > 0$) et les ordres stricts des valeurs propres présentés dans la proposition 5.2. De plus, si $h > 0$, les trois vecteurs propres r_+ , r_- et r_1 ne peuvent pas être proportionnels. Et nous savons aussi que r_1 et r_2 ne le sont pas.

L'unique obstacle à l'obtention d'une base de vecteurs propres (r_+, r_-, r_1, r_2) se trouve donc être que la troisième coordonnée de r_2 s'annule.

$$\left(U - \frac{u_e}{H}\right)^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow U - \frac{u_e}{H} = \pm c \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{u_e}{H} = \begin{cases} U + c = \lambda_+ \\ U - c = \lambda_- \end{cases}.$$

Comme $\lambda_2 = \lambda_+$ est un cas impossible. Nous obtenons que la troisième composante de r_2 ne peut s'annuler que lorsque $\lambda_2 = \lambda_-$. De plus, de par sa structure r_2 , est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda_2 a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda_- a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a_1 = \bar{\delta}u_e \left(1 - \frac{1}{H} - 2\bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}\right). \text{ Aussi lorsque } \lambda_2 = \lambda_-, \text{ et uniquement}$$

dans ce cas, les vecteurs propres r_2 et r_- sont proportionnels et le système n'est donc pas hyperbolique. □

Remarque 5.8. *Compte tenu de la remarque 5.3, le modèle est hyperbolique pour les simulations en régime fluvial.*

Les invariants de Riemann pour les valeurs propres $\lambda_{\pm}$

Pour les deux valeurs propres de type Saint Venant $\lambda_{\pm}$, une démarche similaire à celle pour les invariants de Riemann des équations de Saint Venant a abouti, même si ils n'ont pas exploité pour une amélioration du code numérique. Lors de la recherche des vecteurs propres pour les équations de Saint Venant, une stratégie possible, afin d'obtenir des vecteurs propres propices au calcul des invariants de Riemann, est d'observer le système sous forme non conservative (ceci ne changeant pas les valeurs propres ni les invariants de Riemann [30]). Une fois encore comme dans la proposition (5.4) nous faisons le choix préalable de chercher un vecteur propre $r_{\pm}$ de la

forme $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aussi les équations qu'il est nécessaire de mettre sous forme non conservative sont

les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Les quatre inconnues

du système sont alors $(h, U, u_e \delta_1, u_e)$. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t h + U \partial_x h + h \partial_x U &= 0 \\ \partial_t U + \left[\frac{1}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta} \delta_1 u_e}{h} \right)^2 \right] \partial_x h + \left[\frac{u_e}{h} \left(1 - \frac{1}{H} \right) - \frac{2\bar{\delta}^2 u_e \delta_1}{h} \right] \partial_x (u_e \delta_1) + \bar{\delta} \delta_1 u_e \left(1 - \frac{1}{H} \right) \partial_x u_e &= 0. \end{aligned}$$

Grâce à ces deux équations, nous obtenons que les coordonnées des vecteurs propres $r_{\pm}$ doivent vérifier le système suivant, avec $c = \sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta} \delta_1 u_e}{h} \right)^2}$:

$$\begin{cases} U a_1 + h a_2 = \lambda_{\pm} a_1 \\ \frac{c}{h} a_1 + U a_2 = \lambda_{\pm} a_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} h a_2 = \pm c a_1 \\ \frac{c}{h} a_1 = \pm c a_2. \end{cases}$$

Ces deux équations sont redondantes et se résument à

$$\frac{c}{h} a_1 = \pm a_2.$$

Aussi les vecteurs propres recherchés sont

$$r_{\pm} = \begin{pmatrix} h \\ \pm c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.9. *Les invariants de Riemann $f_{\pm}$, respectifs aux valeurs propres $\lambda_{\pm}$ et calculés avec un développement limité sur $\bar{\delta}$ sont*

$$\begin{aligned} f_+ &= U - \frac{h}{Fr} + \frac{1}{5} (\bar{\delta} \delta_1 u_e)^2 h^{-\frac{5}{2}} + o(\bar{\delta}^2) \\ f_- &= U + \frac{h}{Fr} - \frac{1}{5} (\bar{\delta} \delta_1 u_e)^2 h^{-\frac{5}{2}} + o(\bar{\delta}^2) \end{aligned}$$

Preuve. (Le cas de f_+) On recherche une fonction scalaire f_+ en les composantes de $V = (h, U, u_e \delta_1, u_e)$, vérifiant :

$$\nabla_V f_+ \cdot r_+ = 0$$

Soit, avec la connaissance de r_+ ,

$$h \partial_h f_+ + c \partial_U f_+ = 0.$$

Si on impose que $\partial_U f_+ = 1$, soit que $f_+(V) = U + g(h, u_e \delta_1, u_e)$ avec la fonction g à déterminer grâce à la relation ci-dessus, on obtient alors

$$\begin{aligned} h \partial_h f_+ &= -c \\ \partial_h f_+ &= -\frac{c}{h} \\ \partial_h f_+ &= -\frac{\sqrt{\frac{h}{Fr^2}}}{h} \sqrt{1 + \frac{Fr^2 (\bar{\delta} \delta_1 u_e)^2}{h^3}}. \end{aligned}$$

Pour connaître la fonction g , il nous faut déterminer une primitive selon la variable h de cette expression. Une façon simple d'y parvenir est de faire un développement limité de la racine carrée autour du paramètre $\bar{\delta}$.

$$\begin{aligned} \partial_h f_+ &= -\frac{1}{Fr \sqrt{h}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{Fr^2 (\bar{\delta} \delta_1 u_e)^2}{h^3} \right) + o(\bar{\delta}^2) \\ \partial_h f_+ &= -\frac{1}{Fr \sqrt{h}} - \frac{1}{2} Fr (\bar{\delta} \delta_1 u_e)^2 h^{-\frac{7}{2}} + o(\bar{\delta}^2). \end{aligned}$$

Aussi un invariant de Riemann relatif à la valeur propre λ_+ est

$$f_+ = U - \frac{\sqrt{h}}{Fr} + \frac{1}{5}Fr(\bar{\delta}\delta_1 u_e)^2 h^{-\frac{5}{2}} + o(\bar{\delta}^2).$$

Un raisonnement identique à un signe près permet d'obtenir f_- . $\square$

Remarque 5.10. Une fois encore, prendre $\bar{\delta} = 0$ redonne l'expression connue pour les équations de Saint Venant usuelles.

Mise en œuvre numérique

Afin de parfaitement connaître les valeurs propres du système dans l'optique d'appliquer un schéma numérique HLL, le système d'équations considéré est :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hU) &= 0 \\ \partial_t(hU) + \partial_x\left(\frac{h^2}{2Fr^2} + hU^2 + \bar{\delta}\delta_1 u_e^2\left(1 - \frac{1}{H} - \bar{\delta}\frac{\delta_1}{h}\right)\right) &= -\frac{hf'_b}{Fr^2} - \bar{\delta}\tau \\ \partial_t(u_e\delta_1) + \partial_x\left(\frac{u_e^2\delta_1}{H}\right) + u_e\delta_1\partial_x u_e &= \tau \\ \partial_t u_e + \partial_x\left(\frac{u_e^2}{2}\right) &= -\frac{1}{Fr^2}(\partial_x h + f'_b). \end{aligned}$$

L'espace $[a; b]$ pris pour les différentes simulations est discrétisé uniformément à l'aide du pas d'espace $\Delta x = \frac{b-a}{J}$ avec J le nombre de points du maillage. Les positions en espace se réfèrent au centre des cellules, la première position étant donc en $a + \frac{\Delta x}{2}$. La discrétisation du temps est contrôlée par le paramètre Δt variable, calculé à chaque pas de temps à l'aide d'une condition CFL : $\frac{n_{CFL}\Delta x}{c}$, où c est la vitesse de propagation estimée grâce aux quatre valeurs propres définies à la relation (5.4).

Un schéma HLL pourrait être directement appliqué sur ce système de quatre équations pour les parties conservatives. Cependant le premier objectif des simulations numériques est de voir la concordance entre le modèle (4.10) et celui de Saint Venant sans frottement. Or les schémas numériques mis en place pour les équations de Saint Venant respectent les états d'équilibre à l'aide d'une reconstruction hydrostatique (voir [2]). Un schéma HLL appliqué brutalement à ces quatre équations n'aurait pas cette propriété et ne permettrait donc pas une comparaison fiable entre les deux modèles. Comme la matrice $\mathcal{A}(V)$ définie par la relation (5.4) est diagonale par blocs, nous pouvons sans risque de dénaturer le comportement global du système traiter les équations séparément. Aussi, au lieu d'un schéma HLL, nous avons trois schémas mis en place avec les mêmes vitesses obtenues à partir des valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}(V)$: un schéma pour l'équation sur u_e , un schéma pour l'équation de von Kármán et un dernier pour les deux équations semblables à celles de Saint Venant dans lequel une reconstruction hydrostatique est programmée.

Pour tous les flux numériques *HLL* définis ci-après, les mêmes vitesses c_1 et c_2 sont utilisées, avec les valeurs propres définies par les relations (5.5) :

$$\begin{aligned} c_1 &= \min_{V=V_i, V_r} (\lambda_1(V), \lambda_2(V), \lambda_-(V), \lambda_+(V)) \\ c_2 &= \max_{V=V_i, V_r} (\lambda_1(V), \lambda_2(V), \lambda_-(V), \lambda_+(V)) \end{aligned}$$

avec $V = \begin{pmatrix} h \\ hU \\ u_e\delta_1 \\ u_e \end{pmatrix}$ Pour l'actualisation de la solution au pas de temps $n+1$ à partir de la solution au temps n , et pour tout point d'espace i , trois étapes ont donc lieu :

1. La vitesse horizontale du fluide parfait $(u_e)_i^{n+1}$ résulte du traitement de l'équation sur u_e avec une différence centrée appliquée sur le terme source :

$$(u_e)_i^{n+1} = (u_e)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{u_e}(V_i^n, V_{i+1}^n) - F_{u_e}(V_{i-1}^n, V_i^n) + \frac{1}{2Fr^2}(h_{i+1}^n - h_{i-1}^n + (f_b)_{i+1} - (f_b)_{i-1}) \right],$$

où F_{u_e} est le flux numérique défini à l'équation (5.3) pour le flux réel $G_{u_e}(V) = \frac{u_e^2}{2}$.

2. En définissant $w = u_e \delta_1$, l'équation de von Kármán permet d'actualiser la composante w . Les termes faisant apparaître u_e sont traités en semi-implicite avec les termes déjà calculés à la première étape :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{vK}(V_i^n, V_{i+1}^n) - F_{vK}(V_{i-1}^n, V_i^n) + \frac{w_i^n}{2} ((u_e)_{i+1}^{n+1} - (u_e)_{i-1}^{n+1}) \right) + \Delta t \frac{((u_e)_i^{n+1})^2 \alpha_2 \varphi'(0)}{w_i^n}$$

où F_{vK} est le flux numérique défini à l'équation (5.3) pour le flux réel $G_{vK}(V) = \frac{u_e^2 \delta_1}{H}$.

3. Les deux équations de conservation de la masse et du mouvement sont traitées elles-même en deux étapes pour intégrer au schéma une reconstruction hydrostatique à l'ordre 1. Les deux équations sont

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hU \end{pmatrix} + \partial_x (G_{HR}(V)) + \partial_x \begin{pmatrix} 0 \\ G_c(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{hf'_b}{Fr^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\delta} \frac{u_e \alpha_2 \varphi'(0)}{\delta_1} \end{pmatrix},$$

avec $G_{HR}(V) = \begin{pmatrix} hU \\ \frac{h^2}{2Fr^2} + hU^2 \end{pmatrix}$ le flux typique des équations de Saint Venant et la correction de ce flux, pilotée par $\bar{\delta}$, $G_c(V) = [\bar{\delta} \delta_1 u_e^2 (1 - \frac{1}{H}) - \frac{(\bar{\delta} \delta_1 u_e)^2}{h}]$.

- La partie en tout point semblable aux équations de Saint Venant

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hU \end{pmatrix} + \partial_x (G_{HR}(V)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{hf'_b}{Fr^2} \end{pmatrix}$$

est traitée en appliquant la reconstruction hydrostatique à l'ordre 1 combinée avec un flux HLL. La méthode est pleinement détaillée dans la littérature (comme par exemple dans [2], [8], [22]) et rien de nouveau n'y est apporté. Nous présentons seulement que cette méthode nous redonne $\begin{pmatrix} h_i^{n+1} \\ (hU)_i^{n+1} \end{pmatrix}$ qui préserve l'état d'équilibre du lac au repos.

- Dans un second temps, une rectification est apportée à $(hU)_i^{n+1}$ pour prendre en compte les éléments manquants de l'équation. Le terme source est à nouveau traité de manière semi-implicite.

$$(hU)_i^{n+1} = (hU)_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_c(V_i^n, V_{i+1}^n) - F_c(V_{i-1}^n, V_i^n)] - \Delta t \bar{\delta} \frac{((u_e)_i^{n+1})^2 \alpha_2 \varphi'(0)}{w_i^{n+1}}$$

où F_c est le flux numérique défini à l'équation (5.3) pour le flux réel G_c .

5.2 Comparaison du modèle de Saint Venant sans friction et du modèle étendu (4.10)

Comme cela a été de nombreuses fois évoqué le modèle (4.10) proposé recoupe, par ses deux premières équations, les équations de Saint Venant usuelles lorsque le paramètre $\bar{\delta} = 0$, ou autrement dit lorsque le nombre de Reynolds effectif εRe_h est infini. Aussi la première application numérique consiste à vérifier cette concordance entre les deux modèles. De nombreux

cas test sont à disposition pour les équations de Saint Venant [20], nous nous contenterons des plus communs : un écoulement fluvial sur un fond composé d'une bosse gaussienne, et deux cas d'écoulements transcritiques avec ou sans choc en partant des conditions proposées dans [31]. Pour ces différents cas, des solutions analytiques existent [20] et pourraient être exploitées pour observer notre modèle. Néanmoins, puisque notre schéma n'est pas très raffiné, nous avons choisi de discrétiser les équations de Saint Venant avec le même schéma de volumes finis que celui mis en place pour notre modèle (4.10) afin de comparer directement les effets de la viscosité apportés par ce modèle.

5.2.1 Écoulement fluvial

Pour cet écoulement, nous avons choisi un fond formé d'une bosse gaussienne $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0,5)^2}{2(0,05)^2})$. Cette forme de fond sera exploitée à nouveau plus loin pour appréhender les réactions des solutions calculées selon les paramètres de la bosse gaussienne. Sur ce fond, un écoulement établi est imposé grâce aux conditions initiales suivantes :

$$V_0 = \begin{pmatrix} h \\ U \\ \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - f_b \\ 1 \\ 0,01 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La valeur initiale faible pour δ_1 sert à exprimer que l'on considère l'écoulement au moment où la couche visqueuse se développe.

