

**ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE, PHYSIQUE
THÉORIQUE ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES**

LABORATOIRE PRISME

THÈSE présentée par :
Amadou ASSOUMANE

soutenue le : **22 novembre 2018**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE

**Diagnostic des engrenages et des roulements
par une analyse vibratoire en régime variable**

THÈSE dirigée par :

Philippe RAVIER
Edgard SEKKO

Maître de conférences, HDR, Université d'Orléans
Maître de conférences, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Nadine MARTIN
Jean-Luc DION

Directrice de recherche CNRS, Gipsa-Lab, Grenoble
Professeur des Universités, Supmeca Paris

JURY :

Jérôme ANTONI
Lévi ALAM
Nadine MARTIN
Jean-Luc DION
Philippe RAVIER
Edgard SEKKO

Professeur des Universités, INSA Lyon, Président du jury
Professeur des Universités, Université d'Orléans
Directrice de recherche CNRS, Gipsa-Lab, Grenoble
Professeur des Universités, Supmeca Paris
Maître de conférences, HDR, Université d'Orléans
Maître de conférences, Université d'Orléans

« Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue. »

Henri Poincaré, Science et
Méthode (1908)

Remerciements

Mes travaux de recherche se sont déroulés à l'université d'Orléans, plus précisément sur le campus de Chartres, sous la direction de Philippe Ravier et avec le co-encadrement d'Edgard Sekko. Tout d'abord je remercie Philippe Ravier de m'avoir accueilli dans l'équipe de traitement du signal du laboratoire PRISME de l'université d'Orléans et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Ses conseils et ses remarques pertinentes m'ont fait grandir scientifiquement.

Je remercie également Edgar Sekko qui a été à l'initiative de mon sujet de recherche. Il n'a ménagé aucun effort pour l'encadrement de mes travaux. Il a été une grande source d'inspiration de par ses qualités humaines. Je lui exprime toute ma gratitude pour sa disponibilité pendant ses trois années et pour toute la bonté dont il a fait preuve à mon égard.

Je remercie Nadine Martin et Jean-Luc Dion d'avoir bien voulu rapporter sur ma thèse. Ils ont porté un regard critique et constructif sur mon travail. Je les remercie pour toute l'attention qu'ils ont accordé à la lecture de mon manuscrit. Leurs remarques et suggestions constituent des perspectives pour ce présent travail. Je remercie aussi Jérôme Antoni d'avoir présidé le jury de soutenance. Il est une référence pour la communauté internationale du diagnostic des machines tournantes. Au cours de ces trois dernières années, j'ai eu des échanges avec Jérôme qui n'ont cessé d'enrichir ma culture scientifique. Il est une personne d'une sagesse rare avec un esprit éclairé. Je remercie également Lévi Alam d'avoir pris part au jury de soutenance. J'ai passé des moments très agréables au laboratoire grâce à sa bonne humeur.

Durant ces trois années de thèse, j'ai eu l'opportunité de dispenser des enseignements à l'IUT de Chartres. Cela a été une expérience enrichissante tant sur le plan scientifique que personnel. Je remercie toute l'équipe de l'IUT pour leur gentillesse. J'ai une pensée particulière pour Jean-Philippe Blondeau, Julien Roussel,

Florence Catherin, Cécile Capdessus, Thierry Le Grives, Bruno Sohier et Rachelle Sacristain.

Ce mémoire de thèse est le fruit de trois années de travail de recherche. Il n'aurait été abouti sans le soutien indéfectible de mon père Aba et de ma mère Oumou. Ils ont toujours été pour moi un modèle de bonne conduite et de sagesse. Je les remercie et les exprime toute ma profonde gratitude. Ils ont fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui.

J'avoue ici que ces trois années ont été marquées par des moments de doute, d'exaspération et de mélancolie. Benny Manguila a toujours été là pour me soutenir et m'encourager à être optimiste. Elle fait partie de mes plus belles rencontres. Sans elle, je me serai égaré. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

Des moments de solitude et d'isolement, j'en ai vécu comme tout thésard. Sans le soutien indéfectible de mon ami Aboubacar Bagayoko ce mémoire n'aurait probablement jamais vu le jour. Je le remercie de m'avoir encouragé à me surpasser.

Un grand merci à Mme Touré Yaye Samaké, Moussa Bakary Traoré, Achaté Aboudourazakou, Christian Kamdem Jeffreys, Djihed Bensaad et Maciré Keita pour leurs encouragements.

« À mon père *Aba* et à ma mère
Oumou. »

Amadou Assoumane

Table des matières

Table des matières	i
Liste des figures	iii
Liste des tableaux	vi
1 Introduction générale	1
1.1 Contexte général de l'étude	2
1.2 Diagnostic des machines tournantes en régime variable	3
1.3 Organisation de la thèse	11
2 Signal de vibration en régime variable – Modélisation	12
2.1 Introduction	14
2.2 Signaux non-stationnaires	15
2.3 Poursuite d'ordre	16
2.4 Modèle de Vold-Kalman pour la poursuite d'ordre	17
2.5 Modèle d'état du signal de vibration - Base polynomiale	27
2.6 Conclusion	33
3 Estimateur de Kalman et estimateur H_∞	34
3.1 Introduction	36
3.2 Définition d'un estimateur	36
3.3 Estimateur des moindres carrés	38
3.4 Estimateur de Kalman	40
3.5 Estimateur H_∞	46
3.6 Conclusion	57
4 Estimateur H_∞ – Analyse et performance	58
4.1 Exemple 1 : signal de déplacement d'un système dynamique	60

4.2	Exemple 2 : signal de vibration non-stationnaire	73
4.3	Conclusion	84
5	Estimateur H_∞ – Analyse de signaux expérimentaux	85
5.1	Introduction	87
5.2	Diagnostic de l'état des engrenages	87
5.3	Diagnostic de l'état des roulements	95
5.4	Conclusion	113
6	Conclusion générale et perspectives	114
6.1	Conclusion générale	114
6.2	Perspectives	116
Annexe A Procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt		131
Annexe B Estimation H_∞		133
B.1	Démonstration de l'estimation H_∞	133
Annexe C Caractéristiques des défauts de roulement		139

Liste des figures

2.1	Filtre formeur de fonction de transfert $H(z)$	23
2.2		24
2.3	Aperçu des quatre premiers polynômes de la BCO : (a) polynômes de la BCO et (b) leur produit scalaire. Les marqueurs en bleu correspondent à la norme des polynômes et ceux en rouge le produit scalaire entre deux polynômes distincts.	31
3.1	Illustration de la théorie des jeux dans laquelle $x \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$. Le joueur p_1 cherche à maximiser la fonction coût f tandis que le joueur p_2 cherche à minimiser cette fonction coût. Cette stratégie est optimale s'il existe un point selle sur cette fonction coût.	48
3.2	Illustration de l'existence d'un point-selle pour la fonction $f(x, v) = x^2 - v^2$. Le point-selle est $(0, 0)$	49
3.3	Fonction à deux variables qui ne présente pas de point-selle.	49
3.4	Opérateur de transfert décrivant le passage des bruits du modèle et de l'erreur d'initialisation à l'erreur d'estimation.	50
4.1	Système masse-ressort-amortisseur : m pour la masse, k pour la raideur du ressort et c pour le coefficient d'amortissement.	60
4.2	Modèle de génération du signal de mesure.	62
4.3	Spectre du bruit coloré v	62
4.4	Signal synthétique généré avec un RSBe de -5 dB.	64
4.5	Estimation du signal de déplacement par l'estimateur H_∞ et Kalman à partir du signal $y = y_{\text{sim},1}$	67
4.6	Estimation du signal de déplacement par l'estimateur H_∞ et Kalman à partir du signal $y = y_{\text{sim},2}$	68
4.7	Estimation du signal de déplacement par l'estimateur H_∞ et Kalman à partir du signal $y = y_{\text{sim},3}$	69

4.8	Signal synthétique généré : (a) fréquence de rotation f_r , (b) signal de roulement, (c) signal d'engrènement, (d) bruit additif avec un $RSBe = 0$ dB, (e) signal de vibration complet et (f) représentation temps-fréquence du signal complet.	77
4.9	Représentation temporelle de l'estimation de la 1 ^{re} composante d'engrènement par l'estimateur (a) VK et (b) $BCOH_\infty$	80
4.10	Spectre d'amplitude de l'estimation de la 1 ^{re} composante d'engrènement par les estimateurs VK et $BCOH_\infty$	81
5.1	Procédure d'estimation H_∞ de la modulation d'amplitude et de la modulation de phase autour de multiples composantes en régime variable.	89
5.2	Banc d'essai d'analyse vibratoire : -1 Moteur maître, -2 Codeur optique, -3 Accéléromètre, -4 Roue dentée saine, -5 roue dentée saine, -6 Roue dentée défectueuse, -7 Générateur, -8 Variateur de vitesse.	89
5.3	Signal vibratoire expérimental du banc de réducteur. À gauche se trouve le signal vibratoire lorsque l'engrenage est sain et à droite se trouve le signal vibratoire lorsque l'engrenage est défectueux.	91
5.4	Spectre d'ordre des fonctions de modulations autour de la 1 ^{re} composante d'engrènement. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de l'ordre du défaut. Ce dernier est de 1.8750.	93
5.5	Spectre d'ordre des fonctions de modulations autour de la 2 ^e composante d'engrènement. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de l'ordre du défaut. Ce dernier est de 1.8750.	94
5.6	Analyse d'un signal de roulement non bruité : (a) Signal, (b) Spectre classique et (c) SES.	96
5.7	La procédure proposée pour le diagnostic de l'état d'un roulement.	97
5.8	Illustration de la moyenne synchrone.	98
5.9	Approche proposée pour l'estimation du signal déterministe. $\hat{r}$ est l'estimation du signal résiduel après l'extraction de N composantes déterministes grâce à une estimation $BCOH_\infty$	100
5.10	Représentation schématique du réducteur du réacteur d'avion fournie par SAFRAN.	102
5.11	Signal réel de vibration acquis en régime variable sur un réducteur de réacteur d'avion de SAFRAN.	103
5.12	Représentation spectrale : (a) Spectre du signal brut après ré-échantillonnage angulaire et (b) SES du signal brut. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de BPOO.	104
5.13	Fréquences caractéristiques du réducteur référencées par rapport à l'arbre HP [128].	105
5.14	Évolution du kurtosis en fonction de l'ordre du modèle AR.	107

5.15	Estimation des composantes d'engrènement par les estimateurs BCOH_∞ et VK.	108
5.16	Estimation des composantes d'engrènement par la MS, la PL et le cepstre.	109
5.17	SES du signal résiduel fourni par les estimateurs BCOH_∞ et VK. Les traits verticaux en pointillés rouge et vert correspondent respectivement aux harmoniques de BPOO et de de FTO théoriquement évalués.	111
5.18	SES du signal résiduel obtenu par la MS, la PL et le cepstre. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de BPOO théoriquement évalués.	112

Liste des tableaux

4.1	Signaux générés : $y_{sim,1}$ signal de référence, $y_{sim,2}$ avec coloration du bruit v et $y_{sim,3}$ avec coloration du bruit v et perturbation du paramètre α de la matrice F . Le RSB est de -5 dB.	63
4.2	Paramètres d'initialisation et de réglage des estimateurs.	65
4.3	Évaluation quantitative de l'estimateur H_∞ et de Kalman pour différentes valeurs de R et q lorsque $y = y_{sim,1}$, $y = y_{sim,2}$ et $y = y_{sim,3}$ et $RSBe = -5$ dB.	71
4.4	Coefficients de modulation d'amplitude ($\alpha_p^{(i)}$) et de phase ($\beta_p^{(i)}$) et la localisation des bandes latérales dans le domaine des ordres machines ($\lambda_p^{(i)}$).	75
4.5	Paramètres d'initialisation et de réglage des estimateurs.	78
4.6	Comparaison des estimateurs Vold-Kalman et BCO- H_∞ en terme de RSBs avec un $RSBe = 0$ dB.	82
5.1	Les ordres de défaut du roulement localisé sur l'arbre L5. BPOO est l'ordre de passage des billes sur un défaut de la bague externe, BPOI l'ordre de passage des éléments roulants sur un défaut de la bague interne, BSO l'ordre d'un défaut des éléments roulants et FTO l'ordre d'un défaut de cage.	104

Symboles et notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathcal{D}$	Ensemble des échantillons discrets
$E\{\bullet\}$	Espérance mathématique
X^T	Transposé de la matrice X
$x(t)$	Écriture dans le domaine temporel de x
$x(t) * y(t)$	Produit de convolution entre $x(t)$ et $y(t)$
$x(z)$	Transformée en Z de $x(t)$
$x[n]$	Écriture dans le domaine discret de x
j	Nombre complexe tel que $j^2 = -1$
$\bar{x}$	Conjugué du nombre complexe x
$\exp$	Fonction exponentielle
∇	Opérateur de la différence finie
$\partial X / \partial t$	Différentiel de X par rapport à la variable t
$\ \bullet\ _L$	Norme L avec $L = 1, 2, \infty$
$\langle \bullet \rangle$	Produit scalaire
$\Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
$\min(x)$	Minimum du vecteur x
$\max(x)$	Maximum du vecteur x
$\lceil x \rceil$	Partie entière de x
$I_{n \times n}$	Matrice identité de dimension $n \times n$

Acronymes

AR	Auto-Regressive
ARMA	Auto-Regressive Moving Average
BBG	Bruit Blanc Gaussien
BC	Bruit Coloré
BCOH _∞	Base Canonique Orthogonale-H-infini
BPO(F)I	Ball-Pass Order(Frequency) on the Inner-race
BPO(F)O	Ball-Pass Order(Frequency) on the Outer-race
BSO(F)	Ball-Spin Order(Frequency)
dB	décibels
EQM	Erreur quadratique moyenne
FTO(F)	Fundamental-Train order(Frequency)
MA	Modulation d'Amplitude
MP	Modulation de Phase
MS	Moyenne Synchrone
PL	Prédiction linéaire
RSBe	Rapport Signal sur Bruit en entrée
RSBs	Rapport Signal sur Bruit en sortie
sdp	symétrique définie positive
SE	Squared Envelope
SES	Squared Envelope Spectrum
ssi	si et seulement si
TFCT	Transformée de Fourier à Court Terme
VK	Vold-Kalman

CHAPITRE 1

Introduction générale

Sommaire

1.1	Contexte général de l'étude	2
1.2	Diagnostic des machines tournantes en régime variable	3
1.3	Organisation de la thèse	11

1.1 CONTEXTE GÉNÉRAL DE L'ÉTUDE

DEPUIS la révolution industrielle, les systèmes de production se sont automatisés de manière considérable. Peu de tâches se font manuellement et la productivité des industries n'a cessé d'augmenter. Dans cette quête de substitution de l'homme par les machines, ces dernières doivent fonctionner de manière autonome, sûre et fiable. Un dysfonctionnement imprévu peut générer un coût d'arrêt colossal et avoir un impact sur la qualité de la production et/ou sur la sécurité du personnel. Dès lors, les entreprises sont amenées à mettre en place des outils de surveillance permettant d'informer de l'état de fonctionnement des outils de production. Ces outils s'inscrivent dans le cadre d'une politique de maintenance des équipements de l'entreprise. La politique la plus ancienne est celle de la maintenance corrective ou maintenance non planifiée. Elle intervient après la constatation d'une défaillance. Pour prévenir les cas de défaillances, la maintenance préventive systématique est mise en place. Elle se fait selon un calendrier d'intervention de l'équipe de maintenance. Cette approche réduit de manière considérable les risques de défaillances des composants et prolonge leur durée de vie. Cependant, certaines interventions ne sont souvent pas nécessaires et mobilisent l'équipe de maintenance, ce qui accroît ainsi le coût de la maintenance. De plus, certaines défaillances peuvent se manifester avant l'intervention prévue et avoir des conséquences désastreuses sur la production. C'est dans ce contexte que la maintenance préventive conditionnelle a fait son apparition. Elle consiste à planifier les actions de maintenance en se basant sur des grandeurs physiques collectées sur un équipement. Cette technique permet de réduire le coût de la maintenance et le nombre des interventions. Une description détaillée des techniques de maintenance des équipements industriels est exposée dans les travaux de Martin, K. F. [1].

La maintenance préventive conditionnelle repose sur l'exploitation de signaux (mesures physiques) délivrés par des capteurs placés sur les équipements industriels. Ces signaux portent des informations caractéristiques de l'état de fonctionnement d'une machine. Il s'agit donc d'analyser ces signaux et d'en extraire les grandeurs traduisant les symptômes d'un défaut sur la machine. Pour le diagnostic des machines tournantes, la mesure de la vibration est la plus répandue dans la littérature pour révéler un dysfonctionnement potentiel sur les organes mécaniques. En effet, l'apparition de défaut modifie la dynamique de fonctionnement de la machine. Ce changement se reflète par une modification de la signature vibratoire de la machine. Et parmi les différents types de mesure vibratoire, celle de l'accélération est la plus pertinente pour le diagnostic de plusieurs types de défauts [2]. Ainsi, la suite de cette dissertation se limitera à l'analyse du signal accélérométrique fourni par le capteur d'accélération.

Dans l'industrie moderne, les systèmes de production fonctionnent très souvent de manière rotative. Ils sont qualifiés de machines tournantes. Ce sont les moteurs, les génératrices, les pompes, les compresseurs, les ventilateurs, les turbines et les

broyeurs, pour ne citer que ceux-là. Ces machines tournantes, compte tenu de leur géométrie symétrique et de leur mouvement rotatif, génèrent des phénomènes périodiques. C'est le cas pour la plupart des défauts mécaniques sur les machines tournantes comme par exemple le balourd, l'écaillage sur les bagues de roulement ou sur les dents d'un engrenage. Et chaque défaut a une fréquence de répétition qui lui est propre. Le but du diagnostic est d'identifier cette fréquence afin de connaître la nature du défaut.

Durant ces trois dernières décennies, une recherche active fut menée pour analyser le signal vibratoire acquis lors du fonctionnement des machines tournantes en régime stationnaire. Le régime est dit stationnaire lorsque la vitesse et la charge sont constantes. Le signal de vibration acquis sur de telles machines est dit *cyclostationnaire*. De nombreuses techniques ont été développées dans ce cadre. Nous citons, celles basées sur l'analyse spectrale [3,4], l'analyse cepstrale [5], l'analyse cyclostationnaire [6–9], l'analyse d'enveloppe [10], les méthodes paramétriques [11–14] et temps-fréquence [15, 16]. Ces techniques ont été initialement développées avec l'hypothèse que la vitesse et la charge sont constantes. Or, en pratique, ces deux grandeurs présentent de légères voire d'énormes fluctuations. C'est l'exemple typique des éoliennes qui ont une vitesse de rotation influencée par la vitesse du vent et des concasseurs ayant une charge et/ou une vitesse fonctions de la résistance de la roche à concasser. En plus de ce fonctionnement intrinsèque, la surveillance des machines lors des variations de régime, comme les montées en régime ou les arrêts machine, peut révéler des informations plus pertinentes sur l'état de la machine. En effet, certains phénomènes ne se révèlent qu'à des fréquences de résonance bien spécifiques de la machine. La variation du régime peut ainsi amplifier ces résonances et rendre plus visible la manifestation de ces phénomènes. Les signaux de vibrations acquis lors du régime variable sont non-stationnaires. Les techniques précédemment citées pour l'analyse de ces signaux présentent des insuffisances compte tenu des hypothèses requises pour leur mise en œuvre. C'est dans ce contexte que s'inscrit cette thèse. Elle propose un outil original permettant le diagnostic des machines tournantes, plus précisément des engrenages et des roulements, en régime variable.

Dans la section suivante, nous présentons un état de l'art sur le diagnostic des machines tournantes en régime variable.

1.2 DIAGNOSTIC DES MACHINES TOURNANTES EN RÉGIME VARIABLE

Le diagnostic des machines tournantes par analyse vibratoire est une technique de maintenance qui fait partie intégrante de l'industrie depuis plusieurs décennies. Il repose sur l'extraction d'information dans le signal de vibration acquis sur des systèmes mécaniques. Ces derniers ont longtemps été surveillés lors de leur fonctionnement en régime stationnaire. Or, de nombreux systèmes de production (éoliennes, machines d'usinage, broyeurs, concasseurs...) fonctionnent intrin-

sèquement en régime variable. L'analyse des signaux mesurés sur de tels systèmes mécaniques (signaux non-stationnaires) fournit des informations très pertinentes sur leur état de fonctionnement. Depuis peu, l'analyse des signaux de vibration non-stationnaires est devenue une problématique d'intérêt pour la communauté scientifique. Dans cette partie, nous présentons les travaux majeurs réalisés dans ce contexte.

En régime variable, certains auteurs ont exploré la possibilité d'étendre aux signaux non-stationnaires les techniques initialement développées pour analyser les signaux stationnaires. Ils remarquent que lors d'une variation du régime de fonctionnement d'une machine, les phénomènes répétitifs ne sont plus périodiques en fonction du temps, mais en fonction de la position angulaire de l'arbre de rotation. Par conséquent, il est préférable d'avoir les échantillons du signal équidistants dans le domaine angulaire plutôt que dans le domaine temporel [17]. À partir de ce constat, ils proposent d'effectuer un échantillonnage angulaire (angular sampling) [18] ou un ré-échantillonnage angulaire du signal de vibration [19, 20]. Nous parlons d'échantillonnage angulaire lorsque cette opération est effectuée lors de l'acquisition du signal de vibration. Quant au ré-échantillonnage angulaire, il est appliqué sur le signal de vibration acquis dans le domaine temporel. Ces techniques permettent d'obtenir un signal stationnaire en angle permettant de valider l'application de certains outils classiques tels que l'analyse cyclostationnaire. Elles ont montré leur intérêt dans un certain nombre de travaux, et particulièrement pour le diagnostic des moteurs thermiques [21] et celui des roulements et des engrenages [22].

Cependant, le passage du domaine temporel au domaine angulaire affecte la nature cyclostationnaire du signal. Antoni et *al.* fournissent une condition nécessaire sur la cyclostationnarité en angle : le signal est cyclostationnaire si et seulement si la fluctuation de la vitesse de rotation est elle même cyclostationnaire [23]. Par ailleurs, la cyclostationnarité en angle est fortement influencée par la fonction de transfert du système comme le mentionne Stander et Heyns [24]. Ce problème a été également analysé, de manière théorique, par Borghesani et *al.* [25]. Au vu de ces limitations, le concept de *cyclo-non-stationnarité* a été récemment introduit par Antoni et *al.* [26] pour l'analyse des signaux acquis en régime variable. Il repose sur une décomposition du signal de vibration, échantillonné en angle, sur plusieurs cycles machine et considère que les propriétés statistiques du signal varient d'un cycle à un autre. Nous pouvons considérer cette approche comme une généralisation du concept de cyclostationnarité. Elle a fourni des résultats satisfaisants, particulièrement pour la séparation du signal d'engrenage du signal de roulement [27]. Abboud et *al.* ont également exploité la cyclo-non-stationnarité pour introduire l'opérateur de la moyenne synchrone généralisée ou "*Generalized Synchronous Average*". Cet opérateur a été utilisé dans le cadre de l'analyse d'enveloppe du signal de roulement [28]. Les contraintes liées à la dite méthode résident dans la nécessité

d'avoir un nombre d'échantillons important et une faible résolution fréquentielle de la vitesse de rotation. Cette nouvelle approche échoue également lorsqu'il s'agit d'extraire les signaux de modulation contenus dans le signal de vibration des réducteurs planétaires [29].

Par ailleurs, il faut noter qu'en effectuant un ré-échantillonnage angulaire du signal de vibration, nous supposons que tous les phénomènes vibratoires dépendent de la vitesse de rotation. Or, il est bien connu que la résonance d'un organe quelconque d'une machine ne dépend que de ses caractéristiques physiques. Pour les roulements par exemple, le signal généré en présence d'un défaut est caractérisé par une modulation d'amplitude autour de la fréquence de résonance. Un ré-échantillonnage angulaire de ce signal conduit à une mauvaise interprétation de l'état du roulement. En effet, la fréquence de résonance autour de laquelle la démodulation est censée être faite dévient invisible dans le domaine spectral. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire de développer des outils ne faisant aucune hypothèse sur la stationnarité des signaux.

En plus de cela, la résolution spectrale du signal échantillonné en angle est influencée par la vitesse de rotation. En effet, la résolution spectrale est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation. Par conséquent, pour les grandes vitesses de rotation les fréquences caractéristiques de certains défauts montrées sur le spectre d'amplitude peuvent être décalées. Ainsi, les résultats obtenus seront également erronés.

Enfin, l'hypothèse selon laquelle le signal de vibration échantillonné en angle est stationnaire est invalide lorsque le régime de fonctionnement de la machine tournante est variable. En fait, cette procédure permet uniquement d'obtenir des échantillons équidistants dans le domaine angulaire et aussi de conserver les mêmes informations fréquentielles contenues initialement dans le signal temporel. Cependant, en régime variable, la fréquence de rotation génère une modulation d'amplitude variable dans le temps. Cette amplitude reste non-stationnaire dans le domaine angulaire tout comme le signal de vibration.

Plusieurs outils, n'exploitant pas le concept de cyclostationnarité, ont été également appliqués pour l'analyse des signaux de vibration des machines tournantes en régime variable. Ils font partie de deux classes de méthodes : les méthodes non-paramétriques et les méthodes paramétriques. Les premières se réfèrent aux méthodes ne nécessitant pas de connaissance *a priori* du modèle du signal. Dans cette catégorie, nous distinguons les transformations temps-fréquence linéaires (transformée de Fourier à court terme et transformée en ondelettes) et bilinéaires (la distribution de Wigner-Ville).

La transformée de Fourier à court terme fait partie des méthodes temps-fréquence les plus usitées pour l'analyse des signaux non-stationnaires. Elle a déjà eu de nombreuses applications notamment dans la détection de défaut d'engrenage [15] et de roulement [16, 30]. Elle consiste à segmenter le signal avec une fenêtre glissante de largeur fixe et à appliquer la transformée de Fourier sur chaque segment du signal.

Sur chaque segment, le signal est supposé être stationnaire. Pour l'analyse de signaux fortement non-stationnaires ou transitoires (signaux impulsifs par exemple), l'utilisation de la TFCT n'est pas convenable. Son utilisation nécessite également de faire un compromis entre une bonne localisation temporelle et une bonne résolution fréquentielle. Cela est justifié par le principe d'incertitude d'Heisenberg-Gabor.

La transformée en ondelettes a fait son apparition pour améliorer et adapter la résolution temps-fréquence [31]. Elle a été appliquée pour l'analyse des signaux d'engrenage [32–34] et des signaux de roulement [35, 36] en régime variable et des machines tournantes de manière générale [37]. A la différence de la TFCT qui utilise une base sinusoïdale, la transformée en ondelettes comme son nom l'indique utilise une base de fonctions d'ondelettes ayant une fréquence variable. Elle permet d'obtenir une bonne résolution fréquentielle en basse fréquence et une meilleure localisation temporelle en haute fréquence. Plusieurs bases d'ondelettes ont été proposées dans la littérature. Les bases couramment utilisées sont celles de Morlet, du Chapeau Mexicain, de Haar, etc. Chacune d'entre elles présente ses avantages et ses inconvénients. Le choix d'une base au détriment d'une autre reste la difficulté majeure que présente l'utilisation de la transformée en ondelettes [38].

Quant aux transformations bilinéaires, elles ont été développées pour pallier la faible résolution temps-fréquence des transformées linéaires [39]. Elles représentent la distribution de l'énergie du signal dans le domaine temps-fréquence. La distribution de Wigner-Ville est sans doute la plus populaire des distributions temps-fréquence. Elle ne requiert aucune fenêtre d'observation du signal et fournit ainsi la plus haute résolution temps-fréquence parmi les méthodes de distribution temps-fréquence. Cet avantage a conduit à son application pour le diagnostic de défaut d'engrenages [40–44] et de défaut de roulements [45]. Malgré les résultats intéressants obtenus, la transformée de Wigner-Ville présente des inconvénients pour l'analyse des signaux à composantes multiples. En effet, elle fait apparaître des termes d'interférences difficiles à interpréter et qui masquent l'information utile dans le signal.

En résumé, les méthodes temps-fréquences souffrent (i) d'une faible résolution temps-fréquence, (ii) d'apparition de termes d'interférences et (iii) de difficultés à analyser les signaux contenant des fréquences très proches (closed terms) et/ou des fréquences qui se croisent (cross terms). Pour plus de détails sur les méthodes d'analyse temps-fréquence en analyse vibratoire, le lecteur pourra se référer au travail bibliographique de Feng et *al.* [38].

Il est important de notifier que les méthodes temps-fréquence utilisées individuellement ne permettent pas de reconstruire la forme d'onde d'une composante fréquentielle spécifique; en d'autres termes, leur transformée inverse est difficilement calculable. Dans l'industrie automobile ou aéronautique, des techniques de poursuite d'ordre sont exploitées pour la détection d'éventuelles anomalies

sur les machines tournantes. Elles consistent à estimer une ou plusieurs composantes fréquentielles d'intérêt. Connaissant ces composantes, des analyses spécifiques peuvent être élaborées pour le diagnostic telles que l'analyse de la fonction d'auto-corrélation ou l'analyse d'enveloppe. Les méthodes temps-fréquence échouent donc dans ces types d'applications. La poursuite d'ordre par la transformée de Gabor (*Gabor Order Tracking*) proposée par Shie Qian et *al.* [46] permet de pallier cette limitation. Elle repose sur la transformée de Gabor introduite par Denis Gabor [47] et l'utilisation d'un masque pour extraire la composante d'intérêt. C'est l'une des rares méthodes à combiner une transformation temps-fréquence et une technique de poursuite d'ordre. Elle a l'avantage d'offrir la possibilité d'extraire des composantes multiples dans un signal complexe avec une très bonne résolution temps-fréquence. L'inconvénient de la technique est qu'elle fournit de mauvaises performances lorsque les composantes sont très proches les unes des autres ou lorsque celles-ci se croisent [48].

Les méthodes paramétriques, quant à elles, sont peu répandues en analyse vibratoire. Elles s'appuient sur un modèle mathématique du signal de vibration à analyser. En analyse vibratoire, il est commode de faire appel à une représentation d'état du signal de vibration. C'est une approche qui consiste à modéliser, par une variable d'état, les paramètres d'intérêt du signal, principalement la composante fréquentielle, son amplitude et sa phase. Sur la base de cette représentation du signal, les méthodes paramétriques consistent à mettre en œuvre un estimateur de la variable d'état permettant de reconstruire la composante fréquentielle ou d'estimer son amplitude et sa phase.

Dans le cadre de l'analyse vibratoire en régime variable, Vold et *al.* furent les premiers à introduire un estimateur de la variable d'état. Ils proposent en 1993 l'estimateur de Vold-Kalman de première génération (VK-I) [49] pour l'estimation d'une ou plusieurs composantes fréquentielles du signal de vibration. Cet estimateur est obtenu par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Pour la représentation dans l'espace d'état du signal de vibration, Vold et *al.* modélisent chaque composante fréquentielle comme la réponse vibratoire d'un système masse-ressort excité par un '*bruit blanc Gaussien*' et oscillant à la fréquence de la composante. Cette modélisation est bien justifiée en dynamique où la masse et le ressort sont l'un des systèmes élémentaires permettant d'étudier le comportement vibratoire des machines. Ils supposent aussi que le bruit de mesure est blanc, Gaussien et de variance connue. Parmi les applications de cet estimateur, nous recensons celle de la séparation des composantes d'engrènement des composantes de résonances présentes dans un signal acoustique d'une mobylette électrique [50].