Les conditions aux bords du domaine sont prises de façon très simple comme vérifiant :

$$\begin{cases} \text{A l'entrée : } \begin{pmatrix} h \\ U \\ \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix} = V_0 \\ \text{A la sortie : sortie libre.} \end{cases}$$

Sur la figure 5.1 sont présentées les solutions obtenues pour le modèle de Saint Venant sans friction et le modèle (4.10). Pour un très grand nombre de Reynolds effectif $\varepsilon Re_h = 10^8$, la simulation répond aux attentes puisque les courbes des hauteurs et des vitesses moyennes sont superposées. Cette superposition n'est pas conservée lorsque εRe_h diminue comme on peut le remarquer pour la courbe obtenue avec $\varepsilon Re_h = 10^4$. La vitesse moyenne solution du modèle (4.10) est plus faible que celle obtenue pour le modèle de Saint Venant sans friction, ce qui entraîne par conservation du débit une augmentation de la hauteur d'eau. Ce phénomène est parfaitement attendu puisqu'un plus faible nombre de Reynolds représente une viscosité supérieure dans le fluide : il est donc ralenti. A ces courbes des hauteurs et des vitesses moyennes ont été ajoutées les deux épaisseurs de déplacement δ_1 correspondantes. La différence de l'une à l'autre est moins spectaculaire que celles pour les hauteurs ou vitesses, mais il ne faut pas oublier que la valeur physique est en réalité $\bar{\delta}_1$ auquel cas la différence est plus que significative.

5.2.2 Écoulements transcritiques

Les deux écoulements transcritiques présentés ici, un sans choc et un avec, s'appuient sur les paramètres de fond, et sur les conditions initiales et aux bords, étudiés dans [31]. Ainsi le fond vérifie

$$f_b(x) = [0, 2 - 0,05(x - 10)^2] \mathbb{I}_{[8,12]}(x) \quad x \in [0, 25].$$

Les conditions initiales sont dans le cas des équations de Saint Venant celles d'un lac au repos. Pour la définition de la hauteur comme de la vitesse moyenne cela s'applique sans problème. Néanmoins, l'écriture naïve du schéma ne permet pas de prendre abruptement $u_e = 0$ et $\delta_1 = 0$

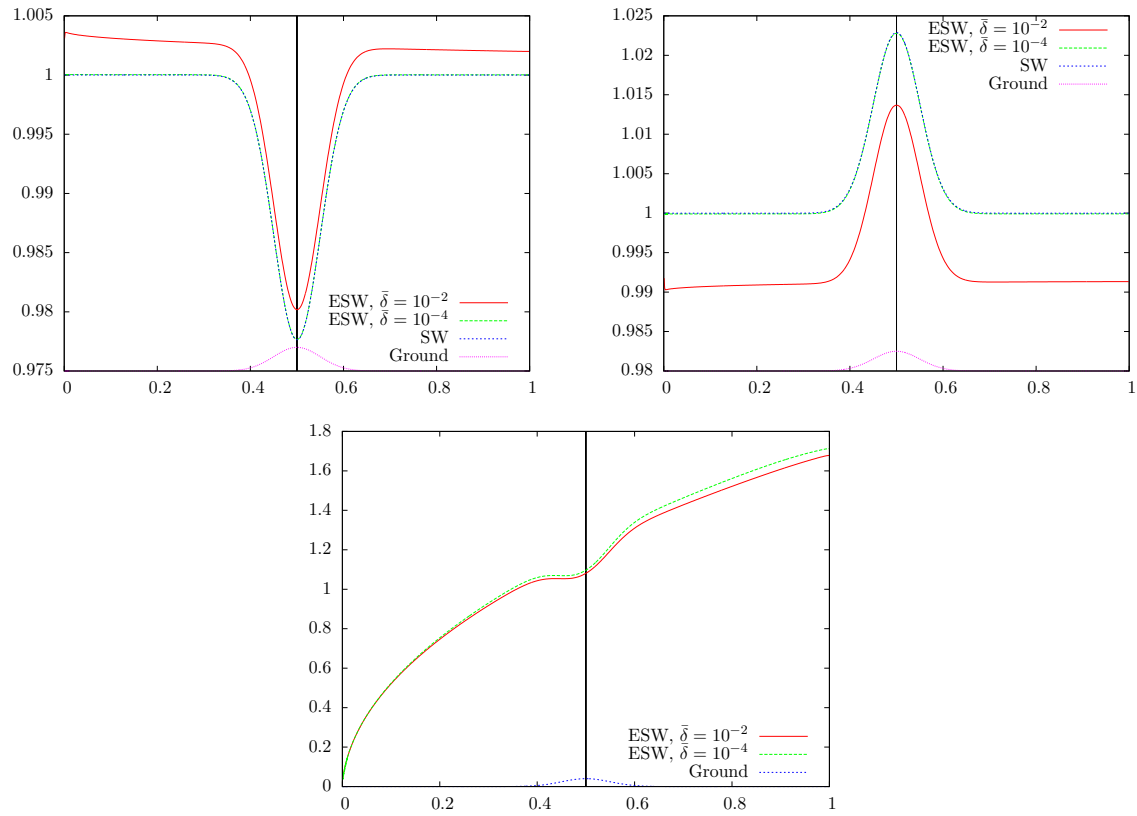


Figure 5.1: Écoulement fluvial – En haut à gauche sont présentées les hauteurs d’eau, et en haut à droite les vitesses U , des modèles de Saint Venant sans friction et du modèle (4.10) pour deux valeurs de $\bar{\delta}$. En dessous, l’épaisseur de déplacement est tracée pour les deux valeurs de $\bar{\delta}$. Pour $\bar{\delta} = 10^{-4}$, les courbes des modèles de Saint Venant et de Saint Venant étendu sont très superposées. Une valeur $\bar{\delta} = 10^{-2}$ fait quant à elle apparaître une différence significative entre les différentes courbes. – Simulations faites avec $T = 3$, $J = 800$, $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0,5)^2}{2(0,05)^2})$, un profil φ linéaire.

(notamment à cause du terme de friction τ). Aussi pour ces deux inconnues des petites valeurs seront prises initialement à défaut d’être nulles.

Ces deux types d’écoulements, transcritique sans choc pour la figure 5.2 et transcritique avec choc pour la figure 5.3, amènent à nouveau une concordance entre les deux modèles pour une grande valeur de εRe_h . Pour une valeur inférieure du nombre de Reynolds effectif, le comportement n’est pas modifié sur la bosse mais présente des divergences sur les zones planes. Cette tendance se retrouve dans les courbes de l’épaisseur de déplacement.

Écoulement transcritique sans choc

Cet écoulement présenté dans la figure 5.2 illustre un écoulement sous-critique en amont de la bosse mais qui devient sur-critique au sommet. Les conditions initiales utilisées ici sont :

$$\begin{pmatrix} h \\ U \\ \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 - f_b \\ 0 \\ 0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix}$$

Pour les conditions aux bords nous continuons de nous appuyer sur les conditions proposées dans [31] :

$$\begin{cases} \text{A l'entrée : } hU = 1.53, u_e = \frac{1.53}{h}, u_e \delta_1 = (0.01)^2, \\ \text{A la sortie : } h = 0.66 \text{ lorsque le fluide est sous-critique.} \end{cases}$$

Remarque 5.11. Nous avons conservé la caractérisation d'un écoulement sous-critique que l'on retrouve pour la résolution des équations de Saint Venant : $U < \sqrt{\frac{h}{Fr^2}}$ (voir [20]). Un raffinement potentiel pourrait être d'utiliser la vitesse critique apparaissant dans les valeurs propres du système $\sqrt{\frac{h}{Fr^2} + \left(\frac{\bar{\delta}\delta_1 u_e}{h}\right)^2}$.

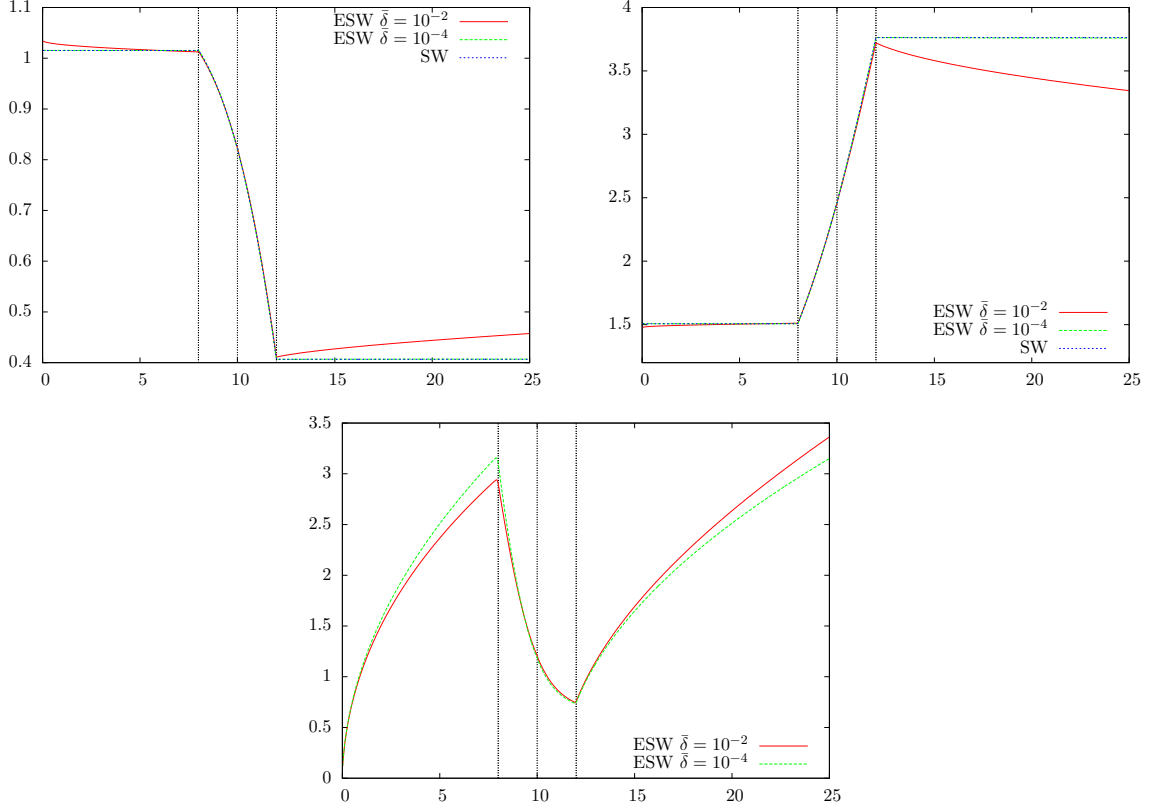


Figure 5.2: Écoulement transcritique sans choc – La surface $\eta = h + f_b$ est représentée en haut à gauche, les vitesses moyennes en haut à droite pour les modèles de Saint Venant sans friction et le modèle de Saint Venant étendu. Les épaisseurs de déplacement sont placées en dessous. Le début, le sommet et la fin de la bosse sont représentés par les pointillés verticaux. Pour $\bar{\delta} = 10^{-4}$, les courbes de surface et de vitesse des deux modèles se superposent. Pour $\bar{\delta} = 10^{-2}$, les parties planes du fond entraînent des différences significatives, en particulier vers la sortie. L'écoulement sur la bosse reste lui semblable. Comme l'épaisseur de déplacement peut s'interpréter comme une modification de la topographie (voir section 6.2), la création de la couche visqueuse sur les parties planes peut expliquer ce comportement. – Simulations faites avec $J = 800$, $T = 150$, $f_b(x) = f_b(x) = [0, 2 - 0,05(x - 10)^2]\mathbb{I}_{[8,12]}(x)$ pour $x \in [0, 25]$, un profil φ linéaire.

Écoulement transcritique avec choc

Le fond pour cet écoulement reste identique à celui précédent mais un changement dans les conditions initiales et aux bords permet d'obtenir cette fois un régime sous-critique en entrée, sur-critique sur le sommet de la bosse, et à nouveau sous-critique après un saut hydraulique. On retrouve globalement la position du saut hydraulique par rapport au modèle de Saint Venant sans frottement malgré une légère dépendance en fonction de la valeur de $\bar{\delta}$ (voir les fenêtres supérieures de la figure 5.3). Les courbes pour l'épaisseur de déplacement (bas de la figure 5.3) expriment cependant que notre schéma n'est pas en mesure de stabiliser l'épaisseur de déplacement après le saut hydraulique lorsque $\bar{\delta}$ augmente, et ces instabilités se retrouvent alors aussi selon les temps de simulation (figure 5.4). Deux arguments peuvent être avancés pour expliquer cette limitation du schéma. D'un point de vue numérique, ce cas d'écoulement présente

une discontinuité dans les vitesses qui apparaissent dans l'opérateur de transport de l'équation de von Kármán. Aussi cela peut entraîner des problèmes de stabilisation qui nécessiteraient un raffinement dans le traitement des équations. Par ailleurs, le modèle (4.10) peut lui aussi être remis en cause pour traiter ce type d'écoulement. En effet, des effets de recirculation peuvent avoir lieu derrière la bosse ce qui requiert, au minimum, un profil de vitesse variable pour être pris en compte par un modèle.

Les conditions initiales et aux bords pour les figures 5.3 et 5.4 sont les suivantes :

- État initial

$$\begin{pmatrix} h \\ U \\ \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 - f_b \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}.$$

- Conditions de bords

$$\begin{cases} \text{A l'entrée : } hU = 0.18, u_e = \frac{0.18}{h}, u_e \delta_1 = (0.01)^2, \\ \text{A la sortie : } h = 0.33. \end{cases}$$

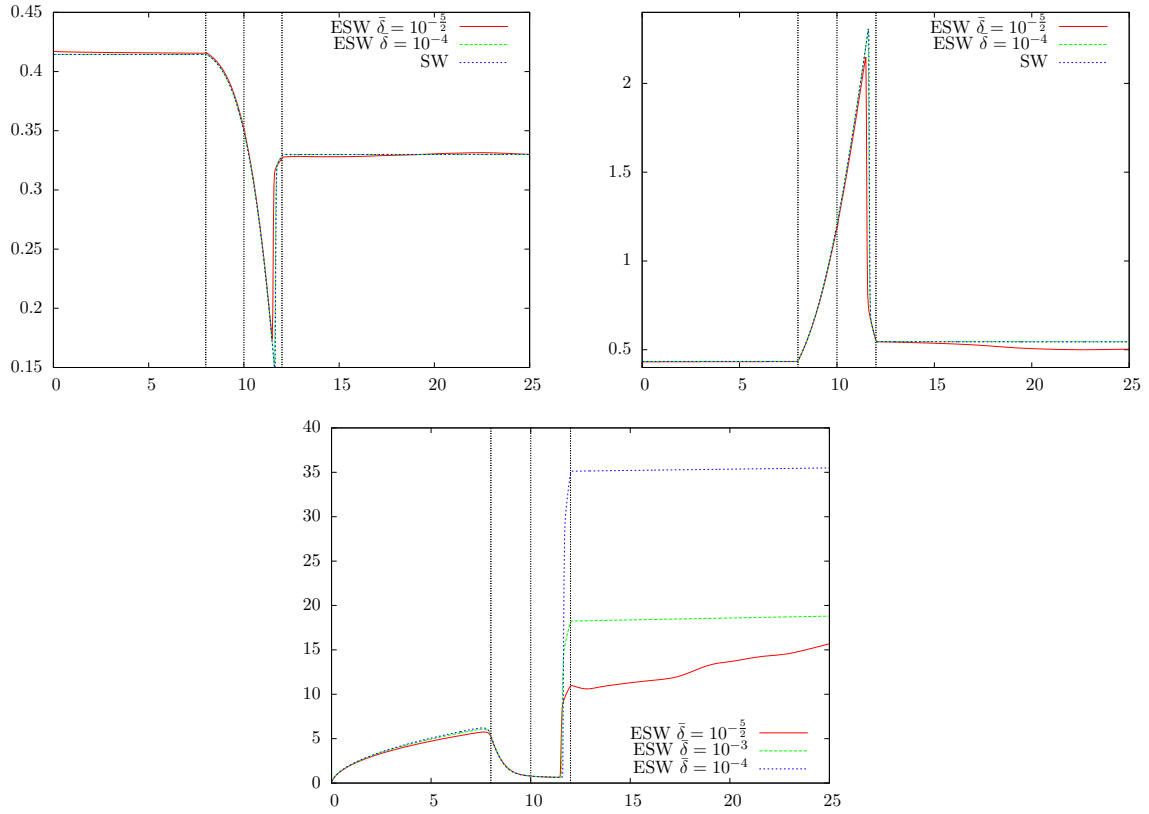


Figure 5.3: Écoulement transcritique avec choc – La surface $\eta = h + f_b$ est représentée en haut à gauche, les vitesses moyennes en haut à droite pour les modèles de Saint Venant sans friction et le modèle de Saint Venant étendu. Les épaisseurs de déplacement sont placées en dessous. – Une fois encore les courbes du modèle de Saint Venant sans friction (SW sur les graphiques) sont attrapées par notre modèle pour $\bar{\delta} = 10^{-4}$. Des différences apparaissent pour $\bar{\delta} = 10^{-2}$ en particulier sur les parties planes mais aussi sur l'amplitude des pics – Simulations faites avec $J = 800$, $T = 590$, $f_b(x) = [0, 2 - 0,05(x - 10)^2] \mathbb{I}_{[8,12]}(x)$ pour $x \in [0, 25]$, un profil φ linéaire.

5.3 Solution stationnaire sur un fond plat

Dans la partie 4.3.2, nous avons mis en évidence une solution stationnaire sur fond plat pour le modèle (4.11). Ce modèle étant équivalent au modèle (4.10) reproduit par le schéma numérique

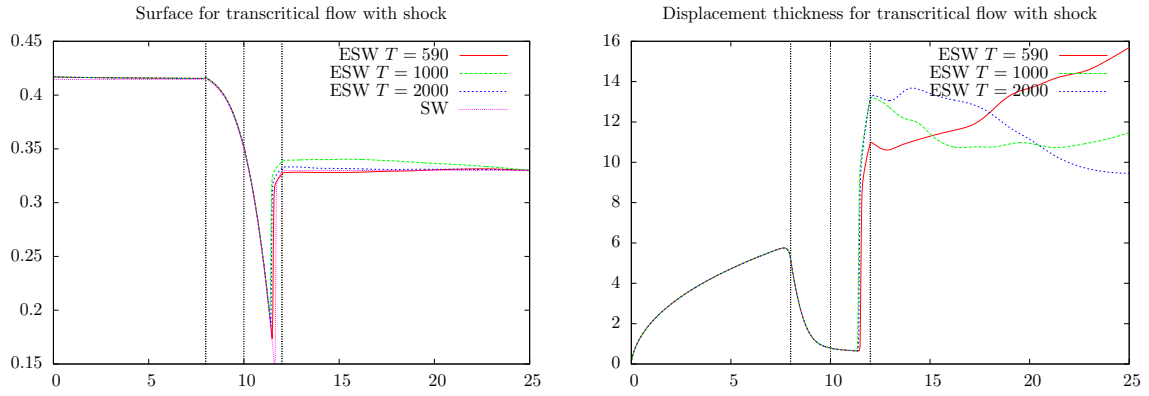


Figure 5.4: Évolution en temps de la surface η (à gauche) et de l'épaisseur de déplacement (à droite) pour un écoulement transcritique avec choc pour $\bar{\delta} = 10^{-\frac{5}{2}}$. L'épaisseur de déplacement ne réussit pas à se stabiliser en sortie de bosse pour différents temps de simulation, ce qui se retrouve naturellement pour la surface. Simulations faites avec $J = 800$, $\bar{\delta} = 10^{-\frac{5}{2}}$, $f_b(x) = [0, 2 - 0,05(x - 10)^2] \mathbb{I}_{[8,12]}(x)$ pour $x \in [0, 25]$, un profil φ linéaire.

mis en place, il est attendu que le schéma numérique soit en adéquation avec cette solution pour être validé.

Pour rappel, la solution stationnaire, linéarisée autour du paramètre $\bar{\delta}$, obtenue est :

$$\begin{cases} \delta_1^0 = \sqrt{\frac{2\alpha_2 H}{u_e}} \varphi'(0) \sqrt{x}, & u_e = u_e^0 + \bar{\delta} \frac{U^0}{h^0} \frac{1}{1 - Fr_0^2} \delta_1^0 \\ h = h^0 + \bar{\delta} \frac{Fr_0^2}{Fr_0^2 - 1} \delta_1^0, & U = U^0 + \bar{\delta} \frac{U^0}{h^0} \frac{Fr_0^2}{1 - Fr_0^2} \delta_1^0, \end{cases}$$

où h^0 , U^0 et u_e^0 sont des constantes avec de plus, $u_e^0 = U^0$. La figure 5.5 présente l'épaisseur de déplacement obtenue par le schéma pour deux valeurs différentes de $\bar{\delta}$, comparées avec la solution théorique de l'épaisseur de déplacement. On peut y observer qu'en effet pour $\bar{\delta} = 10^{-4}$, la solution numérique attrape bien la solution stationnaire. Pour la valeur $\bar{\delta} = 10^{-2}$ plus grande, la solution numérique s'éloigne naturellement de la solution stationnaire. On peut notamment voir que si sur un intervalle d'espace court les trois courbes sont superposées, la solution numérique pour $\bar{\delta} = 10^{-2}$ s'éloigne rapidement de l'évolution non bornée de la racine carrée. Il n'est pas possible de déterminer si cette solution numérique présente réellement une saturation mais cet écart est au moins en accord avec une possibilité de saturation présentée dans la section 4.4. Pour les autres quantités, les défauts liés aux conditions d'entrée ne permettent pas une bonne concordance des courbes, bien que les variations soient satisfaisantes.

5.4 Comportements sur une bosse du modèle (4.10)

A présent que la concordance numérique entre le modèle de Saint Venant sans friction et le modèle (4.10) est établie pour des faibles valeurs de $\bar{\delta}$, nous allons pouvoir nous pencher plus attentivement sur le comportement particulier de l'épaisseur de déplacement δ_1 ainsi que celui du frottement τ lorsque la topographique comporte une bosse. Cette bosse, que nous choisissons gaussienne pour limiter tout risque de discontinuité, sera paramétrée comme suit par son amplitude A et son étalement caractérisé par l'écart-type σ :

$$f_b(x) = A \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Par souci de clarté nous avons pris la valeur moyenne $m = 0,5$ et les simulations sont faites sur la distance $[0; 1]$. Le sommet de la bosse sera donc toujours placé au centre de l'écoulement.

Nous nous plaçons dans le contexte où un régime établi, de surface et de vitesse constantes, vient générer une couche visqueuse représentée par l'évolution de l'épaisseur de déplacement δ_1 .

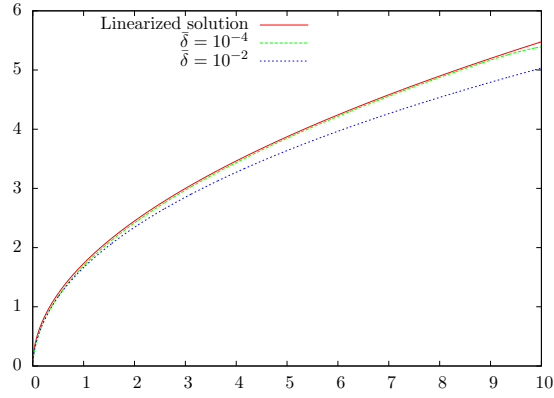


Figure 5.5: Épaisseur de déplacement pour deux valeurs de $\bar{\delta}$ – Le schéma récupère la solution analytique pour une faible valeur $\bar{\delta} = 10^{-4}$. Pour une valeur plus importante, $\bar{\delta} = 10^{-2}$, et un intervalle d’espace suffisant, la solution numérique se dédouane de la solution de Blasius par un ralentissement de sa croissance. – Simulations faites avec $J = 2000$, $T = 30$, un fond plat, $x \in [0; 10]$, un profil φ linéaire.

C’est pourquoi les conditions initiales, si elles ne sont pas précisées, sont de la forme

$$V_0 = \begin{pmatrix} h \\ U \\ \delta_1 \\ u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - f_b \\ 1 \\ 0,01 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 5.12. *La condition initiale pour l’épaisseur de déplacement δ_1 petite représente, là encore, une épaisseur nulle au début de l’écoulement mais qui ne peut être implémentée ainsi directement dans le schéma.*

Dans la figure 5.6 sont tracées les courbes de l’épaisseur de déplacement δ_1 et du terme de friction $\tau = \frac{u_e \alpha_2 \varphi'(0)}{\delta_1}$ obtenues par une simulation sur une bosse gaussienne avec les conditions annoncées. On observe toujours (voir 3.4) une forme globale de racine carrée pour l’épaisseur de déplacement sur les zones relativement planes de la topographie. Sur la zone centrale où la bosse gaussienne devient non négligeable on peut observer une déformation de cette racine carrée. Cette déformation pourra dépendre de la largeur ou de l’amplitude de la bosse, du choix du profil, de la valeur de $\bar{\delta}$ et c’est ce sur quoi va principalement porter la suite des simulations proposées ici. Néanmoins la croissance globale de l’épaisseur de déplacement sous l’effet de cette racine carrée peut perturber, visuellement, les observations spécifiques dues à la bosse. Pour remédier à cela, deux jeux de courbes seront parfois fournis : la solution réelle, et la solution rescalée par la solution obtenue par le modèle pour un fond plat. Les deux séries de courbes restent, malgré tout, nécessaires car la monotonie des solutions sur fond plat pour le scaling décale, ou minimise, les écarts des extrema locaux.

Remarque 5.13. *La bosse gaussienne sera placée à titre indicatif sur les tracés. Son amplitude, comme son ordonnée, ne sont pas respectées pour ne pas gêner la lecture des graphiques. La largeur est par contre conservée. De plus, un trait vertical est positionné sur le sommet de la bosse afin de mieux repérer la position des extrema locaux de l’épaisseur de déplacement et de la friction.*

5.4.1 Apport du terme de friction τ

Avant de voir les réactions propres aux paramètres de simulation, voyons déjà quel est l’intérêt de ce terme de friction apparu dans le modèle (4.10). Nous avons déjà rappelé (voir section 2.3) que la théorie des équations de Saint Venant permettait de prendre en compte la viscosité

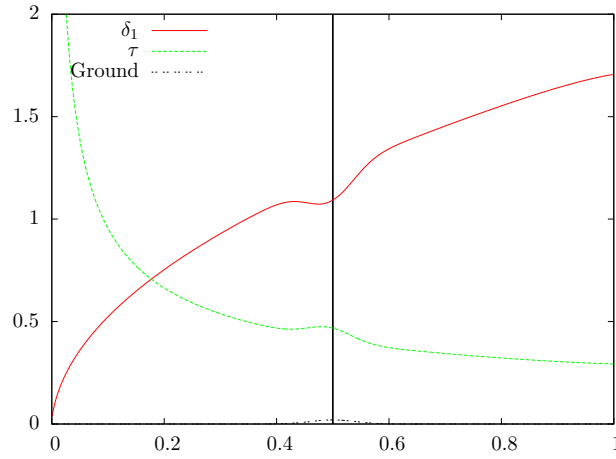


Figure 5.6: Épaisseur de déplacement δ_1 et terme de friction τ – La présence d’une bosse n’empêche pas une évolution de l’épaisseur de déplacement similaire à celle de Blasius sur un fond plat. La bosse, dans sa zone prédominante, perturbe néanmoins cette racine carrée créant un minimum local pour l’épaisseur de déplacement et un maximum local pour le terme de friction. – Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0,5)^2}{2(0,04)^2})$, $J = 800$, $T = 3$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, un profil φ linéaire.

du fluide au travers d’un terme ajouté au second membre de l’équation intégrée de quantité de mouvement. Ce terme supplémentaire, malgré une approximation de fluide parfait pour la fermeture du flux, peut en effet ralentir l’écoulement comme cela est attendu pour un terme de friction. Mais il ne peut être pleinement satisfaisant d’un point de vue physique puisque ce terme, fonction des termes h et U , est maximal sur le sommet d’une bosse. Si cela était vrai, les reliefs d’une rivière s’éroderaient d’une façon plus forte sur le sommet. Or les observations naturelles assurent que la partie la plus érodée se trouve légèrement en amont du sommet de la bosse (comme c’est le cas par exemple dans [39]).

Sur la figure 5.6, le terme de friction τ présente un maximum local quelque peu en avance sur le sommet de la bosse. Le graphique ayant été représenté sur tout le domaine de simulation $[0; 1]$, les effets de la bosse qui se concentre principalement sur $[0, 4; 0, 6]$ sont atténués visuellement. C’est pourquoi la figure 5.7 (fenêtre de gauche) est donnée avec exactement les mêmes configurations de simulation, simplement les courbes ne sont tracées que sur l’intervalle $[0, 4; 0, 6]$. Des pointillés verticaux aident à repérer les positions exactes des extrema locaux pour l’épaisseur de déplacement et le terme de friction. Ceux-ci se placent bien en amont du sommet de la bosse, ce qui répond aux attentes d’amélioration du modèle de Saint Venant.

Remarque 5.14. On peut observer que le maximum local du terme de friction $\tau = \frac{u_e \alpha_2 \varphi'(0)}{\delta_1}$ est décalé vers l’aval par rapport au minimum local de l’épaisseur de déplacement. Cet écart s’explique par la présence du terme u_e au numérateur. Or, comme on peut le remarquer sur la fenêtre de droite de la figure 5.7, u_e est croissant sur la zone d’intérêt.