Pour le diagnostic de nombreux défauts, ce sont la modulation d'amplitude et de phase des composantes fréquentielles, appelées *les enveloppes*, qui sont très souvent analysées. En effet, elles représentent généralement une signature vibratoire de plusieurs défauts, notamment celui des roulements et des engrenages. Ces

derniers se manifestent respectivement par une modulation d'amplitude autour de la fréquence de résonance et/ou autour des fréquences d'engrènement. Et l'estimation de ces modulations à partir de la composante fréquentielle génère d'importantes erreurs dues à l'apparition d'effet de bord sur les estimés [49]. Ainsi, pour une estimation directe de l'amplitude et de la phase d'une composante quelconque, Vold et *al.* proposent l'estimateur de Vold-Kalman de deuxième génération (VK-II) [51, 52]. Pour sa mise en œuvre, le bruit de mesure est supposé une fois de plus être '*bruit blanc Gaussien*' de variance connue. L'enveloppe de chaque composante fréquentielle est également modélisée comme la réponse d'un filtre formeur excité par un '*bruit blanc Gaussien*' de variance connue. Ils considèrent un filtre d'ordre deux et choisissent ses coefficients en supposant que l'enveloppe à estimer varie de manière lisse. Pour les signaux vibratoires acquis en régime variable, le choix de ce type de filtre formeur ne semble pas être approprié. En effet, ces signaux sont fortement non-stationnaires et présentent des modulations d'amplitude et de phase ayant une forte dynamique. En présence d'un défaut d'engrenage – un écaillage par exemple – les composantes d'engrènement sont modulées en amplitude et en phase par un train d'impulsions. Pour le cas d'un défaut de roulement, la fréquence de résonance de sa structure est excitée et modulée par un train d'impulsions. La modulation d'amplitude que ce soit autour de la fréquence d'engrènement ou de la fréquence de roulement est caractérisée par une forte dynamique de variation. En plus de cela les bruits ne sont pas toujours blancs Gaussiens avec des paramètres statistiques connus. Par exemple, dans le cadre de la détection d'un défaut de roulement le bruit de mesure est constitué d'une série d'impulsions. Le bruit de mesure peut être aussi contaminé par des composantes déterministes non prises en compte dans la représentation d'état du signal de vibration. Nous rencontrons cette situation dans l'industrie automobile ou aéronautique où une technique de poursuite d'ordre est effectuée en fin de production. Le but est d'estimer l'amplitude d'une ou plusieurs composantes fréquentielles. Celles qui ne sont pas d'intérêt sont considérées faisant partie du bruit de mesure. Aussi, pour l'estimation du signal aléatoire d'intérêt, contenant la contribution du signal de roulement, la suppression des composantes déterministes du signal de vibration est une étape nécessaire. En général, ce processus se fait de manière progressive jusqu'à la suppression complète des composantes déterministes. Avant la suppression complète, le signal résiduel, identique au bruit de mesure, est pollué par les composantes non modélisées. L'utilisation de l'estimateur VK-II dans de telles situations conduit à une infiltration des composantes déterministes. Par conséquent, l'erreur d'estimation du signal aléatoire est amplifiée.

Malgré ces limitations, l'estimateur VK-II a été exploité pour la détection de certains types de défauts : les ratés de combustion sur un moteur Renault à quatre cylindres et le balourd d'un rotor [53] ainsi que le défaut d'engrenage et le défaut d'ailettes sur la roue d'un turbomoteur [54]. Il a aussi montré son aptitude à extraire des composantes ayant des fréquences très proches ou des fréquences qui se

croisent ou des fréquences liées à des arbres indépendants à partir de signaux synthétiques [55–57] et de signaux réels d’engrenages [58]. Récemment, l’estimateur VK-II a été utilisé pour le diagnostic de défaut d’engrenage [60–62] et de roulement en régime variable [63].

Toujours est-il qu’il n’existe aucun fondement théorique permettant de garantir l’optimalité des résultats obtenus.

La modélisation de l’enveloppe du signal et le choix d’un estimateur ne faisant aucune hypothèse sur la nature statistique du bruit est donc un véritable défi. L’objectif de cette thèse est d’apporter des solutions pour pallier les limitations de l’estimateur VK.

Dans cette optique, nous proposons, dans un premier temps, une modélisation de l’enveloppe du signal de vibration grâce à une approximation polynomiale. Cette approximation permettra de mieux tenir compte de la variation fortement non-linéaire de l’enveloppe. Les polynômes proposés forment une famille de polynômes linéairement indépendant de la base canonique orthogonale. Le choix de polynômes orthogonaux est motivé par le fait qu’ils garantissent une décomposition unique et permettent de découpler les paramètres de l’estimation. Ensuite, nous présentons la synthèse d’une estimation H_∞ des coefficients du polynôme d’approximation. L’estimateur ainsi mis en œuvre sera appelé dans cette thèse ‘l’estimateur BCOH $_\infty$ ’.

A la différence de l’estimateur VK qui résulte d’une minimisation du carré de l’erreur d’estimation, l’estimateur proposé exploite une stratégie d’optimisation *minimax*. Cette stratégie conduit à la minimisation de l’erreur d’estimation pour la pire des amplifications possibles des bruits du modèle d’état. Dans cette approche, aucune connaissance a priori de la distribution et des propriétés statistiques des bruits n’est requise. Une autre caractéristique intéressante de l’approche H_∞ est qu’elle est moins sensible aux incertitudes de modèle. Elle permet de garantir une estimation optimale lorsque les matrices dynamiques du modèle d’état décrivant le signal de vibration sont connues avec des incertitudes. Finalement, l’estimateur H_∞ est conçu pour tenir compte de toutes les incertitudes possibles sur le modèle du signal. C’est pour cette raison qu’il est souvent qualifié d’estimateur pour ‘le pire des cas’.

Des travaux ont été déjà menés sur l’approche H_∞ dans le domaine du traitement de la parole [65, 66] et en automatique [67]. Ils montrent la robustesse de cet estimateur par rapport à celui de Kalman.

Pour les cas stationnaires, Grimbale et Sayed [68] ont remarqué que l’estimateur H_∞ minimise le pic de la densité spectrale de l’erreur d’estimation sur toute la bande de fréquences alors que les estimateurs de type H_2 , tels que celui de Kalman, minimisent la densité spectrale moyenne de l’erreur. Ils ont montré que l’estimateur H_∞ garantit une erreur minimale dans toute la bande de fréquences. D’un autre côté, l’estimateur de Kalman fournit une erreur minimale uniquement dans la région

d'intérêt et amplifie l'erreur dans les régions qui n'ont pas été sélectionnées dans le processus d'estimation. C'est le cas de l'analyse du signal de vibration lorsque

certaines composantes déterministes n'ont pas été modélisées. Dans cette thèse, nous étendrons les résultats obtenus sur le H_∞ dans le cadre stationnaire au cadre non-stationnaire.

Bien que cette approche puisse s'étendre à de nombreuses problématiques en analyse vibratoire, nous nous intéressons dans ce travail principalement au diagnostic de défaut de roulement et d'engrenage en régime variable.

1.3 ORGANISATION DE LA THÈSE

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres. Le *deuxième chapitre* présente les bases théoriques pour la modélisation du signal de vibration non-stationnaire dans l'espace d'état. Il constitue un pré-requis nécessaire pour la compréhension de cet exposé. Dans un premier temps, nous exposons le modèle d'état de Vold-Kalman. Ensuite, nous présentons l'approche que nous proposons pour modéliser l'enveloppe des composantes fréquentielles du signal de vibration. Cette dernière consiste à projeter l'enveloppe du signal de vibration sur la base polynomiale orthogonale. Cette base est obtenue après une orthogonalisation par la procédure de Gram-Schmidt de la base canonique des puissances du temps.

Dans le *troisième chapitre*, nous présentons deux estimateurs de l'enveloppe des composantes fréquentielles à partir de la représentation du signal vibratoire dans l'espace d'état. Le premier estimateur repose sur une approche des moindres carrés. Il consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne et conduit au fameux estimateur récursif de Kalman. Le deuxième repose sur une optimisation *minimax*. Une telle optimisation minimise le maximum de l'erreur d'estimation et permet une meilleure prise en compte des spécificités du modèle du signal vibratoire. Cette approche conduit à une estimation de type H_∞ . Cette dernière sera introduite dans ce chapitre grâce à la théorie des jeux. Dans le même chapitre, nous proposons également un algorithme de réglage des paramètres de l'estimateur H_∞ . Ce réglage permet d'atteindre la limite de la stabilité de l'estimateur H_∞ .

Dans le *quatrième chapitre*, nous validons l'approche que nous proposons sur des signaux synthétiques. Le premier signal décrit la vibration d'un système masse-ressort-amortisseur en régime stationnaire. Il permettra d'évaluer la sensibilité des deux estimateurs aux incertitudes de modèle. Le deuxième signal décrit la vibration d'un réducteur à engrenage fonctionnant en régime variable. Nous exploitons ce signal pour analyser la performance des estimateurs VK et $BCOH_\infty$ à estimer une composante déterministe modulée en amplitude et en phase et noyée parmi plusieurs autres composantes.

Le *cinquième chapitre* est dédié à l'application de l'estimateur $BCOH_\infty$ à des signaux réels de vibration. Dans la première application nous exploitons l'estimateur $BCOH_\infty$ comme un outil de démodulation dans le cadre de la détection de défaut d'engrenage en régime variable. Dans la seconde application, nous l'exploitons pour la séparation des composantes déterministes des composantes aléatoires ceci dans le but de faire le diagnostic d'un système de roulement.

CHAPITRE 2

Signal de vibration en régime variable – Modélisation

DANS ce chapitre, nous présentons différentes approches permettant de décrire le signal de vibration non-stationnaire dans l'espace d'état. Tout d'abord, les modèles de Vold-Kalman sont décrits tout en discutant leurs avantages et inconvénients. Ensuite, nous décrivons en détail la nouvelle approche basée sur une modélisation polynomiale de l'enveloppe des composantes fréquentielles du signal de vibration. La famille des polynômes exploitée pour cette modélisation forme une base orthogonale. Cette dernière est obtenue après une procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt de la base canonique fonction des puissances du temps.

Sommaire

2.1	Introduction	14
2.2	Signaux non-stationnaires	15
2.3	Poursuite d'ordre	16
2.4	Modèle de Vold-Kalman pour la poursuite d'ordre	17
2.4.1	Vold-Kalman de 1 ^{re} génération	18
2.4.2	Vold-Kalman de 2 ^e génération	21
2.5	Modèle d'état du signal de vibration - Base polynomiale	27
2.5.1	Propriétés d'une base polynomiale	28
2.5.2	Projection de l'enveloppe complexe sur une base polynomiale	29
2.5.3	Exemples de bases polynomiales	30
2.6	Conclusion	33

2.1 INTRODUCTION

En traitement du signal, plusieurs problèmes a priori différents peuvent être formulés soit comme (i) un problème de prédiction des signaux, (ii) un problème de séparation des signaux ou (iii) un problème de détection de signaux de trajectoire connue [69]. Ces problèmes forment en réalité un et un seul problème que nous appelons ici "estimation". En effet, la prédiction consiste à estimer l'état futur d'un système. Le problème de séparation apparaît lorsque le signal de mesure est une combinaison (linéaire/non-linéaire) de plusieurs signaux ; certains portant l'information et d'autres pas. Dans beaucoup d'applications, la séparation de ces signaux est nécessaire. Quant à la détection, elle consiste à estimer une grandeur caractéristique d'une information utile et à distinguer la présence de cette information de son absence à partir d'un seuil.

Dans ce contexte, considérons le signal mesurable $y(t) = s(t) + v(t)$ dans lequel $s(t)$ est le signal d'intérêt et $v(t)$ est le signal sans intérêt souvent qualifié de bruit. Dans la théorie de l'estimation optimale (au sens des moindres carrés), le but est de mettre en œuvre un estimateur du signal $s(t)$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQM).

La première méthode établie dans la littérature de l'estimation optimale est la méthode des moindres carrés. Cette dernière a été introduite, selon un consensus général, par Carl Friedrich Gauss en 1795. Elle permet d'obtenir une estimation sans faire d'hypothèses sur la nature du bruit. Elle a l'avantage d'être simple d'utilisation. Néanmoins, elle présente certains inconvénients, notamment sa sensibilité au niveau du bruit et la présence de singularités dans l'estimation pour des signaux fortement non-stationnaires.

Robert Wiener propose quant à lui de mettre en œuvre un filtre par une approche statistique. Il détermine la fonction de transfert du filtre dans le sens des moindres carrés. La détermination de cette fonction conduit aux fameuses équations de Wiener-Hopf. Ces dernières dépendent de la fonction d'auto-corrélation du signal et du bruit [70]. L'approche de Wiener nécessite que le signal bruité et le signal d'intérêt soient stationnaires au sens large du terme. Cette stationnarité est nécessaire pour la détermination de la fonction de transfert du filtre. En pratique, son utilisation requiert une connaissance a priori des fonctions d'auto-corrélation du signal d'intérêt et du bruit.

Rudolf Emil Kalman propose de décrire le problème d'estimation par un système dynamique linéaire [69] décrit dans un modèle d'espace d'état. Le modèle d'état, pour un système dynamique linéaire continu, s'écrit sous la forme d'un système à deux équations telles que

$$dx(t)/dt = F(t)x(t) + w(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = h(t)x(t) + v(t) \quad (2.2)$$

dans lesquelles $\mathbf{x}(t)$ est la *variable d'état* et $\mathbf{w}(t)$ le *bruit d'état*. $\mathbf{F}(t)$ et $\mathbf{h}(t)$ sont les matrices dynamiques du système. Nous reviendrons plus tard sur la définition de ces matrices. L'un des avantages du modèle d'état est qu'il offre la possibilité de décrire la dynamique aussi bien d'un signal stationnaire que celle d'un signal non-stationnaire.

Le problème de l'estimation avec une approche utilisant le modèle d'état est formulé comme suit :

«Connaissant les matrices dynamiques $\mathbf{F}(t)$ et $\mathbf{h}(t)$, l'estimation du signal $s(t)$ revient à l'estimation de la variable d'état $\mathbf{x}(t)$.»

La difficulté avec les approches utilisant le modèle d'état réside principalement dans la définition des matrices dynamiques et plus particulièrement de la matrice $\mathbf{F}(t)$. Dans ce chapitre, nous décrivons différentes approches permettant de décrire le signal de vibration dans l'espace d'état. Ces approches nous permettront de définir les matrices $\mathbf{F}(t)$ et $\mathbf{h}(t)$.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous discutons tout d'abord dans la section suivante de la notion de signaux non-stationnaires et de la difficulté liée à leur analyse.

2.2 SIGNAUX NON-STATIONNAIRES

La connaissance de la nature d'un signal est déterminante dans le cadre de son traitement (filtrage, extraction d'information, représentation ...). En effet, la plupart des outils de traitement du signal ont été développés dans des contextes bien spécifiques. Dans la théorie des signaux et des systèmes, nous distinguons principalement des signaux stationnaires et des signaux non-stationnaires. Un signal est dit stationnaire lorsque son contenu fréquentiel est indépendant de la variable du temps. Lorsque ce contenu varie, le signal est dit non-stationnaire et sa densité spectrale de puissance est fonction de la fréquence et du temps. La non-stationnarité est un caractère sous-jacent pour la plupart des processus physiques. La vibration des machines tournantes en est un exemple illustratif. La non-stationnarité de ces signaux se manifeste lorsque la vitesse de rotation et/ou la charge des machines est variable. Parmi les systèmes mécaniques qui ont ce comportement, nous pouvons citer les éoliennes, les machines de l'industrie minière ou les servomoteurs pour les systèmes d'emballages.

Selon Randall, la vitesse de rotation des éoliennes peut avoir une variation de $\pm 33\%$ autour d'une valeur moyenne [79]. En ce qui concerne le phénomène de variation de la charge, il est très fréquent dans les industries minières. Par exemple, les excavateurs délivrent un couple variable en fonction de la profondeur et du type de sol à creuser [80]. Les broyeurs ont aussi leur couple variable en fonction de la résistance des roches à écraser. Lors de ces variations de couple, la vitesse de rotation varie également et génère ainsi un signal non-stationnaire. Sur les mo-

teurs à combustion également, plusieurs phénomènes transitoires se produisent à chaque cycle du moteur. Le signal décrivant ces phénomènes transitoires est non-stationnaire [26].

Dans les rares cas où la vitesse de rotation est supposée être constante, elle fluctue en réalité autour d'une valeur moyenne. Dans ce cas, nous parlons de signal quasi-stationnaire. En réalité, la notion de stationnarité au sens strict du terme permet rarement de décrire les processus physiques dans leur globalité. Or, la plupart des méthodes qui existent dans le cadre de l'analyse vibratoire jusqu'à tout récemment repose sur une hypothèse de stationnarité du signal de vibration. Cette hypothèse n'est pas valable dans le cadre du diagnostic des machines tournantes par analyse vibratoire en régime variable. La meilleure stratégie pour lever ce verrou est de mettre en œuvre des outils spécifiques pour l'analyse des signaux non-stationnaires.

D'un point de vue mathématique, un signal est dit non-stationnaire lorsque ses moments statistiques varient au cours du temps. Pour être précis, cela stipule que les moments varient d'une réalisation à une autre. À présent, définissons les deux premiers moments statistiques – la moyenne et l'auto-corrélation – exprimés respectivement par :

$$\mu(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)f(x(t))dx(t) \quad (2.3)$$

$$r(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x(t_2)f(x(t_1), x(t_2))dx(t_1)dx(t_2) \quad (2.4)$$

avec $x(t)$ le signal, considéré ici comme une variable aléatoire, fonction de la variable du temps t , $E\{. \}$ l'espérance mathématique et $f(.)$ la fonction de la densité de probabilité de x . Dans le cas Gaussien, les statistiques d'ordre 1 et 2 suffisent pour déterminer la nature statistique d'un signal. Lorsque la moyenne statistique du signal x dépend du temps, le signal est non-stationnaire à l'ordre 1 et caractérise un processus physique ayant une évolution déterministe. L'engrènement entre deux roues dentées traduit bien ce type de processus. Dans le cas où l'auto-corrélation dépend du temps, le signal est non-stationnaire à l'ordre 2 et présente une évolution aléatoire. Cette situation est typique des phénomènes de passages d'éléments roulants sur une piste de roulement et des phénomènes d'usure.

Dans le cadre de l'analyse vibratoire, une des approches très répandues pour l'analyse des signaux non-stationnaires est la poursuite d'ordre (*Order tracking* en anglais). Dans la section qui suit nous apportons une définition à la notion de poursuite d'ordre et présentons quelques unes de ses applications.

2.3 POURSUITE D'ORDRE

La poursuite d'ordre est une méthode très répandue dans l'industrie pour le diagnostic des machines tournantes. Elle consiste à estimer l'amplitude et la phase

d'une ou plusieurs composantes fréquentielles connaissant la fréquence de rotation de la machine. La fréquence de rotation est appelée '*ordre basique*' et l'ordre '*X*' (qui peut être un nombre entier ou décimal) d'une composante est le rapport entre sa fréquence fondamentale et la fréquence de rotation.

Dans de nombreuses applications, la poursuite d'ordre est nécessaire pour l'analyse des signaux vibratoires non-stationnaires. La dite méthode est par exemple utilisée pour le diagnostic des moteurs en fin de production et est d'un intérêt majeur pour l'industrie automobile. Elle est exploitée pour détecter des ratés d'allumage des moteurs à combustion [53]. Les ratés d'allumage sont des difficultés de démarrage ayant plusieurs causes : câbles de connexion débranchés, usure de pistons, mélange air/carburant ... La poursuite d'ordre, dans ces situations, va consister à estimer l'amplitude de composantes fréquentielles bien spécifiques.

Dans la littérature nous recensons également des techniques de poursuite d'ordre utilisant la TFCT [81], l'expansion de Gabor [46, 48] ou la '*Speed transform*' [82]. Les deux premières techniques ne permettent que d'estimer des composantes fréquentielles faiblement modulées en amplitude et/ou en phase. En ce qui concerne la dernière, elle n'est valable que lorsque la vitesse de rotation a une variation linéaire.

L'approche que nous proposons dans cette thèse peut être considérée comme une nouvelle technique de poursuite d'ordre qui sera exploitée :

1. pour la démodulation d'amplitude et/ou de la démodulation de phase d'un signal vibratoire en régime variable ;
2. et pour la séparation de composantes non-stationnaires à l'ordre 1 (composantes déterministes) et de composantes non-stationnaires à l'ordre 2 (composantes aléatoires).

Dans la section suivante, nous présentons la poursuite d'ordre par l'estimateur de Vold-Kalman avec un regard critique sur certains de ces aspects.

2.4 MODÈLE DE VOLD-KALMAN POUR LA POURSUITE D'ORDRE

Les machines tournantes, de par leur géométrie symétrique et leur mouvement rotatif, génèrent des phénomènes périodiques. Ces derniers sont entretenus par des forces dynamiques dépendant de la fréquence de rotation de la machine. C'est le cas notamment de la force d'engrènement ou de la force centrifuge. Ces phénomènes périodiques peuvent être décomposés en une somme de composantes fréquentielles caractérisées par leur amplitude, leur fréquence et leur phase. L'estimation de ces paramètres est d'un intérêt capital pour le diagnostic des machines tournantes. C'est dans ce contexte que Vold et *al.* proposent l'estimateur de Vold-Kalman de première génération [49, 50, 55, 57] et de deuxième génération [55, 56]. Ces deux estimateurs ont été proposés aussi bien sous forme récursive que non

réursive. La mise en œuvre de ces estimateurs nécessite la modélisation dans l'espace d'état du signal de vibration. Dans cette section, nous nous focaliserons sur ce que nous appelons ici les modèles d'état de Vold-Kalman. L'algorithme d'estimation des paramètres du signal repose sur l'estimateur récursif de Kalman. Ce dernier sera présenté dans le Chapitre 3.

2.4.1 Vold-Kalman de 1^{re} génération

A partir de ce point, nous nous plaçons dans le cadre de l'acquisition de données avec échantillonnage de ces dernières. Le symbole temporel du temps continu t se transforme donc en numéro d'échantillon discret n .

2.4.1.1 Vold-Kalman non récursif de 1^{re} génération

Considérons un signal constitué de M composantes fréquentielles écrit sous sa forme discrète comme :

$$y[n] = \sum_{i=1}^M s_i[n] + v[n] \quad (2.5)$$

avec $s_i[n]$ la i^e composante fréquentielle. Dans le modèle de Vold-Kalman de 1^{re} génération, chaque composante fréquentielle est considérée comme une sinusoïde solution d'une équation aux différences finies d'ordre deux telle que [49, 50, 55] :

$$s_i[n+1] - 2 \cos(\omega_i[n]T_e) s_i[n] + s_i[n-1] = 0 \quad (2.6)$$

où T_e est la période d'échantillonnage et est l'inverse de la fréquence d'échantillonnage f_e , ω_i est la vitesse angulaire instantanée de la composante s_i et $n = 1, 2, \dots, N$ avec N le nombre d'échantillons du signal. Cette équation suppose que l'amplitude et la phase des composantes sont constantes dans le temps. Or, dans les situations réelles, ces grandeurs varient et peuvent être contaminées par des composantes déterministes ou du bruit. Par conséquent, un terme d'erreur $\epsilon_i[n]$ est introduit dans l'équation précédente pour tenir compte des variations légères de l'amplitude, de la phase et de la vitesse angulaire. Cela permet d'écrire :

$$s_i[n+1] - c_i[n]s_i[n] + s_i[n-1] = \epsilon_i[n] \quad (2.7)$$

avec $c_i[n] = 2 \cos(\omega_i[n]T_e)$. Pour les N échantillons du signal, s_i s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_i[2] & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -c_i[3] & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -c_i[N-1] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_i[1] \\ s_i[2] \\ s_i[3] \\ \vdots \\ s_i[N-1] \\ s_i[N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_i[2] \\ \epsilon_i[3] \\ \epsilon_i[4] \\ \vdots \\ \epsilon_i[N-2] \\ \epsilon_i[N-1] \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

et de manière symbolique comme :

$$\mathbf{u}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{w}_i \quad (2.9)$$

L'écriture de cette équation pour les M composantes conduit à cette représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{0}_{N \times N} & \cdots & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & \cdots & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{u}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_M \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Les N échantillons du signal mesuré peuvent être écrits comme :

$$\begin{pmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{I}_{N \times N} & \cdots & \mathbf{I}_{N \times N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v[1] \\ v[2] \\ \vdots \\ v[N] \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

avec $\mathbf{I}_{N \times N}$ la matrice identité de dimension $N \times N$. En combinant les équations (2.10) et (2.11) et en introduisant un facteur de pondération r , nous obtenons un système linéaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(N-2) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(N-2) \times 1} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{(N-2) \times 1} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\mathbf{u}_1 & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & \cdots & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} \\ \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} \\ \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & \cdots & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & r\mathbf{u}_M \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{I}_{N \times N} & \cdots & \mathbf{I}_{N \times N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\mathbf{w}_1 \\ -r\mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ -r\mathbf{w}_M \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

qui s'écrit de manière symbolique comme :

$$\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.13)$$

sachant que $\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y[1] & y[2] & \cdots & y[N] \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -r\mathbf{w}^T & \mathbf{v}^T \end{pmatrix}^T$ et

$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^T & \mathbf{w}_2^T & \cdots & \mathbf{w}_M^T \end{pmatrix}^T$. Le facteur r permet de régler la largeur de la bande passante de l'estimateur. À partir de cette équation linéaire, l'objectif par la suite est de trouver un estimateur du vecteur $\mathbf{x}$. L'estimateur proposé par Vold et *al.* est basé sur la minimisation des moindres carrés. La fonction objective à minimiser est la suivante :

$$J = \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (2.14)$$

telle que $\partial J / \partial \mathbf{x} = 0$. La minimisation de cette fonction conduit à l'équation normale décrite comme suit :

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{x} = \mathbf{D}^T \mathbf{y} \quad (2.15)$$

Cette procédure nécessite l'inversion de la matrice $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ qui est de grande taille et qui doit être bien conditionnée. Elle requiert également un temps de calcul énorme lorsqu'il s'agit de diagnostiquer des machines tournants à faible vitesse. En effet, dans ce contexte, le signal contient un très grand nombre d'échantillons et par conséquent des matrices dynamiques de grosses tailles. En plus de cela, cette méthode fournit des estimations présentant des effets de bord. Dans un souci d'utilisation de ce modèle en temps réel, une version récursive a été proposée dans la littérature. Cette dernière est décrite dans la section suivante.

2.4.1.2 Vold-Kalman récursif de 1^{re} génération

Le modèle de Vold-Kalman récursif de 1^{re} génération repose sur une représentation dans l'espace d'état du signal de vibration. Connaissant le signal de vibration y , l'objectif est de construire un modèle d'état de la forme :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (2.16)$$

$$y[n] = \mathbf{h}[n]\mathbf{x}[n] + v[n] \quad (2.17)$$

et d'estimer la variable d'état $\mathbf{x}$ par l'estimateur récursif de Kalman. (2.16) et (2.17) représentent respectivement l'équation d'état et l'équation de mesure. Nous exposons dans la suite l'approche proposée par Pan et *al.* [57] pour construire ce modèle d'état.

Équation d'état L'équation 2.7 peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} s_i[n] \\ s_i[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(\omega_i[n]T_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_i[n-1] \\ s_i[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_i[n] \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

et sous la forme symbolique comme :

$$\mathbf{x}_i[n+1] = \mathbf{G}_i[n]\mathbf{x}_i[n] + \mathbf{w}_i[n] \quad (2.19)$$

Pour une estimation simultanée des M composantes fréquentielles, nous obtenons l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1[n+1] \\ \mathbf{x}_2[n+1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1[n] & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{G}_2[n] & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{G}_M[n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1[n] \\ \mathbf{x}_2[n] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1[n] \\ \mathbf{w}_2[n] \\ \vdots \\ \mathbf{w}_M[n] \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Cette dernière correspond à l'équation d'état et s'écrit symboliquement comme :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (2.21)$$

dans laquelle $\mathbf{x}[n]$ est la variable d'état, $\mathbf{F}[n]$ est la matrice de transition et $\mathbf{w}[n]$ est le bruit d'état.

Équation de mesure Reprenons le modèle de l'équation 2.5 telle que :

$$y[n] = \sum_{i=1}^M s_i[n] + v[n] \quad (2.22)$$

avec $v[n]$ modélisant le bruit de mesure et les composantes du signal sans intérêt. Le signal de vibration peut s'écrire sous la forme d'une somme de produits de vecteurs tel que :

$$y[n] = \sum_{i=1}^M \mathbf{h}^T \mathbf{x}_i[n] + v[n] \quad (2.23)$$

avec $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $\mathbf{x}_i[n] = \begin{pmatrix} s_i[n-1] & s_i[n] \end{pmatrix}^T$. En écrivant cette somme sous forme de produit de vecteur nous obtenons l'équation de mesure :

$$y[n] = \mathbf{h}^T \mathbf{x}[n] + v[n] \quad (2.24)$$

dans laquelle $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^T & \mathbf{h}^T & \dots & \mathbf{h}^T \end{pmatrix}^T$ est le vecteur de mesure. Les équations 2.21 et 2.24 représentent le modèle d'état de Vold-Kalman de 1^{re} génération du signal de vibration. L'amplitude et la phase de chaque composante peuvent être évaluées grâce à une démodulation de Hilbert.

Le modèle d'état de 1^{re} génération permet ainsi de décrire l'évolution de chaque composante fréquentielle. L'utilisation d'un estimateur permet d'estimer ces composantes et d'appliquer les analyses souhaitées. Cependant, ce modèle d'état ne permet pas de découpler des composantes fréquentielles qui se croisent dans le domaine temps-fréquence [55]. Nous rencontrons ces situations sur des systèmes complexes ayant des arbres de rotations indépendants les uns des autres (par exemple les réacteurs d'avions). Le modèle d'état de 2^e génération permet de s'affranchir de cette limitation. Ce modèle fera l'objet de la section ci-dessous. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous focaliserons sur le modèle d'état de Vold-Kalman de 2^e génération compte tenu de son avantage par rapport au modèle de 1^{re} génération.

2.4.2 Vold-Kalman de 2^e génération

Considérons la i^e composante fréquentielle d'un signal de vibration décrite sous forme discrète par :

$$s_i[n] = a_i[n] \cos \left(T_e \sum_{k=1}^n \omega_i[k] + \varphi_i[n] \right) \quad (2.25)$$

expression dans laquelle

- a_i et φ_i sont respectivement la modulation d'amplitude et la modulation de phase ;

- $\omega_i = 2\pi f_{r,i}$ est la vitesse angulaire et $f_{r,i}$ est la fréquence instantanée de la composante ;
- T_e est la période d'échantillonnage qui est égale à l'inverse de la fréquence d'échantillonnage f_e ;
- $n = 1, 2, \dots, N$ avec N le nombre d'échantillons du signal.

Afin de réduire la taille des matrices dynamiques du modèle d'état, nous exploitons par la suite la représentation complexe du signal de vibration d'engrenage. En terme de représentation complexe, la i^e composante se met sous la forme :

$$\tilde{s}_i[n] = p_i[n] \exp(j\theta_i[n]) \quad (2.26)$$

où

$$s_i[n] = \frac{1}{2} (\tilde{s}_i[n] + \bar{\tilde{s}}_i[n]) \quad (2.27)$$

dans laquelle $p_i[n] = a_i[n] \exp(j\varphi_i[n])$ est l'enveloppe complexe, $\theta_i[n] = T_e \sum_{k=1}^n \omega_i[k]$ est le déplacement angulaire de la i^e composante, j représente le nombre complexe tel que $j^2 = -1$ et $\bar{\tilde{s}}_i[n]$ est le conjugué de $\tilde{s}_i[n]$. Ainsi, le signal de vibration constitué de M composantes d'intérêt s'écrit :

$$y[n] = \sum_{i=1}^M s_i[n] + v[n] \quad (2.28)$$

où $v[n]$ est le signal contenant les composantes non modélisées et/ou celles indépendantes de la fréquence de rotation de la machine. Il est connu sous le nom de *bruit de mesure*.

A partir de cette équation, l'estimation de l'amplitude et de la phase des M composantes se réduit à l'estimation de leur enveloppe complexe $p_i[n]$ lorsque les θ_i sont connus. C'est dans ce contexte que Vold et *al.* proposent le modèle de Vold-Kalman de 2^e génération.

Avec le modèle de Vold-Kalman de 2^e génération, Vold et *al.* [52] supposent que l'enveloppe complexe $p_i(t)$ est une fonction de modulation basse fréquence d'une porteuse. Dans le cas des signaux d'engrenages, les porteuses sont les composantes d'engrènement et l'enveloppe contient dans le domaine spectral la fréquence de rotation et ses harmoniques. D'un point de vue de la théorie de la modulation/démodulation, les composantes en basse fréquence ont une variation plus lente que les porteuses. Par conséquent, l'enveloppe p_i est supposée satisfaire une contrainte de lissage telle que :

$$\nabla^s p_i[n] = \epsilon_i[n] \quad (2.29)$$

avec ∇ l'opérateur des différences finies et ϵ_i correspond à la s^e dérivée ayant l'ordre le plus élevé. Implicitement, cette contrainte revient à approximer l'enveloppe par un polynôme de degré s . Compte tenu de l'inertie des systèmes mécaniques qui atténue les hautes fréquences, un polynôme de degré $s = 2$ permet

de décrire la dynamique d'évolution de l'enveloppe. Cette approximation est mise sous la forme discrète suivante [55] :

$$p_i[n+1] - 2p_i[n] + p_i[n-1] = \epsilon_i[n] \quad (2.30)$$

Nous expliquons cette modélisation de Vold et *al.* à partir d'un filtre formeur. Pour cela nous considérons que l'enveloppe est la réponse d'un système excité par un bruit blanc Gaussien. Le filtre formeur est représenté sur la figure ci-dessous.