Dans la partie précédente, nous avons pu comparer, sur un même graphique, le modèle de Saint Venant et notre modèle (4.10). Avec le modèle de Saint Venant avec friction, ce n’est pas possible de le faire pour le terme de frottement (cela le reste bien entendu pour les vitesses moyennes ou les hauteurs d’eau). Et ce, à cause d’une différence d’ordre dans les termes de frottement. Notre système (4.10) fait apparaître le terme de friction τ porté par le paramètre $\bar{\delta}$, soit un terme d’ordre $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon Re_h}}$. Alors que nous avons pu voir dans la section 2.3 que le frottement laminaire qui apparaît naturellement avec une solution de Nusselt est $\frac{3}{\varepsilon Re_h} \frac{U}{h}$. Cette différence d’ordre $\bar{\delta}$, et les faibles amplitudes de variation des friction, ne permet donc pas de tracer sur un seul et même graphique les termes de frottement. Un moyen de contournement afin de bien observer les positions respectives des maxima locaux est de ne pas utiliser $\frac{3}{\varepsilon Re_h} \frac{U}{h}$ mais un terme de la forme $C_l \frac{U}{h}$ qui correspond toujours à un frottement laminaire mais dont le coefficient C_l

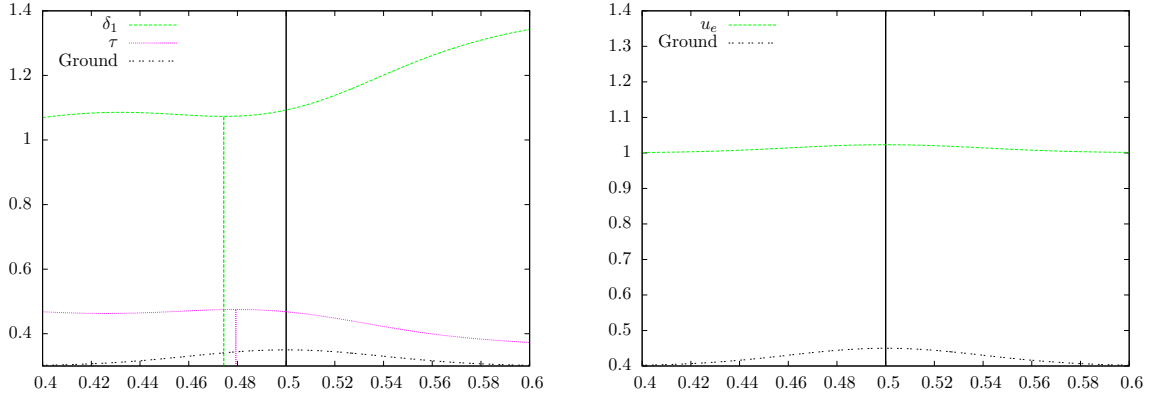


Figure 5.7: Épaisseur de déplacement et terme de friction (fenêtre de gauche), vitesse u_e (fenêtre de droite)– Le maximum local du terme de friction se place en avance par rapport au sommet de la bosse comme cela est attendu physiquement. Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{2(0.04)^2})$, $J = 800$, $T = 3$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, un profil φ linéaire.

peut être adapté à notre besoin. Nous avons fixé la valeur $C_l = 0,00068$ de façon à ce que les vitesses moyennes soient superposées à l'entrée de l'écoulement (elles ne le restent pas ensuite) lorsque notre modèle (4.10) est simulé avec $\bar{\delta} = 10^{-3}$. Les différents termes de frottement sont présentés dans la figure 5.8. On observe en effet que le frottement laminaire pour le modèle de Saint Venant usuel atteint son maximum au sommet de la bosse, contrairement à celui obtenu pour le modèle (4.10). Cette différence n'est pas propre à l'expression laminaire du coefficient mais aurait la même caractéristique pour tout type de loi de friction puisqu'elles ne peuvent dépendre que des inconnues h et U .

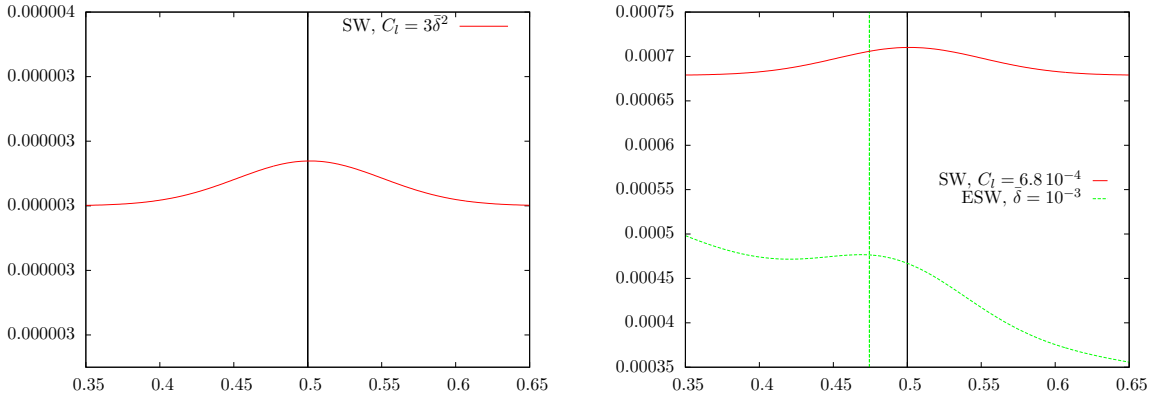


Figure 5.8: Termes de friction : A gauche, le terme de friction obtenu pour le modèle Saint Venant - Poiseuille ; A droite, les deux frottements laminaires (SW pour celui des équations de Saint Venant, ESW pour celui du modèle (4.10)). –Le frottement obtenu pour le demi-Poiseuille n'est pas du même ordre que celui obtenu dans le modèle (4.10). Et lorsque l'ordre est adapté manuellement pour les vitesses, il existe toujours une différence de position du maximum local du frottement. – Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{2(0.05)^2})$, $J = 800$, $T = 3$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$ et un profil φ linéaire pour le modèle (4.10).

5.4.2 Influence du paramètre $\bar{\delta}$

Le paramètre $\bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon Re_h}}$ est un paramètre clé du modèle (4.10) puisqu'il contrôle l'activation des termes novateurs dans l'équation de quantité de mouvement intégrée et qu'il caractérise la minceur de la couche visqueuse d'épaisseur physique $\bar{\delta}\delta_1$. Aussi nous cherchons à observer

sur la figure 5.9 l'influence potentielle de ce paramètre sur le comportement de l'épaisseur de déplacement et le terme de friction. Les termes physiques sont $\bar{\delta}\delta_1$ et $\bar{\delta}\tau$ mais tracés ainsi les comparaisons ne seront pas visibles. Aussi la figure 5.9 ne présente que les termes δ_1 et τ afin d'observer pleinement l'impact de $\bar{\delta}$ sur les variations de ces quantités. Nous pouvons remarquer une conservation relative de l'épaisseur de déplacement δ_1 en entrée de l'écoulement, excepté pour $\bar{\delta} = 10^{-1}$. Sur la zone prédominante de la bosse ainsi qu'à droite, les différentes épaisseurs de déplacement s'écartent les unes des autres. Plus $\bar{\delta}$ grandit, et plus l'épaisseur de déplacement associée diminue. Néanmoins la forme de la courbe, tout comme la position du minimum local, sont conservées. Là encore, seule l'épaisseur de déplacement associée à $\bar{\delta} = 10^{-1}$ se distingue des autres. Cela s'explique par une limite du modèle qui n'est valide que lorsque $\bar{\delta}$ reste assez petit. Des valeurs supérieures à 10^{-1} donnent des instabilités non contrôlées par le schéma et ne permettent pas d'aller jusqu'au bout de la simulation.

Pour le terme de friction τ les constatations sont identiques, en dehors du fait que les termes croissent avec $\bar{\delta}$.

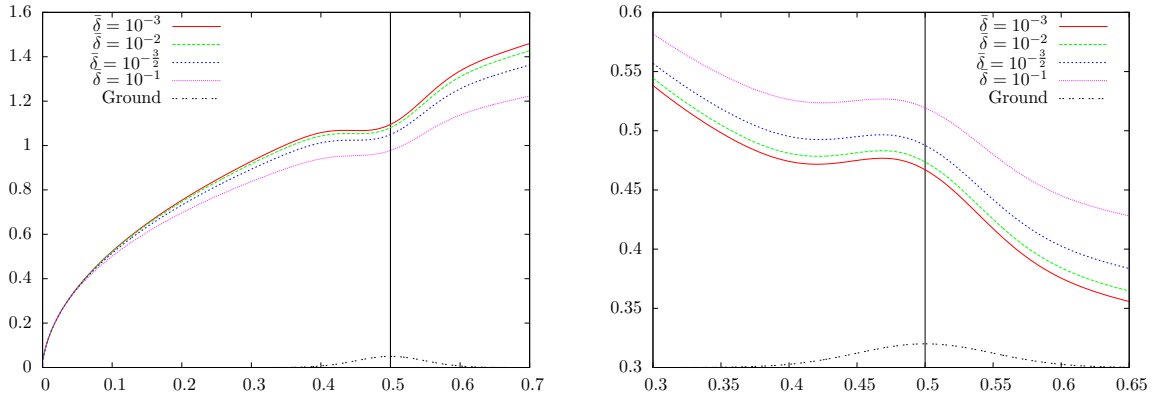


Figure 5.9: Influence du paramètre $\bar{\delta}$ sur l'épaisseur de déplacement δ_1 (fenêtre de gauche) et sur le terme de friction τ (fenêtre de droite) – Le paramètre $\bar{\delta}$ change les valeurs de δ_1 et de τ mais s'en modifier la forme des courbes ni la position des extrema locaux, à l'exception de $\bar{\delta} = 10^{-1}$ qui atteint les limites du système. – Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{2(0.05)^2})$, $J = 800$, $T = 3$, un profil φ linéaire.

5.4.3 Influence des paramètres de forme

Tout en conservant les mêmes conditions d'écoulement qui garantissent un régime fluvial sur l'ensemble de la simulation, nous allons ici faire varier l'amplitude A , puis l'écart-type σ de la bosse gaussienne pour voir l'influence sur les variations de l'épaisseur de déplacement δ_1 et du terme de friction τ .

Variation de l'amplitude

Nous avons vu que l'introduction d'une bosse perturbait la solution de Blasius (sous forme de racine carrée) obtenue sur un sol parfaitement plat. Il est donc naturel que l'amplitude de la bosse est un impact fort sur les variations de l'épaisseur de déplacement ou le terme de friction. La première interrogation, dont la réponse positive est donnée dans les figures 5.10 et 5.11, était de s'assurer qu'une amplitude décroissante de la bosse conduisait bien à une quantité calculée plus en adéquation avec la solution de Blasius. La figure 5.10 présente donc l'épaisseur de déplacement (à gauche) et le terme de friction (à droite) pour différentes valeurs de l'amplitude A . A ces courbes ont été ajoutées les courbes obtenues par le schéma sur un fond plat afin de comparer la forme de la réponse sur la bosse. Lorsque l'amplitude est faible, l'épaisseur de déplacement comme le terme de friction ne présentent plus d'extrema locaux mais uniquement des points d'inflexions du fait de la variation sous forme de solution de Blasius prépondérante.

C'est pourquoi la figure 5.11 reprend le tracé des mêmes simulations mais dont les solutions sont représentées rescalées par les solutions de Blasius obtenues. On observe alors bien le phénomène propre à l'amplitude de la bosse. De même, la figure 5.12 vérifie que lorsque l'amplitude de la bosse augmente, l'épaisseur de déplacement présente un puits de minimum local plus marqué.

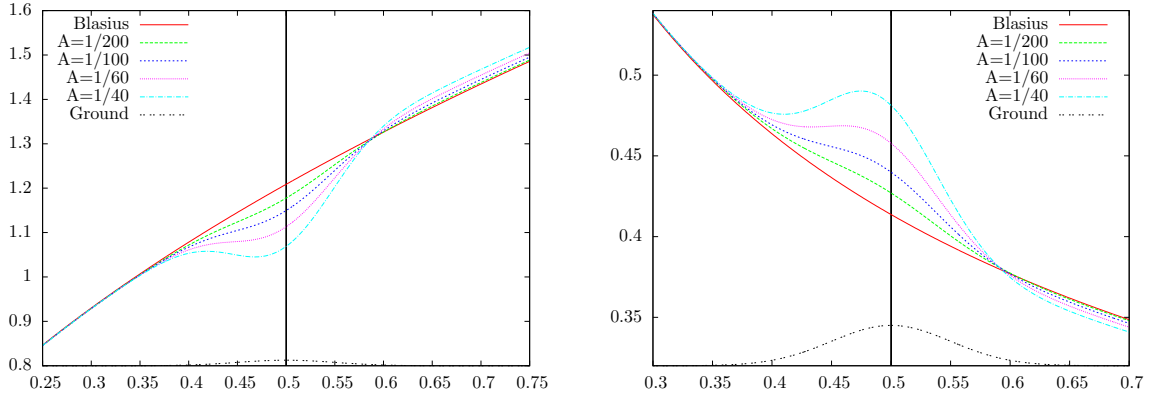


Figure 5.10: Influence de l'amplitude variable sur l'épaisseur de déplacement δ_1 (à gauche) et le terme de friction τ (à droite) – Lorsque l'amplitude décroît les quantités observées se rapprochent de la solution de Blasius obtenue sur un fond plat. – Simulations faites avec $f_b(x) = A \exp(\frac{-(x-0.5)^2}{2(0.05)^2})$, $T = 3$, $J = 800$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, un profil φ linéaire.

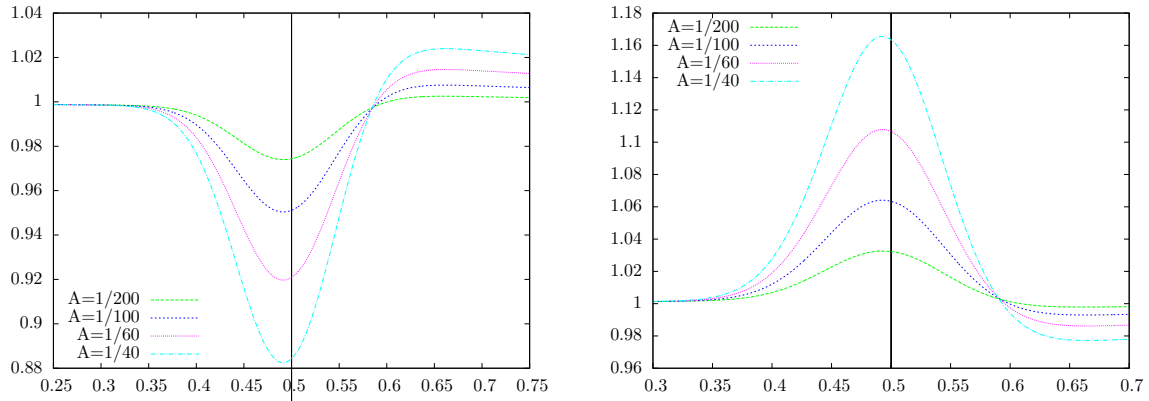


Figure 5.11: Influence de l'amplitude variable sur l'épaisseur de déplacement δ_1 (à gauche) et le terme de friction τ (à droite) rescalés par la solution de Blasius – Le retour vers la solution de Blasius lorsque l'amplitude A décroît s'observe sur le corps de la bosse. – Simulations faites avec $f_b(x) = A \exp(\frac{-(x-0.5)^2}{2(0.05)^2})$, $T = 3$, $J = 800$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, un profil φ linéaire.

Dans une deuxième temps, nous nous sommes intéressés particulièrement au phénomène en sortie de bosse lorsque l'amplitude augmente. Dans la figure 5.12, des amplitudes plus importantes sont observées avec un phénomène accru sur la sortie pour les quantités calculées. Ce comportement peut peut-être se relier au fait que des séparations de couche visqueuse ont lieu lorsque la pente en aval de la bosse est trop importante.

Sur les figures 5.10 et 5.11, on pouvait remarquer que les courbes tracées se recoupaient en un même point en sortie de bosse. Sur la figure 5.12 ce n'est plus le cas pour les plus hautes valeurs ($A = \frac{1}{10}$ et $A = \frac{1}{5}$). On semble donc atteindre pour ces valeurs une limite du modèle au delà de laquelle, même si la simulation a encore pu être effectuée, la structure de l'écoulement n'est plus respectée.

Un troisième phénomène d'intérêt est soulevé par les variations d'amplitude de la bosse. Lorsque la bosse considérée est suffisamment importante, les courbes de l'épaisseur de déplacement obtenues avec différentes valeurs d'entrée sont superposées autour de la bosse. Dans toutes les autres simulations l'épaisseur de déplacement avait été maintenue à 0,01 pour représenter une

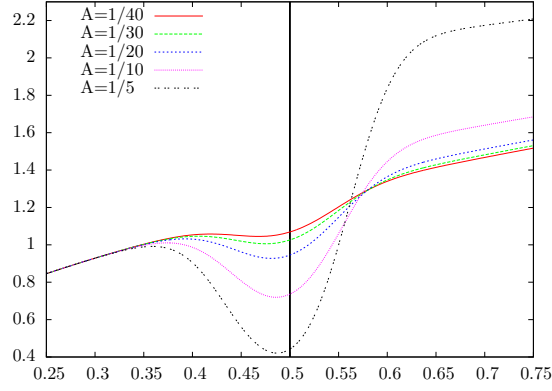


Figure 5.12: Influence de l'amplitude variable sur l'épaisseur de déplacement δ_1 – Plus l'amplitude de la bosse est importante et plus l'épaisseur de déplacement s'éloigne de la solution de Blasius, en présentant notamment des valeurs plus élevées en sortie de bosse. – Simulations faites avec $f_b(x) = A \exp(\frac{-(x-0.5)^2}{2(0.05)^2})$, $T = 3$, $J = 800$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, un profil φ linéaire.

création de la couche visqueuse. Dans la figure 5.13, différentes valeurs ont été considérées. Prendre des valeurs plus importantes pour δ_1 simule l'entrée d'un écoulement dans lequel la couche visqueuse est déjà établie. D'après la solution de Blasius (3.24), sur un fond plat, les courbes de l'épaisseur de déplacement pour différentes valeurs d'entrée restent distinctes. Ici cependant la présence d'une bosse de forte amplitude a un effet plus dominant sur les épaisseurs de déplacement qui se réunissent. Cela montre une certaine indépendance de la solution, dans la zone d'influence de la bosse, de l'épaisseur de déplacement par rapport à sa valeur en entrée de la simulation. Ce phénomène est limité par le choix de l'amplitude (l'exemple proposé dans la figure 5.13 est déjà dans des valeurs de A en limite du modèle). Et à une amplitude donnée, le panel des valeurs d'entrée vérifiant ce comportement est restreint.

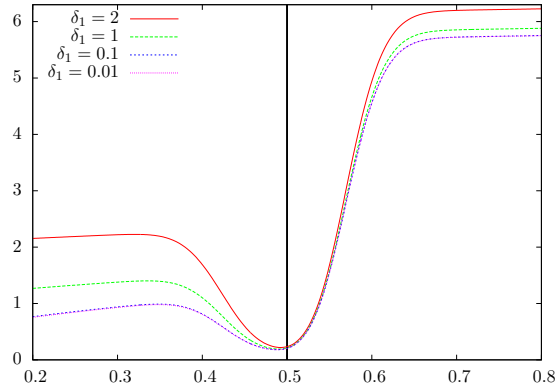


Figure 5.13: Différentes valeurs d'entrée pour l'épaisseur de déplacement δ_1 – Lorsque l'amplitude de la bosse le permet, des épaisseurs de déplacement simulées pour différentes valeurs d'entrée rattrapent la même courbe autour de la bosse. – Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{3} \exp(\frac{-(x-0.5)^2}{2(0.05)^2})$, $J = 800$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, $T = 3$, un profil φ linéaire.

Variation de l'étendue de la bosse

L'amplitude joue donc un rôle dans la formation ou non d'un point de minimum local pour l'épaisseur de déplacement. Nous allons voir ici quel est celui de l'étendue de la bosse caractérisée par l'écart-type de la fonction gaussienne σ . Sur la figure 5.14 sont tracées différentes simulations obtenues pour des valeurs de σ variables. Comme cela était prévisible, la zone prépondérante

de la bosse étant modifiée, un accroissement de σ élargit l'intervalle sur lequel l'épaisseur de déplacement et le terme de friction se distinguent du comportement en racine carrée de la solution de Blasius. Une légère décroissance de l'amplitude de la réponse est aussi observée. Le plus intéressant reste néanmoins que l'extremum local est décalé vers l'amont lorsque l'écart-type augmente, ce qui accroît donc l'avance par rapport au sommet de la bosse. Une fois encore, l'ensemble de ces phénomènes étant gouvernés par la solution de Blasius, un écart-type important ne permet plus d'observer un extremum local mais uniquement un point d'inflexion. C'est pourquoi la figure 5.15 présente les mêmes courbes rescalées par la solution de Blasius. L'avance y est moins spectaculaire de part la monotonie de la solution de Blasius mais il y est plus facile de situer les variations réellement dues à la présence de la bosse.

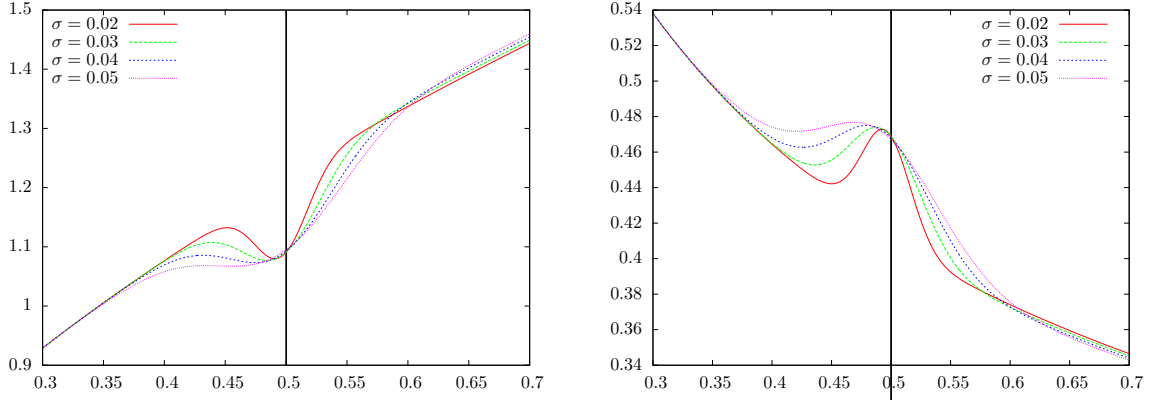


Figure 5.14: Influence de l'étendue de la bosse sur l'épaisseur de déplacement δ_1 (à gauche) et le terme de friction (à droite) – L'étendue de la bosse influe sur la position de l'extremum local des quantités observées. – Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{2\sigma^2})$, $J = 800$, $T = 3$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, un profil φ linéaire.

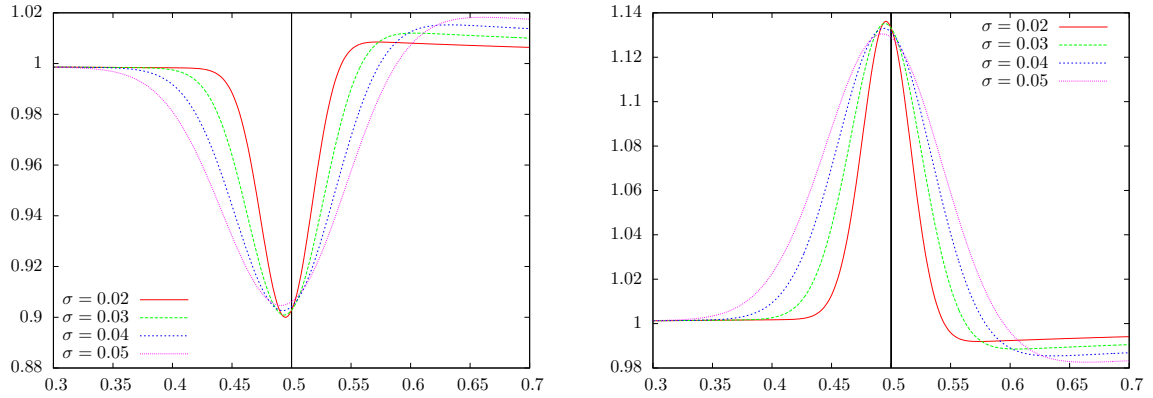


Figure 5.15: Influence de l'étendue de la bosse sur l'épaisseur de déplacement δ_1 (à gauche) et le terme de friction (à droite) rescalés par la solution de Blasius – L'abscisse de l'extremum local est décalé vers l'amont lorsque la largeur de la bosse augmente. – Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{2\sigma^2})$, $J = 800$, $T = 3$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$, un profil φ linéaire.

5.4.4 Influence du profil de vitesse

Dans la section 3.3, nous avons pu voir l'importance primordiale du choix d'un profil de vitesse φ qui permet de fermer le système en reliant les différentes inconnues de l'équation de von Kármán. L'obtention d'un profil polynomial nécessite de prendre en compte les conditions particulières du fluide étudié. Et plus l'ordre du profil est élevé, plus il faut considérer de phénomènes. Aussi,

il paraît naturel que le choix du profil influe sur les solutions du système puisqu'un profil plus raffiné prend plus d'éléments en compte. Comme cela a déjà été évoqué dans la partie 3.3, des profils non polynomiaux peuvent être envisagés prenant en compte l'évolution progressive de la couche visqueuse (voir [39]). Dans les simulations proposées dans les figures 5.16 et 5.17, nous nous sommes cantonnés aux deux profils polynomiaux les plus simples : le profil linéaire et le profil parabolique. Ces profils ont leurs différents paramètres ($\varphi'(0)$, α_2 et H) catalogués dans le tableau 3.1. La figure 5.16 présente l'épaisseur de déplacement obtenue pour ces deux profils. On observe une avance du minimum local obtenu avec le profil parabolique par rapport à celui obtenu avec un profil linéaire. La figure 5.17, fenêtre de gauche, présente la même caractéristique pour le terme de friction τ . Néanmoins cette avance est moins nette pour le terme de frottement que pour l'épaisseur de déplacement. Une fois encore cela s'explique par l'expression $\tau = \frac{u_e \alpha_2 \varphi'(0)}{\delta_1}$, où α_2 et $\varphi'(0)$ sont constants mais u_e est croissant sur l'intervalle $[0; 0, 5]$. La fenêtre de droite de la figure 5.17 contient le tracé des vitesses u_e pour les deux profils et les traits verticaux présents indiquent la position du maximum local des frottements correspondants. L'avance en espace pour l'épaisseur de déplacement δ_1 pour le profil parabolique est amoindri pour τ puisque la vitesse correspondante u_e est, elle, inférieure à celle obtenue pour un profil linéaire.

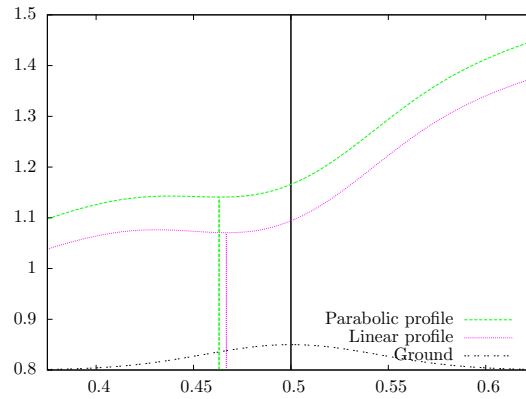


Figure 5.16: Épaisseur de déplacement pour deux profils : linéaire et parabolique— Les deux profils donnent des épaisseurs de déplacement avec le même type de variations. Le profil parabolique induit un minimum local pour l'épaisseur de déplacement δ_1 en avance par rapport à celui obtenu avec un profil linéaire. — Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{2(0.045)^2})$, $J = 800$, $T = 3$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$.

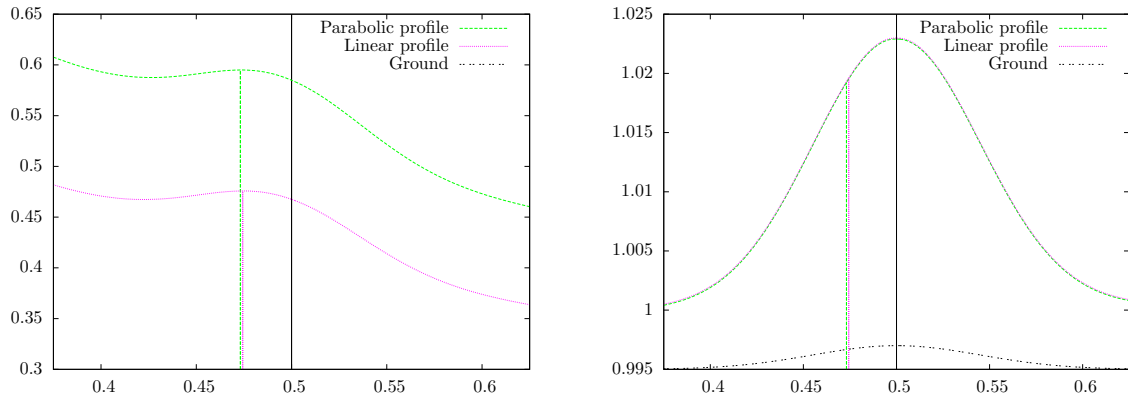


Figure 5.17: Terme de friction (à gauche) et vitesse u_e (à droite) pour deux profils : linéaire et parabolique – L’avance observée pour l’épaisseur de déplacement avec un profil parabolique est conservée mais l’effet est beaucoup visible du fait des variations de la vitesse u_e qui compose le terme de friction. – Simulations faites avec $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{2(0.045)^2})$, $J = 800$, $T = 3$, $\bar{\delta} = 10^{-3}$.

6

Modèles de transpiration et de topographie apparente

Dans le chapitre 4, différentes écritures d'un même modèle ont été présentées mettant en équation deux vitesses : la vitesse de fluide parfait u_e et la vitesse moyennée U . Toutes s'appuyaient sur un couplage entre un fluide visqueux et un fluide parfait à la surface, en utilisant l'équation de von Kármán pour obtenir une fermeture des équations. Dans ce chapitre 6, nous présentons deux modèles qui ne possèdent qu'une seule vitesse pour décrire l'écoulement : la vitesse du fluide parfait u_e . La considération d'un fluide parfait sur le domaine $[f_b; \eta]$ ne peut être compatible avec l'adhérence au fond attendue du fait de la viscosité réelle du fluide. On observe néanmoins que l'écoulement n'est pas très éloigné du résultat d'un écoulement de fluide parfait avec une condition de glissement sur le fond. La linéarisation autour d'un petit paramètre du fluide parfait, où chaque ordre est déterminé en réinjectant dans une couche limite la nouvelle vitesse, se retrouve par exemple dans [17]. Cette technique rejoint aussi le principe de la couche limite interactive (IBL, [40]). Deux modèles sont avancés ici, sans passer par une linéarisation. Les interprétations du second ordre de la linéarisation pour la composante verticale de la vitesse présent dans [17, 40] se retrouvent néanmoins dans les approches exposées ici. Ces formulations, tout comme celles du chapitre 4, exploitent l'équation de von Kármán qui maintient le terme de friction dans les équations.

Pour la première des stratégies, nous nous basons sur le fait que l'incompatibilité entre les équations de Navier-Stokes et un fluide parfait réside dans le type de condition pour le fond : adhérence contre glissement. Nous avançons donc une nouvelle condition au fond pour le fluide parfait. Elle recoupe la condition de glissement lorsque la viscosité n'est pas présente ($\bar{\delta} = 0$) mais contient lorsque $\bar{\delta} \neq 0$ une rectification qui englobe l'effet de la viscosité. Le fluide parfait, avec cette nouvelle condition dite de "transpiration" ou de soufflage, peut alors être considéré pleinement sur le domaine $[f_b; \eta]$.