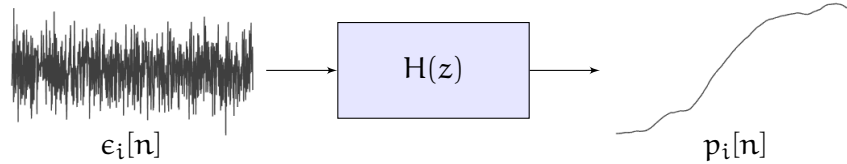


FIGURE 2.1 – Filtre formeur de fonction de transfert $H(z)$.

Sa fonction de transfert est donnée par l'expression suivante :

$$H(z) = \frac{p_i(z)}{\epsilon_i(z)} \quad (2.31)$$

$$= \frac{z^{-1}}{z^{-2} - 2z^{-1} + 1} \quad (2.32)$$

z est la variable de la transformée en Z . Ce filtre permet de décrire des signaux respectant un modèle ARMA d'ordre (2,1) (*Autoregressive-moving-average*) avec des coefficients constants. En exploitant les propriétés de la transformée en Z , nous retrouvons facilement l'équation 2.30.

La réponse fréquentielle du filtre formeur décrivant l'hypothèse de Vold est affichée sur la figure 2.2 ci-dessous. Nous observons bien que le filtre présente une bande passante étroite et qu'il atténue fortement les hautes fréquences. Comme nous allons le montrer dans les chapitres 4 et 5 de ce manuscrit, ce filtre formeur n'est pas adapté pour décrire l'évolution de l'enveloppe des composantes de vibration d'engrenages ou de roulements qui peut être impulsive.

Dans les deux sous-sections qui vont suivre, nous présentons le modèle de Vold-Kalman non récursif et récursif de 2^e génération.

2.4.2.1 Vold-Kalman non récursif de 2^e génération

Avec l'estimateur non récursif, le problème de la poursuite d'ordre est formulé sous forme de problème des moindres carrés. Pour cela, l'équation 2.30 pour les N

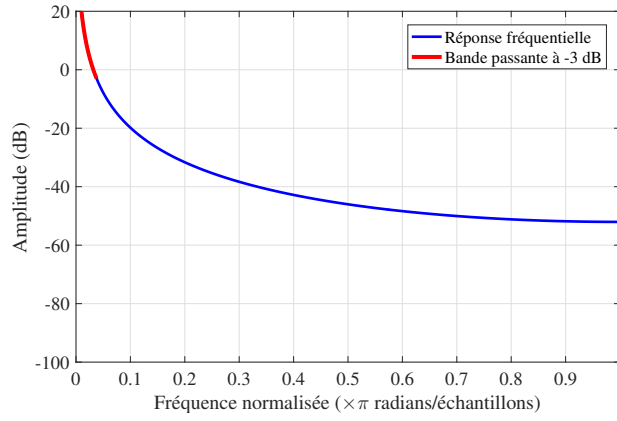


FIGURE 2.2

échantillons disponibles est mise sous cette forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i[1] \\ p_i[2] \\ p_i[3] \\ \vdots \\ p_i[N-1] \\ p_i[N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_i[2] \\ \epsilon_i[3] \\ \epsilon_i[4] \\ \vdots \\ \epsilon_i[N-2] \\ \epsilon_i[N-1] \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

La forme symbolique de cette dernière équation est donnée comme suit :

$$\mathbf{U}\mathbf{x}_i = \mathbf{w}_i \quad (2.34)$$

Pour l'estimation des M composantes du signal de vibration, nous augmentons l'équation précédente pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & \cdots & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} \\ \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} \\ \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & \cdots & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_M \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Les N échantillons du signal de vibration $\mathbf{y}$ peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{B}_M & \bar{\mathbf{B}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{B}}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v[1] \\ v[2] \\ \vdots \\ v[N] \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

sachant que les B_i sont des matrices diagonales de dimension $N \times N$ telles que :

$$B_i = \begin{pmatrix} \exp(j\theta_i[1]) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(j\theta_i[2]) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(j\theta_i[N]) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

En combinant les équations 2.35 et 2.36 et en introduisant un facteur de pondération r , nous obtenons l'écriture suivante :

$$\begin{pmatrix} 0_{(N-2) \times 1} \\ 0_{(N-2) \times 1} \\ \vdots \\ 0_{(N-2) \times 1} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\mathbf{U} & 0_{(N-2) \times N} & \dots & 0_{(N-2) \times N} & 0_{(N-2) \times N} & 0_{(N-2) \times N} & \dots & 0_{(N-2) \times N} \\ 0_{(N-2) \times N} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{(N-2) \times N} & \vdots & \vdots & \ddots & 0_{(N-2) \times N} \\ 0_{(N-2) \times N} & \ddots & \ddots & r\mathbf{U} & 0_{(N-2) \times N} & \vdots & \ddots & 0_{(N-2) \times N} \\ \frac{1}{2}\mathbf{B}_1 & \frac{1}{2}\mathbf{B}_2 & \dots & \frac{1}{2}\mathbf{B}_M & \frac{1}{2}\mathbf{B}_1 & \frac{1}{2}\mathbf{B}_2 & \dots & \frac{1}{2}\mathbf{B}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\mathbf{w}_1 \\ -r\mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ -r\mathbf{w}_M \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

qui s'écrit de manière symbolique comme :

$$\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.39)$$

avec $\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y[1] & y[2] & \dots & y[N] \end{pmatrix}^T$ le signal mesuré, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -r\mathbf{w}^T & \mathbf{v}^T \end{pmatrix}^T$ le vecteur des erreurs ou des bruits avec $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^T & \mathbf{w}_2^T & \dots & \mathbf{w}_M^T \end{pmatrix}^T$. Nous retrouvons ici encore un système linéaire dont la solution est obtenue par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

Toujours dans un souci d'exploiter de manière récursive les équations du modèle de 2^e génération, une version récursive a été proposée par Pan et *al.* [56]. Cette dernière est présentée dans la section ci-après.

2.4.2.2 Vold-Kalman récursif de 2^e génération

Le modèle d'état pour le modèle Vold-Kalman récursif de 2^e génération est formé par l'équation d'état et l'équation de mesure. Ces dernières sont présentées dans ce qui suit.

Équation d'état Sous forme matricielle, l'équation 2.30 devient :

$$\begin{pmatrix} p_i[n] \\ p_i[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i[n-1] \\ p_i[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_i[n] \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

De manière symbolique, cette équation s'écrit :

$$\mathbf{x}_i[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}_i[n] + \mathbf{w}_i[n] \quad (2.41)$$

Pour l'estimation de l'amplitude et de la phase des M composantes, nous obtenons cette forme matricielle de l'équation d'état :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1[n+1] \\ \tilde{\mathbf{x}}_1[n+1] \\ \mathbf{x}_2[n+1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M[n+1] \\ \tilde{\mathbf{x}}_1[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{A} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{A} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1[n] \\ \tilde{\mathbf{x}}_1[n] \\ \mathbf{x}_2[n] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M[n] \\ \tilde{\mathbf{x}}_M[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1[n] \\ \tilde{\mathbf{w}}_1[n] \\ \mathbf{w}_2[n] \\ \vdots \\ \mathbf{w}_M[n] \\ \tilde{\mathbf{w}}_M[n] \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

et sa forme symbolique est :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (2.43)$$

avec $\mathbf{F}$ la matrice de transition et $\mathbf{w}[n]$ le *bruit d'état* ou *d'excitation* de matrice de covariance $\mathbf{Q}[n]$. A partir de cette équation, nous construisons l'équation de mesure du modèle d'état.

Équation de mesure Nous pouvons réécrire l'équation 2.26 sous la forme vectorielle suivante :

$$\tilde{s}_i[n] = \begin{pmatrix} 0 & \exp(j\theta_i[n]) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i[n-1] \\ p_i[n] \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

et de manière symbolique comme :

$$\tilde{s}_i[n] = \mathbf{b}_i[n]\mathbf{x}_i[n] \quad (2.45)$$

La partie réelle de cette i^e composante s'écrit :

$$s_i[n] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_i[n] & \bar{\mathbf{b}}_i[n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i[n] \\ \tilde{\mathbf{x}}_i[n] \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

En tenant compte des M composantes, le signal de vibration de l'équation 2.28 devient :

$$y[n] = \sum_{i=1}^M \mathbf{h}_i[n]\mathbf{x}_i[n] + v[n] \quad (2.47)$$

De manière simplifiée, nous obtenons l'équation de mesure suivante :

$$y[n] = \mathbf{h}[n]\mathbf{x}[n] + v[n] \quad (2.48)$$

avec $\mathbf{h}[n] = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1[n] & \mathbf{h}_2[n] & \cdots & \mathbf{h}_M[n] \end{pmatrix}$ la matrice de mesure et $v[n]$ le bruit de mesure contenant les composantes non modélisées de matrice de covariance $\mathbf{R}[n]$. Les équations 2.43 et 2.48 décrivent la représentation dans l'espace d'état du signal de vibration.

Comme cela a été exposé plus haut, le modèle d'état de Vold-Kalman de 2^e génération est obtenu à partir de l'hypothèse que les enveloppes des composantes fréquentielles varient de manière lisse. Ce qui implique que les enveloppes sont quasi-linéaires. Pour les signaux vibratoires acquis en régime variable, cette hypothèse n'est pas appropriée. En effet, ces signaux sont fortement non-stationnaires et présentent des modulations d'amplitude et de phase fortement non-linéaires. Cela se traduit dans le fréquentiel par un spectre large bande. Or, le filtre formeur caractéristique de l'hypothèse de Vold présente une bande passante étroite. L'utilisation du modèle de Vold-Kalman pour estimer les modulations à large spectre peut donc conduire à une mauvaise estimation et ainsi fournir un diagnostic erroné de l'état de l'organe à surveiller.

Pour pallier cette limitation, nous proposons de décrire le signal de vibration dans l'espace d'état grâce à une modélisation de l'enveloppe p_i de chaque composante fréquentielle par une fonction polynomiale. Elle fera l'objet de la Section 2.5.

2.5 MODÈLE D'ÉTAT DU SIGNAL DE VIBRATION - BASE POLYNOMIALE

Comme vu précédemment, la contrainte de Vold consiste à considérer que l'enveloppe peut être décrite par un modèle *auto-régressif* d'ordre 2 (AR(2)) à coefficients constants. Pour une enveloppe quasi-linéaire, ce modèle est sans doute valide et fournit des résultats intéressants. Poulimenos et *al.* mentionnent que pour des signaux non-stationnaires, les coefficients du modèle AR ou du modèle *auto-régressif à moyenne mobile* (ARMA pour *autoregressive-moving-average*) sont en réalité variables [75]. Pour ces types de signaux, trois approches existent pour modéliser les coefficients du modèle AR ou ARMA :

- les coefficients sont constants sur des segments identiques du signal [73];
- les coefficients suivent une contrainte de lissage stochastique. Cette contrainte n'est autre que celle de Vold [75];
- les coefficients suivent un modèle structuré selon des séries fonctionnelles [76].

Ces approches basées sur des modèles AR ou ARMA permettent de décrire assez fidèlement le comportement non-stationnaire des signaux de vibration. Cependant, elles ne sont pas adaptées à notre sujet d'étude. En effet, ces modèles ne permettent pas d'accéder directement à des composantes fréquentielles d'intérêt du signal. Leur choix n'est donc pas pertinent lorsqu'il s'agit :

- d'estimer une seule composante parmi plusieurs composantes contenues dans le signal de vibration ;

- de séparer des composantes déterministes des composantes aléatoires se recouvrant dans le domaine fréquentiel.

C'est pourquoi nous avons proposé une nouvelle approche pour modéliser l'évolution de l'enveloppe du signal de vibration. La nouveauté réside dans la projection de l'enveloppe de chaque composante fréquentielle sur une base de fonctions polynomiales. Dans ce cas, le problème de l'estimation des composantes se résume à l'estimation des coefficients de la base polynomiale. Le choix de cette approche utilisant une base polynomiale nous semble pertinent pour les raisons suivantes :

- D'abord, la base polynomiale permet de tenir compte des non-linéarités de l'enveloppe qui peut être de caractère impulsif suite à l'apparition d'un défaut. En effet, elle offre une grande flexibilité pour modéliser les différentes formes d'enveloppe ;
- Ensuite, la base polynomiale assure une décomposition unique de l'enveloppe.

Ces raisons nous ont poussé à proposer un cadre théorique permettant de représenter dans l'espace d'état le signal de vibration en utilisant une base polynomiale. Ce développement théorique est présenté ci-après.

2.5.1 Propriétés d'une base polynomiale

Définition de la norme L_2 : Soit $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions polynomiales munies de la norme L_2 . Soient la fonction $f \in \mathcal{F}$ et $t[n] = (n-1)T_e \in \mathcal{D}$ les échantillons discrets de t pour $n = 1, 2, \dots, N$. La norme L_2 de f est définie par :

$$\|f\|_{L_2} = \sum_{n=1}^N f^2[n] \quad (2.49)$$

avec $f[n]$ la forme discrète de $f(t)$.

Produit scalaire sur la norme L_2 : Soient f et g deux fonctions polynomiales de $\mathcal{F}$. Le produit scalaire de f et g , noté $\langle f, g \rangle$, est exprimé comme suit :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^N f[n] \bar{g}[n] \quad (2.50)$$

Propriétés d'une base de $\mathcal{F}$: Considérons une base générique de dimension $m+1$ notée par $\mathcal{B} = \{ \mathcal{P}_0[n] \ \mathcal{P}_1[n] \ \dots \ \mathcal{P}_m[n] \}$ avec $\{\mathcal{P}_j[n]\}$ est la j^e fonction polynomiale discrète de degré inférieur ou égale à j .

$\mathcal{B}$ est une base de l'espace $\mathcal{F}$ si et seulement si toute fonction f de cet espace peut

s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions polynomiales $\{\mathcal{P}_j\}$. De manière explicite, nous avons :

$$f[n] = \sum_{j=0}^m c_j \mathcal{P}_j[n] \quad (2.51)$$

où c_j sont les coefficients de la combinaison à déterminer.

La base $\mathcal{B}$ est orthonormale si :

$$\langle \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j \rangle = \sum_{n=1}^N \mathcal{P}_i[n] \mathcal{P}_j[n] = \begin{cases} \|\mathcal{P}_i\|^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52)$$

2.5.2 Projection de l'enveloppe complexe sur une base polynomiale

Nous supposons que la i^e enveloppe complexe p_i dans l'équation 2.26 appartient à l'espace des fonctions polynomiales $\mathcal{F}$. Alors, nous pouvons projeter cette enveloppe sur la base $\mathcal{B}$ telle que :

$$p_i[n] = \sum_{j=0}^m c_{ij}[n] \mathcal{P}_j[n] \quad (2.53)$$

avec c_{ij} les coefficients de cette combinaison linéaire. L'approximation de l'enveloppe peut s'écrire comme un produit de vecteurs tel que :

$$p_i[n] = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0[n] & \mathcal{P}_1[n] & \cdots & \mathcal{P}_m[n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i0}[n] \\ c_{i1}[n] \\ \vdots \\ c_{im}[n] \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

et de manière symbolique comme :

$$p_i[n] = \mathcal{B}[n] \mathcal{C}_i[n] \quad (2.55)$$

A partir de l'équation 2.44 à 2.46, la partie réelle de la i^e composante du signal de vibration se met sous la forme :

$$s_i[n] = \mathbf{h}_i[n] \mathbf{x}_i[n] \quad (2.56)$$

dans laquelle $\mathbf{h}_i[n] = \begin{pmatrix} \mathcal{B}[n] \exp(j\theta_i[n]) & \bar{\mathcal{B}}[n] \exp(-j\theta_i[n]) \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x}_i[n] = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_i[n] \\ \bar{\mathcal{C}}_i[n] \end{pmatrix}$ représentent respectivement la i^e matrice de mesure et la i^e variable d'état.

Le signal de vibration, qui est une somme des composantes s_i , s'obtient facilement et est présenté sous la forme suivante :

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}[n] \mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n] \quad (2.57)$$

dans laquelle

$$\mathbf{h}[n] = \begin{pmatrix} \mathcal{B}[n] \exp(j\theta_1[n]) & \bar{\mathcal{B}}[n] \exp(-j\theta_1[n]) & \cdots & \mathcal{B}[n] \exp(j\theta_M[n]) & \bar{\mathcal{B}}[n] \exp(-j\theta_M[n]) \end{pmatrix}$$

est la matrice de mesure et $\mathbf{x}[n] = \left(\mathbf{c}_1^T[n] \ \bar{\mathbf{c}}_1^T[n] \ \dots \ \mathbf{c}_M^T[n] \ \bar{\mathbf{c}}_M^T[n] \right)^T$ est la variable d'état.

Finalement, l'estimation de l'enveloppe complexe revient à estimer les coefficients de la combinaison linéaire (Voir équation 2.53).

Dans les méthodes traditionnelles d'approximation polynomiale, les coefficients de la combinaison sont constants. Dans notre nouvelle approche, nous supposons que les coefficients sont variables dans le temps. Ceci permet de tenir compte des éventuelles erreurs que peuvent générer un mauvais choix de l'ordre et/ou du type de la base. Dans cette thèse, nous supposons que les coefficients ont une faible dynamique de variation. Ceci revient à considérer que chaque coefficient de l'approximation suit un modèle d'évolution de type marche aléatoire. De manière explicite :

$$c_{ij}[n+1] = c_{ij}[n] + w_{ij}[n] \quad \text{Pour} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, M \\ j = 0, 1, \dots, m \\ n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.58)$$

L'extension de cette équation pour tous les m coefficients et pour toutes les M composantes du signal de vibration conduit à l'équation d'état suivante :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{I}\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (2.59)$$

dans laquelle

$\mathbf{w}[n] = \left(w_{10}^T[n] \dots w_{1m}^T[n], \bar{w}_{10}^T[n] \dots \bar{w}_{1m}^T[n] \dots w_{M0}^T[n] \dots w_{Mm}^T[n], \bar{w}_{M0}^T[n] \dots \bar{w}_{Mm}^T[n] \right)^T$ est le bruit d'état et $\mathbf{I}$ est la matrice identité de dimension appropriée. Les équations 2.57 et 2.59 forment le modèle d'état du signal vibration obtenu après une projection de l'enveloppe complexe sur une base de fonctions polynomiales. Le vecteur d'état $\mathbf{x}[n]$ contient tous les coefficients de la décomposition polynomiale de toutes les composantes fréquentielles du signal vibratoire.

2.5.3 Exemples de bases polynomiales

Plusieurs bases polynomiales existent dans la littérature. Nous pourrions citer la base canonique, la base des polynômes de Legendre, la base des polynômes de Laguerre et la base des polynômes de Chebychev. L'une de ces bases peut être utilisée pour modéliser l'enveloppe. Toutefois, nous avons retenu la base générique constituée des puissances du temps et la base de Legendre.

2.5.3.1 Base canonique (BC)

La base canonique est l'une des bases les plus usitées pour l'approximation polynomiale. Elle est formée des monômes de t et représente la base standard de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Dans le domaine discret, la base s'écrit :

$$\mathcal{P}_j[n] = t^j[n], \quad j = 0, 1, \dots, m \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.60)$$

2.5.3.2 Base canonique orthogonale (BCO)

La base canonique orthogonale est obtenue après la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt de la base canonique. Cette base n'est autre que la base des polynômes discrets orthogonaux de Legendre. Ce choix est motivé pour les raisons suivantes :

- la BCO assure une décomposition unique de l'enveloppe du signal ;
- la BCO permet également de découpler les paramètres de l'enveloppe du signal.

La procédure de Gram-Schmidt est décrite dans l'annexe A de ce document.

Soit $BC[n] = \begin{pmatrix} u_1[n] & u_2[n] & \cdots & u_m[n] \end{pmatrix}$ la base canonique discrète avec $u_i[n] = t^{i-1}[n]$. Les trois premiers polynômes de la base canonique orthogonale obtenus après l'orthogonalisation de la base canonique sont définis ci-dessous :

$$v_1[n] = 1 \quad (2.61)$$

$$v_2[n] = t[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t[n] \quad (2.62)$$

$$v_3[n] = t^2[n] - \frac{\sum_{n=1}^N t^3[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t^2[n] \sum_{n=1}^N t[n]}{\sum_{n=1}^N t^2[n] - \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N t[n] \right)^2} \left(t[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t[n] \right) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t^2[n] \quad (2.63)$$

Les cinq premiers polynômes discrets de la BCO lorsque la fréquence d'échantillonnage est de 24 kHz sont représentés par la fig. 2.3.

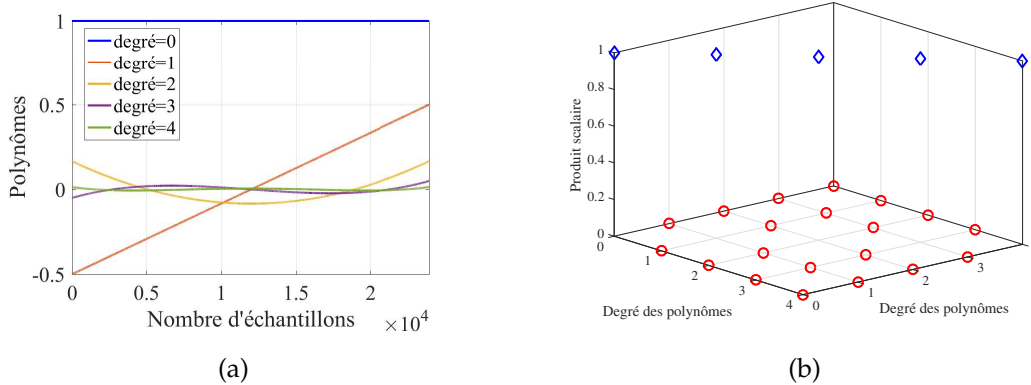


FIGURE 2.3 – Aperçu des quatre premiers polynômes de la BCO : (a) polynômes de la BCO et (b) leur produit scalaire. Les marqueurs en bleu correspondent à la norme des polynômes et ceux en rouge le produit scalaire entre deux polynômes distincts.

Comme énoncé au début de ce chapitre, nous exploitons dans la suite cette thèse

le modèle d'état obtenu à partir d'une projection de l'enveloppe des composantes fréquentielles sur la BCO. Ensuite, un estimateur des coefficients de la base polynomiale est mis en œuvre.

2.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exposé les modèles de Vold-Kalman pour la représentation dans l'espace d'état du signal de vibration en régime variable. Nous distinguons le modèle de 1^{re} génération et celui de 2^e génération. Dans la suite nous utilisons le modèle de 2^e génération compte tenu de ses avantages. En effet, il permet (i) d'estimer directement l'enveloppe de chaque composante fréquentielle et (ii) de découpler des composantes ayant des fréquences qui se croisent. Ce modèle semble être pertinent lorsqu'il s'agit de modéliser des enveloppes très lisses. Par contre, pour les enveloppes fortement non-linéaires, ce modèle n'est plus approprié. C'est pour cette raison que nous avons proposé de projeter l'enveloppe sur la base des polynômes orthogonaux. Cette approche offre la possibilité (i) de tenir compte des non-linéarités de l'enveloppe dans le modèle d'état, (ii) de garantir une décomposition unique de l'enveloppe et (iii) de découpler les paramètres de l'enveloppe. Cette projection de l'enveloppe sur la base polynomiale est ensuite exploitée pour décrire le signal de vibration non-stationnaire dans l'espace d'état. À partir de ces modèles, il s'agit de faire la synthèse des estimateurs de l'enveloppe des composantes fréquentielles.

Dans le chapitre suivant, deux estimateurs seront présentés : l'estimateur récursif de Kalman et l'estimateur H_∞ .

Estimateur de Kalman et estimateur H_∞

DANS ce chapitre, nous présentons deux méthodes d'estimation des paramètres de modulations d'amplitude et de modulations de phase du signal de vibration. Ces méthodes exploitent la représentation du signal de vibration dans l'espace d'état. Le premier estimateur repose sur une approche des moindres carrés. Il consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne et conduit au fameux estimateur récursif de Kalman. Le deuxième repose sur une optimisation *minimax*. Une telle optimisation minimise le maximum de l'erreur d'estimation. Cette approche conduit à une estimation de type H_∞ qui sera amplement analysée dans ce chapitre.

Sommaire

3.1	Introduction	36
3.2	Définition d'un estimateur	36
3.2.1	Propriétés d'un estimateur	37
3.2.2	Biais et consistance	37
3.2.3	Efficacité	38
3.3	Estimateur des moindres carrés	38
3.4	Estimateur de Kalman	40
3.4.1	Formulation du problème	40
3.4.2	Mise en œuvre	41
3.4.3	Forme alternative de l'estimateur de Kalman	42
3.4.4	Limitations	44
3.5	Estimateur H_∞	46
3.5.1	Introduction	46
3.5.2	Théorie des jeux	47
3.5.3	Formulation du problème de l'estimation H_∞	49
3.5.4	Réglage des paramètres de l'estimateur H_∞	53
3.6	Conclusion	57

3.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté deux approches pour représenter le signal de vibration dans l'espace d'état. La première était celle initialement développée par Vold et son équipe. La seconde a été développée au cours de cette thèse et repose sur une approximation polynomiale de l'enveloppe de chaque harmonique dynamique.

Dans de ce chapitre, nous présentons deux estimateurs de l'enveloppe : l'estimateur obtenu à partir d'une optimisation utilisant la norme L_2 , l'estimateur de Kalman et l'estimateur obtenu à partir de l'utilisation de la norme ∞ , l'estimateur H_∞ . Étant donné que l'estimateur de Kalman est un outil commun, nous rappelons brièvement les étapes de synthèse de cet estimateur. Par ailleurs, nous aborderons certaines notions permettant de discuter des avantages et des inconvénients de cet estimateur.

Quant à l'estimateur H_∞ , il est peu répandu dans le monde de l'analyse vibratoire. Par conséquent, il sera largement discuté. Nous décrivons la synthèse d'un tel estimateur en nous appuyant sur l'approche de la théorie des jeux. Nous proposons également une amélioration de l'algorithme résultant de l'optimisation *minimax*. Cela conduit à un estimateur H_∞ adaptatif. Ensuite, l'estimateur H_∞ ainsi proposé est exploité dans le chapitre 4 afin d'évaluer les deux approches (l'hypothèse de Vold et l'approximation polynomiale) permettant de décrire le signal vibratoire dans l'espace d'état.

3.2 DÉFINITION D'UN ESTIMATEUR

La plupart des processus physiques peuvent être caractérisés par des grandeurs physiques. Dans certaines situations, ces grandeurs sont non mesurables ou entachées d'erreurs. Elles peuvent être non mesurables à cause d'absence de capteurs ou du coût que peut générer la mesure de ces dernières. Cette difficulté peut être contournée en mesurant une autre grandeur physique facilement mesurable (une grandeur électrique ou une grandeur mécanique par exemple) notée $y[n]$ reliée à la grandeur vectorielle $x[n]$ par une fonction h . Cette grandeur mesurable est elle-même entachée de bruit de mesure $v[n]$. Cela rend davantage difficile la détermination de la grandeur d'intérêt $x[n]$.

Écrivons cela de manière mathématique de la manière suivante :

$$y[n] = h(x[n]) + v[n] \quad (3.1)$$

Dans la théorie de l'estimation, le problème consiste à déterminer une estimation $\hat{x}[n]$ de $x[n]$ qui minimise une fonction coût (ou perte) J spécifique. Cette estimation est obtenue grâce à un estimateur. Nous rappelons qu'un estimateur est un outil mathématique mis en œuvre pour l'estimation d'une variable d'intérêt $x[n]$ à partir

d'une grandeur mesurable $y[n]$. L'estimation $\hat{x}[n]$ est obtenue telle que :

$$\hat{x}[n] = \text{Arg min}(\mathcal{J}) \quad (3.2)$$

Puisque plusieurs estimateurs peuvent être mis en œuvre, il est important de caractériser leurs propriétés afin d'évaluer la performance de l'un par rapport à l'autre. Dans la section suivante, nous présentons quelques unes de ces propriétés.

3.2.1 Propriétés d'un estimateur

Généralement, la qualité d'une estimation est déterminée à partir de l'erreur d'estimation que nous notons :

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n] \quad (3.3)$$

Idéalement, un estimateur devrait fournir une erreur d'estimation égale à zéro. Mais cette contrainte est difficilement réalisable dans la pratique, cela pour deux raisons.

- Premièrement, le nombre restreint d'échantillons invalide la loi des grands nombres qui stipule que la convergence statistique de $\hat{x}[n]$ vers $x[n]$ est proportionnelle au nombre d'échantillons ;
- Deuxièmement, le choix des paramètres de réglage et d'initialisation de l'estimateur influence la qualité de l'estimation. Nous reviendrons plus tard sur ces paramètres.

Compte tenu de ces limitations pratiques, il est nécessaire de définir d'autres critères d'évaluation la qualité de l'estimateur. Quatre critères régulièrement utilisés dans la littérature sont présentés ci-après.

3.2.2 Biais et consistance

Dès lors qu'il n'est pas réaliste d'envisager un estimateur avec une erreur nulle, l'objectif peut consister à assurer une erreur de moyenne nulle. Cela conduit à écrire que :

$$x[n] = E\{\hat{x}[n]\} \quad (3.4)$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'estimateur est dit *non biaisé*. Et lorsque l'estimateur ne garantit pas cette condition, il est dit *biaisé*. Le *biais* b est la valeur moyenne de l'erreur défini par $b = E\{x - \hat{x}\}$.

Si le biais tend vers zéro lorsque le nombre d'échantillons augmente, alors l'estimateur est dit *asymptotiquement non biaisé*. Un estimateur qui satisfait cette propriété asymptotique est dit *consistant*.

Erreur quadratique moyenne (EQM) Ici, nous introduisons une fonction coût définie par $\mathcal{J} = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2$. Cette dernière est très populaire à cause de sa simplicité et de sa convexité. En plus de cela, cette fonction croît proportionnellement avec l'erreur d'estimation. Étant donné que $\mathcal{J}$ est une variable aléatoire, nous définissons un index de performance $\mathcal{E}_{\text{EQM}}$ comme la moyenne de l'erreur quadratique. Il s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{EQM}} = \mathbb{E}\{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2\} \quad (3.5)$$

Si l'EQM tend vers zéro lorsque le nombre d'échantillons croît, alors l'estimateur est dit consistant. Et si l'estimateur est sans biais, l'erreur quadratique moyenne coïncide avec la variance de l'erreur.

Un autre index de performance similaire à l'EQM que nous utiliserons pour l'évaluation de la qualité des estimations est le rapport signal sur bruit. On distinguera le rapport signal sur bruit à l'entrée noté RSB_e et le rapport signal sur bruit à la sortie noté RSB_s. Ils sont exprimés en décibels (dB) et définis respectivement par :

$$\text{RSB}_e = 10 \log 10 \left(\frac{\mathbb{E}\{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2\}}{\mathbb{E}\{\|\mathbf{v}\|^2\}} \right) \quad (3.6)$$

$$\text{RSB}_s = 10 \log 10 \left(\frac{\mathbb{E}\{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2\}}{\mathbb{E}\{\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})\|^2\}} \right) \quad (3.7)$$

Pour un estimateur consistant, le RSB_s tend vers l'infini. En effet, dans ce cas, $\mathbb{E}\{\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})\|^2\} \rightarrow 0$ et donc $\text{RSB}_s \rightarrow \infty$. En pratique, cette limite est rarement atteinte à cause des artefacts dans le bruit de mesure. Par conséquent, nous pouvons juger de la qualité d'une estimation en évaluant la force de l'inégalité suivante :

$$\text{RSB}_s \geq \text{RSB}_e \quad (3.8)$$

3.2.3 Efficacité

L'EQM évalue la qualité de l'estimation de manière globale pour toutes les grandeurs d'intérêt. Dans la plupart des situations, nous nous intéressons à la qualité de l'estimation pour chaque grandeur. Dans ce cas, la qualité de l'estimation est donnée par la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :

$$\mathbf{P} = \mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{e}\} = \mathbb{E}\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\} \quad (3.9)$$

Un estimateur qui fournit la plus petite matrice de covariance parmi tous les estimateurs non biaisés est le meilleur au sens des moindres carrés. Un tel estimateur est qualifié d'estimateur *efficace*.

3.3 ESTIMATEUR DES MOINDRES CARRÉS

La méthode des moindres carrés peut être considérée comme une approche déterministe ne faisant pas d'hypothèse sur les densités de probabilités. Cependant,

il est nécessaire de connaître les paramètres statistiques du bruit pour vérifier ses propriétés. L'estimation des moindres carrés est discutée par plusieurs auteurs, notamment Kailath [119] et Sorenson [83].