La deuxième stratégie propose non pas de modifier le type de condition sur le fond mais de changer le fond sur lequel est considéré l'écoulement du fluide parfait. La définition de l'épaisseur de déplacement (3.12) $hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e$, tout comme les ressemblances dans les solutions linéarisées 4.3.2, relie l'épaisseur de déplacement $\bar{\delta}\delta_1$ à un terme de topographie. Aussi pour cette deuxième approche avec un fluide parfait unique, l'écoulement aura lieu sur le domaine $[f_b + \bar{\delta}\delta_1; \eta]$ mais en conservant une condition de glissement classique pour la condition au fond. La trace de la condition de glissement dans les équations intégrées de type Saint Venant contiendra alors la friction liée à la viscosité réelle.

6.1 Modèle avec condition de transpiration

Les écoulements dans des domaines bornés présentent des particularités sur les bords du domaine. Loin des parois, le régime est plus ou moins établi, et peut être bien connu au travers

d'étude asymptotique des équations mais près des parois, les conditions de bord (viscosité du fluide, paroi élastique, bords irréguliers) conduisent à des perturbations localisées de l'écoulement. Ces perturbations, ou les difficultés pour le passage à la limite dans les développements asymptotiques, entraînent notamment des difficultés pour des simulations numériques qui nécessitent un maillage fin sur la zone perturbée [53, 6, 56, 24, 11]. Une solution, y compris pour réduire le temps de calcul, est d'introduire une condition de bord qui contient à elle seule les phénomènes perturbateurs.

Bien que l'observation d'un modèle de Saint Venant modifié se fasse ici en une seule dimension d'espace et qu'alors le gain pour le maillage n'est pas recherché, nous présentons ici un modèle où les effets de la viscosité qui éloignent, près du fond, l'écoulement de celui d'un fluide parfait sont contenus dans une nouvelle condition au fond. Nous considérons donc dans cette partie 6.1 que l'écoulement est un fluide parfait sur la hauteur d'eau naturelle $[f_b; \eta]$. Les fluides parfaits requièrent habituellement une condition de glissement qui est incompatible avec l'adhérence au fond. La démarche présentée ici est donc de construire une nouvelle condition pour la composante verticale de la vitesse qui recoupera la condition de glissement en l'absence de viscosité et qui contient malgré tout l'information inhérente à la couche visqueuse. Cette condition dite de transpiration ou de soufflage a été introduite par Lighthill, 1958 [43] et se retrouve dans l'approximation au second ordre du fluide parfait lors des linéarisations [17, 40].

Le fluide étant considéré comme parfait, l'hypothèse faite ici est l'approximation classique, déjà évoquée dans la section 2.3 et la remarque 3.6, que u_{FP} ne dépend pas de la variable verticale, et ainsi $u_{FP}(t, x, y) = u_e(t, x)$.

Dans la partie 3.1, nous avons décomposé l'étude entre la couche visqueuse portée par les vitesses $(\bar{u}, \bar{v})$ et la vitesse du fluide parfait à la surface $(u_{FP}(t, x, \eta), v_{FP}(t, x, \eta))$. L'obtention de l'équation de von Kármán, permettant de décrire l'évolution de la couche visqueuse, s'est faite à l'aide des conditions de raccord suivantes :

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}) = u_e(\bar{t}, \bar{x}) \quad \bar{\delta} \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}) = v_e(\bar{t}, \bar{x}) - f'_b(\bar{x}) u_e(\bar{t}, \bar{x}).$$

Mais la relation pour la composante verticale de la vitesse n'avait pas eu à être exploitée. Nous allons dans ce qui suit utiliser pleinement cette seconde relation pour établir la condition recherchée pour $v_{FP}(t, x, f_b)$.

Lemme 6.1. *La composante verticale de la vitesse du fluide visqueux évalué à la surface peut s'exprimer, en fonction de la vitesse u_e , de l'épaisseur de déplacement δ_1 comme suit :*

$$\bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}) = \partial_x(u_e \delta_1) - \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}} \partial_x u_e. \quad (6.1)$$

Preuve. L'équation de conservation de la masse dans la couche visqueuse est la seule équation permettant d'obtenir les variations de $\bar{v}$ en fonction de $\bar{y}$:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} &= 0 \\ -\partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) + \partial_{\bar{x}} u_e + \partial_{\bar{y}} \bar{v} &= 0 \end{aligned}$$

Intégrons à présent cette équation entre 0 et $\bar{y}$:

$$\bar{v}(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \partial_{\bar{x}}(u_e - \bar{u}) d\bar{y} - \bar{y} \partial_{\bar{x}} u_e = \partial_{\bar{x}} \left(\int_0^{\bar{y}} (u_e - \bar{u}) d\bar{y} \right) - \bar{y} \partial_{\bar{x}} u_e$$

L'équation (6.1) s'en déduit avec $\bar{y} = \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}$. □

Proposition 6.2. *La condition dite de "transpiration" pour la composante verticale de la vitesse au fond est la suivante :*

$$v_{FP}(t, x, f_b(x)) = \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e) + u_e(t, x) f'_b(x) \quad (6.2)$$

Preuve. Nous nous intéressons à l'équation de continuité pour le fluide parfait :

$$\partial_y v_{FP} = -\partial_x u_{FP}.$$

Or, l'hypothèse de fluide parfait permet d'affirmer que $\partial_x u_{FP} = \partial_x u_e$ ne dépend pas de la variable verticale y . Par conséquent la composante verticale de la vitesse v_{FP} est une fonction linéaire en y qui peut s'écrire comme suit où $b(t, x)$ est une fonction à déterminer :

$$v_{FP}(t, x, y) = -y\partial_x u_e + b(t, x). \quad (6.3)$$

Pour déterminer la fonction $b(t, x)$, et connaître ainsi l'expression de $v_{FP}(t, x, f_b)$, nous allons nous servir de la condition de raccord :

$$v_{FP}(t, x, \eta) = \bar{\delta}\bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\eta - f_b}{\bar{\delta}}) + u_e f'_b.$$

Grâce à l'équation (6.1), cette expression se réécrit :

$$v_{FP}(t, x, \eta) = \partial_x(\bar{\delta}\delta_1 u_e) - (\eta - f_b)\partial_x u_e + u_e f'_b.$$

Comme par ailleurs $v_{FP}(t, x, \eta) = -\eta\partial_x u_e + b(t, x)$, nous obtenons l'expression de $b(t, x)$:

$$b(t, x) = \partial_x(\bar{\delta}\delta_1 u_e) + u_e f'_b + f_b \partial_x u_e.$$

Ainsi en associant cette expression à l'équation (6.3) évaluée sur la fond f_b ,

$$\begin{aligned} v_{FP}(t, x, f_b) &= -f_b \partial_x u_e + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1 u_e) + u_e f'_b + f_b \partial_x u_e \\ v_{FP}(t, x, f_b) &= \partial_x(\bar{\delta}\delta_1 u_e) + u_e f'_b. \end{aligned}$$

□

A présent que la condition de bord à considérer pour prendre en compte les effets de la viscosité a été établie, nous pouvons nous intéresser à l'obtention d'un modèle intégré comme cela a été fait dans le chapitre 4. Nous observons ici un fluide parfait vivant sur toute la hauteur d'eau, où la viscosité ne transparaît que dans le terme de bord en fonction de l'épaisseur de déplacement δ_1 . Nous avons donc tout naturellement deux équations à notre disposition à ce stade :

$$\begin{aligned} \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e &= -\frac{1}{Fr^2}(\partial_x h + f'_b) \\ \partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) &= \tau. \end{aligned}$$

De plus, même si nous présentons un modèle avec un fluide parfait, il nous faut conserver le lien entre cette vitesse de fluide parfait u_e et la vitesse moyenne visqueuse U qui est la vitesse véritable du fluide étudié.

$$hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e.$$

Nous avons donc déjà trois équations pour présenter un modèle en considérant un fluide parfait. La quatrième équation nécessaire utilisée est l'équation intégrée de la conservation de la masse.

Proposition 6.3. *L'équation de conservation de masse sous forme intégrée est :*

$$\partial_t h + \partial_x(hu_e) - \partial_x(\bar{\delta}\delta_1 u_e) = 0. \quad (6.4)$$

Preuve. On part de l'équation de conservation de la masse pour le fluide parfait que l'on intègre entre le fond f_b et la surface η :

$$\begin{aligned} \partial_x u_{FP} + \partial_y v_{FP} &= 0 \\ v_{FP}(t, x, \eta) - v_{FP}(t, x, f_b) &= -\partial_x \left(\int_{f_b}^{\eta} u_{FP} dy \right) + u_{FP}(t, x, \eta)\partial_x \eta - u_{FP}(t, x, f_b)f'_b. \end{aligned}$$

Avec la condition cinématique à la surface et la condition de transpiration (6.2), on obtient :

$$\partial_t \eta + \partial_x \left(\int_{f_b}^{\eta} u_{FP} dy \right) - \bar{\delta} \partial_x (u_e \delta_1) = 0$$

Pour conclure, on utilise le fait que le fond ne dépend pas du temps et que le fluide étant parfait $u_{FP}(t, x, y) = u_e(t, x)$. $\square$

Proposition 6.4. *Le système de quatre équations constitué suivant est pleinement équivalent au modèle (4.11) présenté dans le chapitre 4 :*

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu_e) - \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e) &= 0 \\ \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e &= -\frac{1}{Fr^2} (\partial_x h + f'_b) \\ \partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) &= \tau \\ hU &= (h - \bar{\delta} \delta_1) u_e. \end{aligned}$$

Preuve. La seule distinction est la formulation de l'écriture de l'équation de conservation de la masse. Mais grâce à la relation entre U et u_e , l'équation est strictement la même.

$$\partial_x(hU) = \partial_x(hu_e) - \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e).$$

$\square$

Ce dernier système peut être légèrement modifié, sans perte d'information, afin d'apparaître sous une forme plus similaire aux équations de Saint Venant. Le système complet s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu_e) - \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e) = 0 \\ \partial_t(hu_e) + \partial_x(hu_e^2 + \frac{h^2}{2Fr^2}) - u_e \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e) = -\frac{1}{Fr^2} h f'_b \\ \partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) = \tau \\ hU = (h - \bar{\delta} \delta_1) u_e. \end{cases} \quad (6.5)$$

Preuve. En multipliant l'équation sur u_e par la fonction h , et en travaillant sur la dérivée d'un produit, on obtient

$$\partial_t(hu_e) - u_e \partial_t h + \partial_x(hu_e^2) - u_e \partial_x(hu_e) = -\frac{h}{Fr^2} (\partial_x h + f'_b).$$

L'équation (6.4) donne alors

$$\partial_t(hu_e) + \partial_x(hu_e^2) + u_e \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e) = -\frac{h}{Fr^2} (\partial_x h + f'_b).$$

On retrouve l'équation de conservation du moment de Saint Venant usuelle combinée avec une trace, toujours d'ordre $\bar{\delta}$, de friction contenue dans le terme $u_e \partial_x(\bar{\delta} \delta_1 u_e)$. $\square$

D'un point de vue résolution du système (6.5), seules les trois premières équations ont besoin d'être résolues. La dernière équation représente simplement un pont, à partir de ce modèle, vers la vitesse moyenne du fluide avec sa viscosité. Contrairement au principe de la couche limite interactive [40], ce modèle ne nécessite pas de décomposer les étapes mais propose directement le calcul des inconnues, tout en redonnant la vitesse moyennée U au travers de sa loi d'état.

6.2 Topographie apparente

Comme cela a été évoqué dans l'introduction de la section 6.1, les écoulements présentent des perturbations sur les bords des domaines qui sont coûteuses pour les simulations. La section 6.1 proposait comme alternative un changement de la condition sur le bord. Une autre stratégie, ici équivalente, est de déplacer fictivement les bords du domaine à considérer et de définir une condition de bord effective sur ce nouveau domaine. Cette stratégie, bien que pour l'étude des équations de Navier-Stokes stationnaires sur un fond périodique, s'observe par exemple dans [1]. Des analyses asymptotiques pour des conditions effectives de type Dirichlet ou Navier, là encore sur les équations de Navier-Stokes, se retrouvent dans les travaux de Gérard-Varet, Dalibard et Masmoudi [18, 28]

Le chapitre 4 a été consacré à l'observation d'un fluide visqueux entre le fond réel de l'écoulement f_b et la surface η . Cette étude a mis en avant une hauteur physique liée à l'épaisseur de déplacement $\bar{\delta}\delta_1$ permettant de fermer le système établi. La définition de l'épaisseur de déplacement (3.12), tout comme l'existence d'une solution stationnaire linéarisée établie dans la section 4.3, conduisent à l'étude du problème sous un nouvel angle d'approche. Nous allons ici partir sur l'hypothèse d'un fluide parfait dont le domaine d'étude est délimité par la surface η et un nouveau fond $(f_b + \bar{\delta}\delta_1)$. On notera

$$\mathcal{H}(t, x) = (\eta(t, x) - f_b(x) - \bar{\delta}\delta_1(t, x)) = h(t, x) - \bar{\delta}\delta_1(t, x) \quad (6.6)$$

la hauteur d'eau associée à cette étude. Compte tenu de l'évolution en temps de δ_1 , il nous faut conserver l'équation de von Kármán la décrivant comme l'équation sur u_e (3.10). Le fluide parfait sera désigné par les vitesses u_{FP} et v_{FP} . Nous considérons le fluide comme parfait sur cette hauteur $\mathcal{H}$. Cela se traduit, dans l'approximation usuelle de fluide parfait en eaux peu profondes (voir section 2.3 et la remarque 3.6), par l'invariance selon la variable verticale de composante horizontale de la vitesse u_{FP} . La relation (3.12) nous donne alors $u_{FP}(t, x, y) = u_e(t, x)$ pour tous x, y et t .

Avant de pouvoir obtenir un modèle d'équations intégrées de cet écoulement, semblable pour deux équations à un modèle de Saint Venant, il nous faut déterminer la condition sur le fond. Le fluide étant considéré comme parfait, la condition sur le fond est une condition de glissement. Elle vérifie

$$\vec{U}_{FP} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{quand } y = f_b + \bar{\delta}\delta_1$$

$$\text{avec } \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\delta}\partial_x\delta_1 + f'_b}{\sqrt{1 + (\bar{\delta}\partial_x\delta_1 + f'_b)^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + (\bar{\delta}\partial_x\delta_1 + f'_b)^2}} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{U}_{FP} \text{ le vecteur vitesse du fluide parfait.}$$

Soit

$$\begin{aligned} v_{FP}(t, x, f_b + \bar{\delta}\delta_1) &= u_{FP}(t, x, f_b + \bar{\delta}\delta_1) f'_b(x) + u_{FP}(t, x, f_b + \bar{\delta}\delta_1) \bar{\delta}\partial_x\delta_1. \\ v_{FP}(t, x, f_b + \bar{\delta}\delta_1) &= u_e(t, x) f'_b(x) + \bar{\delta}u_e(t, x) \partial_x\delta_1(t, x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Comme rappelé précédemment, et sur la même approche que pour le modèle avec condition de transpiration, notre étude concerne un fluide observé comme parfait où la viscosité transparait au fond, ici modifié, au travers de l'épaisseur de déplacement δ_1 . Il est ainsi naturel de conserver les deux équations suivantes.

$$\begin{aligned} \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e &= -\frac{1}{Fr^2} \partial_x \eta \\ \partial_t (u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) &= \tau. \end{aligned}$$

Nous devons par ailleurs conserver le lien entre l'écoulement réel avec sa viscosité et l'écoulement de fluide parfait regardé uniquement sur la hauteur $\mathcal{H}$. Il faut donc ajouter à ces deux équations les lois d'état

$$hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e = \mathcal{H}u_e$$

qui caractérisent le va-et-vient entre la vitesse moyenne du fluide sur la hauteur réelle de l'écoulement h , et la vitesse u_e cantonnée à la hauteur $\mathcal{H}$.