Pour la mise en œuvre de l'estimateur des moindres carrés, le modèle du signal mesuré est écrit comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (3.10)$$

avec $\mathbf{y}$ le vecteur des N mesures, $\mathbf{h}$ la matrice des mesures connue avec une dimension appropriée, $\mathbf{v}$ le vecteur bruit de mesure et $\mathbf{x}$ le vecteur de la grandeur à estimer. La méthode des moindres carrés repose sur la minimisation de l'effet du bruit de mesure. D'un point de vue mathématique, l'index de performance de cette méthode est défini par :

$$\mathcal{E}_{MC} = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{h}\mathbf{x}) (\mathbf{y} - \mathbf{h}\mathbf{x})^T \quad (3.11)$$

L'estimation au sens des moindres carrés est obtenue par la minimisation de cet index de performance. Cette minimisation conduit à la fameuse équation normale :

$$\mathbf{h}^T \mathbf{h} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{h}^T \mathbf{y} \quad (3.12)$$

En supposant que la matrice $\mathbf{h}$ est de rang plein, la résolution de l'équation linéaire conduit à l'estimation au sens des moindres carrés définie par :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{h}^T \mathbf{h})^{-1} \mathbf{h}^T \mathbf{y} \quad (3.13)$$

En supposant que le bruit $\mathbf{v}$ a une moyenne nulle, nous pouvons facilement vérifier que l'estimateur des moindres carrés est consistant et non biaisé. Il est souvent qualifié de "*best linear unbiased estimator (BLUE)*". Cela nous amène à nous intéresser à quelques propriétés intéressantes de la méthode des moindres carrés. Nous n'en citerons que trois.

Propriété 1 : L'estimation $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés est sans biais.

Propriété 2 : Lorsque le bruit de mesure est blanc avec une moyenne nulle, l'estimation $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés est la meilleure estimation linéaire sans biais.

Propriété 3 : Lorsque le bruit de mesure est blanc et Gaussien et de moyenne nulle, l'estimateur des moindres carrés atteint la borne inférieure de Cramer-Rao pour une estimation sans biais.

L'estimateur des moindres carrés peut s'étendre au cas où les grandeurs à estimer sont multiples et variables dans le temps. Il peut également être exploité de manière récursive. Sa version récursive est mise en œuvre par plusieurs auteurs,

comme Simon, D. et Kailath, T. dans [72, 119]. Ils formulent le problème de l'estimation en terme de système dynamique décrit par un modèle de Gauss-Markov. La résolution du problème d'estimation, au sens des moindres carrés, conduit au fameux estimateur de Kalman. Cet estimateur fera l'objet de la section suivante.

Rappelons qu'il existe une équivalence entre l'estimateur des moindres carrés et l'estimateur de Wiener et l'estimateur du maximum de vraisemblance. L'estimateur de Wiener est basé sur une approche déterministe alors que celui du maximum de vraisemblance est fondé sur une approche probabiliste. Le lecteur intéressé par ces estimateurs pourra lire les références [83] et [84].

3.4 ESTIMATEUR DE KALMAN

3.4.1 Formulation du problème

Considérons le système discret linéaire suivant :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n] \quad (3.15)$$

Les bruits $\mathbf{w}[n]$ et $\mathbf{v}[n]$ sont blancs, Gaussiens et de matrice de covariance respectives $\mathbf{Q}[n]$ et $\mathbf{R}[n]$ connues telles que :

$$E\{\mathbf{w}[n]\mathbf{w}^T[k]\} = \mathbf{Q}[n]\delta_{n-k} \quad (3.16)$$

$$E\{\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^T[k]\} = \mathbf{R}[n]\delta_{n-k} \quad (3.17)$$

$$E\{\mathbf{w}[n]\mathbf{v}^T[k]\} = 0 \quad (3.18)$$

avec δ_{n-k} le symbole de Kronecker défini par $\delta_{n-k} = 1$ si $n = k$ et $\delta_{n-k} = 0$ sinon. L'objectif ici est de mettre en œuvre un estimateur de la variable d'état $\mathbf{x}[n]$. Plusieurs approches existent pour mettre en œuvre cet estimateur, notamment :

- l'approche originale de Kalman, présentée par lui même en 1960, basée sur le principe de projection orthogonale [69]. Kalman considère que l'estimation de la variable d'état $\mathbf{x}[n]$ n'est autre que la projection de $\mathbf{x}[n]$ sur l'espace linéaire formé par les mesures $y[1], y[2], \dots, y[n]$;
- l'approche proposée par Kailath en 1968 basée sur l'innovation [119].

Dans la plupart des articles traitant de l'analyse vibratoire avec l'estimateur Vold-Kalman, les auteurs utilisent l'algorithme de Kalman connu sous le nom de "Kalman filter based on one-step prediction". Ce dernier est bien détaillé dans l'ouvrage de Simon Haykin [64]. Il repose sur l'exploitation du processus d'innovation qui est définit par :

$$\alpha[n] = y[n] - \hat{y}[n|n-1] \quad (3.19)$$

dans laquelle $\hat{y}[n|n-1]$ est l'estimation au sens des moindres carrées de $y[n]$ connaissant les échantillons $y[1], y[2], \dots, y[n-1]$.

Le problème de l'estimateur de Kalman peut être formulé comme suit :

Trouver l'estimation au sens des moindres carrées de $x[k]$ en utilisant tous les échantillons $y[1], y[2], \dots, y[n]$ du signal mesuré.

Nous parlons d'un problème de filtrage ou d'estimation lorsque $k = n$, de prédiction lorsque $k > n$ et de lissage lorsque $1 \leq k < n$.

Nous nous intéressons par la suite au problème d'estimation et de prédiction. Dans ce cas, nous notons :

- $\hat{x}[n|n]$ l'estimation de $x[n]$;
- $\hat{x}[n+1|n]$ la prédiction de $x[n]$.

3.4.2 Mise en œuvre

Pour la mise en œuvre de l'estimateur de Kalman, nous exploitons l'innovation comme elle est présentée par Kailath [119]. Cette dernière satisfait les propriétés suivantes :

Propriété 1 : L'innovation $\alpha[n]$ associée à la mesure $y[n]$ est orthogonale à toutes les mesures précédentes $y[1], y[2], \dots, y[n-1]$. Cela est formalisé par :

$$E\{\alpha[n]y[k]\} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.20)$$

Propriété 2 : Les innovations $\alpha[1], \alpha[2], \dots, \alpha[n]$ sont orthogonales entre elles. Ceci est écrit comme :

$$E\{\alpha[n]\alpha[k]\} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.21)$$

Avec ces propriétés, l'estimateur de Kalman fournit une estimation $\hat{x}[n+1|n+1]$ de $x[n+1]$ de la forme :

$$\hat{x}[n+1|n+1] = F[n]\hat{x}[n|n] + g_K[n+1] (y[n+1] - h[n+1]F[n]\hat{x}[n|n]) \quad (3.22)$$

où

- $\alpha[n+1] = y[n+1] - h[n+1]F[n]\hat{x}[n|n]$ est l'innovation ;
- $g_K[n+1]$ est le gain de l'estimateur de Kalman.

Soit $e[n+1|n+1] = x[n+1] - \hat{x}[n+1|n+1]$ l'erreur d'estimation. En supposant le bruit $v[n+1]$ est orthogonal à l'erreur d'estimation telle que $E\{e[n+1|n+1]v[n+1]\} = 0$.

1]] = 0, nous obtenons la matrice de covariance de l'erreur d'estimation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[n+1|n+1] &= \mathbb{E}\{e[n+1|n+1]e^T[n+1|n+1]\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{g}_K[n+1]\mathbf{h}[n+1]) \mathbf{P}[n+1|n] (\mathbf{I} - \mathbf{g}_K[n+1]\mathbf{h}[n+1])^T \\ &\quad + \mathbf{g}_K[n+1]\mathbf{R}[n+1]\mathbf{g}_K[n+1]^T \end{aligned} \quad (3.23)$$

Lorsque les matrices dynamiques sont bien conditionnées, cette dernière expression s'écrit d'une manière plus aisée comme :

$$\mathbf{P}[n+1|n+1] = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_K[n+1]\mathbf{h}[n+1]) \mathbf{P}[n+1|n] \quad (3.24)$$

où $\mathbf{P}[n+1|n] = \mathbb{E}\{e[n+1|n]e^T[n+1|n]\}$ est la matrice de covariance de l'erreur de prédiction. Elle est déterminée en supposant que l'estimation $\mathbf{x}[n|n]$ et le bruit d'état $\mathbf{w}[n]$ sont non corrélés. Avec cette hypothèse, nous obtenons à l'échantillon $n+1$:

$$\mathbf{P}[n+1|n] = \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n|n]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \quad (3.25)$$

Quant au gain de Kalman, il correspond à celui qui minimise la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $\mathbf{P}[n+1|n+1]$ (équation 3.23). Cela revient à poser :

$$\frac{\partial \mathbf{P}[n+1|n+1]}{\partial \mathbf{g}_K[n+1]} = 0 \quad (3.26)$$

En tenant compte des règles de dérivations des matrices¹, nous obtenons après ré-arrangement le gain de Kalman ci-dessous :

$$\mathbf{g}_K[n+1] = \mathbf{P}[n+1|n]\mathbf{h}^T[n+1] \left(\mathbf{h}[n+1]\mathbf{P}[n+1|n]\mathbf{h}^T[n+1] + \mathbf{R}[n+1] \right)^{-1} \quad (3.27)$$

L'estimation prédite est déterminée par l'équation suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (3.28)$$

La synthèse de l'estimateur de Kalman pour le système linéaire 3.14 et 3.15 est résumée par l'algorithme ci-dessous [72].

3.4.3 Forme alternative de l'estimateur de Kalman

L'estimation de Kalman est obtenue à partir des équations récursives présentées par l'algorithme 1. Cependant, il existe une forme alternative pour cet estimateur. Elle n'exploite que l'état prédit et est obtenue à partir du lemme d'inversion de matrice ci-dessous.

1. Pour toute matrice A et matrice symétrique B, nous avons $\frac{\partial}{\partial A} (ABA^T) = 2AB$.

Algorithm 1: Algorithme de l'estimateur de KalmanInitialization of $\mathbf{x}[1|1]$ and $\mathbf{P}[1|1]$;Choose $\mathbf{R}$ and $\mathbf{Q}$;**for** $n=1$ to $N-1$ **do** $\mathbf{P}[n+1|n] = \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n|n]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n]$; $\mathbf{g}_K[n+1] = \mathbf{P}[n+1|n]\mathbf{h}^T[n+1] \left(\mathbf{h}[n+1]\mathbf{P}[n+1|n]\mathbf{h}^T[n+1] + \mathbf{R}[n+1] \right)^{-1}$; $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n+1] = \mathbf{F}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n] + \mathbf{g}_K[n+1] (y[n+1] - \mathbf{h}[n+1]\mathbf{F}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n])$; $\mathbf{P}[n+1|n+1] = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_K[n+1]\mathbf{h}[n+1]) \mathbf{P}[n+1|n]$;

Lemme d'inversion de matrice : Soit $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des matrices de dimensions $n \times n$, $n \times p$, $p \times n$ et $p \times p$. Si les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont inversibles alors [85] :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \left(\mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \quad (3.29)$$

L'inversion de la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ requiert $n \times n$ opérations. Avec le lemme d'inversion de matrice, le nombre d'opérations requit pour l'inversion de cette matrice est de $p \times p$. Ce lemme a l'avantage de réduire le temps de calcul pour l'inversion des matrices. En appliquant ce lemme au terme à droite de l'équation 3.27, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n] + \mathbf{R}[n])^{-1} &= \mathbf{R}^{-1}[n] - \mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \left(\mathbf{P}^{-1}[n|n-1] + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \right)^{-1} \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n] \\ &= -\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \left(\mathbf{I} + \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \right)^{-1} \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n] \\ &\quad + \mathbf{R}^{-1}[n] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le gain de Kalman peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_K[n] &= \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n] \left(\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n] + \mathbf{R}[n] \right)^{-1} \\ &= \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \left(\mathbf{I} + \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \right)^{-1} \right] \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n] \\ &= \mathbf{P}[n|n-1] \left(\mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \right)^{-1} \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n] \end{aligned} \quad (3.31)$$

En substituant l'équation 3.31 et 3.24 dans l'équation 3.25, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[n+1|n] &= \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n|n]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \\ &= \mathbf{F}[n] (\mathbf{I} - \mathbf{g}_K[n]\mathbf{h}[n]) \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \\ &= \mathbf{F}[n] \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}[n|n-1] \left(\mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \right)^{-1} \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \right] \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \\ &= \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \right)^{-1} \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n] \right] \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \\ &= \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \left(\mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \right) \\ &\quad - \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \\ &= \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \left(\mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{h}[n]\mathbf{P}[n|n-1] \right)^{-1} \mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Algorithm 2: Algorithme alternatif de l'estimateur de Kalman

```

Initialization of  $\mathbf{x}[1|0]$  and  $\mathbf{P}[1|0]$ ;
Choose  $\mathbf{R}[n]$  and  $\mathbf{Q}[n]$ ;
for  $n=1$  to  $N-1$  do
     $\mathbf{g}_K[n+1] =$ 
         $\mathbf{P}[n|n-1] \left( \mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n+1] \mathbf{R}^{-1}[n+1] \mathbf{h}[n+1] \mathbf{P}[n|n-1] \right)^{-1} \mathbf{h}^T[n+1] \mathbf{R}^{-1}[n+1];$ 
     $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n+1] = \mathbf{F}[n] \hat{\mathbf{x}}[n|n] + \mathbf{g}_K[n+1] (y[n+1] - \mathbf{h}[n+1] \mathbf{F}[n] \hat{\mathbf{x}}[n|n]);$ 
     $\hat{\mathbf{y}}[n+1] = \mathbf{h}^T[n+1] \hat{\mathbf{x}}[n+1|n+1];$ 
     $\mathbf{P}[n+1|n] = \mathbf{F}[n] \mathbf{P}[n|n-1] \left( \mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n|n-1] \right)^{-1} \mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n];$ 

```

3.4.4 *Limitations*

L'estimateur de Kalman se distingue par sa facilité de mise en œuvre et sa structure simple. Nous avons une initialisation, un choix des paramètres, une prédiction et une correction. Les équations présentes à chaque étape de l'estimation sont linéaires et facilement évaluables. Cet estimateur permet aussi de prédire l'état du système dynamique à partir des informations du passé sans la nécessité de les stocker en mémoire. Ceci est réalisé grâce à l'équation de transition. Cette dernière assure l'utilisation de l'estimateur de Kalman en temps réel.

L'estimateur de Kalman est le meilleur estimateur linéaire non biaisé sous certaines conditions.

- Premièrement, les bruits du modèle d'état ont une distribution Gaussienne ;
- Deuxièmement, les propriétés statistiques (d'ordre 1 et d'ordre 2) des bruits, $E\{\mathbf{w}_k\}$, $E\{\mathbf{v}_k\}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$, sont connues ;
- Troisièmement, l'estimation fournie est optimale au sens des moindres carrés ;
- Enfin, les matrices dynamiques du modèle d'état, $\mathbf{F}_k$ et $\mathbf{h}_k$, sont exactement connues.

Dans les situations réelles, ces conditions ne sont pas toujours satisfaites. Et l'optimalité de l'estimateur tout comme la qualité de l'estimation ne sont plus garanties.

Dans la littérature scientifique, il existe des estimateurs qui ne forment aucune hypothèse sur la nature statistique des bruits. Ces estimateurs rentrent dans la famille des estimateurs robustes. Nous citons notamment l'estimateur H_∞ et le LMS. Dans cette thèse, nous nous focaliserons uniquement sur l'estimateur H_∞ compte tenu de la similarité de ses équations avec celles de l'estimateur de Kalman. Cet estimateur, connu aussi sous le nom d'estimateur *minimax*, ne fait aucune

hypothèse sur la distribution statistique des bruits. Il fournit une estimation pour la plus petite erreur possible. La mise en œuvre de l'estimateur H_∞ fera l'objet de la section suivante.

3.5 ESTIMATEUR H_∞

3.5.1 Introduction

Supposons que nous ayons le modèle d'état d'un système dynamique et que nous souhaitons déterminer la "meilleure" estimation de l'état de ce système connaissant les mesures de sa sortie. La notion de meilleure est définie ici par rapport à un critère de performance [86]. Dans la théorie de l'estimation, l'erreur quadratique moyenne est l'un des critères les plus populaires. La minimisation de ce critère conduit à la famille des estimateurs des moindres carrés, dont celui de Kalman est le plus usité. Cependant, dans les situations réelles, les matrices dynamiques peuvent être incertaines. En plus de cela, aucune information a priori n'est disponible sur la distribution et les paramètres statistiques des bruits. La présence de ces incertitudes conduit à une estimation sous-optimale.

La quête d'un estimateur plus robuste face aux incertitudes de modèle et aux bruits a conduit à la définition d'un nouveau critère de performance. La minimisation de ce critère utilise la norme H_∞ . Le symbole mathématique H_∞ fait référence à "l'espace de Hardy²". La minimisation selon cette norme revient à imposer une borne supérieure pour l'énergie de l'erreur d'estimation. En d'autres termes, la norme H_∞ nous garantit une estimation qui minimise le maximum de l'erreur d'estimation peu importe la distribution statistique des bruits du modèle dès lors qu'ils ont une énergie bornée.

Le problème de robustesse au sens de la norme H_∞ a été exposé pour la première fois par Georges Zames dans le cadre du contrôle des systèmes [87–89]. Le premier objectif était de déterminer une commande optimale qui minimise la pire des erreurs possible lorsqu'il existe une incertitude aussi bien sur le modèle du système que sur les bruits du modèle. Le second objectif était de définir un nouveau critère de performance permettant de mesurer la sensibilité de la commande face aux perturbations. Cette approche a été initialement formulée dans le domaine fréquentiel par Georges Zames et consiste à minimiser le pic de la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation. Ainsi, cette approche revient à minimiser l'erreur d'estimation sur toute la bande de fréquence d'étude. Dans le cadre de la théorie du contrôle, l'approche H_∞ a été également formulée sous forme d'équation polynomiale [91, 93]

Yaesh et al. [90], Banavar et al. [86] et Nagpal et al. [94], pour ne citer que ceux là, sont sans doute les premiers auteurs à aborder le problème de l'estimation par l'approche H_∞ . Avec cette dernière, nous parlerons d'estimation H_∞ . Cette approche est fondamentalement différente de l'approche des moindres carrés. En effet, l'estimation au sens de la norme H_∞ est obtenue par la minimisation du maximum de l'erreur de l'estimation alors que l'estimation de Kalman est celle qui minimise en

2. L'espace de Hardy est l'ensemble des matrices de fonctions qui sont analytiques dont les valeurs singulières ont une valeur réelle positive et bornées dans le disque unité.

moyenne l'erreur d'estimation. En d'autres termes, l'estimation H_∞ correspond à la meilleure des estimations possibles. Cette dernière est obtenue suite à une optimisation *minimax* d'un critère de performance. Elle revient à imposer une borne supérieure sur l'énergie de l'erreur d'estimation.

Plusieurs formulations pour le problème de l'estimation H_∞ existent dans la littérature. L'approche basée sur les techniques de représentations polynomiales des systèmes a été considérée par Grimble et al. [68, 92, 97]. Ils ont mis en œuvre un estimateur linéaire valable uniquement lorsque les matrices de fonctions de transfert sont asymptotiquement stables [98]. L'approche polynomiale conduit à une équation diophantienne difficile à résoudre lorsque le système a plusieurs entrées/sorties [96]. Aussi, elle montre ses limites lorsque le système est à temps variant. Yaesh et al. [67] et Iglesias et al. [99] décrivent le système dans un modèle d'état et minimise la norme H_∞ de sa fonction de transfert. Cette approche n'est valable que pour les systèmes à temps invariant.

Pour le cas des systèmes discrets à temps variable, Başar [101] et Yaesh et al. [100] et Shen [65] proposent un estimateur H_∞ optimal. Le cas des systèmes continus a été traité par Nagpal et al. [94] et Banavar et al. [86]. Dans ces travaux, un lien entre la théorie des jeux et le problème de l'estimation H_∞ a été établi. La théorie des jeux fournit une nouvelle interprétation de l'estimation H_∞ et permet de mettre en œuvre un estimateur pour les systèmes à temps variable. Dans cette approche, l'estimateur est un joueur, dans un jeu compétitif³, préparé pour la pire des stratégies de l'adversaire, ici l'erreur d'initialisation et les bruits du modèle. La seule hypothèse formulée avec la théorie des jeux est que les bruits sont à énergie bornée. L'article de Shaked et al. [102] présente un résumé des travaux menés sur l'estimation H_∞ entre les années 80 et 90.

Dans cette thèse, nous présentons l'estimateur H_∞ en exploitant la théorie des jeux. Dans la section suivante, le problème de l'estimation H_∞ est formulé comme un jeu quadratique linéaire.

3.5.2 Théorie des jeux

Imaginons un jeu compétitif entre deux joueurs p_1 et p_2 qui choisissent respectivement les valeurs v et x appartenant à un ensemble quelconque $\mathcal{A}$. Dans ce type de jeu, le gain de l'un implique systématiquement la perte de l'autre. Ainsi, nous définissons une fonction coût $f(x, v)$ permettant d'estimer la perte de l'un des deux joueurs. Cette fonction coût peut être une erreur quadratique moyenne ou un rapport d'énergie entre l'erreur d'estimation et les bruits. L'objectif du joueur p_1 est de maximiser la perte du joueur p_2 alors que le joueur p_2 a pour objectif de minimiser cette perte. La figure 3.1 illustre le cadre théorique de ce jeu et fournit

3. Un jeu compétitif est un jeu dans lequel il n'existe aucune collaboration entre les joueurs à la différence d'un jeu collaboratif. Nous distinguons plusieurs exemples de jeu compétitif notamment les jeux avec des conflits d'intérêts, les jeux de coordination et les jeux de somme nulle. L'estimation H_∞ se définit comme un jeu de somme nulle.

une approche permettant d'élaborer une stratégie de jeu. Existerait-il une stratégie optimale pour ce type de jeux ? Von Neumann [103] et Nash [104, 105] formulent que la stratégie optimale est la solution d'un problème *minimax*. Ce problème est défini comme suit :

$$\inf_x \sup_v f(x, v) = \gamma^* \quad (3.33)$$

$$\sup_v \inf_x f(x, v) = \gamma_* \quad (3.34)$$

et l'inégalité suivante est toujours valable :

$$\gamma_* \leq \gamma^* \quad (3.35)$$

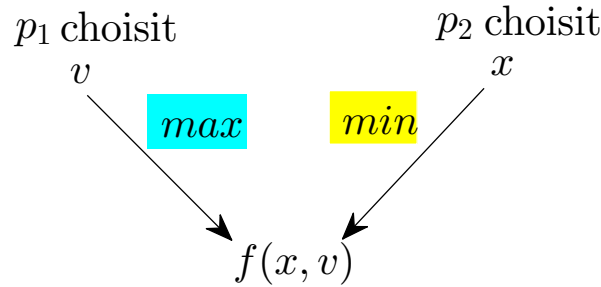


FIGURE 3.1 – Illustration de la théorie des jeux dans laquelle $x \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$. Le joueur p_1 cherche à maximiser la fonction coût f tandis que le joueur p_2 cherche à minimiser cette fonction coût. Cette stratégie est optimale s'il existe un point selle sur cette fonction coût.

Ce qui signifie que la borne inférieure d'une fonction est inférieure ou égale à sa borne supérieure. Soit le couple $(\tilde{x}, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^2$ obtenu par une stratégie $\mathcal{S}$ adoptée pour ce jeu. Ce couple est obtenu lorsque le joueur p_1 tente de maximiser la fonction coût et lorsque le joueur p_2 minimise quant à lui cette fonction coût. Cette stratégie est optimale si le couple $(\tilde{x}, \tilde{v})$ est un point-selle⁴. Ce point existe si :

$$f(x, \tilde{v}) \leq f(\tilde{x}, \tilde{v}) \leq f(\tilde{x}, v) \quad (3.36)$$

La figure ci-dessous met en évidence le point-selle de la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] \times [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : x \times v &\longrightarrow x^2 - v^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans cet exemple, le point-selle est $(0, 0)$ comme illustré sur la figure ci-dessous. Notons que l'existence du point-selle repose sur l'hypothèse de convexité-concavité de la fonction coût. Cette hypothèse n'est pas toujours valable comme l'illustre

4. Le couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ est un point-selle pour la fonction $f \in \mathbb{R}$ si f atteint son maximum en a et son minimum en b ou inversement.

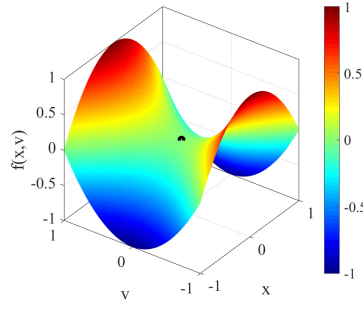


FIGURE 3.2 – Illustration de l'existence d'un point-selle pour la fonction $f(x, v) = x^2 - v^2$. Le point-selle est $(0, 0)$.

la figure 3.3. Dans ce cas, le joueur p_1 élabore une stratégie qui lui permet de minimiser la pire de ses pertes possibles. Cette stratégie conduit au couple $(\hat{x}, \hat{v})$ tel que :

$$f(\hat{x}, \hat{v}) \leq \gamma_{\text{opt}} \quad (3.38)$$

γ_{opt} correspond au minimum des pertes possibles. Si ce dernier coïncide avec la borne inférieure de l'inégalité alors le point-selle existe. L'estimation H_∞ , d'un point de vue de la théorie du compétitif, sera considérée dans la section suivante.

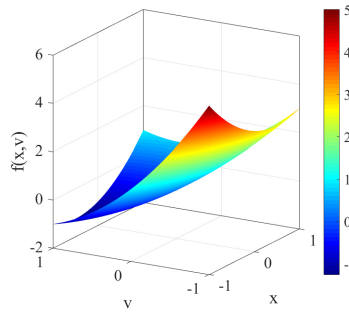


FIGURE 3.3 – Fonction à deux variables qui ne présente pas de point-selle.

3.5.3 Formulation du problème de l'estimation H_∞

Rappelons le système discret linéaire à temps variable suivant défini dans la section 3.4 :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (3.39)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n] \quad (3.40)$$

pour un nombre d'échantillons $n = 1, \dots, N$ donné. Les paramètres de ce modèle sont définis comme suit :

- $\mathbf{x}[n] \in \mathbb{R}^p$ est la variable d'état du modèle ;
- $\mathbf{F}[n] \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est la matrice de transition ;

- $\mathbf{h}[n] \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de mesure ;
- $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de la mesure ;
- $\mathbf{v}[n] \in \mathbb{R}^m$ est le bruit de mesure et $\mathbf{w}[n] \in \mathbb{R}^p$ est le bruit d'état et tous les deux sont à énergie bornée : $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}^2[n] < \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{w}^2[n] < \infty$.

Avec l'estimateur H_∞ , il est possible d'estimer une grandeur $\mathbf{z}[n] \in \mathbb{R}^q$ qui est une fonction linéaire de la variable d'état telle que :

$$\mathbf{z}[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{x}[n] \quad (3.41)$$

dans laquelle $\mathbf{C}[n] \in \mathbb{R}^{q \times p}$ est une matrice qui permet de faire une combinaison linéaire de la variable d'état $\mathbf{x}[n]$. Dans cette thèse, nous supposons que $\mathbf{C}[n] = \mathbf{h}[n]$. Cela implique que nous nous intéressons à estimer le signal non bruité.

Soit $\hat{\mathbf{z}}[n]$ l'estimation de $\mathbf{z}[n]$ connaissant les mesures $\mathbf{y}[1], \mathbf{y}[2], \dots, \mathbf{y}[n-1]$. Nous posons $\hat{\mathbf{x}}[1]$ l'estimé de la variable d'état $\mathbf{x}[1]$ et $\mathbf{P}[1] = \mathbb{E}\{(\mathbf{x}[1] - \hat{\mathbf{x}}[1])(\mathbf{x}[1] - \hat{\mathbf{x}}[1])^T\}$ la matrice de covariance de l'erreur d'initialisation. Soit J un opérateur de transfert qui décrit le passage des bruits ($\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$) et de l'erreur d'initialisation ($\mathbf{x}[1] - \hat{\mathbf{x}}[1]$) à l'erreur d'estimation ($\mathbf{z}[n] - \hat{\mathbf{z}}[n]$) comme indiqué sur la figure 3.4 ci-après.

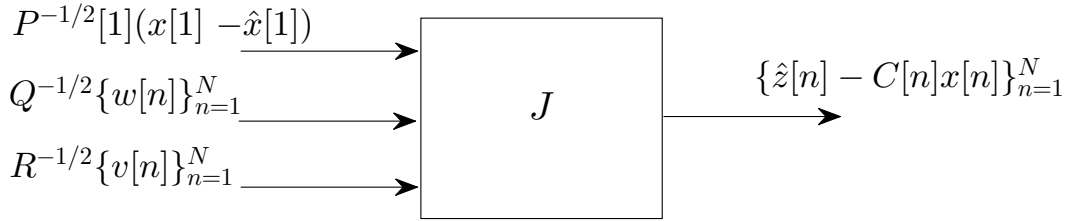


FIGURE 3.4 – Opérateur de transfert décrivant le passage des bruits du modèle et de l'erreur d'initialisation à l'erreur d'estimation.

Le problème de l'estimation H_∞ est défini par Hassibi et Kailath [106] comme ci-dessous.

Problème de l'estimation H_∞ : Connaissant les mesures $(\mathbf{y}[1], \mathbf{y}[2], \dots, \mathbf{y}[n-1])$, trouver une estimation $\hat{\mathbf{z}}[n]$ qui minimise $\|J\|_\infty$. Ce minimum n'étant pas toujours atteint, le problème revient à trouver une estimation $\hat{\mathbf{z}}[n]$ parmi toutes les $\mathbf{z}[n]$ possibles qui garantit :

$$\|J\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma} \quad (3.42)$$

$\gamma \in \mathbb{R}^+$ définit ici le niveau d'atténuation de l'énergie de l'erreur d'estimation par rapport à celle de l'erreur d'initialisation et des bruits. Ce critère assure une énergie minimale pour la pire amplification possible des bruits et de l'erreur d'initialisation.

La solution à ce problème d'estimation peut être obtenue en écrivant le critère (3.42)

sous forme d'une fonction perte d'un jeu compétitif. Dans ce jeu, l'estimation $\hat{z}$ joue contre les bruits $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v}$ et l'état initial $\mathbf{x}[1]$ et la fonction perte est définie par :

$$J = \frac{-1}{\gamma} \|\mathbf{x}[1] - \hat{\mathbf{x}}[1]\|_{\mathbf{P}[1]^{-1}}^2 + \sum_{n=1}^N \left[\|z[n] - \hat{z}[n]\|^2 - \frac{1}{\gamma} \left(\|\mathbf{w}[n]\|_{\mathbf{Q}[n]^{-1}}^2 + \|\mathbf{v}[n]\|_{\mathbf{R}[n]^{-1}}^2 \right) \right] \quad (3.43)$$

La minimisation de cette fonction perte revient à la recherche d'un point-selle $(\hat{z}^*, \mathbf{x}^*[1], \mathbf{w}^*, \mathbf{v}^*)$ tel que :

$$J(\hat{z}, \mathbf{x}^*[1], \mathbf{w}^*, \mathbf{v}^*) \leq J(\hat{z}^*, \mathbf{x}^*[1], \mathbf{w}^*, \mathbf{v}^*) \leq J(\hat{z}^*, \mathbf{x}[1], \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (3.44)$$

avec $\hat{z}^*, \mathbf{x}^*[1], \mathbf{w}^*, \mathbf{v}^*$ les valeurs obtenues suite à une stratégie optimale. Nous nous retrouvons ici dans un jeu multi-joueurs : 1 joueur ($\hat{z}$) contre 3 joueurs ($\hat{\mathbf{x}}[1], \mathbf{w}, \mathbf{v}$). Rappelons que dans ce jeu, aucune coopération n'existe entre les joueurs. Cela signifie qu'un joueur donné n'a aucune idée sur la stratégie élaboré par les autres. Le joueur $\hat{z}$ se place dans le pire des scénarios possibles. C'est-à-dire celui dans lequel les trois joueurs vont maximiser la fonction perte. Ainsi, la stratégie optimale mise en œuvre par le joueur $\hat{z}$, comme cela a été mentionnée plus haut, est solution du problème *minimax* ci-dessous :

$$J^* = \min_{\hat{z}[n]} \max_{(\mathbf{v}[n], \mathbf{w}[n], \mathbf{x}[1])} J(\hat{z}, \mathbf{x}[1], \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (3.45)$$

Ce problème *minimax* se traduit littéralement comme suit :

Déterminer l'estimation $\hat{z}$ qui minimise le maximum de la fonction perte J peu importe l'initialisation $\hat{\mathbf{x}}[1]$ et les bruits $\mathbf{w}, \mathbf{v}$. En d'autres termes, nous minimisons la pire des erreurs possibles.