Ces équations sont complétées par l'équation intégrée de la conservation de la masse, qui s'écrit en prenant en compte la condition de glissement modifiée à la hauteur $f_b + \bar{\delta}\delta_1$.

Proposition 6.5. *L'équation intégrée de la conservation de la masse s'écrit :*

$$\partial_t \mathcal{H} + \partial_x(\mathcal{H}u_e) + \partial_t(\bar{\delta}\delta_1) = 0. \quad (6.8)$$

Preuve. Pour obtenir cette équation, il nous suffit d'intégrer l'équation de conservation de la masse du fluide parfait sur l'intervalle $[f_b + \bar{\delta}\delta_1; \eta]$.

$$\begin{aligned} \int_{f_b + \bar{\delta}\delta_1}^{\eta} \partial_y v_{FP} dy &= - \int_{f_b + \bar{\delta}\delta_1}^{\eta} \partial_x u_{FP} dy \\ v_{FP}(t, x, \eta) - v_{FP}(t, x, f_b + \bar{\delta}\delta_1) &= - \partial_x \left(\int_{f_b + \bar{\delta}\delta_1}^{\eta} u_{FP} dy \right) \\ &\quad + u_{FP}(t, x, \eta) \partial_x \eta - u_{FP}(t, x, f_b + \bar{\delta}\delta_1) (f'_b + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1)). \end{aligned}$$

Les conditions de glissement (6.7) et de cinématique à la surface (2.30) donnent :

$$\partial_t \eta + \partial_x \left(\int_{f_b + \bar{\delta}\delta_1}^{\eta} u_{FP} dy \right) = 0.$$

Pour conclure, il suffit de se rappeler que $u_{FP}(t, x, y) = u_e(t, x)$ et que le fond f_b ne dépendant pas du temps, $\partial_t \eta = \partial_t \mathcal{H} + \partial_t(\bar{\delta}\delta_1)$. $\square$

Proposition 6.6. *Une fois encore le système d'équations suivant est équivalent au modèle (4.11) présenté dans le chapitre 4 :*

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{H} + \partial_x(\mathcal{H}u_e) + \partial_t(\bar{\delta}\delta_1) &= 0 \\ \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e &= - \frac{1}{Fr^2} (\partial_x h + f'_b) \\ \partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) &= \tau \\ hU &= (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e = \mathcal{H}u_e. \end{aligned}$$

Preuve. De par sa définition, $\mathcal{H} + \bar{\delta}\delta_1 = h$ et $\mathcal{H}u_e = hU$. On retrouve donc exactement l'équation de conservation de la masse du modèle (4.11). Les autres équations étant identiques, les modèles sont bien équivalents. $\square$

Comme précédemment pour le modèle avec condition de transpiration, une réécriture peut être effectuée afin d'observer un système de trois équations intégrées couplées avec une relation d'état permettant de revenir à la vitesse et à la hauteur de l'écoulement visqueux. Ce modèle, dénommé modèle avec topographie apparente pour son lien avec [8, 7], se présente comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{H} + \partial_x(\mathcal{H}u_e) + \partial_t(\bar{\delta}\delta_1) = 0 \\ \partial_t(\mathcal{H}u_e) + \partial_x(\mathcal{H}u_e^2 + \frac{\mathcal{H}^2}{2Fr^2}) + u_e \partial_t(\bar{\delta}\delta_1) = - \frac{1}{Fr^2} \mathcal{H}(\partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b) \\ \partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x \left(\frac{u_e^2 \delta_1}{H} \right) = \tau \\ hU = (h - \bar{\delta}\delta_1)u_e = \mathcal{H}u_e. \end{cases} \quad (6.9)$$

Preuve. L'équation de quantité de mouvement sous sa forme intégrée s'obtient à partir de l'équation sur u_e où le terme h est remplacé à l'aide de l'équation (6.6).

$$\begin{aligned} \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e &= - \frac{1}{Fr^2} (\partial_x h + f'_b) \\ \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e &= - \frac{1}{Fr^2} (\partial_x \mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b) \end{aligned}$$

En multipliant par $\mathcal{H}$ et par un jeu sur la dérivation de produits, l'équation devient

$$\partial_t(\mathcal{H}u_e) - u_e\partial_t\mathcal{H} + \partial_x(\mathcal{H}u_e^2) - u_e\partial_x(\mathcal{H}u_e) = -\frac{1}{Fr^2}(\partial_x\mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b).$$

L'équation (6.8) permet de simplifier cela en

$$\partial_t(\mathcal{H}u_e) + \partial_x(\mathcal{H}u_e^2) + u_e\partial_t(\bar{\delta}\delta_1) = -\frac{\mathcal{H}}{Fr^2}(\partial_x\mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b).$$

On retrouve ainsi bien l'équation de quantité de mouvement proposé dans le modèle (6.9). $\square$

Nous pouvons remarquer dans ce système (6.9) que les deux premières équations sont les équations de Saint Venant sous leur forme sans frottement pour un fond $f_b + \bar{\delta}\delta_1$ et sur une hauteur d'eau $\mathcal{H}$. Malgré cette écriture un terme de friction se dissimule sous la présence de l'épaisseur de déplacement δ_1 dont l'évolution est régie par l'équation de von Kármán. Dans le traitement numérique well-balanced de systèmes comportant un terme source additionnel, on retrouve cette idée que la friction peut s'assimiler à la dérivation d'un nouveau terme de topographie afin que le système soit traité numériquement comme un système de Saint Venant usuel. On peut citer notamment [8, 7, 21] pour une présentation de la méthode. La stratégie est donc inversée puisque ici c'est la donnée initiale d'une topographie modifiée qui fait apparaître ce terme source. Il n'en reste pas moins que cela peut d'autant plus justifier cette approche d'étude d'écoulement visqueux.

Une fois encore, cette étude de l'écoulement au travers d'un fluide parfait avec une topographie apparente permet l'obtention d'un système de quatre équations (6.9) dont la résolution nécessite que les trois premières équations. La dernière équation étant uniquement une loi d'état permettant d'exprimer la vitesse moyenne du fluide, ainsi que sa hauteur physique à partir des quantités obtenues lors de la résolution. Cette formulation peut donc fournir un atout pour le traitement numérique.

De plus, cette écriture particulière du modèle, où l'épaisseur de déplacement δ_1 apparaît dans les équations semblables au système de Saint Venant comme une topographie, permet l'obtention d'une équation d'énergie (voir annexe A) par analogie avec celle du modèle de Saint Venant.

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'établissement d'un modèle étendu de Saint Venant permettant de connaître plus précisément l'effet de la viscosité lors de l'écoulement d'un fluide. Pour se faire, nous nous sommes concentrés sur l'écoulement de fluides Newtoniens incompressibles et en régime laminaire. L'écriture des équations de Navier-Stokes associées à ces écoulements et l'introduction d'une hypothèse d'échelle ondes longues ont permis de mettre en valeur la composante principale de la viscosité et d'obtenir la loi de pression associée. En rappelant les équations de Saint Venant, pour deux types de profils sur la hauteur d'eau, nous avons mis en relief les enjeux de l'intégration des équations de conservation composant les équations de Navier-Stokes. La problématique se concentre sur la fermeture du flux du moment et la compréhension du terme de friction résultant de la contrainte pariétale sur le fond. Sans équations supplémentaires, les inconnues du système de Saint Venant usuel ne peuvent utiliser que des profils des vitesses horizontales définis sur toute la hauteur d'eau tels que le profil plat, hypothèse pour un fluide parfait, ou le profil semi-parabolique de Nusselt (ou demi-Poiseuille).

L'alternative présentée dans cette thèse est d'utiliser la description d'une couche visqueuse couplée avec un écoulement de fluide parfait à la surface. L'observation de l'écart des vitesses visqueuse et de fluide parfait, dont l'équation de von Kármán découle, met en avant deux fonctions moyennées pour décrire l'écart entre la vitesse visqueuse et celle du fluide parfait, et celui entre les moments. Ces deux quantités sont au cœur de l'écriture recherchée du flux du moment. La définition d'un profil de vitesse dans la couche visqueuse permet alors de réduire le nombre d'inconnues et de fermer le système composé de quatre équations. Trois systèmes ont été proposés à ce niveau de l'étude : deux modèles contenant deux équations intégrées semblables au système de Saint Venant mais avec des perturbations d'ordre $\bar{\delta}$ du flux et un terme de frottement porté par $\bar{\delta}$, et un modèle de configuration aérodynamique qui ne contient pas d'équation intégrée de la quantité de mouvement. Le modèle aérodynamique est dans une formulation adaptée pour obtenir rapidement une solution stationnaire linéarisée sur fond plat. Il nous a de plus servi à mettre en évidence les limites du modèle proposé quant à une saturation de l'épaisseur de déplacement.

Les modèles contenant deux équations de type Saint Venant sont propices à une application numérique comparative avec le modèle de Saint Venant usuel. La formulation avec une loi d'état n'étant pas efficace pour attraper les solutions désirées, l'étude numérique s'est focalisée sur la formulation avec quatre lois de conservation. Dans ce cadre, nous avons pu mettre en avant, sous certaines conditions, une hyperbolicité pour le système. Les valeurs propres obtenues ont permis de développer un schéma HLL pour nos équations. Après des comparaisons concluantes entre le modèle de Saint Venant sans frottement et notre modèle étendu, nous avons pu observer numériquement l'apport de ces travaux au regard du terme de friction. En effet, les simulations révèlent un terme friction dont le maximum local est placé en avance par rapport au sommet d'une bosse. Ce phénomène, qui ne s'obtenait pas pour les équations de Saint Venant usuelles, est néanmoins attendu sur le plan physique. Dans un second temps des simulations,

les comportements et variations de l'épaisseur de déplacement et du terme de friction ont été explorés selon des paramètres de forme d'une bosse gaussienne ou selon le profil de vitesse considéré.

Nous avons aussi établi deux autres écritures de système représentant l'écoulement visqueux considéré mais en se focalisant sur la vitesse du fluide parfait introduite pour le couplage avec la couche visqueuse. Ces modèles, écrits à nouveau sous un aspect équations de Saint Venant, mettent en valeur la friction au travers de dérivées sur l'épaisseur de déplacement. Ces systèmes, bien qu'étant composés de quatre équations, ne nécessitent de résoudre que les trois équations de conservation portant sur le fluide parfait, sa hauteur et l'épaisseur de déplacement associée. La quatrième équation est un pont pour revenir à l'expression de la vitesse moyennée visqueuse.

Ces deux formulations sont ainsi une alternative possible pour établir un schéma numérique plus performant. Néanmoins, la valeur propre $\frac{u_e}{H}$ obtenue dans le chapitre 5 reste présente. La question de l'hyperbolicité du système reste donc ouverte lorsque le régime de l'écoulement n'est pas fluvial.

En ce qui concerne l'amélioration du schéma numérique tel qu'il a été développé dans cette thèse, un travail sur les conditions de bords doit être entrepris. Un premier pas serait d'introduire dans le schéma les invariants de Riemann établis, en particulier ceux semblables aux invariants du modèle de Saint Venant.

Le modèle exposé, sous sa formulation actuelle, comporte certaines restrictions : la nécessité de la présence d'un fluide parfait et l'incapacité à simuler un décollement de couche visqueuse dans la partie numérique. Le dernier point requiert d'intégrer au schéma numérique un profil vertical de la vitesse horizontale adaptatif dans l'esprit de celui présenté dans [5]. Comme cela a déjà été évoqué, la présence nécessaire d'un fluide parfait empêche de retrouver des écoulements de Nusselt lors d'un écoulement visqueux établi. Une piste d'amélioration, par une relaxation pour le terme de pression, a été introduite dans la section 4.4 qu'il reste néanmoins à exploiter et à implémenter dans le schéma numérique.

Dans le cadre d'une compréhension plus globale du caractère du modèle présenté, il pourrait être intéressant de poursuivre les efforts concernant l'équation d'énergie présentée dans l'annexe A afin de déterminer si le modèle est toujours dissipatif, comme c'est le cas lorsque le modèle suit la solution de Blasius.

Annexe A

Équation d'énergie

Le modèle de Saint Venant avec frottement sur un fond variable en espace possède une équation d'énergie dont la dissipation éventuelle est pilotée par le terme de frottement τ . Cette équation, où U est la vitesse moyenne et f_b la topographie, s'écrit :

$$\partial_t \left(\frac{hU^2}{2} + \frac{h^2}{2Fr^2} + \frac{hf_b}{Fr^2} \right) + \partial_x \left(U \left(\frac{hU^2}{2} + \frac{h^2}{Fr^2} + \frac{hf_b}{Fr^2} \right) \right) = -U\tau. \quad (\text{A.1})$$

Nous avons pu voir dans la partie 6.2 que le modèle (6.9), où le fluide parfait vit sur une topographie $f_b + \bar{\delta}\delta_1$, présente une structure pour ses deux premières équations identique à celles des équations de Saint Venant pour un fond dépendant du temps. Le terme de friction n'y est pas apparent mais est contenu dans les termes $\bar{\delta}\delta_1$ sur le schéma d'équations de Saint Venant avec topographie apparente [8]. Cette formulation de l'écoulement permet donc d'établir une équation d'énergie très semblable à celle des équations de Saint Venant, où la dissipation est pilotée par les variations de l'épaisseur de déplacement $\bar{\delta}\delta_1$.

Théorème A.1. *Au système (6.9) est associée l'équation d'énergie :*

$$\partial_t \left(\frac{\mathcal{H}u_e^2}{2} + \frac{(\mathcal{H} + f_b + \bar{\delta}\delta_1)^2}{2Fr^2} \right) + \partial_x \left(u_e \left(\frac{\mathcal{H}u_e^2}{2} + \frac{\mathcal{H}(\mathcal{H} + f_b + \bar{\delta}\delta_1)}{Fr^2} \right) \right) = -\frac{u_e^2}{2} \partial_t(\bar{\delta}\delta_1) \quad (\text{A.2})$$

L'énergie $E = \frac{\mathcal{H}u_e^2}{2} + \frac{(\mathcal{H} + f_b + \bar{\delta}\delta_1)^2}{2Fr^2}$ fait apparaître l'énergie cinétique $\frac{\mathcal{H}u_e^2}{2}$ et l'énergie potentielle $\frac{(\mathcal{H} + f_b + \bar{\delta}\delta_1)^2}{2Fr^2}$.