La solution de l'estimation H_∞ dans sa formulation en terme de jeu compétitif est obtenue grâce à une optimisation. Un tel problème d'optimisation peut être obtenue par diverses méthodes, telles que la programmation dynamique utilisée par Speyer et al. [107] et Başar et al. [108] ou le multiplicateur de Lagrange exploité par Banavar et al. pour le cas continu [86] et par Shen et al. pour le cas discret [65, 95]. Dans cette thèse, nous suggérons d'exploiter les résultats obtenus par la méthode du multiplicateur de Lagrange. En effet, cette méthode nous paraît plus facile d'accès et est la plus répandue dans la théorie de l'optimisation.

Afin de résoudre ce problème d'optimisation, nous considérons la fonction J écrite sous la forme ci-dessous :

$$J = \psi(\mathbf{x}[1]) + \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[n] \quad (3.46)$$

avec ψ une fonction connue de $\mathbf{x}[1]$ et $\mathcal{L}[n]$ une fonction connue dépendant de $z[n]$, $\mathbf{w}[n]$ et $\mathbf{v}[n]$.

Étant que la fonction J doit être optimisée sachant que $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n]$, nous l'écrivons comme :

$$J = \psi(\mathbf{x}[1]) + \sum_{n=1}^N \left[\mathcal{L}[n] + \frac{2\lambda[n+1]^T}{\gamma} (\mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] - \mathbf{x}[n+1]) \right] \quad (3.47)$$

où $\frac{2\lambda[n+1]^T}{\gamma}$ est le '*multiplicateur variable de Lagrange*'.

L'optimisation de J par rapport à $(\mathbf{x}[1], \mathbf{w}[n], \hat{\mathbf{z}}[n], v[n])$ revient à optimiser J par rapport à $(\mathbf{x}[1], \mathbf{w}[n], \hat{\mathbf{z}}[n], y[n])$. Pour cela, il suffit de mettre à zéro la dérivée de J par rapport à ces variables comme décrit ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \lambda[n]} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}[1]} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}[n]} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial y[n]} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{z}}[n]} = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

La solution de l'estimation H_∞ en résolvant le systèmes d'équation 3.48 est donnée par le théorème suivant.

Théorème [65] : Soit $\gamma \in \mathbb{R}^+$ un niveau d'atténuation de l'énergie de l'erreur d'estimation par rapport à celle de l'erreur d'initialisation et des bruits. Alors, il existe une estimation H_∞ de $\mathbf{z}[n]$ notée $\hat{\mathbf{z}}[n]$ ssi il existe une matrice stable $\mathbf{P}[n]$ définie symétrique positive solution de l'équation discrète de Riccati suivante :

$$\mathbf{P}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n] \left(\mathbf{I} - \gamma \mathbf{h}^T[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \right)^{-1} \mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \quad (3.49)$$

Dans ce cas, l'estimation H_∞ est donnée par :

$$\hat{\mathbf{z}}[n+1] = \mathbf{h}[n+1] \hat{\mathbf{x}}[n+1], \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.50)$$

avec

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1] = \mathbf{F}[n] \hat{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{g}_\infty[n] (y[n] - \mathbf{h}[n] \hat{\mathbf{x}}[n]) \quad (3.51)$$

$\mathbf{g}_\infty$ est le gain de l'estimation H_∞ donné par :

$$\mathbf{g}_\infty[n] = \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n] \left(\mathbf{I} - \gamma \mathbf{h}^T[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \right)^{-1} \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \quad (3.52)$$

La synthèse de l'estimation H_∞ pour le système dynamique 3.39 et 3.40 est présentée par l'algorithme ci-après.

A partir du théorème précédent, nous pouvons déduire le corollaire suivant qui assure que $\hat{\mathbf{z}}[n]$ est bien la solution de l'estimation H_∞ .

Algorithm 3: Algorithme de l'estimation H_∞

```

Initialization of  $\hat{\mathbf{x}}[1]$  and  $\mathbf{P}[1]$ ;
Choisir  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  and  $\gamma$ ;
for  $n=1$  to  $N-1$  do
     $\mathbf{Z}[n] = \left( \mathbf{I} - \gamma \mathbf{h}^T[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \right)^{-1}$ ;
     $\mathbf{g}_\infty[n] = \mathbf{F}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}$ ;
     $\hat{\mathbf{x}}[n+1] = \mathbf{F}[n] \hat{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{g}_\infty[n] (y[n] - \mathbf{h}[n] \hat{\mathbf{x}}[n])$ ;
     $\hat{\mathbf{z}}[n+1] = \mathbf{h}[n+1] \hat{\mathbf{x}}[n+1]$ ;
     $\mathbf{P}[n+1] = \mathbf{F}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}$ ;

```

Corollaire : $\hat{\mathbf{z}}[n]$ est la solution de l'estimation H_∞ ssi la condition suivante est satisfaite :

$$\mathbf{P}^{-1}[n] - \gamma \mathbf{h}^T[n] \mathbf{h}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n] > 0 \quad (3.53)$$

Ce corollaire sera utilisé dans la suite de cette thèse pour le choix de γ . La démonstration (ou preuve) complète de la solution de l'estimation H_∞ est présentée dans l'annexe B.

3.5.4 Réglage des paramètres de l'estimateur H_∞

Dans ce chapitre, deux méthodes d'estimation de la variable d'état ont été proposées. La première minimise l'erreur quadratique moyenne. C'est l'estimation récursif de Kalman. Quant à la deuxième, elle minimise le maximum de l'erreur d'estimation. C'est l'estimation H_∞ . La solution à ces problèmes d'estimation est donnée par des équations récursives qui dépendent de paramètres de réglage ($\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ et γ). Comme dans toutes les méthodes paramétriques, notamment celle de l'estimation de Kalman, ces paramètres ont un impact direct sur la qualité de l'estimation. En ce qui concerne l'estimation de Kalman, ce sont $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ les paramètres de réglages. Dans la formulation de l'estimation de Kalman, ces paramètres représentent respectivement la matrice de covariance du bruit de mesure et celle du bruit d'état. En pratique, ils ne sont connus que de manière très approximative. Un choix erroné de ces paramètres peut conduire à une estimation sous-optimale. D'où la nécessité de les estimer de manière adaptative ou récursive. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature pour leur estimation. Nous en distinguons quatre : les techniques bayésiennes [109, 110], les techniques de maximum de vraisemblance [111, 112], les techniques d'équivalence de covariance [113, 114] et les techniques de corrélation [115–118]. Les deux premières techniques, bayésiennes et maximum de vraisemblance, sont souvent décriées à cause du temps de calcul énorme qu'elles nécessitent. Quant à la technique d'équivalence de covariance, elle fournit des estimations biaisées. La dernière est la plus populaire dans la littérature de l'estimation des matrices de covariance. Elle a été initialement proposée par

Mehra [115, 116] puis repris par d'autres auteurs [117, 118]. Elle exploite les propriétés du signal d'innovation lorsque l'estimation est optimale. Ces propriétés ont été introduites par Thomas T. Kailath en 1968 [119] sous forme de deux théorèmes résumés ci-dessous :

1. Le signal d'innovation $\alpha[n] = y[n] - \mathbf{h}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ est statistiquement indépendant du signal mesuré ;
2. Le signal d'innovation est un bruit blanc Gaussien ayant la même covariance que le bruit de mesure $\mathbf{v}[n]$.

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas valable lorsque le bruit de mesure n'est pas blanc et Gaussien. En plus de cela, la technique de corrélation peut conduire à une matrice de covariance négative. Cette limitation a été surmontée par B.J. Odelson [120, 121] par une technique d'optimisation sous contrainte. Cette approche, basée sur l'innovation n'a été appliquée qu'à un modèle à temps-invariant. Dans les applications qui nous intéressent dans cette thèse, le modèle est à temps-variant et le bruit de mesure n'est pas forcément un BBG.

Dans l'approche H_∞ , $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ sont des matrices de pondérations respectivement de l'énergie du bruit de mesure et du bruit d'état. Elles représentent la covariance des bruits lorsque cette dernière est parfaitement connue. Autrement, elles sont choisies tout en garantissant des critères de stabilité de l'estimation H_∞ . Nous discutons du choix de γ et de $\mathbf{R}$ dans les deux sections suivantes.

3.5.4.1 Réglage de γ

D'après le corollaire de la section précédente, l'estimation $H_\infty \hat{\mathbf{z}}[n]$ existe ssi la matrice :

$$\Lambda[n, \gamma] = \mathbf{P}^{-1}[n] - \gamma \mathbf{h}^T[n] \mathbf{h}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \quad (3.54)$$

est symétrique définie positive (sdp). Cette condition est vérifiée ssi les valeurs propres de $\Lambda[n]$ sont réelles et strictement positives. En d'autres termes, il suffit que :

$$\Lambda[n, \gamma] = \mathbf{P}^{-1}[n] + \mathbf{h}^T[n] \left(\mathbf{R}^{-1}[n] - \gamma \mathbf{h}[n] \right) \mathbf{h}[n] \quad (3.55)$$

soit sdp. Nous supposons dans la suite de ce manuscrit que les paramètres γ et $\mathbf{R}$ sont constants. Dans ce cas la matrice $\Lambda[n, \gamma]$ est sdp si, et seulement si :

$$\gamma[n] \leq \mathbf{R}^{-1}[n] \quad (3.56)$$

$$= \mu \mathbf{R}^{-1}[n] \quad (3.57)$$

avec μ un coefficient tel que $0 \leq \mu \leq 1$.

Lorsque $\mu = 0$, l'estimation H_∞ est équivalente à l'estimation de Kalman. Nous disons que le problème de l'estimation n'est pas contraint. Par ailleurs, il faut noter que la qualité de l'estimation H_∞ est proportionnelle à μ . Cependant, si $\mu = 1$ nous

risquons une instabilité numérique pour l'inversion de la matrice $\mathbf{P}$. C'est pour cette raison que nous proposons de choisir μ tel que $0 < \mu < 1$.

Nous présentons dans la section qui suit une approche pour choisir R de manière adaptative.

3.5.4.2 Réglage de R

En ce qui concerne le réglage de R pour l'estimation H_∞ , nous proposons d'exploiter les équations que nous obtenons lors de la résolution du système 3.48. Certaines de ces équations se trouvent à l'annexe B de ce manuscrit.

Nous rappelons que le problème de l'estimation H_∞ a été formulé comme un problème *minimax* et exprimé par l'équation suivante :

$$J^* = \min_{\hat{\mathbf{z}}[n]} \max_{(v[n], \mathbf{w}[n], \mathbf{x}[1])} J(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{x}[1], \mathbf{w}, v) \quad (3.58)$$

La maximisation de J par rapport au bruit de mesure v revient à sa maximisation par rapport à la mesure y . Cette dernière maximise J ssi :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y[n]^2} = \frac{2}{\gamma} (R[n]^{-1} \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}[n]^T R[n]^{-1} - R[n]^{-1}) < 0 \quad (3.59)$$

La dérivée seconde de J est obtenue après plusieurs simplifications qui se retrouvent à l'annexe B de ce document. L'inégalité 3.59 est satisfaite ssi $(R[n] - \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}[n]^T)$ est définie positive. Ainsi, à chaque itération il faut vérifier que :

$$R[n] > \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}[n]^T \quad (3.60)$$

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, nous suggérons de choisir R tel que :

$$R[n] = \beta \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}[n]^T \quad (3.61)$$

avec $\beta > 1$.

L'algorithme adaptatif que nous proposons dans cette thèse pour l'estimation H_∞ est présenté par les équations récurrentes ci-après (Algorithm 4).

Algorithm 4: Algorithme adaptatif de l'estimation H_∞ .

```

Initialisation de  $\mathbf{x}[1]$  et  $\mathbf{P}[1]$ ;
Choisir  $\mathbf{R}[1]$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mu < 1$  et  $\beta > 1$  ;
for  $n=1$  to  $N-1$  do
     $\gamma[n] = \mu \mathbf{R}^{-1}[n]$ ;
     $\mathbf{Z}[n] = \left( \mathbf{I} - \gamma[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \right)^{-1}$ ;
    if  $\mathbf{R}[n] < \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n]$  then
         $\mathbf{R}[n] = \beta \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n]$ ;
     $\mathbf{g}_\infty[n] = \mathbf{F}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n]$ ;
     $\hat{\mathbf{x}}[n+1] = \mathbf{F}[n] \hat{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{g}_\infty[n] (y[n] - \mathbf{h}[n] \hat{\mathbf{x}}[n])$ ;
     $\hat{\mathbf{z}}[n+1] = \mathbf{h}[n+1] \hat{\mathbf{x}}[n+1]$ ;
     $\mathbf{P}[n+1] = \mathbf{F}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}$ ;

```

Remarque : Si $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ représentent respectivement la variance du bruit de mesure v et du bruit d'état w et que $\gamma \rightarrow 0$, alors l'estimation H_∞ est équivalente à celle de Kalman.

3.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exposé différentes méthodes d'estimation de paramètres d'un signal entaché de bruit de mesure. D'abord, les méthodes d'estimation basées sur une approche des moindres carrés ont été introduites dont l'estimateur de Kalman. L'estimateur de Kalman exploite un modèle d'état du signal et repose sur une minimisation de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. L'estimation ainsi obtenue est optimale au sens des moindres carrés et représente la meilleure estimation linéaire non biaisée. L'optimalité de cette estimation n'est valable que lorsque (i) le modèle est parfaitement connu, (ii) les bruits du modèle d'état sont blancs Gaussiens et (iii) la matrice de covariance de ces bruits est connue. En pratique, ces conditions ne sont pas toujours satisfaites. Dans ces situations, la théorie de l'estimateur de Kalman n'est plus valable. C'est dans ce contexte que nous avons proposé l'estimateur H_∞ . Elle repose sur une minimisation du maximum de l'erreur d'estimation peu importe le niveau d'énergie des bruits du modèle et de celle de l'erreur d'initialisation. L'approche H_∞ ne requiert aucune connaissance ni sur les matrices de covariance des bruits du modèle d'état, ni sur leur distribution statistique. Dans la section correspondante, nous avons présenté le développement théorique permettant de mieux appréhender l'estimation H_∞ . Nous avons également suggéré une amélioration de l'estimation H_∞ qui consiste à déterminer pour chaque échantillon du signal les valeurs des paramètres γ et R permettant de satisfaire les équations résultant de l'optimisation *minimax*. D'une part, ceci permet d'améliorer nettement la qualité de l'estimation lorsque le modèle est connu avec incertitude et que les bruits du modèle sont colorés. D'autre part, cela permet d'éviter un choix par tâtonnement de ces paramètres lorsqu'il s'agit d'analyser des signaux réels.

Dans le chapitre suivant, nous présentons deux signaux synthétiques pour évaluer la performance de l'estimateur H_∞ et celui de Kalman. Le premier signal nous permettra d'analyser le comportement des deux estimateurs lorsque la dynamique du modèle est connue avec incertitudes. Quant au deuxième signal, il est exploité afin d'évaluer la performance l'estimateur H_∞ lorsque celui-ci est combiné avec une modélisation de l'enveloppe des harmoniques dynamiques par la base canonique orthogonale.

Estimateur H_∞ – Analyse et performance

DANS ce chapitre, nous validons les différentes approches d'estimations proposées dans les précédents chapitres. Pour cela, nous proposons l'analyse de deux signaux synthétiques. Le premier décrit la vibration d'un système masse-ressort-amortisseur en régime stationnaire. Il servira à comparer l'estimation H_∞ et l'estimation de Kalman sans faire d'hypothèses sur les matrices dynamiques du modèle d'état. Les matrices dynamiques, dont il est question ici, sont définies à partir de l'équation différentielle du système. Le deuxième signal représente la vibration d'un réducteur à engrenage fonctionnant en régime variable. Celui-ci permettra d'évaluer les approches proposées dans le chapitre 2 pour décrire le signal de vibration dans l'espace d'état. Ces dernières permettent de décrire la dynamique d'évolution du signal vibratoire lorsque celle-ci est inconnue.

Sommaire

4.1	Exemple 1 : signal de déplacement d'un système dynamique . . .	60
4.1.1	Modèle d'état du système masse-ressort-amortisseur	61
4.1.2	Génération du signal de vibration	62
4.1.3	Résultats et discussions	65
4.1.4	Conclusion	72
4.2	Exemple 2 : signal de vibration non-stationnaire	73
4.2.1	Génération du signal synthétique	74
4.2.2	Résultats et discussions	78
4.2.3	Conclusion	83
4.3	Conclusion	84

4.1 EXEMPLE 1 : SIGNAL DE DÉPLACEMENT D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE

Considérons un système dynamique modélisé par des éléments mécaniques élémentaires, masse, ressort, amortisseur, comme schématisé sur la figure 4.1.

Nous supposons que ce système, soumis à une excitation $u(t)$, génère un déplacement $d(t)$. L'équation du mouvement de ce système, bien connue, s'écrit grâce au principe fondamental de la dynamique comme :

$$\ddot{d}(t) + 2\xi\omega_n\dot{d}(t) + \omega_n^2 d(t) = u(t) \quad (4.1)$$

avec

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation naturelle du système ;
- $\xi = c/(2m\omega_n)$ le facteur d'amortissement.

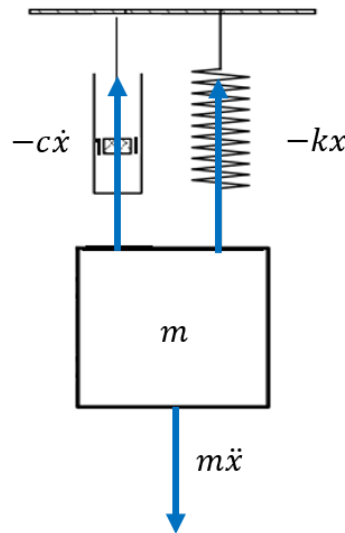


FIGURE 4.1 – Système masse-ressort-amortisseur : m pour la masse, k pour la raideur du ressort et c pour le coefficient d'amortissement.

En supposant que le système est soumis uniquement à son propre poids dû à la gravitation, c'est-à-dire $u(t) \approx 0$, la réponse de ce système s'exprime par un sinus amorti d'amplitude maximale A telle que :

$$d(t) = A \exp(-\xi\omega_n t) \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (4.2)$$

Nous mesurons sur ce système la vitesse $\dot{d}(t)$ entachée d'un bruit de mesure $v(t)$. Soit $y(t)$ cette mesure exprimée par :

$$y(t) = \dot{d}(t) + v(t) \quad (4.3)$$

À partir de cette mesure, nous souhaitons estimer le déplacement d de la masse. Pour cela, nous proposons d'utiliser les estimateurs H_∞ et de Kalman.

4.1.1 Modèle d'état du système masse-ressort-amortisseur

A partir de l'équation différentielle 4.1 nous pouvons écrire que :

$$\begin{pmatrix} \dot{d}(t) \\ \ddot{d}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.4)$$

Le passage du modèle continu au modèle discret se fait grâce à une discrétisation de l'équation 4.1. Nous suggérons une discrétisation de la variable d par une différence finie arrière. La discrétisation de la vitesse et de l'accélération donne ceci :

$$\dot{d}(t) \rightsquigarrow \frac{d[n] - d[n-1]}{T_e} \quad (4.5)$$

$$\ddot{d}(t) \rightsquigarrow \frac{d[n+1] - 2d[n] + d[n-1]}{T_e^2} \quad (4.6)$$

avec T_e la période d'échantillonnage. À partir de là, nous retrouvons le modèle d'état discret du système masse-ressort-amortisseur comme ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} d[n] \\ d[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d[n-1] \\ d[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T_e^2 \end{pmatrix} u[n] \quad (4.7)$$

$$y[n] = f_e \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d[n-1] \\ d[n] \end{pmatrix} + v[n] \quad (4.8)$$

Ce dernier s'écrit de manière symbolique comme :

$$x[n+1] = Fx[n] + Bu[n] \quad (4.9)$$

$$y[n] = hx[n] + v[n] \quad (4.10)$$

avec

- $x[n] = \begin{pmatrix} d[n-1] & d[n] \end{pmatrix}^T$ est le vecteur d'état discret ;
- $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ est la matrice d'état du modèle discret sachant que $\alpha = -1 + 2T_e\xi\omega_n$, $\beta = 1 - \alpha - (T_e\omega_n)^2$;
- $B = \begin{pmatrix} 0 & T_e^2 \end{pmatrix}^T$ un vecteur de pondération du bruit d'état.

Nous rappelons que $R = E\{v[n]v^T[n]\}$ est la variance du bruit de mesure. Quant à la variance pondérée du bruit d'état elle est évaluée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Q &= E\{Bu[n]u^T[n]B^T\} \\ &= BE\{u[n]u^T[n]\}B^T \\ &= BqB^T \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec $q = E\{u[n]u^T[n]\}$ est la variance du bruit u .

4.1.2 Génération du signal de vibration

Le signal de mesure y présenté dans cette section est généré avec $N = 2000$ échantillons, $T_e = 0.01$ s la période d'échantillonnage, $\xi = 0.0255$, $\omega_n = 15.708$ rad/s et $f_n = 2.5$ Hz.

Nous souhaitons évaluer l'impact sur les estimateurs d'une coloration du bruit de mesure et d'une incertitude sur la matrice d'état.

Le signal est généré selon le modèle de la figure 4.2 où nous retrouvons la fonction de transfert B qui permet de faire la synthèse d'un bruit coloré v . Ce bruit obtenu à partir d'un bruit blanc Gaussien n est de nature haute fréquence. Dans le cadre des machines tournantes Il peut être caractéristique des phénomènes haute fréquence générés par les engrenages et les roulements.

La fonction de transfert B est définie par l'expression ci-dessous :

$$B(z) = \frac{1 - 0.2 \times z^{-1}}{1 + z^{-1} + z^{-2}} \quad (4.12)$$

dans laquelle z est un nombre complexe qui fait référence à la variable de la transformée en Z . La réponse fréquentielle de cette fonction de transfert est affichée sur

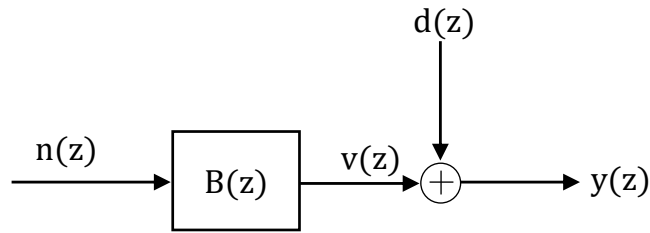


FIGURE 4.2 – Modèle de génération du signal de mesure.

la figure 4.3 ci-dessous. Elle montre bien une bande passante en haute fréquence.

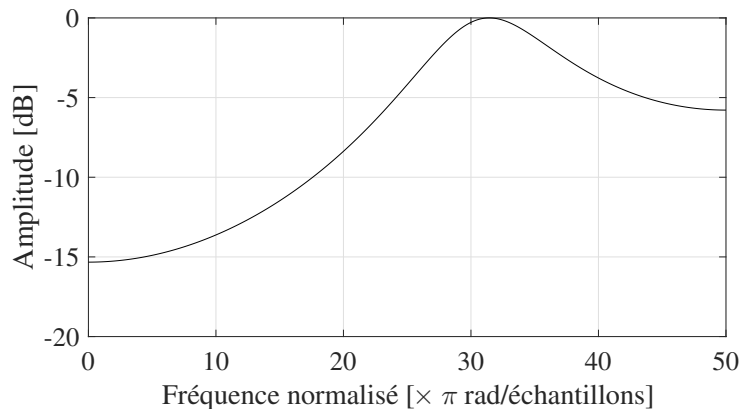


FIGURE 4.3 – Spectre du bruit coloré v .

Nous proposons dans cette simulation d'estimer le signal de déplacement à partir du modèle d'état décrit par les équations 4.7 et 4.8 en utilisant l'estimateur H_∞ et l'estimateur de Kalman. Trois situations seront analysées dans ce premier exemple :

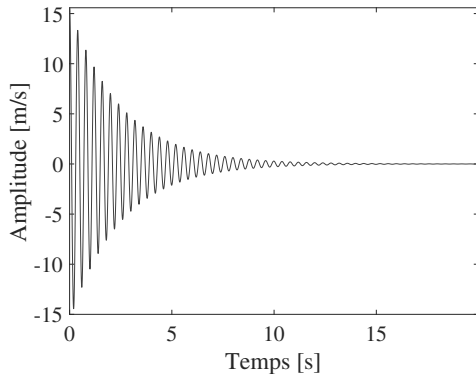
1. Le signal de vitesse est entaché d'un BBG de $RSBe = -5$ dB ;
2. Le signal de vitesse est entaché d'un BC de $RSBe = -5$ dB ;
3. Le modèle décrivant la dynamique du signal de vitesse est connu avec une incertitude. Nous supposons ici que l'erreur commise est de 2% sur la valeur de α . Cette dernière se traduit par un déphasage entre le signal mesuré et le signal modélisé dans l'espace d'état. Par ailleurs, l'incertitude sur α se traduit par une modification de la fréquence centrale de chacun des estimateurs. À partir de l'expression de α définie plus haut, la valeur de la fréquence centrale passe à 2.44 Hz alors que la fréquence d'intérêt est de 2.5 Hz.

Pour des raisons de simplicité, nous notons dans la suite de cette section $y_{sim,1}$, $y_{sim,2}$ et $y_{sim,3}$ les signaux correspondants respectivement aux situations 1, 2 et 3. Les paramètres utilisés pour générer les signaux et construire le modèle d'état sont décrits dans le tableau 4.1 ci-dessous.

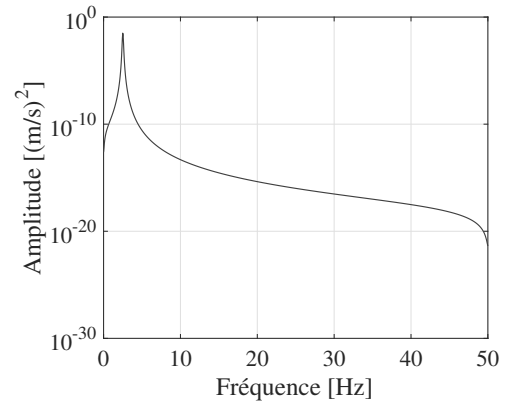
	$y_{sim,1}$	$y_{sim,2}$	$y_{sim,3}$
α	-0.9920	-0.9920	-1.012
v	BBG	BC	BC

TABLEAU 4.1 – Signaux générés : $y_{sim,1}$ signal de référence, $y_{sim,2}$ avec coloration du bruit v et $y_{sim,3}$ avec coloration du bruit v et perturbation du paramètre α de la matrice F . Le RSB est de -5 dB.

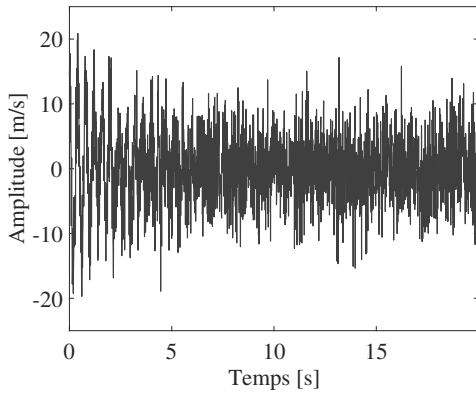
La figure 4.4 représente les signaux synthétiques générés pour cet exemple. Le signal $y_{sim,3}$ n'est pas affiché sur cette figure car il est identique au signal $y_{sim,2}$ en terme d'expression analytique. Cependant, ils diffèrent au niveau de leur représentation dans l'espace d'état. C'est pour cette raison que nous avons désigné expressément par $y_{sim,3}$ le signal de vitesse lorsque la matrice dynamique F est connue avec incertitude.



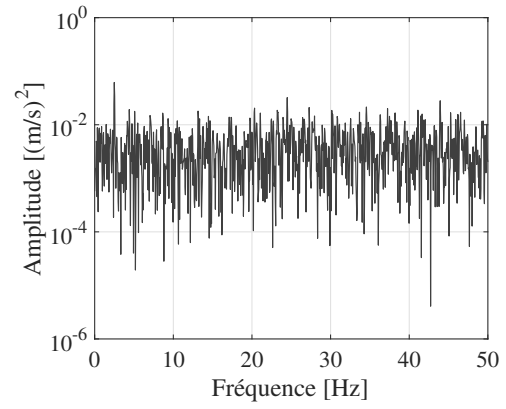
(a) Signal de vitesse non bruité à



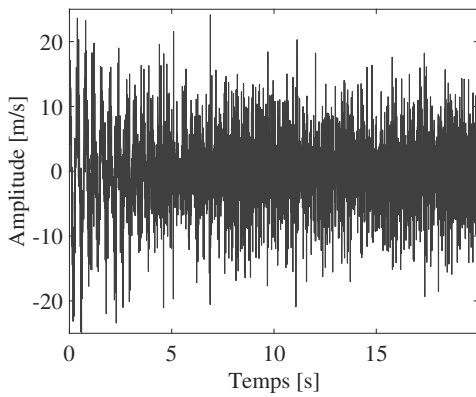
(b) Spectre d'amplitude du signal de vitesse



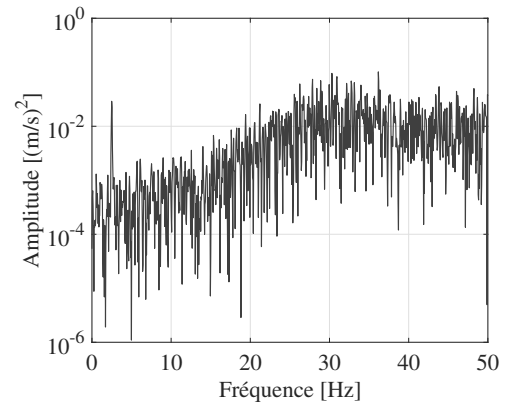
(c) y_I : signal de vitesse noyé dans un BBG



(d) Spectre d'amplitude de y_I



(e) y_{II} : signal de vitesse noyé dans un BC



(f) Spectre d'amplitude de y_{II}

FIGURE 4.4 – Signal synthétique généré avec un RSBe de -5 dB.

4.1.3 Résultats et discussions

4.1.3.1 Évaluation qualitative

Les deux estimateurs ont été mis en œuvre pour l'estimation du signal de déplacement dans les trois situations décrites plus haut. Les paramètres d'initialisation et de réglage de ces estimateurs ont été choisis arbitrairement et sont présentés dans le tableau 4.2 ci-dessous. La valeur exacte de R lorsque le bruit est un BBG ou un BC est de 24.

	R	q	γ_0	μ	β	$x[1]$	$P[1]$
BBG	10^{-1}	10^{-4}	μR^{-1}	0.95	1.01	$O_{2 \times 1}$	$I_{2 \times 2}$
BC							

TABLEAU 4.2 – Paramètres d'initialisation et de réglage des estimateurs.

Il est important de notifier que les estimations H_∞ dans cette section ont été obtenues grâce à l'algorithme 4 présenté au chapitre 3 à la section 3.5.4. Cet algorithme permet de fixer γ et R .

La figure 4.5 représente l'estimation H_∞ et celle de Kalman du signal de déplacement d et également leur spectre d'amplitude lorsque $y = y_{sim,1}$. La représentation temporelle de ces deux estimations (figure 4.5 (a,b,c)) montre que l'estimation de Kalman génère une erreur qui s'amplifie avec le nombre d'échantillons. En effet, nous observons une surestimation du déplacement d . Quant à l'estimation H_∞ , elle présente une erreur beaucoup plus importante sur la première période du signal. Cependant, elle reste plus proche du signal original peu importe le nombre d'échantillons.

Dans le domaine fréquentiel (figure 4.5 (d)), nous observons que l'estimateur de Kalman atténue faiblement le bruit additif et a une large bande passante. Par conséquent, il est moins sélectif. Pour ce qui est de l'estimateur H_∞ , il a une bande passante plus étroite. Ce qui lui permet d'être plus sélectif et de mieux atténuer le bruit additif que l'estimateur de Kalman.

À l'observation des résultats fournis on peut lister quelques uns des avantages et inconvénients quant à la largeur de la bande passante des estimateurs :

- Lorsqu'un estimateur a une bande étroite, il offre la possibilité d'extraire deux composantes ayant des fréquences proches l'une de l'autre. Ces composantes dont il est question sont des signaux qui portent peu d'informations. Nous entendons par là des signaux confinés dans une bande de fréquence très étroite. Un autre avantage de ce type d'estimateur est qu'il évite l'infiltration de composantes non désirées ;
- D'un autre côté, un estimateur à bande large permet d'extraire des signaux appelés à large bande ou des signaux riches en informations. Ces types de

signaux sont caractéristiques de la vibration des organes tournantes ; notamment les engrenages et les roulements. Il en résulte donc que un tel estimateur a l'inconvénient d'atténuer faiblement les signaux qui ne sont pas d'intérêts.

La figure 4.6 affiche l'estimation fournie par l'estimateur de Kalman et l'estimateur H_∞ lorsque $y = y_{sim,2}$. Nous observons que l'estimateur de Kalman est plus proche du signal original que précédemment. Par contre au niveau fréquentiel, les deux estimateurs ont le même comportement lorsque le bruit est blanc, Gaussien et centré.

La figure 4.7 présente l'estimation fournie par l'estimateur de Kalman et l'estimateur H_∞ lorsque $y = y_{sim,3}$. Dans le domaine temporel (figure 4.7 (a), (b), (c)), nous observons un déphasage entre les estimations et la courbe originale.

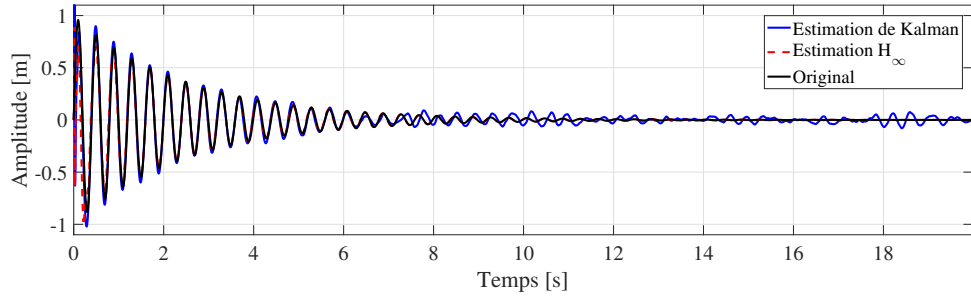
Cependant, l'estimation H_∞ est plus proche de la courbe originale que l'estimation de Kalman. En effet, l'estimation de Kalman est quasiment en opposition de phase par rapport à la courbe originale.

Sur le spectre d'amplitude des estimations (figure 4.7 (d)), nous remarquons que l'estimation H_∞ est plus proche de l'amplitude du pic d'intérêt localisé à la fréquence 2.5 Hz que l'estimation de Kalman. Par conséquent, l'estimateur H_∞ est moins sensible (ou plus robuste) aux incertitudes sur le modèle d'état. Cependant, en étant moins sensible à l'incertitude sur le modèle, l'estimateur H_∞ atténue moins efficacement le bruit additif.

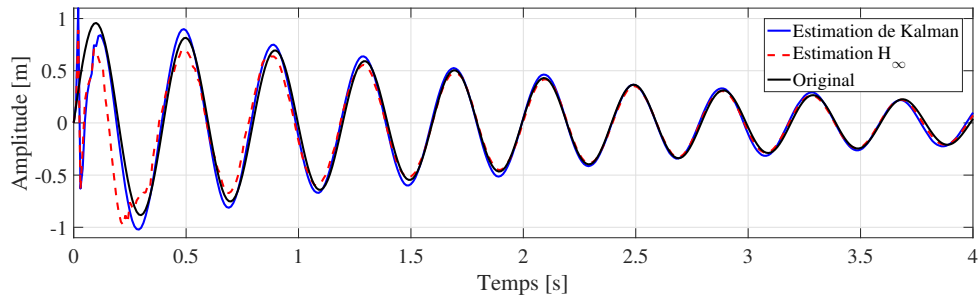
Cette analyse ne fait qu'appuyer les travaux de G. Zames. Il présente en 1981 [87] une analyse de la sensibilité des estimateurs Wiener–Hopf–Kalman. Et ce, dans le cadre de l'estimation d'une commande optimale lorsqu'il existe une incertitude 1) sur les paramètres du modèle d'état (ou *Plant Uncertainties*) et 2) sur la nature des bruits du modèle d'état (ou *Model Disturbances*). Il est sans doute l'un des premiers auteurs à introduire une optimisation H_∞ dans la théorie de l'estimation de la commande optimale. Cependant, très peu de travaux ont été menés en ce qui concerne l'influence des paramètres R et q sur la qualité des estimations H_∞ et Kalman. Nous restituons dans ce qui suit les résultats obtenus pour différentes valeurs de R et q .

4.1.3.2 Évaluation quantitative

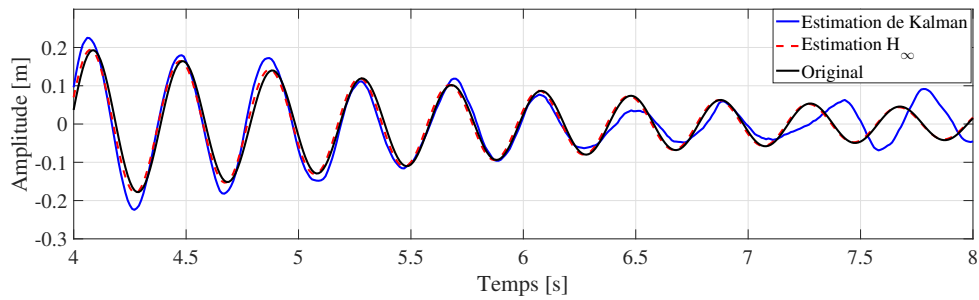
En terme d'évaluation quantitative, nous avons comparé les RSBs fournis par les deux estimateurs lorsque R et q prennent les valeurs respectives $\{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-1}, 10^{1.5}\}$. La valeur $10^{1.5}$ correspond à la variance du signal bruité. Nous supposons dans cette investigation que $R < 10^{1.5}$ et $q < 10^{1.5}$. Le tableau 4.3 contient les RSBs obtenus après 200 simulations monte-carlo pour chaque couple (R, q) et ce lorsque $y = y_{sim,1}$, $y = y_{sim,2}$ et $y = y_{sim,3}$. Le tableau affiche beaucoup de valeur de RSBs inférieur au RSB_e. Avec Kalman, nous avons 10 valeurs sur 25 de (R, q) pour lesquelles le RSBs est inférieur au RSB_e. Cependant, avec l'estimateur H_∞ , nous avons approximativement 6 valeurs sur 25 où le RSBs est inférieur au RSB_e.



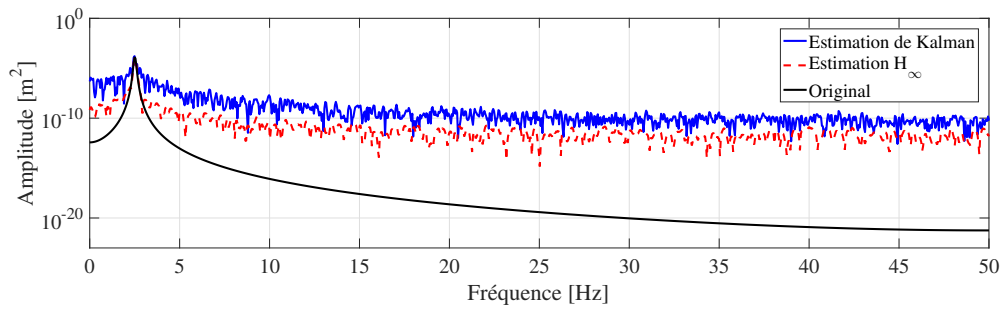
(a) Estimation de d lorsque $y = y_{sim,1}$



(b) Zoom sur l'estimation de d entre 0 et 4 s.

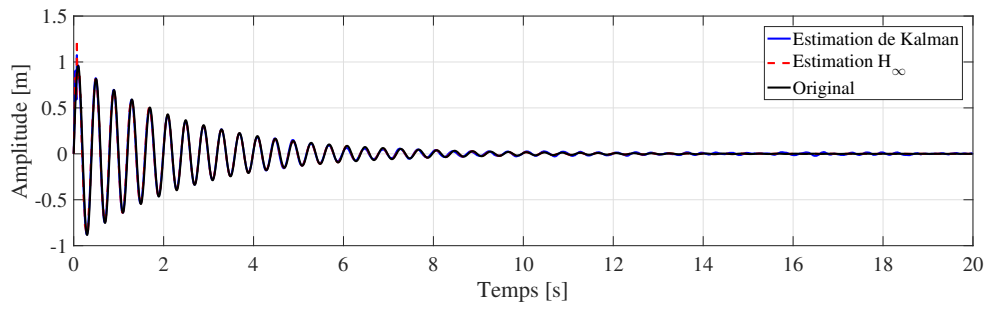


(c) Zoom sur l'estimation de d entre 4 et 8 s.

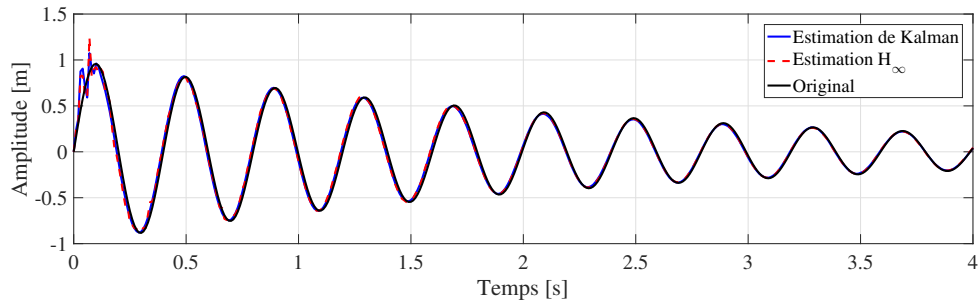


(d) Spectre d'amplitude de l'estimation (a).

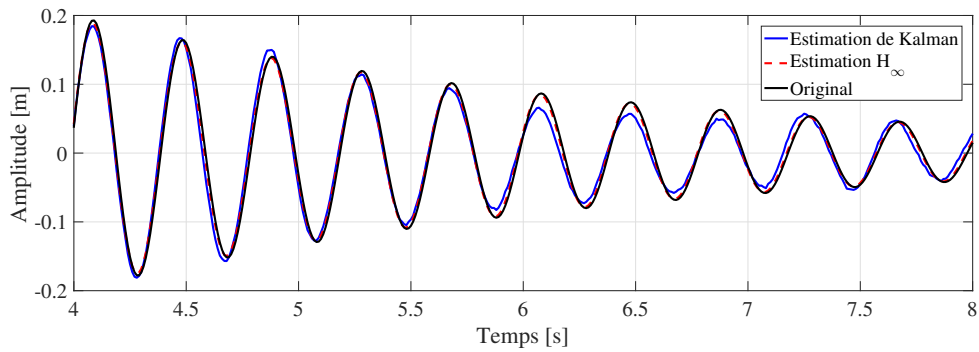
FIGURE 4.5 – Estimation du signal de déplacement par l'estimateur H_∞ et Kalman à partir du signal $y = y_{sim,1}$.



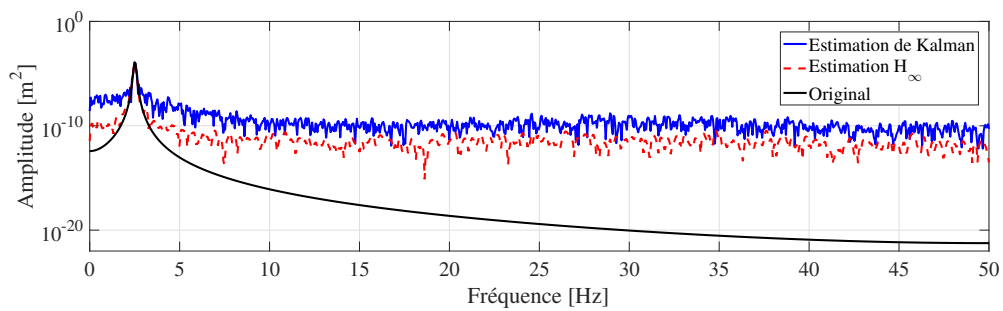
(a) Estimation de d lorsque $y = y_{sim,2}$.



(b) Zoom sur l'estimation de d entre 0 et 4 s.

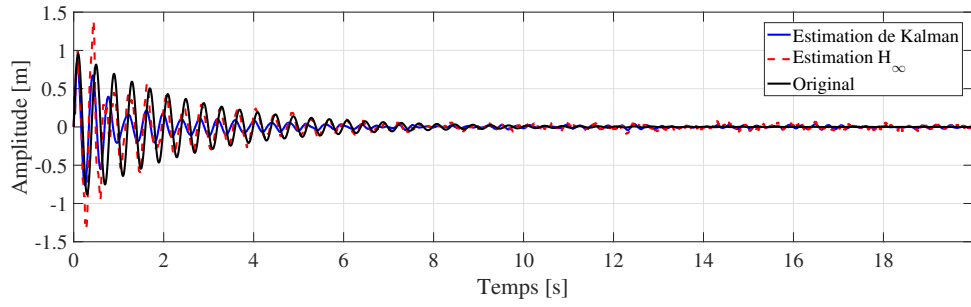


(c) Zoom sur l'estimation de d entre 4 et 8 s.

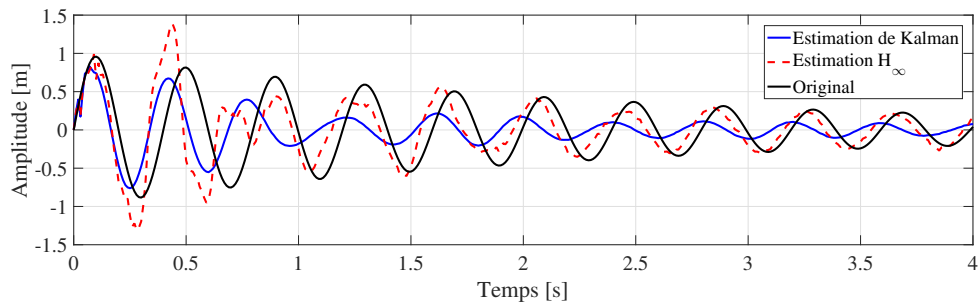


(d) Spectre d'amplitude de l'estimation (a).

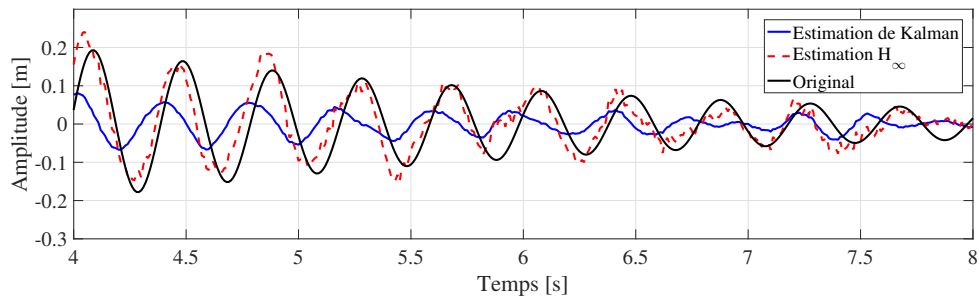
FIGURE 4.6 – Estimation du signal de déplacement par l'estimateur H_∞ et Kalman à partir du signal $y = y_{sim,2}$.



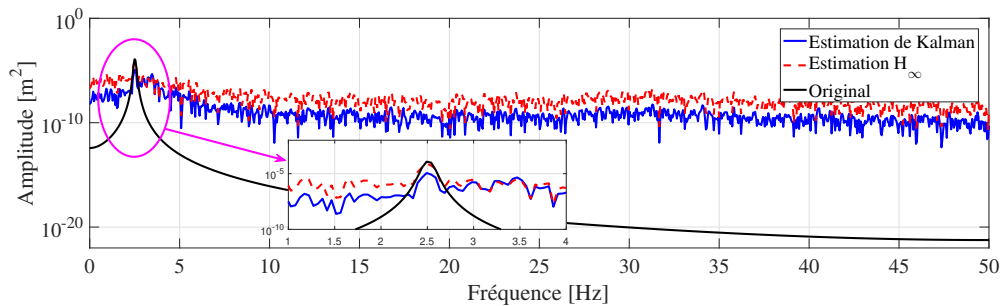
(a) Estimation de d lorsque $y = y_{sim,3}$



(b) Zoom sur l'estimation de d entre 0 et 4 s.



(c) Zoom sur l'estimation de d entre 4 et 8 s.



(d) Spectre d'amplitude de l'estimation (a).

FIGURE 4.7 – Estimation du signal de déplacement par l'estimateur H_∞ et Kalman à partir du signal $y = y_{sim,3}$.

Le H_∞ permet d'accroître en moyenne la qualité de l'estimation d'au moins 5 dB le RSBs par rapport à Kalman. Cet écart se creuse (> 8 dB) lorsque le bruit est coloré. En revanche, l'incertitude sur la matrice d'état affecte fortement les estimateurs mais est mieux encaissée avec le H_∞ . Le tableau montre également qu'il peut être recommandé de choisir le couple q, R tel quel $q/R > 1$ pour garantir un RSBs supérieur au RSB_e.

TABLEAU 4.3 – Évaluation quantitative de l'estimateur H_∞ et de Kalman pour différentes valeurs de R et q lorsque $y = y_{sim,1}$, $y = y_{sim,2}$ et $y = y_{sim,3}$ et $RSBe = -5$ dB.

		$y_{sim,1}$					$y_{sim,2}$					$y_{sim,3}$				
	$R \backslash q$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$10^{1.5}$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$10^{1.5}$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$10^{1.5}$
Kalman	10^{-4}	-4.62	0.10	5.58	12.08	25.47	-2.70	5.12	13.35	21.36	35.25	-3.03	2.53	0.73	-0.31	-0.43
	10^{-3}	-7.43	-4.63	0.09	5.49	23.78	-7.06	-2.68	5.13	13.11	33.96	-7.21	-3.02	2.56	0.73	-0.41
	10^{-2}	-8.21	-7.47	-4.63	0.07	16.29	-7.96	-7.06	-2.71	5.15	25.85	-8.12	-7.19	-3.02	2.55	-0.37
	10^{-1}	-8.37	-8.20	-7.46	-4.63	8.58	-8.08	-7.98	-7.03	-2.73	17.29	-8.22	-8.12	-7.22	-3.03	-0.11
	$10^{1.5}$	-8.37	-8.37	-8.37	-8.30	-4.62	-8.06	-8.08	-8.08	-8.05	-2.70	-8.25	-8.26	-8.26	-8.20	-3.02
$\frac{1}{25} \sum_{i,j}^5 RSBs^{Kalman}[i, j]$		-0.25					3.39					-3.47				
H_∞	10^{-4}	9.15	15.15	15.69	18.47	18.16	18.06	27.14	29.20	28.72	26.94	1.98	1.32	0.88	1.72	3.11
	10^{-3}	1.46	8.95	14.71	17.76	18.11	7.31	17.89	26.41	28.56	26.70	0.21	1.99	1.54	1.72	3.11
	10^{-2}	-3.91	1.29	8.04	12.48	17.92	-1.51	7.13	16.60	21.93	26.65	-5.80	0.19	1.99	1.84	3.09
	10^{-1}	-6.41	-4.01	0.49	3.97	12.55	-5.57	-1.75	5.82	11.11	21.80	-8.27	5.85	-0.07	2.05	3.01
	$10^{1.5}$	-8.09	-8.11	-8.11	-8.12	-7.17	-8.06	-8.12	-8.11	-8.13	-6.76	-8.28	-8.29	-8.31	8.29	-8.30
$\frac{1}{25} \sum_{i,j}^5 RSBs^{H_\infty}[i, j]$		5.62					12.00					-1.26				

4.1.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons présenté un exemple didactique afin d'évaluer la performance des deux estimateurs, celui de Kalman et celui reposant sur une approche H_∞ . Nous retenons que :

- l'estimateur H_∞ proposé dans cette thèse fournit globalement de meilleures performances que l'estimateur de Kalman quelque soit la nature statistique du bruit de mesure ;
- L'estimateur H_∞ est moins sensible aux incertitudes de modèle que l'estimateur de Kalman ;
- L'estimateur H_∞ est aussi très sélectif en terme de bande passante et permet globalement de mieux atténuer le bruit qui entache le signal d'intérêt ;
- Lorsque les statistiques du bruit sont choisies arbitrairement, nous remarquons que l'estimateur H_∞ fournit globalement une estimation de meilleure qualité contrairement à l'estimateur de Kalman. L'estimateur H_∞ fournit un accroissement de gain moyen par rapport à l'estimateur de Kalman de 5.87 dB, 8.61 dB et 2.21 dB respectivement lorsque $y = y_{sim,1}$, $y = y_{sim,2}$ et $y = y_{sim,3}$.

Le deuxième exemple que nous présentons dans la section suivante est dédié à l'analyse d'un signal vibratoire non-stationnaire. Ce signal est caractéristique de la vibration des réducteurs à engrenage. La dynamique de ce signal étant difficile à décrire dans l'espace d'état, nous avons suggéré dans le chapitre 2 de projeter l'enveloppe de chaque composante du signal vibratoire sur la base canonique orthogonale fonction des puissances du temps. Cette modélisation est combinée avec une estimation H_∞ des coefficients de la base. Cette approche conduit à ce que nous avons baptisé '*estimateur BCOH $_\infty$* '. Cet estimateur est différent de l'estimateur VK (Vold-Kalman) tant sur la modélisation de l'enveloppe que sur l'estimation de cette dernière. Le but de cet exemple est d'évaluer la performance des deux outils VK et BCOH $_\infty$ à estimer des composantes d'engrènement modulées en amplitude et en phase.

4.2 EXEMPLE 2 : SIGNAL DE VIBRATION NON-STATIONNAIRE

La plupart des signaux de vibrations issus de machines tournantes peuvent être considérés comme la somme de deux contributions ayant des propriétés statistiques différentes : l'une est déterministe et l'autre est aléatoire. Pour les signaux provenant de réducteurs à engrenages, la contribution déterministe est principalement dominée par les composantes d'engrènement et celle aléatoire par les composantes du roulement et du bruit additif. Lorsqu'il s'agit d'établir un diagnostic de certains organes mécaniques des machines tournantes, par exemple les engrenages et les roulements, la séparation ou l'estimation de ces deux contributions est d'un intérêt capital. À notre connaissance, la poursuite d'ordre n'a jamais été exploitée pour ces types d'applications. Cette nouvelle approche vient combler certaines limitations de la poursuite d'ordre initialement proposée par Vold et *al.*.

Dans cette section, nous proposons d'analyser un signal synthétique non-stationnaire constitué de composantes d'engrènement, de composantes de roulements et d'un bruit additif. Dans cette simulation, nous estimons les composantes d'engrènement avec les deux estimateurs présentés dans les précédents chapitres. Nous rappelons que ce sont :

1. L'estimateur Vold-Kalman ou VK. Il correspond à l'estimateur de Kalman lorsqu'il est mis en œuvre à partir du modèle d'état construit avec l'hypothèse de Vold ;
2. Et l'estimateur BCOH $_{\infty}$. C'est l'estimateur H_{∞} mis en œuvre à partir du modèle d'état construit avec une approximation de l'enveloppe par des polynômes de la base canonique orthogonale.

Dans cette section, nous nous intéressons à estimer uniquement la première composante d'engrènement.

Nous rappelons que l'intérêt de l'estimation d'une telle composante, et des autres composantes d'engrènement par la suite, est double :

- établir un diagnostic de l'état des engrenages grâce à une démodulation autour de ces composantes ;
- établir un diagnostic de l'état des roulements à partir d'une analyse du signal résiduel. Ce signal est obtenu après la suppression des composantes d'engrènement significatives dans le signal mesuré.

Ces deux aspects seront discutés dans le chapitre 5 où nous validons notre approche avec des signaux expérimentaux.

4.2.1 Génération du signal synthétique

Nous considérons le signal synthétique qui modélise la vibration d'un réducteur à engrenage à deux étages et de paliers de roulement. Ce signal s'écrit sous la forme suivante :

$$y[n] = \underbrace{y_e[n]}_{\text{Déterministe}} + \underbrace{y_r[n] + b[n]}_{\text{Aléatoire}} \quad (4.13)$$

dans laquelle

- y_e représente la contribution de l'engrenage ;
- y_r représente la contribution du roulement ;
- b représente le bruit additif provenant des autres parties du système (structure, arbres, capteurs $\dots$) ;
- et $n = 1, 2, \dots, N$ est le nombre d'échantillons.

Chacun de ces signaux est décrit dans les sous-sections suivantes.

4.2.1.1 Modèle du signal d'engrènement

Le signal d'engrènement présenté dans cet exemple est généré à partir de l'expression ci-dessous :

$$y_e[n] = \sum_{i=1}^5 y_{e,i}[n] \quad (4.14)$$

$$= \chi(f_r[n]) \sum_{i=1}^5 a_i[n] \cos(o_i \times \theta[n] + \varphi_i[n]) \quad (4.15)$$

dans laquelle

- $y_{e,i}$ représente la i^e composante d'engrènement ;
- a_i et φ_i sont respectivement les fonctions de modulation d'amplitude et de phase de la i^e composante ;
- $\theta[n] = T_e \sum_{k=1}^n 2\pi f_r[k]$ est la position angulaire de l'arbre tournant à la fréquence f_r . T_e est la période d'échantillonnage et est l'inverse de la fréquence d'échantillonnage $f_e = 24$ kHz ;
- $\chi(f_r[n])$ est la fréquence de rotation normalisée telle que $\chi(f_r[n]) = f_r[n] / \max(f_r[n])$. Cette fonction modélise la modulation du signal due à la variation de la fréquence de rotation ;

- et α_i correspond à l'ordre i du signal de vibration. Il prend respectivement les valeurs suivantes : Z_1 , $2Z_2$, $3Z_1$, $\text{ratio} \times Z_2$ et $2\text{ratio} \times Z_2$.

Z_1 est le nombre de dents de la roue tournant à f_r et est égal à 27. Quant à Z_2 , il est égal à 47 et correspond au nombre de dents de la roue tournant à $\text{ratio} \times f_r$ avec $\text{ratio} = Z_2/Z_1$.

Les fonctions de modulations d'amplitude et de phase sont définies par les équations 4.16 et 4.17 ci-dessous :

$$\alpha_i[n] = 1 + \sum_{p=1}^4 \alpha_p^{(i)} \cos(\lambda_p^{(i)} \theta[n]) \quad (4.16)$$

$$\varphi_i[n] = \sum_{p=1}^2 \beta_p^{(i)} \sin(\lambda_p^{(i)} \theta[n]) \quad (4.17)$$

Les coefficients de modulation, α et β , sont compris entre 0 et 1. Ceux choisis pour la génération du signal synthétique sont présentés dans le tableau 4.4 ci-dessous.

i	1	2	3	4	5
$\alpha_1^{(i)}$	0.8	0.9	0.8	0.7	0.6
$\lambda_1^{(i)}$	1	1	1	ratio	ratio
$\beta_1^{(i)}$	0.28	0.32	0.16	0.12	0.09
$\alpha_2^{(i)}$	0.7	0.19	0.16	0.5	0.16
$\lambda_2^{(i)}$	2	2	2	$2 \times \text{ratio}$	$2 \times \text{ratio}$
$\beta_2^{(i)}$	0.21	0.24	0.12	0.04	0.03
$\alpha_3^{(i)}$	0.6	0.1	0.13	0.39	0.13
$\lambda_3^{(i)}$	3	3	3	$3 \times \text{ratio}$	$3 \times \text{ratio}$
$\alpha_4^{(i)}$	0.5	0.25	0.4	0.4	0.4
$\lambda_4^{(i)}$	4	4	4	$4 \times \text{ratio}$	$4 \times \text{ratio}$

TABLEAU 4.4 – Coefficients de modulation d'amplitude ($\alpha_p^{(i)}$) et de phase ($\beta_p^{(i)}$) et la localisation des bandes latérales dans le domaine des ordres machines ($\lambda_p^{(i)}$).

Pour ce qui est de la fréquence de rotation de l'arbre d'entrée, elle est définie comme suit :

$$f_r[n] = 5 + 25 \sin\left(\pi \frac{(n-1)}{N}\right) \quad (4.18)$$

4.2.1.2 Modèle du signal de roulement

Le signal de vibration du roulement est modélisé comme suit :

$$y_r[n] = \chi(f_r[n]) \sum_i A_i s[n - \lceil T_i f_e \rceil] \quad (4.19)$$

- A_i est l'amplitude de l'impact i . Elle est aléatoire avec une distribution uniforme entre 0 et 1 ;
- T_i est l'instant d'apparition de l'impact i ;
- s est la réponse impulsionnelle de la structure du roulement ;
- et $\lceil \bullet \rceil$ représente le symbole de la partie entière.

Étant donné que le signal du roulement n'est pas exactement périodique, par conséquent, l'instant d'apparition de l'impact est modélisé par une marche aléatoire [123]. D'un point de vue mathématique, nous écrivons que $T_{i+1} - T_i = \Delta T_i$ avec ΔT_i une variable aléatoire ayant une distribution Gaussienne.

En ce qui concerne la réponse impulsionnelle de la structure du roulement, elle est modélisée par une sinusoïde qui décroît exponentiellement et s'écrit :

$$s[n] = e^{-\zeta(n-1)T_e} \sin(2\pi f_{\text{res}}(n-1)T_e) \quad (4.20)$$

avec $f_{\text{res}} = 4$ kHz la fréquence de résonance de la structure du roulement et $\zeta = 1200$ le facteur d'amortissement de la structure.

4.2.1.3 Modèle du bruit additif

Le bruit additif est généré à partir de la formule ci-dessous :

$$b[n] = 1 + \chi(f_r[n]) \times r(n) \quad (4.21)$$

dans laquelle $r(n)$ est un BBG. Le bruit b est de moyenne constante 1 et dont l'énergie est variable et modulée par la fréquence de rotation. Le niveau d'énergie E_b du bruit b est déterminé en terme de rapport signal sur bruit à l'entrée (noté RSBe et exprimé en dB) tel que :

$$E_b = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N b^2[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_e[n] + y_r[n])^2 \times 10^{\frac{-\text{RSBe}}{10}} \quad (4.22)$$

Sur la figure 4.8 nous retrouvons (a) la fréquence de rotation, (b) le signal du roulement, (c) le signal d'engrènement, (d) le bruit additif qui est ici blanc et Gaussien, (e) le signal de vibration complet et (f) la représentation temps-fréquence du signal complet.

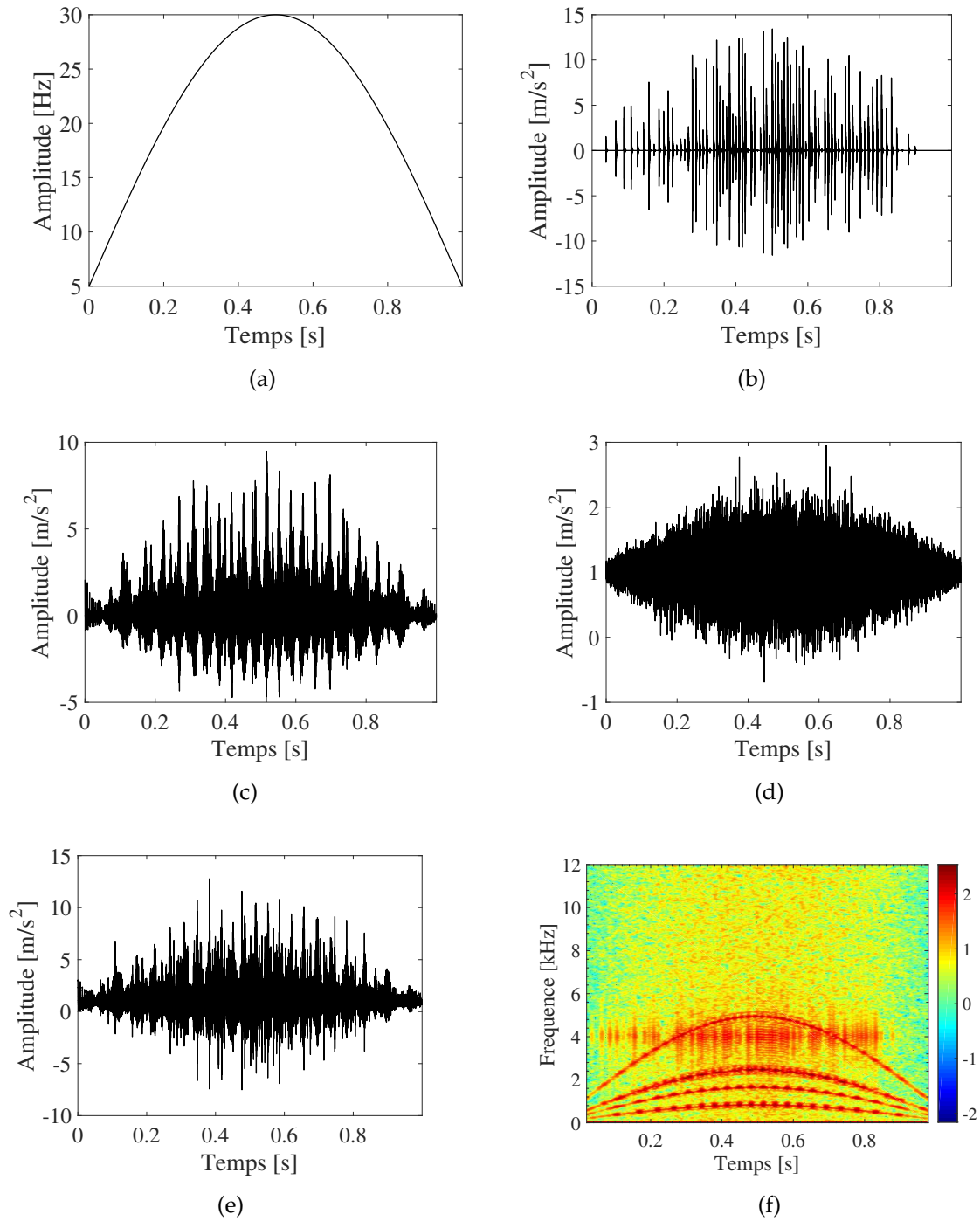


FIGURE 4.8 – Signal synthétique généré : (a) fréquence de rotation f_r , (b) signal de roulement, (c) signal d'engrènement, (d) bruit additif avec un $\text{RSBe} = 0 \text{ dB}$, (e) signal de vibration complet et (f) représentation temps-fréquence du signal complet.