Preuve. Cette équation d'énergie s'établit par la même succession d'opérations que l'équation d'énergie pour les équations de Saint Venant. Elle utilise uniquement l'équation de conservation de la masse et l'équation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{H} + \partial_x(\mathcal{H}u_e) + \partial_t(\bar{\delta}\delta_1) &= 0 \\ \partial_t(\mathcal{H}u_e) + \partial_x(\mathcal{H}u_e^2) + u_e \partial_t(\bar{\delta}\delta_1) &= -\frac{\mathcal{H}}{Fr^2}(\partial_x \mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Afin d'aller plus loin, nous allons tout d'abord écrire la deuxième équation sous sa forme non conservative, tout en utilisant l'équation de conservation de la masse (A.3) pour une simplification.

$$\begin{aligned} u_e(\partial_t \mathcal{H} + \partial_x(\mathcal{H}u_e) + \partial_t(\bar{\delta}\delta_1)) + \mathcal{H}\partial_t u_e + \mathcal{H}u_e \partial_x u_e &= -\frac{\mathcal{H}}{Fr^2}(\partial_x \mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b) \\ \partial_t u_e + u_e \partial_x u_e &= -\frac{1}{Fr^2}(\partial_x \mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b). \end{aligned}$$

En multipliant cette dernière équation par u_e , puis par $\mathcal{H}$ nous obtiendrons un premier morceau de l'équation d'énergie.

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{u_e^2}{2}\right) + u_e^2\partial_x u_e &= -\frac{u_e}{Fr^2}(\partial_x \mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b) \\ \mathcal{H}\partial_t\left(\frac{u_e^2}{2}\right) + \mathcal{H}u_e^2\partial_x u_e &= -\frac{\mathcal{H}u_e}{Fr^2}(\partial_x \mathcal{H} + \partial_x(\bar{\delta}\delta_1) + f'_b)\end{aligned}\tag{A.4}$$

Pour conclure, il suffit d'ajouter à l'équation (A.4) l'équation (A.3) multipliée par l'expression $\left(\frac{u_e^2}{2} + \frac{\mathcal{H} + f_b + \bar{\delta}\delta_1}{Fr^2}\right)$:

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{\mathcal{H}u_e^2}{2} + \frac{\mathcal{H}^2}{2Fr^2} + \frac{\mathcal{H}(f_b + \bar{\delta}\delta_1)}{Fr^2} + \frac{(f_b + \bar{\delta}\delta_1)^2}{2Fr^2}\right) + \partial_x\left(u_e\left(\frac{\mathcal{H}u_e^2}{2} + \frac{\mathcal{H}^2}{Fr^2} + \frac{\mathcal{H}(f_b + \bar{\delta}\delta_1)}{Fr^2}\right)\right) &= -\frac{u_e^2}{2}\partial_t(\bar{\delta}\delta_1) \\ \partial_t\left(\frac{\mathcal{H}u_e^2}{2} + \frac{(\mathcal{H} + f_b + \bar{\delta}\delta_1)^2}{2Fr^2}\right) + \partial_x\left(u_e\left(\frac{\mathcal{H}u_e^2}{2} + \frac{\mathcal{H}(\mathcal{H} + f_b + \bar{\delta}\delta_1)}{Fr^2}\right)\right) &= -\frac{u_e^2}{2}\partial_t(\bar{\delta}\delta_1)\end{aligned}$$

□

La dissipation potentielle d'énergie est donc uniquement influencée par l'évolution en temps de l'épaisseur de déplacement δ_1 . L'équation de von Kármán, qui n'a d'ailleurs pas été utilisée pour obtenir cette équation, doit permettre de comprendre cette évolution. Lors d'un écoulement sur un fond plat, la solution de Blasius-Rayleigh (3.24) vérifie $\partial_t\delta_1 \geq 0$. Nous connaissons donc au moins un cas de figure où le système est dissipatif.

Bibliographie

- [1] Yves Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *Journal of Computational Physics*, 147(1):187 – 218, 1998.
- [2] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6):2050–2065, 2004.
- [3] Emmanuel Audusse, Marie-Odile Bristeau, Benoît Perthame, and Jacques Sainte-Marie. A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for shallow water flows. Derivation and numerical validation. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 45(1):169–200, 2011.
- [4] A.J.-C. Barré de Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences*, 73:147–154, 1871.
- [5] E. Berger, M. Deverge, A. Hirschberg, P.-Y. Lagrée, and C. Vilain. Characterization of the pressure drop in a 2d symmetrical pipe: some asymptotical, numerical and experimental comparisons. *ZAMM*, 85(2):141–146, 2005.
- [6] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, F. Hérau, and G. Vial. On generalized Ventcel’s type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(2):931–945, 2010.
- [7] F. Bouchut, J. Le Sommer, and V. Zeitlin. Frontal geostrophic adjustment and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. II. High-resolution numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 514:35–63, 2004.
- [8] François Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [9] Marc Boutounet, Jérôme Monnier, and Jean-Paul Vila. Multi-Regime Shallow Free-Surface Flow Models for Quasi-Newtonian Fluids. working paper or preprint, January 2013.
- [10] Didier Bresch and Pascal Noble. Mathematical justification of a shallow water model. *Methods Appl. Anal.*, 14(2):87–118, 06 2007.
- [11] Dorin Bucur, Eduard Feireisl, and Šárka Nečasová. Influence of wall roughness on the slip behaviour of viscous fluids. 138(5):957–973, 10 2008.
- [12] J. Burguete and P. García-Navarro. Implicit schemes with large time step for non-linear equations: application to river flow hydraulics. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 46(6):607–636, 2004.
- [13] V. Caleffi, A. Valiani, and A. Zanni. Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels. *Journal of Hydraulic Research*, 41(2):167–177, 2003.

-
- [14] Mathieu Cathala. *Problématiques d'analyse numérique et de modélisation pour écoulements de fluides environnementaux*. Theses, Université de Montpellier, 2013.
- [15] Patrick Chassaing. *Mécanique des fluides*. Cépaduès edition, 2010.
- [16] V.T. Chow. *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill Book Co., 1959.
- [17] Jean Cousteix and Jacques Mauss. *Asymptotic analysis and boundary layers*. Scientific Computation. Springer, Berlin, 2007. With a preface by Jean-Pierre Guiraud, Translated and extended from the 2006 French original.
- [18] Anne-Laure Dalibard and David Gérard-Varet. Effective boundary condition at a rough surface starting from a slip condition. *Journal of Differential Equations*, 251(12):3450 – 3487, 2011.
- [19] Anne-Laure Dalibard and Nader Masmoudi. Phénomène de séparation pour l'équation de prandtl stationnaire. *Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications*, pages 1–18, 2014-2015.
- [20] O. Delestre, C. Lucas, P.-A. Ksinant, F. Darboux, C. Laguerre, T.-N.-T. Vo, F. James, and S. Cordier. SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 72(3):269–300, 2013.
- [21] Olivier Delestre. *Rain water overland flow on agricultural fields simulation*. Theses, Université d'Orléans, July 2010.
- [22] Olivier Delestre, Stéphane Cordier, Frédéric Darboux, and François James. A limitation of the hydrostatic reconstruction technique for Shallow Water equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(13-14):677–681, 2012.
- [23] Olivier Delestre, Stéphane Cordier, François James, and Frédéric Darboux. Simulation of rain-water overland-flow. In *Hyperbolic problems: theory, numerics and applications*, volume 67 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 537–546. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [24] Deborah O. Edmund, Kevin J. Maki, and Robert F. Beck. An improved viscous / inviscid velocity decomposition method. In *In International Workshop on Water Waves and Floating Bodies (IWWF)*, 2011.
- [25] M. Esteves, X. Faucher, S. Galle, and M. Vauclin. Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain: numerical results versus observed values. *Journal of Hydrology*, 228(3-4):265–282, 2000.
- [26] David L. George. *Finite volume methods and adaptive refinement for tsunami propagation and inundation*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2006. Thesis (Ph.D.)—University of Washington.
- [27] D. Gerard-Varet and N. Masmoudi. Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity. *ArXiv e-prints*, May 2013.
- [28] David Gérard-Varet and Nader Masmoudi. Relevance of the slip condition for fluid flows near an irregular boundary. *Communications in Mathematical Physics*, 295(1):99–137, 2010.
- [29] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1):89–102, 2001.
- [30] Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.

-
- [31] N. Goutal and F. Maurel. Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation. Technical report HE-43/97/016/B, Électricité de France, Direction des études et recherches. 1997.
 - [32] R.S. Govindaraju. Modeling overland flow contamination by chemicals mixed un shallow soil horizons under variable source area hydrology. *Water Resources Research*, 32(3):753–758, 1996.
 - [33] P.-M. Guilcher. *Contribution au développement d’une méthode SPH pour la simulation numérique des interactions houle-structure*. Theses, Université de Nantes, 2008.
 - [34] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. CNRS Editions, 2001.
 - [35] Andrew J. Hogg and David Pritchard. The effects of hydraulic resistance on dam-break and other shallow inertial flows. *J. Fluid Mech.*, 501:179–212, 2004.
 - [36] François James, Pierre-Yves Lagrée, and Mathilde LEGRAND. A viscous layer model for a shallow water free surface flow. working paper or preprint, July 2016.
 - [37] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M. G. Velarde. *Falling liquid films*, volume 176 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, London, 2012.
 - [38] D.-H. Kim, Y.-S. Cho, and Y.-K. Yi. Propagation and run-up of nearshore tsunamis with hllc approximate Riemann solver. *Ocean Engineering*, 34(8-9):1164–1173, 2007.
 - [39] Pierre-Yves Lagrée and Sylvie Lorthois. The RNS/Prandtl equations and their link with other asymptotic descriptions: application to the wall shear stress scaling in a constricted pipe. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 43(3-4):352–378, 2005.
 - [40] P.-Y. Lagrée. Interactive boundary layer (IBL). In *Asymptotic methods in fluid mechanics: survey and recent advances*, volume 523 of *CISM Courses and Lectures*, pages 247–286. SpringerWienNewYork, Vienna, 2010.
 - [41] P.-Y. Lagrée, A. Van Hirtum, and X. Pelorson. Asymmetrical effects in a 2D stenosis. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 26(1):83–92, 2007.
 - [42] M.-H. Le, S. Cordier, C. Lucas, and O. Cerdan. A faster numerical scheme for a coupled system modeling soil erosion and sediment transport. *Water Resources Research*, 51:987–1005, 2015.
 - [43] M.J. Lighthill. On displacement thickness. *J. Fluid Mech.*, 4:383–392, 1958.
 - [44] PAOLO LUCHINI and FRANÇOIS CHARRU. Consistent section-averaged equations of quasi-one-dimensional laminar flow. 656:337–341, 008 2010.
 - [45] S. Popinet. Quadtree-adaptative tsunami modelling. *Ocean Engineering*, 61(9):1261–1285, 2011.
 - [46] L. Prandtl. On the motion of fluids with very little viscosity. *Proc. of the Third Intern. Math. Congr. Heidelberg*, 1904.
 - [47] G. L. Richard and S. L. Gavriluk. A new model of roll waves: comparison with Brock’s experiments. *J. Fluid Mech.*, 698:374–405, 2012.
 - [48] J. Rivlin and R. Wallach. An analytical solution for the lateral transport of dissolved chemicals in overland flow. *Water Resources Research*, 31(4):1031–1040, 1995.
 - [49] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Modeling film flows down inclined planes. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 6(2):277–292, 1998.

-
- [50] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 15(2):357–369, 2000.
- [51] H. Schlichting. *Boundary layer theory*. Translated by J. Kestin. 6th ed. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill Book Co., 1968.
- [52] F.T. Smith. Flow through constricted or dilated pipes and channels. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 29:343–376, 1976.
- [53] C. H. Stephens and A. S. Arena. Application of the transpiration method for aeroservoelastic prediction using CFD. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1998.
- [54] K. Stewartson. On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 4:182–198, 1951.
- [55] J. J. Stoker. *Water waves: The mathematical theory with applications*. Pure and Applied Mathematics, Vol. IV. Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London, 1957.
- [56] P. G. Tucker. *Unsteady computational fluid dynamics in aeronautics*, volume 104 of *Fluid Mechanics and its Applications*. Springer, Dordrecht, 2014.
- [57] A. Valiani, V. Caleffi, and A. Zanni. Case study: Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(5):460–472, 2002.
- [58] Milton Van Dyke. *Perturbation methods in fluid mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, Calif., annotated edition, 1975.
- [59] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [60] J. R. Womersley. *An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries*. WADC Technical Report, 1957.

Mathilde LEGRAND

Étude mathématique de modèles de couches visqueuses pour des écoulements naturels

Résumé :

Le système de Saint Venant est répandu pour modéliser des fluides dont la hauteur est inférieure au domaine d'écoulement. Son écriture nécessite des hypothèses sur le profil de vitesse pour connaître le flux de la quantité de mouvement ainsi que le cisaillement sur le fond. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à un couplage entre un fluide parfait et une couche visqueuse dans l'esprit des couches limites interactives (IBL) introduites en aéronautique. Cette interaction nous permet de proposer un terme de friction en adéquation avec les attentes physiques au regard de la position du maximum local. Une part importante de cette thèse est donc consacrée à la compréhension de la couche visqueuse dans laquelle la recherche du profil de vitesse est cantonnée. Cette étude se décompose en l'écriture des équations de Prandtl puis en l'établissement de l'équation de von Kármán. Cette dernière met en jeu les quantités nécessaires à la définition du flux recherché et est donc un élément clé de la fermeture du système. Des résultats numériques viennent illustrer le modèle obtenu par le couplage entre le fluide parfait et la couche visqueuse. Le dernier chapitre expose deux formulations alternatives obtenues d'un point de vue d'un écoulement d'un fluide parfait dont les conditions sur les bords du domaine sont modifiées, soit par une condition de transpiration définie sur le fond, soit par une modification du domaine en lien avec une topographie apparente.

Mots clés : couche visqueuse, équation de von Kármán, épaisseur de déplacement, couche limite, équations de Prandtl, eaux peu profondes, friction, condition de transpiration, topographie apparente, fluide parfait

Mathematical study of viscous layer models for natural flows

Abstract :

Shallow Water system is widely used for flows when the depth is smaller than the longitudinal scale. The establishment needs some hypothesis on the velocity profile in order to describe the moment flux and the shear stress on ground. In this thesis, we present a two layer decomposition of the fluid between an ideal fluid and a viscous layer in the spirit of the Interactive Boundary Layer (IBL) introduced in aeronautics. This interaction leads to obtain in our equations a friction term which fits with the physical expectations for the local maximum. So a major part of this work is interested in the comprehension of the viscous layer where the velocity profile is confined. The study is based on the writing of Prandtl equations then the establishment of the von Kármán equation. The last one contains the necessary quantities for a definition of the researched flux. Also this equation is essential for a closure of the system. Some numerical results illustrate the proposed model with the association of ideal fluid and viscous layer. A last chapter presents two alternatives formulations of the model based on an ideal fluid with modified boundary conditions. The first one keeps the same domain but has a transpiration boundary condition. The second formulation keeps the usual non-penetration condition but observes a new ground on the idea of apparent topography.

Keywords : viscous layer, von Kármán equation, displacement thickness, boundary layer, Prandtl equations, shallow water, friction, transpiration boundary condition, apparent topography, ideal fluid



MAPMO UMR 7349, Fédération Denis Poisson
Université d'Orléans, UFR Sciences Bâtiment de
mathématiques - Route de Chartres B.P. 6759 -
45067 Orléans cedex 2 FRANCE

[logo partenaire]