4.2.2 Résultats et discussions

Les deux estimateurs ont été mis en œuvre pour l'estimation de la première composante d'engrènement localisée à l'ordre 27 avec une largeur de bande de 8 evts/rev. Ici, nous avons choisi une contrainte de lissage d'ordre 2 et une base canonique orthogonale de degré maximal égal à 2 pour la modélisation de l'enveloppe de la dite composante. Les paramètres d'initialisation et les paramètres de réglage de chaque estimateur sont présentés dans le tableau 4.5 ci-dessous.

	R	q	γ_0	β	$x[1]$	$P[1]$
VK	1	10^{-4}	0	/	$I_{4 \times 1}$	$I_{4 \times 4}$
BCOH $_{\infty}$			$0.95R^{-1}$	1.01		

TABLEAU 4.5 – Paramètres d'initialisation et de réglage des estimateurs.

En ce qui concerne l'estimation H_{∞} , nous avons utilisé l'algorithme 4 présenté au chapitre 3 à la section 3.5.4.

Les résultats fournis par les estimateurs VK et BCOH $_{\infty}$ sont affichés sur la figure 4.9. Nous observons que l'estimation VK (figure 4.9 (a)) a une dynamique similaire à celle de la composante 27. Cependant, cette estimation est très bruitée et est décalée par rapport à la courbe originale. Ce décalage est due au fait que le bruit simulé n'est pas centré (son espérance est égale à 1).

D'un autre côté, l'estimation BCOH $_{\infty}$ suit plutôt bien la dynamique de la composante d'intérêt. Par contre, entre 0 et 0.2 s cette estimation est bruitée et correspond à la phase transitoire de l'estimateur BCOH $_{\infty}$. La représentation temporelle n'est qu'une étape préliminaire à l'appréciation de la qualité des estimations obtenues. La représentation fréquentielle ou dans le domaine des ordres machines pourrait révéler des informations bien plus pertinentes.

Sur la figure 4.10, nous présentons la densité spectrale de puissance des estimations obtenues. Sur cette dernière nous observons que l'estimateur VK estime aussi bien la composante localisée à l'ordre 27 que ses modulations. Par ailleurs, nous remarquons la présence de composantes d'engrènement indésirables. Elles correspondent à l'harmonique de l'ordre 27 et à l'ordre $2 \times \text{ratio} \times Z2$. Comme nous l'avons vu dans le premier exemple de ce chapitre, l'estimateur VK atténue faiblement le bruit. Par conséquent, lorsque le bruit contient des composantes déterministes, ces dernières s'infiltreront dans l'estimation VK.

En ce qui concerne l'estimateur BCOH $_{\infty}$, il estime aussi bien l'ordre 27 que les bandes latérales. En effet, cet estimateur a une large bande passante et est très sélectif. En plus de cela, il atténue fortement le bruit indésirable notamment les composantes déterministes non prises en compte.

Il faut rappeler que l'estimation des bandes latérales autour de la composante d'engrènement est d'un intérêt crucial. En effet, ces bandes latérales (traduisant

une modulation d'amplitude et de phase) portent l'information sur l'état des engrenages. En présence d'un défaut sur un engrenage, l'estimateur VK pourrait fournir un diagnostic erroné de l'état de ce dernier.

D'un autre côté, en éliminant progressivement les composantes d'engrènement dans le signal brut, nous obtenons un signal résiduel. Grâce au théorème de superposition, nous déduisons que toutes les composantes d'engrènement seront estimées avec la même erreur que celle commise avec l'estimation de la première composante. Ces composantes peuvent se retrouver dans le signal résiduel et ainsi masquer la contribution du signal de roulement. L'analyse de ce signal, lorsqu'il contient des composantes d'engrènement, peut conduire à un diagnostic erroné de l'état du roulement.

En terme d'évaluation quantitative, nous avons comparé les RSBs fournis par les quatre estimateurs. Le RSBs est calculé comme suit :

$$RSBs = 10 \log 10 \left(\frac{\sum_{n=1}^N y_{e,1}[n]^2}{\sum_{n=1}^N (y_{e,1}[n] - \hat{y}_{e,1}[n])^2} \right) \quad (4.23)$$

avec $y_{e,1}$ la première composante d'engrènement et $\hat{y}_{e,1}$ son estimation. Après 200 simulations Monte-Carlo, les estimateurs VK et $BCOH_{\infty}$ fournissent respectivement un RSBs de -2.06 dB et de 4.11 dB.

Cette première simulation montre qu'avec une estimation $BCOH_{\infty}$ de la composante déterministe, nous obtenons un gain de performance d'environ 6.17 dB par rapport à l'estimation VK. Ce constat confirme bien les limites de l'estimateur VK lorsque les bruits du modèle d'état sont colorés par un signal haute fréquence avec des statistiques inconnues. Cette hypothèse met également en défaut l'hypothèse de Vold selon laquelle l'enveloppe a une variation lisse.

Dans la section qui suit nous évaluons l'influence des paramètres R et q sur la performance des estimateurs VK et $BCOH_{\infty}$.

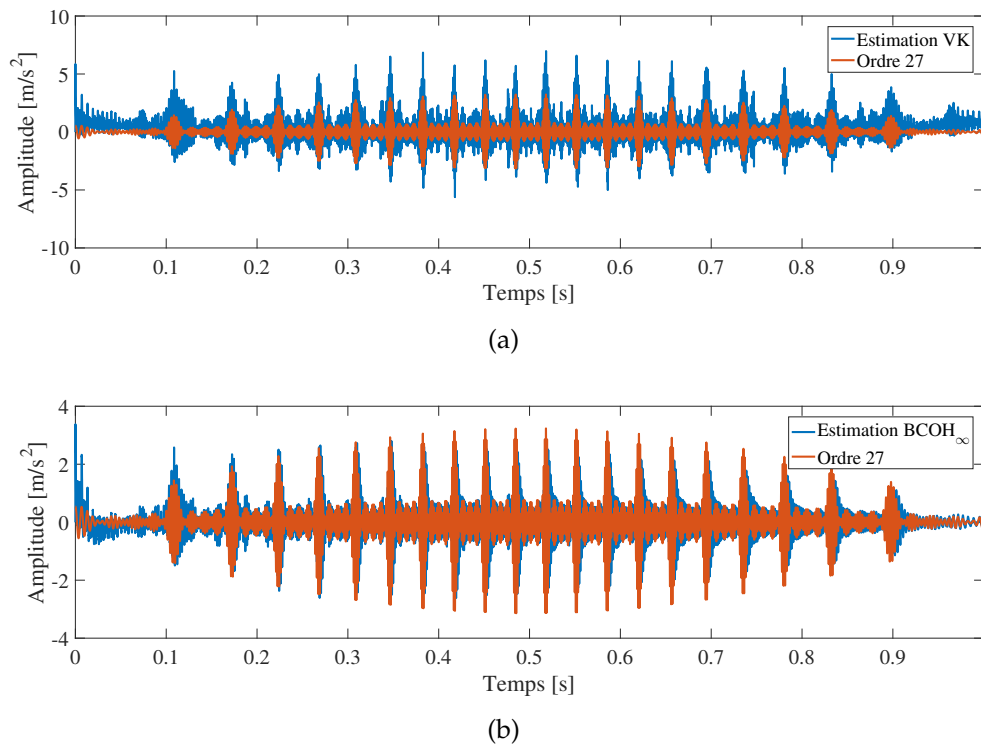
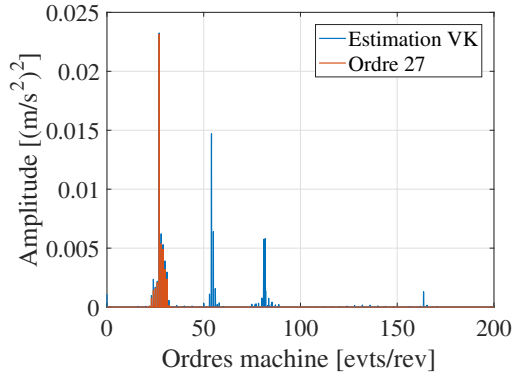
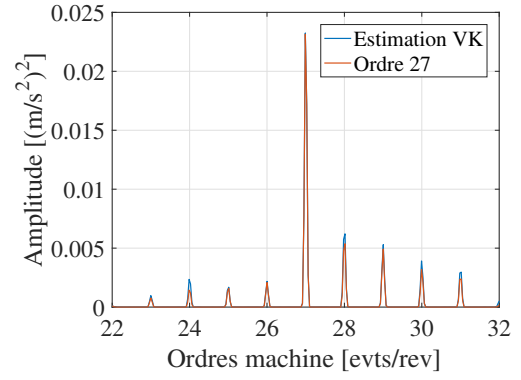


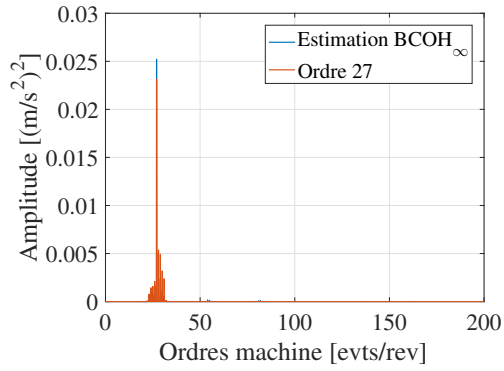
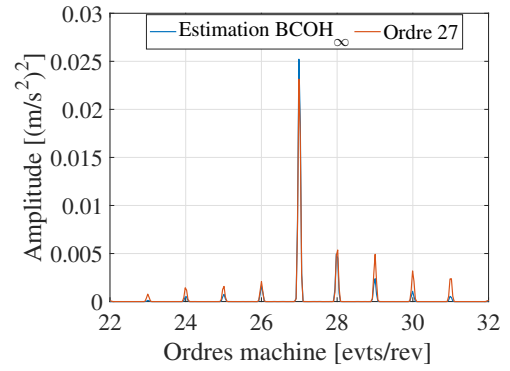
FIGURE 4.9 – Représentation temporelle de l’estimation de la 1^{re} composante d’engrènement par l’estimateur (a) VK et (b) BCOH_∞.



(a) Estimation VK



(b) zoom de (a) entre 22 et 32 evts/rev


(c) Estimation BCOH_∞


(d) zoom de (c) entre 22 et 32 evts/rev

FIGURE 4.10 – Spectre d'amplitude de l'estimation de la 1^{re} composante d'engrènement par les estimateurs VK et BCOH_∞.

4.2.2.1 Influence des paramètres R et q

Les résultats précédents ont été obtenus avec des valeurs de R et q choisis de manière arbitraire. Nous analysons ici l'influence de ces paramètres sur la performance des estimateurs VK et BCOH_∞ . Les jeux de paramètres (R, q) choisis pour mener cette étude sont les suivants : 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 10^0 et 10^1 .

Pour chaque couple (R, q) , 200 simulations Monte-carlo ont été réalisées. Le tableau 4.6 représente le RSBs obtenu à partir de chacun des estimateurs pour les différentes valeurs de R et q . Sur ce tableau, nous observons que la performance de chacun des estimateurs est influencée par le couple (R, q) . L'estimation VK est très sensible à ces paramètres et fournit un RSBs moyen de -9.07 dB. S'agissant de l'estimateur BCOH_∞ , il est moins sensible au choix des paramètres R et q et fournit un RSBs moyen de 4.10 dB. Cela est justifié par le fait que l'approche H_∞ permet de déterminer la valeur de R à partir des équations résultant de l'optimisation *minimax* pour chaque échantillon du signal.

$q \backslash R$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	Estimateur
10^{-4}	-10.61 4.10	-9.89 4.11	-8.50 4.11	-5.95 4.11	-2.06 4.11	2.59 4.12	VK BCOH_∞
10^{-3}	-10.68 4.11	-10.61 4.11	-9.89 4.11	-8.50 4.11	-5.95 4.11	-2.06 4.12	VK BCOH_∞
10^{-2}	-10.65 4.11	-10.68 4.11	-10.61 4.11	-9.89 4.11	-8.50 4.11	-5.95 4.12	VK BCOH_∞
10^{-1}	-10.66 4.12	-10.65 4.12	-10.68 4.12	-10.61 4.12	-9.89 4.11	-8.50 4.12	VK BCOH_∞
10^0	-10.66 4.10	-10.66 4.10	-10.65 4.10	-10.68 4.10	-10.61 4.12	-9.89 4.12	VK BCOH_∞
10^1	-10.66 4.04	-10.66 4.05	-10.66 4.05	-10.65 4.05	-10.68 4.11	-10.61 4.13	VK BCOH_∞

TABLEAU 4.6 – Comparaison des estimateurs Vold-Kalman et BCO- H_∞ en terme de RSBs avec un $\text{RSBe} = 0$ dB.

4.2.3 Conclusion

Dans cette section, nous avons mené une étude comparative entre les différentes approches de modélisation du signal vibratoire dans le modèle d'état. Pour cela nous avons généré un signal vibratoire synthétique non-stationnaire décrivant la vibration d'un réducteur à engrenage. Ce dernier est composé de deux étages d'engrenage et de paliers de roulement. S'agissant du signal vibratoire, il est constitué de cinq composantes d'engrènement, d'un train d'impulsion généré par la vibration d'un des paliers et d'un bruit additif.

Pour décrire le signal de vibration dans l'espace d'état, nous avons utilisé les hypothèses suivantes :

- L'enveloppe de la 1^{re} composante du signal suit une marche aléatoire d'ordre 2. Nous parlons ici d'hypothèse de Vold ;
- L'enveloppe de la 1^{re} composante du signal est projetée sur la base canonique orthogonale fonction des puissances du temps.

Les modèles d'état obtenus avec ces approches ont permis de mettre en œuvre respectivement, ce que nous avons appelé l'estimateur VH_{∞} et l'estimateur $BCOH_{\infty}$. Nous avons alors estimé la première composante d'engrènement lorsque les autres composantes ont été considérées comme faisant partie du bruit de mesure.

Lorsque les paramètres des estimateurs sont choisis de manière arbitraire, l'estimateur $BCOH_{\infty}$ présente, globalement, de meilleures performances que l'estimateur VK. Il permet d'estimer la composante d'intérêt tout en évitant au mieux l'infiltration des autres composantes d'engrènement.

4.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons comparé, d'une part les estimations H_∞ et Kalman et d'autre part les différentes approches de modélisation du signal de vibration dans l'espace d'état. Nous présentons ci-dessous une synthèse des principaux résultats obtenus dans ce chapitre :

1. L'estimateur H_∞ fournit globalement de meilleures performances que l'estimateur de Kalman peu importe la nature statistique du bruit de mesure ;
2. L'estimateur H_∞ présente de meilleures performances en présence d'incertitudes sur le modèle d'état et/ou sur la variance des bruits du modèle ;
3. En ce qui concerne les signaux vibratoires issus de machines tournantes, l'estimateur $BCOH_\infty$ fournit une bonne estimation qui se traduit par un $RSBs$ globalement supérieur au $RSBe$. Ce premier résultat confirme bien l'intérêt de l'estimateur $BCOH_\infty$ lorsqu'il s'agit d'extraire une composante fréquentielle déterministe entaché d'un bruit coloré ;
4. Quant à l'estimateur classique de Vold-Kalman, il fournit des estimations avec des infiltrations de composantes dynamiques que nous souhaitons supprimer de la composante aléatoire. Son $RSBs$ est toujours inférieur au $RSBe$ qui est égal à 0 dB. Ces résultats montrent que l'estimateur VK n'est pas adapté pour l'analyse des signaux vibratoires présentant des modulations d'amplitude et des modulations de phase fortement non-linéaires en présence de bruits colorés.

Dans le chapitre suivant, nous validons nos résultats avec des signaux réels provenant de réducteurs à engrenage.

Estimateur H_∞ – Analyse de signaux expérimentaux

DANS ce chapitre, nous appliquons les nouvelles approches proposées dans ce manuscrit pour l'analyse de signaux de vibrations réels acquis en régime variable. Deux signaux seront analysés. L'analyse du premier signal permettra de se prononcer sur l'état d'un réducteur à engrenage. L'analyse du deuxième signal a pour but d'établir un diagnostic de l'état d'un roulement.

Afin de positionner notre travail par rapport à d'autres outils de diagnostic, une étude comparative sera également effectuée en exploitant les mêmes signaux réels.

Sommaire

5.1	Introduction	87
5.2	Diagnostic de l'état des engrenages	87
5.2.1	Formulation du problème	87
5.2.2	Présentation du signal expérimental	89
5.2.3	Résultats de l'analyse du signal expérimental	92
5.3	Diagnostic de l'état des roulements	95
5.3.1	Formulation du problème	95
5.3.2	Présentation du signal vibratoire	102
5.3.3	Extraction de la composante déterministe	106
5.3.4	SES du signal résiduel	110
5.4	Conclusion	113

5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse de signaux réels de vibrations. Premièrement, nous analysons le signal de vibration d'un système d'engrenage acquis en régime variable. L'objectif de cette analyse est d'établir un diagnostic de l'état de l'engrenage. Deuxièmement, nous analysons un signal de vibration non-stationnaire provenant du réducteur d'un réacteur d'avion comportant des roulements et des engrenages. Cette analyse a pour but d'établir un diagnostic de l'état des roulements.

Pour le diagnostic des roulements nous comparons l'approche proposée dans ce manuscrit avec la moyenne synchrone, la prédiction linéaire et le cepstre.

5.2 DIAGNOSTIC DE L'ÉTAT DES ENGRENAGES

5.2.1 Formulation du problème

Le diagnostic des engrenages est bien établi dans la littérature. Il est connu que pour un engrenage en bon état le signal de vibration est périodique à la période d'engrènement. À cause de la non-linéarité du phénomène d'engrènement, le signal de vibration contient aussi des harmoniques de la fréquence d'engrènement. [124]. D'un autre côté, il n'existe pas d'engrenage parfait étant donné que les dents sont fabriquées avec des imperfections. En effet, pour des engrenages neufs il existe 1) un espace non-uniforme entre les dents et 2) des irrégularités sur la surface de contact des dents. Ces imperfections génèrent une modulation d'amplitude (MA) et une modulation de phase (MP). La MA peut être aussi causée par une variation de la charge de la machine.

Les défauts qui apparaissent fréquemment sur les engrenages sont les écaillages, les piqures, une cassure de dents, une fissure. Ces défauts, lorsqu'ils apparaissent sur une dent de manière localisée, excitent la fréquence de résonance de l'engrenage à chaque contact entre une dent saine et une dent défectueuse. Ce défaut se manifeste également par une amplification de la MA et de la MP autour des fréquences d'engrènement. Et ces modulations sont périodiques à la période de rotation de la roue défectueuse. B. Randall expose bien ce phénomène pour les réducteurs à un seul étage [3]. Le diagnostic de l'état d'un engrenage consistera à analyser :

- soit le signal de résonance ;
- soit la modulation d'amplitude et la modulation de phase.

Plusieurs outils ont été développés dans la littérature pour la détection d'un défaut sur les dents d'engrenages. Parmi ces outils nous recensons, ceux basés sur l'analyse cyclostationnaire [7, 34], l'analyse cepstrale [5, 125], l'analyse temps-

fréquence [16, 126], la démodulation autour de la fréquence de résonance [13, 78] et la démodulation autour d'une composante d'engrènement [4, 124].

La technique basée sur la démodulation autour d'une des composantes d'engrènement est sans doute la plus répandue pour la détection d'un défaut sur la denture d'un engrenage. Elle est surtout efficace pour détecter précocement les défauts d'engrenage. Elle consiste à estimer les MA et les MP. Cette technique a été initialement proposée par McFadden dans le cadre du régime stationnaire [4].

L'approche de McFadden consiste à réaliser un filtrage passe-bande autour de l'harmonique d'engrènement ayant l'amplitude la plus importante. Ensuite, le signal filtré est démodulé grâce à la transformée de Hilbert. À partir de ce signal, la MA et la MP sont facilement calculées. Toutefois la bande passante est très souvent limitée à la moitié de la bande de fréquence entre deux harmoniques d'engrènement consécutifs. Cette approche, bien qu'intuitive, n'est valable que pour des signaux stationnaires à bande étroite pour lesquels les modulations sont lentes devant la fréquence de la porteuse.

Dans cette étude, nous proposons une estimation H_∞ de la MA et de la MP à partir du modèle d'état du signal de vibration de l'engrenage. Ceci dans le cadre du régime variable. Le modèle d'état est construit grâce aux différentes approches de modélisation présentées dans le chapitre 2 de ce manuscrit. Cette nouvelle approche de démodulation est présentée sur la figure 5.1 ci-dessous. Dans cette dernière nous supposons que le signal est composé de M composantes d'engrènement modulées en amplitude et en phase. Nous rappelons ici l'écriture mathématique de ce signal ci-dessous comme cela a été présenté dans le chapitre 2 :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{i=1}^M a_i[n] \cos \left(T_e \sum_{j=1}^n \omega_i[j] + \varphi_i[n] \right) + v[n] \\ &= \sum_{i=1}^M y_i[n] + v[n] \end{aligned} \quad (5.1)$$

dans laquelle a_i et φ_i sont respectivement la i^e modulation d'amplitude et de phase, ω_i est la i^e pulsation instantanée d'engrènement en radians et v est le bruit de mesure. Sur cette figure, $\hat{a}_i$ et $\hat{\varphi}_i$ correspondent respectivement à l'estimation de a_i et φ_i obtenue après une suppression progressive des composantes $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$. Il en résulte un résidu r_i utilisé pour l'étape $i + 1$. N est le nombre de composantes d'engrènement autour desquelles se fait la démodulation avec $N \leq M$. Dans ce qui suit, nous appliquons à un signal expérimental les méthodes VK et BCOH $_\infty$ pour l'estimation des modulations dans le cadre de la détection de défaut d'engrenage en régime variable.

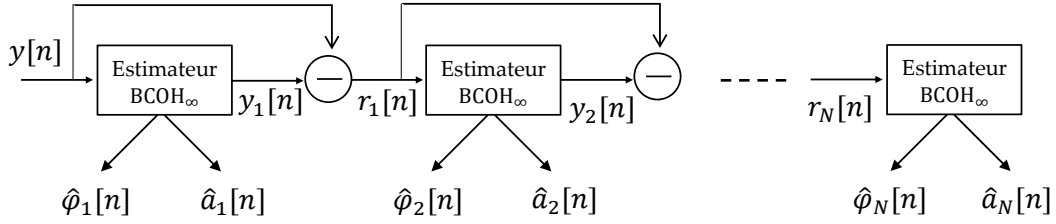


FIGURE 5.1 – Procédure d'estimation H_∞ de la modulation d'amplitude et de la modulation de phase autour de multiples composantes en régime variable.

5.2.2 Présentation du signal expérimental

Le signal présenté ici a été mesuré sur un banc d'essai du laboratoire LVA¹ de l'Université de Lyon (Figure 5.2). Ce banc est composé d'un réducteur à engrenage dans lequel le pignon d'entrée et le pignon de sortie ont respectivement $Z_1 = 45$ et $Z_2 = 24$ dents. La fréquence de rotation est estimée à partir du signal fourni par le codeur optique monté sur le banc.

Des accéléromètres ont été également placés sur la structure et sur deux des paliers de roulement afin de mesurer le signal de vibration du banc. Pour les deux scénarios (cas sain et cas défectueux), un signal d'environ 10 s a été enregistré à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 52$ kHz.

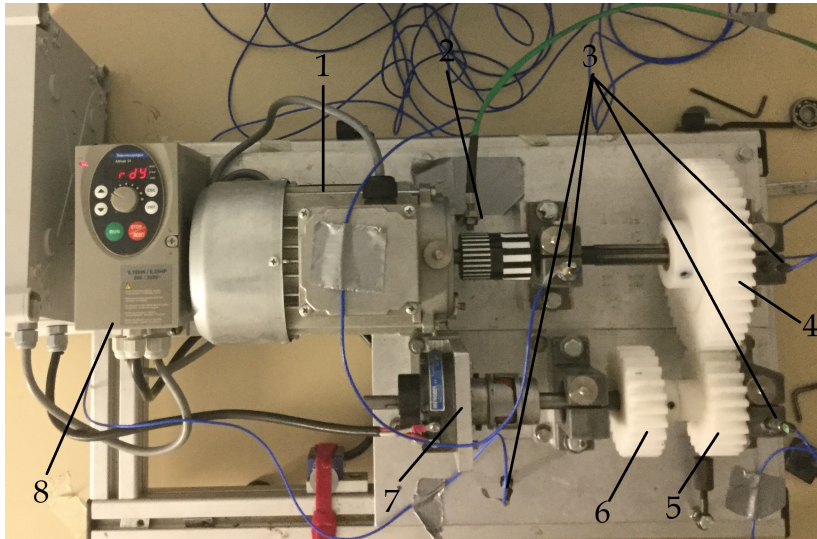


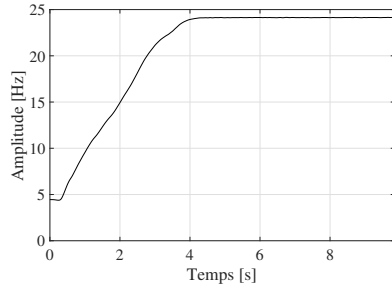
FIGURE 5.2 – Banc d'essai d'analyse vibratoire : –1 Moteur maître, –2 Codeur optique, –3 Accéléromètre, –4 Roue dentée saine, –5 roue dentée saine, –6 Roue dentée défectueuse, –7 Générateur, –8 Variateur de vitesse.

1. Laboratoire Vibration et Acoustique.

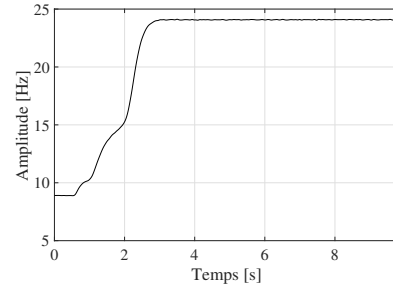
Sur la figure 5.3 sont affichés le signal de vibration, la fréquence de rotation, la représentation temps-fréquence ainsi que le spectre d'ordre du signal.

L'analyse de ce signal se fera en deux étapes :

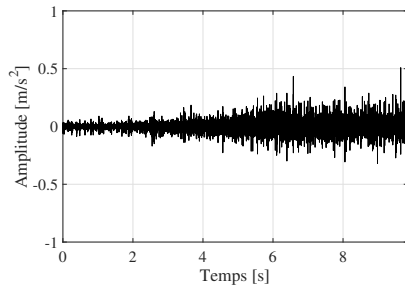
1. premièrement, nous estimons la MA et la MP dans les deux situations (cas sain et défectueux) avec les estimateurs proposés ;
2. deuxièmement, nous analysons le spectre d'ordre des estimations afin de retrouver des raies localisées à l'ordre $45/24 = 1.875$ et à ses harmoniques. Cet ordre correspond à l'ordre de rotation de l'arbre de sortie. Pour le cas défectueux, ces raies sont amplifiées.



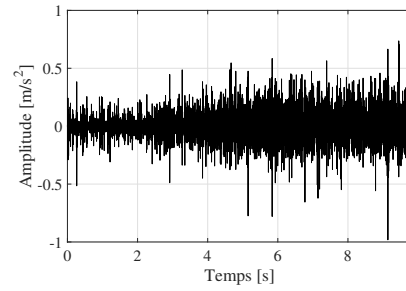
(a) Fréquence de rotation



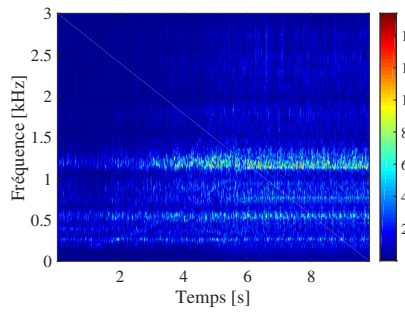
(b) Fréquence de rotation



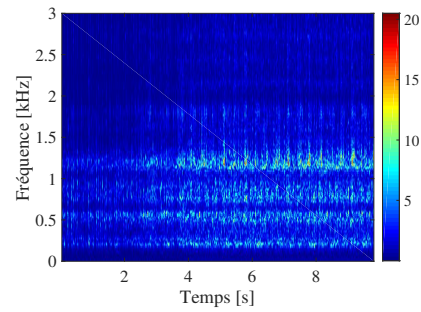
(c) Signal vibratoire



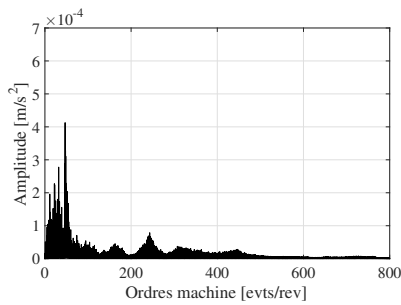
(d) Signal vibratoire



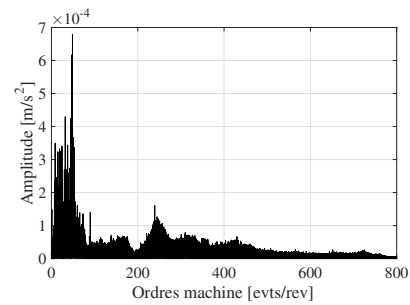
(e) Représentation TF



(f) Représentation TF



(g) Spectre d'ordre



(h) Spectre d'ordre

FIGURE 5.3 – Signal vibratoire expérimental du banc de réducteur. À gauche se trouve le signal vibratoire lorsque l'engrenage est sain et à droite se trouve le signal vibratoire lorsque l'engrenage est défectueux.

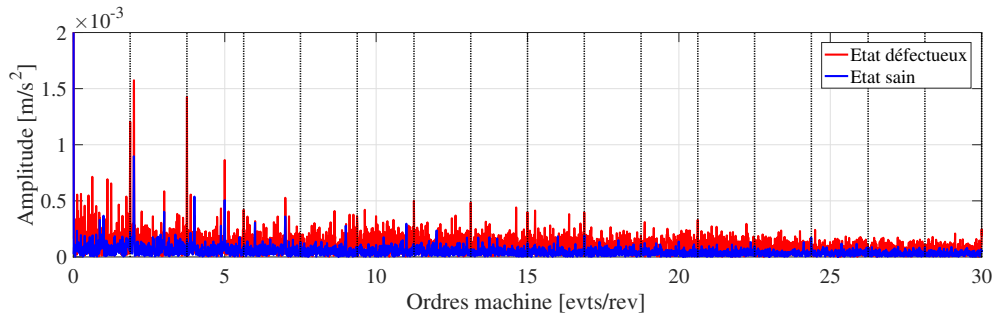
5.2.3 Résultats de l'analyse du signal expérimental

Comme cela a été évoqué plus haut, le diagnostic de l'état des engrenages consistera à analyser les MA et les MP. Nous présentons ici les résultats de l'estimation de ces modulations à partir des estimateurs VK et BCOH_∞ . Les paramètres de ces estimateurs ont été fixés comme suit : $R = 1$, $q = 0.1$, $\gamma = 0.95R^{-1}$, $\mathbf{x}[1] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T$. Sur la représentation temps-fréquence des signaux vibratoires présentée sur la figure 5.3, nous observons que la bande de fréquence où le signal est le plus énergétique est limitée à 1.5 kHz environ. Dans cette bande, nous ne retrouvons que les deux premières composantes d'engrènement. Par conséquent, nous proposons d'estimer la modulation d'amplitude et la modulation de phase autour de ces deux composantes. Les résultats fournis par les estimateurs mentionnés sont affichés sur les figures 5.4 et 5.5.

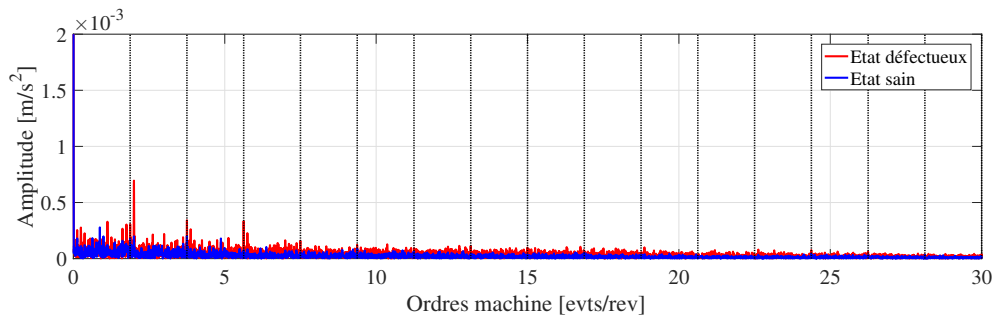
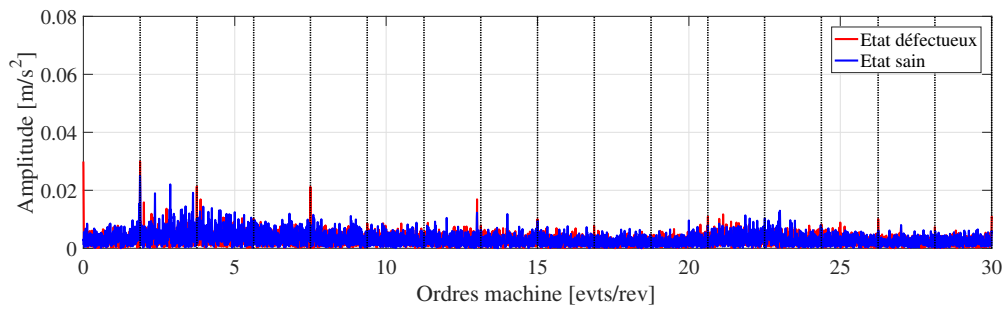
La première figure correspond à la démodulation faite autour de la 1^{re} composante d'engrènement et la deuxième celle faite autour de la 2^e composante d'engrènement. Concernant l'estimateur BCOH_∞ , il révèle mieux la présence du défaut d'engrenage aussi bien sur la modulation d'amplitude que sur la modulation de phase. Avec cet estimateur peu de raies parasites apparaissent dans le spectre d'ordre. Comme nous l'avons vu avec le diagnostic des roulements dans la section précédente, l'estimateur BCOH_∞ est très sélectif et atténue fortement le bruit additif qui peut être constitué de composantes déterministes. Cette caractéristique de l'estimateur BCOH_∞ lui offre l'avantage de mieux estimer les raies latérales sans infiltrations de composantes déterministes ; en d'autres termes les modulations. Par contre, cet estimateur pourrait fournir des résultats erronés lorsqu'il s'agit d'établir un diagnostic des engrenages planétaires. En effet, la vibration de ces derniers génère des modulations qui peuvent se chevaucher dans le domaine spectral.

Sur ces figures, nous observons également que les modulations d'amplitude fournies par l'estimateur VK sont largement amplifiées par rapport à l'amplitude maximale des signaux bruts. En plus, elles contiennent des raies parasites ayant un niveau d'énergie important. Cela est dû à la large bande passante de l'estimateur VK ce qui le rend moins sélectif. Pour ce qui concerne les modulations de phase, elles ne permettent pas de distinguer clairement les harmoniques de l'ordre 1.8750 du défaut de denture de l'engrenage. Ces résultats inattendus viennent aussi du fait que lorsque l'on démodule autour d'une composante d'engrènement spécifique, le bruit de mesure figurant dans le modèle d'état n'est plus un BBG.

Dans la section suivante, nous proposons d'appliquer l'estimateur BCOH_∞ à un signal de vibration généré par un réducteur à engrenage d'un réacteur d'avion de SAFRAN, ceci dans le but d'établir un diagnostic de l'état des roulements.



(a) MA estimée par VK

(b) MA estimée par $BCOH_{\infty}$ 

(c) MP estimée par VK

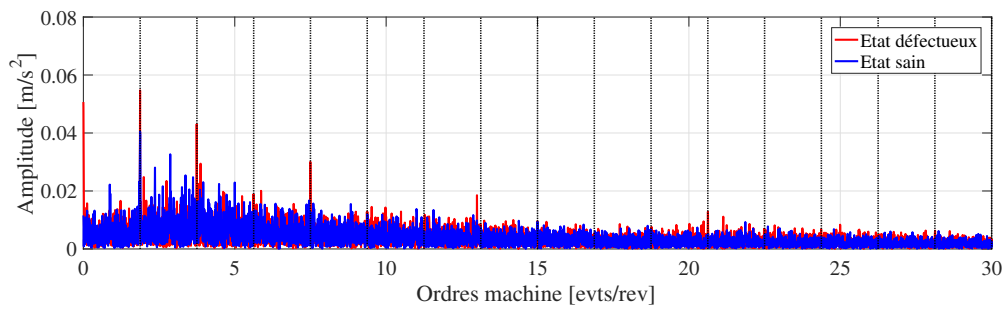
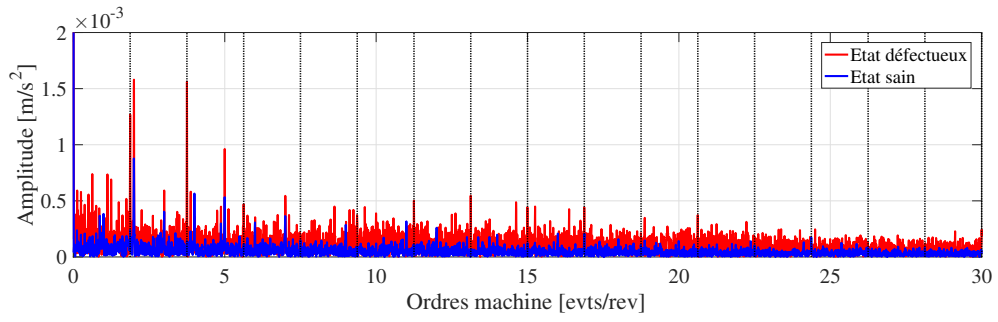
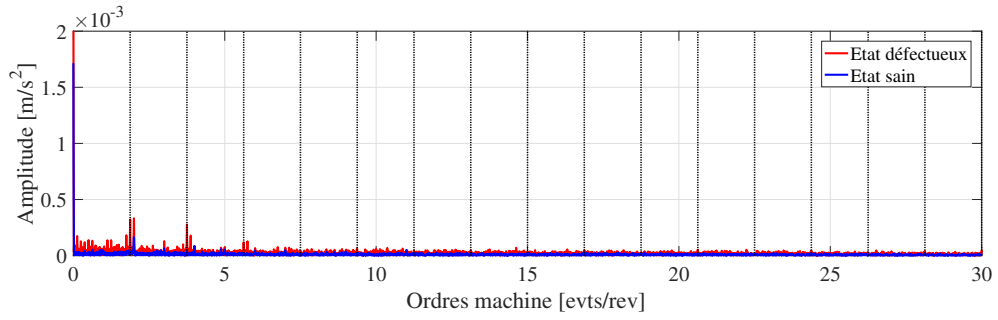
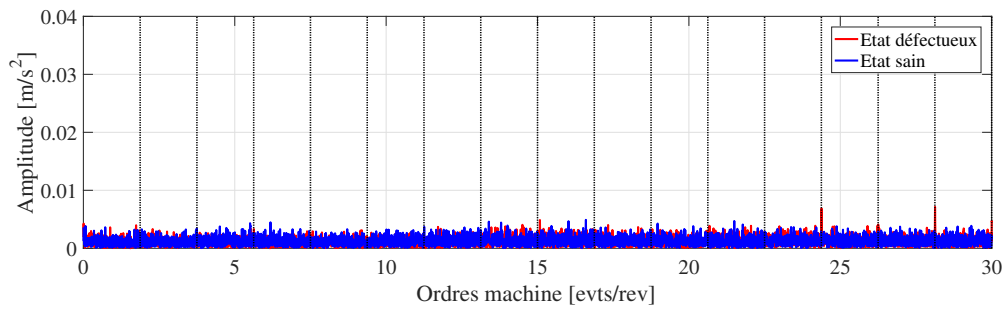
(d) MP estimée par $BCOH_{\infty}$

FIGURE 5.4 – Spectre d'ordre des fonctions de modulations autour de la 1^{re} composante d'engrènement. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de l'ordre du défaut. Ce dernier est de 1.8750.



(a) MA estimée par VK

(b) MA estimée par BCOH $_{\infty}$ 

(c) MP estimée par VK

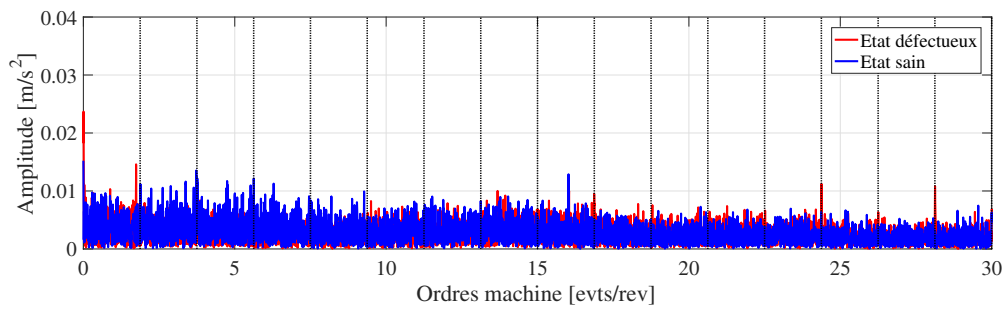
(d) MP estimée par BCOH $_{\infty}$

FIGURE 5.5 – Spectre d'ordre des fonctions de modulations autour de la 2^e composante d'engrènement. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de l'ordre du défaut. Ce dernier est de 1.8750.

5.3 DIAGNOSTIC DE L'ÉTAT DES ROULEMENTS

5.3.1 Formulation du problème

Les roulements sont des organes mécaniques utilisés comme des éléments de guidage en rotation pour les machines tournantes. Ils sont omniprésents sur les réducteurs à engrenages, les éoliennes, les réacteurs et les broyeurs pour ne citer que ceux-là. La défaillance des roulements est une des causes majeures d'arrêt de fonctionnement d'un équipement. Or, ces arrêts se produisant très souvent de manière inopinée, engendrent des coûts de maintenance et des pertes de production. C'est pour cette raison qu'il est capital de surveiller ces organes, et ce afin de prévenir au plus tôt les arrêts imprévus.

L'analyse du signal de vibration généré par les machines est un moyen très efficace pour détecter un défaut sur l'un de ses organes. Cette approche est intéressante car non-invasive. En ce qui concerne les roulements, lorsqu'ils sont défectueux, ils génèrent un train d'impulsion relativement faible [130]. Cela se passe de la manière suivante. À chaque passage d'éléments roulants sur une piste de la bague interne ou de la bague externe, la fréquence de résonance de la structure du roulement est excitée. Comme le mentionne McFadden et *al.* [136], le signal de résonance ainsi généré est modulé en amplitude par l'impact produit par le défaut. Il est connu que l'analyse de la modulation d'amplitude (ou de l'enveloppe en d'autres termes) fournit plus d'informations sur l'état du roulement que le signal brut [123]. Cela a conduit à la fameuse technique appelée '*Envelope spectrum analysis*' pour le diagnostic de l'état des roulements. En présence d'un niveau important de bruit, cette technique échoue. Ho et *al.* [10] proposent alors d'analyser le carré de l'enveloppe, technique connue sous le nom de '*Squared Envelope Spectrum*' ou SES analysis. Nous illustrons cette technique dans le cadre du régime variable sur la figure 5.6 ci-dessous.

D'autres techniques existent pour révéler le train d'impulsions généré par un défaut de roulement. Nous pouvons citer entre autres le kurtosis spectral [138, 139], le MED (pour *Minimum Entropy Deconvolution*) [140, 141] ou le spectre cyclique [131].

En ce qui concerne les machines tournantes qui nous préoccupent, elles sont composées de plusieurs organes mécaniques notamment les roulements, les engrenages, les arbres, les courroies etc. La contribution de la vibration du roulement est souvent masquée par des composantes déterministes. Dans le cas des réducteurs à engrenages qui nous intéresse ici, ces composantes sont générées principalement par la vibration des engrenages. L'analyse du SES du signal brut provenant de ces systèmes peut conduire à une mauvaise interprétation de l'état des roulements. Par conséquent, la suppression de ces composantes (d'engrènement ici) est une étape de pré-traitement nécessaire dans le cadre du diagnostic des roulements. En effet, dans le cadre de la détection automatique de défaut de roulement, certains auteurs utilisent des seuils statistiques comme celui proposé par J. Antoni [131] au signal de

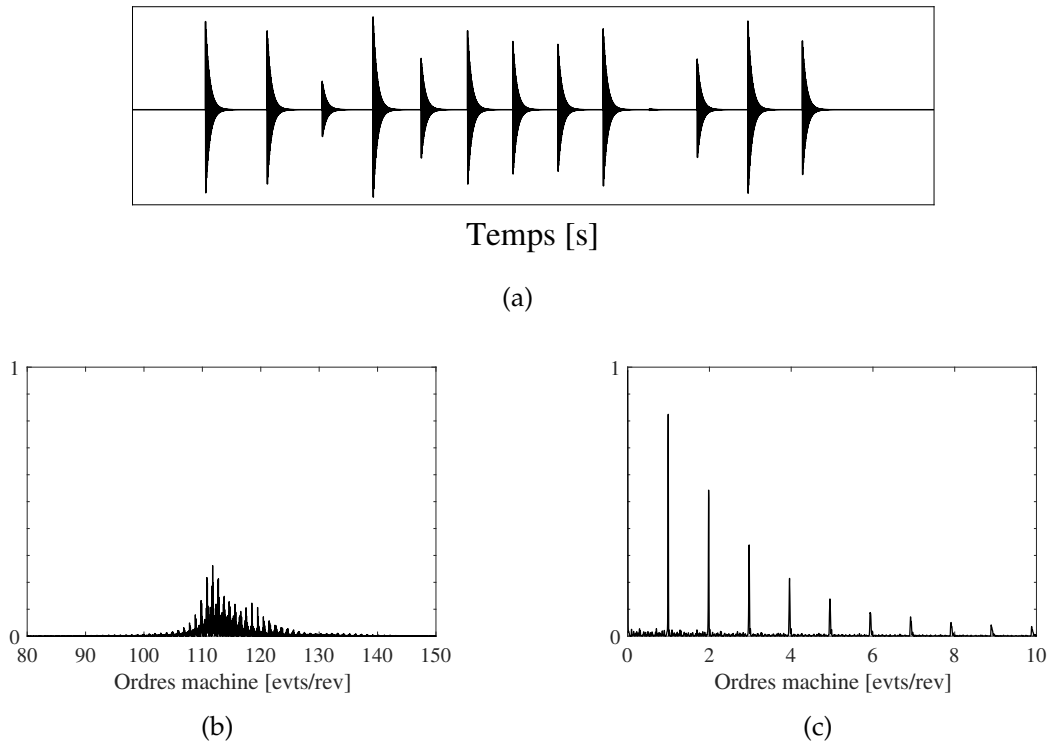


FIGURE 5.6 – Analyse d'un signal de roulement non bruité : (a) Signal, (b) Spectre classique et (c) SES.

vibration à condition que les composantes déterministes ne soient pas prépondérantes voire inexistantes. Dans le cas contraire, l'utilisation de ces seuils sur le SES du signal brut contenant des composantes déterministes peut générer une fausse alerte.

P. Borghesani et *al.* ont récemment proposé en régime variable, une procédure d'analyse du SES [137]. Dans leur approche le signal de vibration est ré-échantillonné dans le domaine angulaire avant la suppression de la partie déterministe. Cette procédure est différente de celle que nous proposons dans cette thèse. En effet, l'approche que nous proposons ne requiert pas un ré-échantillonnage angulaire du signal brut de vibration. Le diagramme 5.7 décrit les étapes nécessaires pour la mise en œuvre de la procédure que nous proposons.

Il est important de rappeler ici que plusieurs techniques ont été développées pour la suppression (ou l'estimation) des composantes déterministes. Dans les paragraphes suivants, nous décrivons trois d'entre elles : la moyenne synchrone, la prédiction linéaire et le cespthe.

5.3.1.1 Moyenne synchrone

La moyenne synchrone (MS) est probablement la technique la plus répandue pour extraire les composantes déterministes [132, 133]. Ceci à cause de sa simplicité

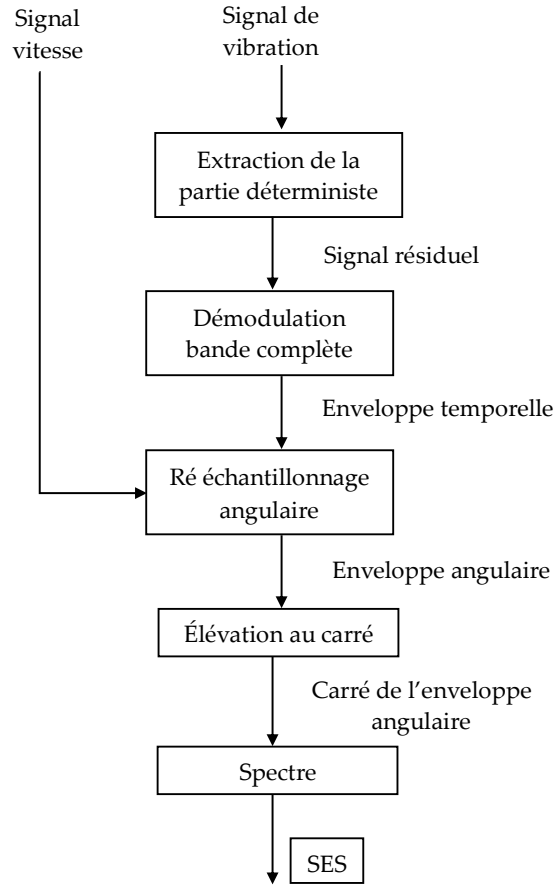


FIGURE 5.7 – La procédure proposée pour le diagnostic de l'état d'un roulement.

et de sa facilité de mise en œuvre. Elle consiste à moyenner un certain nombre de segments du signal ayant le même nombre d'échantillons, chacun représentant une période du phénomène d'intérêt. Soit le signal $y(t) = d(t) + r(t)$ avec $d(t)$ la partie déterministe et $r(t)$ la partie aléatoire. La MS du signal y par rapport à la période T est exprimée par :

$$MS(\tau) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=0}^M w(\tau)y(\tau + iT) \quad (5.2)$$

avec M le nombre de segments, w une fenêtre de pondération, $\tau \in [0; T]$ et T une période du signal. L'estimation de la partie déterministe par la MS s'obtient en répétant $MS(\tau)$. Elle est définie par :

$$\hat{d}(t) = MS(\tau) * \sum_{i=0}^{M-1} \delta(t - iT) \quad (5.3)$$

expression dans laquelle $\delta(t - iT)$ désigne une impulsion de Dirac apparaissant à l'instant iT . La technique de la MS est illustrée sur la figure 5.8 ci-dessous.

Cette technique requiert que le signal soit stationnaire, ce qui implique que la fré-

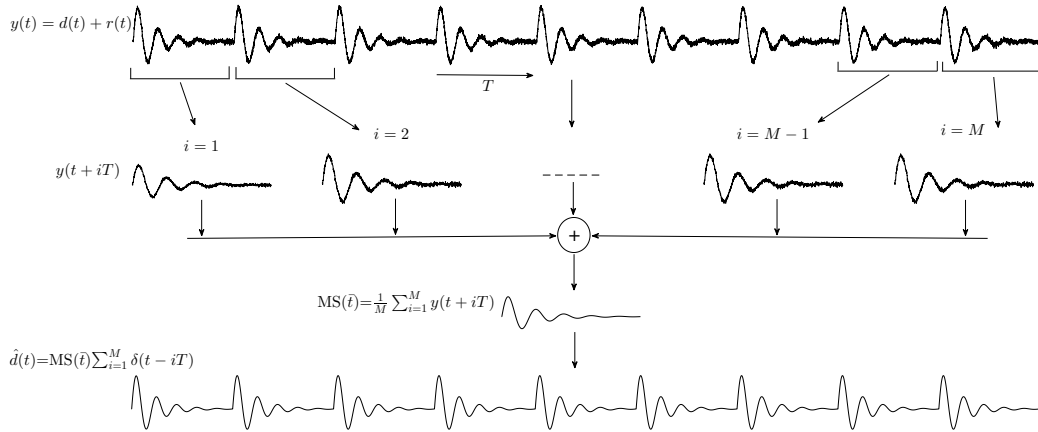


FIGURE 5.8 – Illustration de la moyenne synchrone.

quence de rotation doit être constante. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, la moyenne synchrone est appliquée au signal ré-échantillonné dans le domaine angulaire [134].

5.3.1.2 Prédiction linéaire

La prédiction linéaire (communément appelée *Linear Prediction Filtering* ou LPF) repose sur l'hypothèse que le signal est constitué d'une partie structurée et d'une partie non structurée. La première fait référence au signal déterministe. Ce signal, de part son caractère purement régulier, peut être prédit à chaque instant donné. La structure la plus simple pour la prédiction de ce type de signal est celle d'un modèle auto-régressif comme suggéré dans [13, 123]. Soit le signal discret $y[n]$. La partie déterministe $d[n]$ de ce signal est obtenue en combinant linéairement les p valeurs précédentes de $y[n]$. Cela s'écrit comme :

$$d[n] = - \sum_{i=1}^p a_i y[n-i] \quad (5.4)$$

avec p l'ordre du modèle et a_i les coefficients AR. Ces derniers peuvent être déterminés par la récursion de Levinson [142] ou par un estimateur de Kalman. Le signal $r[n] = y[n] - d[n]$ représente le signal résiduel correspondant à la partie non structurée de part son caractère aléatoire. L'ordre p du modèle est obtenu de diverses manières, par exemple en minimisant le critère d'information d'Akaike (*Akaike Information Criteria*) [143] ou en maximisant le kurtosis du signal résiduel [144]. Le choix de maximiser le kurtosis du signal résiduel revient à rehausser l'impulsivité du signal aléatoire. Dans la suite des travaux, nous exploitons ce dernier critère pour déterminer l'ordre p du modèle.

5.3.1.3 Le blanchiment par le cepstre

Le blanchiment d'un signal consiste à réduire la contribution de certaines composantes spécifiques qui masquent l'information d'intérêt. Dans le cadre de l'analyse vibratoire, la contribution de la vibration des roulements est fortement masquée par des composantes déterministes. Afin de supprimer ces composantes déterministes, le blanchiment du signal vibratoire par le cepstre a été initialement proposé en régime stationnaire [145]. Récemment, Borghesani et *al.* ont proposé en régime variable une suppression des composantes déterministes à partir du cepstre réel [146]. Pour un signal $x(t)$, ce dernier est défini comme ci-dessous :

$$C(\tau) = \text{TFI} (\log | \text{TF} (x(t)) |) \quad (5.5)$$

avec

- TF : la transformée de Fourier ;
- TFI : la transformée de Fourier inverse ;
- τ la 'quэфrence'

Nous rappelons qu'il existe un dictionnaire des terminologies adoptées pour l'analyse cepstrale que le lecteur pourra retrouver dans cet article de R B. Randall [5]. Comme mentionné par Borghesani et *al.*, le blanchiment par le cepstre consiste à mettre en œuvre les étapes ci-dessous :

1. D'abord, mettre tout le cepstre réel à zéro excepté le cepstre à la quэфrence zéro ;
2. Ensuite, retrouver le spectre de fréquence à partir du cepstre par une TF et la fonction exponentielle ;
3. Puis, combiner le spectre de fréquence avec la phase du signal original ;
4. Enfin, revenir dans le domaine temporel par une TFI.

La mise à zéro du cepstre réel revient à une série de *liffrage* autour des quэфrences des composantes déterministes. Ce qui conduit à une suppression quasi totale de ces dernières. Cette approche a l'avantage de supprimer aveuglement les composantes déterministes et de fournir un signal résiduel aléatoire.

5.3.1.4 Approche proposée

Comme cela a été présenté dans le chapitre précédent, il est possible de fournir une estimation BCOH_∞ de composantes déterministes spécifiques. Elle est obtenue par la synthèse d'un estimateur BCOH_∞ à partir du modèle d'état du signal. Dans

cette estimation, nous supposons que le signal est constitué par exemple de M composantes déterministes, $d_1[n]$, $d_2[n]$, $\dots$, $d_M[n]$, avec des localisations fréquentielles bien connues. Ce signal peut s'écrire comme :

$$y[n] = \sum_{i=1}^M d_i[n] + r[n] \quad (5.6)$$

où r est le signal résiduel. Les composantes d_i sont extraites de manière progressive jusqu'à l'obtention d'un signal résiduel dépourvu d'une contribution déterministe significative. Cette procédure est décrite sur la figure 5.9 sur laquelle $\hat{r}$ est l'estimation du signal résiduel, $\hat{d}_i$ est l'estimation de d_i , $\hat{d}$ est la somme de l'estimation des N composantes déterministes avec $N \leq M$.

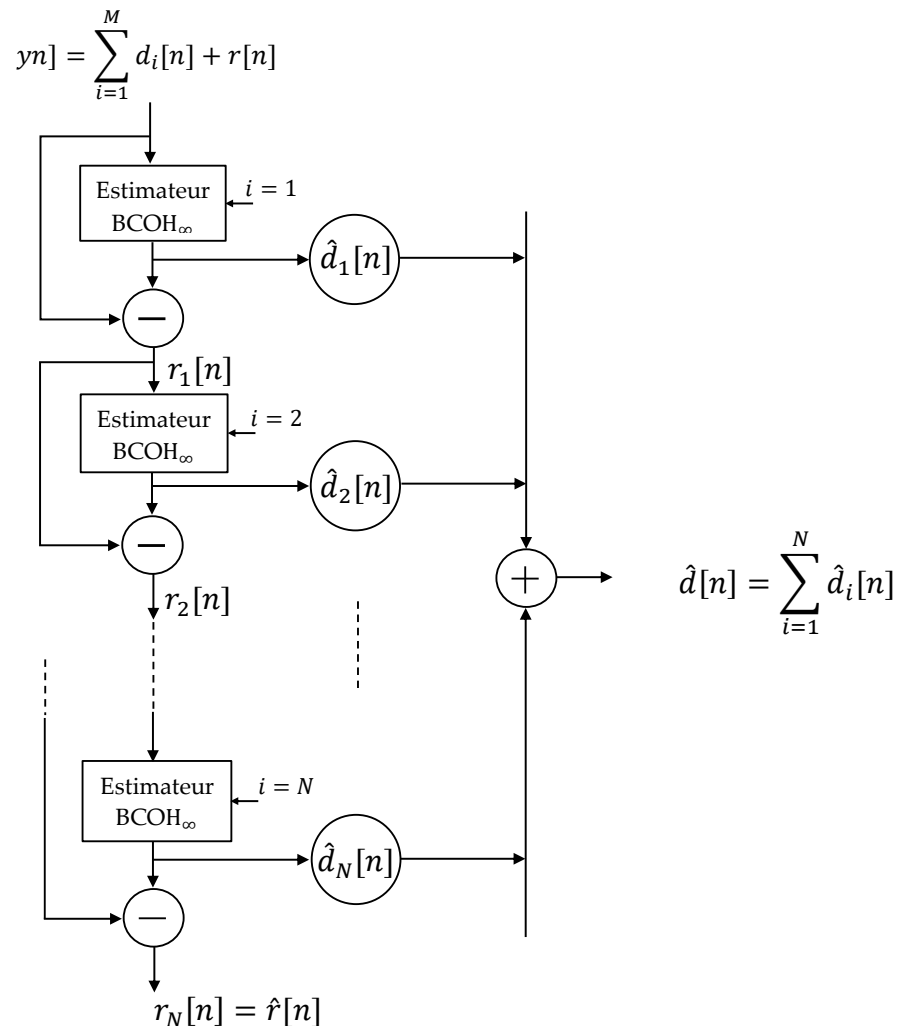


FIGURE 5.9 – Approche proposée pour l'estimation du signal déterministe. $\hat{r}$ est l'estimation du signal résiduel après l'extraction de N composantes déterministes grâce à une estimation BCOH_∞ .

Il est important ici de dire que la connaissance de la cinématique du système à surveiller est primordiale pour cette approche. En effet, elle conditionne le choix des composantes déterministes à extraire (ou à estimer).

Dans le but de valider ladite approche pour la séparation des composantes déterministes des composantes aléatoires, nous analysons dans la section qui suit un signal provenant d'un réducteur d'avion. En plus de cela, nous ferons une comparaison entre notre approche et celles exposées plus haut dans ce chapitre.

5.3.2 Présentation du signal vibratoire

Le signal de vibration présenté ici a été mesuré sur le réducteur d'un réacteur d'avion de SAFRAN. La figure 5.10 est une représentation schématique de ce réducteur. Il est composé de 6 étages d'engrenages et de plusieurs paliers de roulement. Un capteur tachymétrique est monté sur l'arbre L4 afin de déterminer sa position. Grâce au signal délivré par ce capteur il est possible d'évaluer la vitesse de rotation de cet arbre. En plus de cela, des accéléromètres ont été placés sur la structure du réducteur pour mesurer le signal de vibration. Le signal dont il est

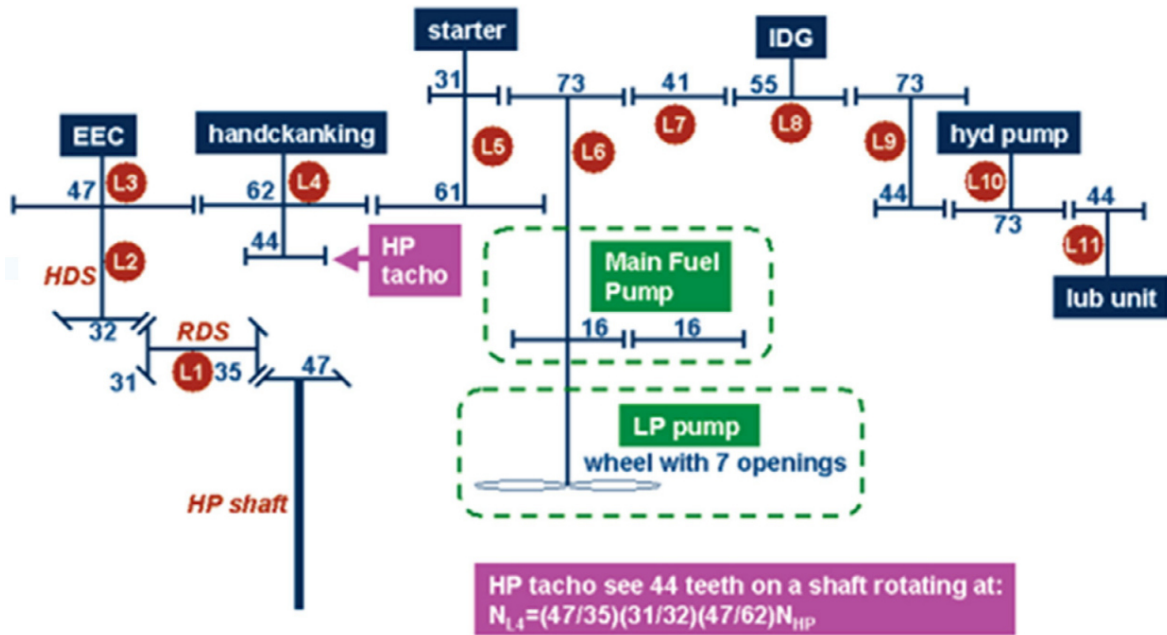


FIGURE 5.10 – Représentation schématique du réducteur du réacteur d'avion fournie par SAFRAN.

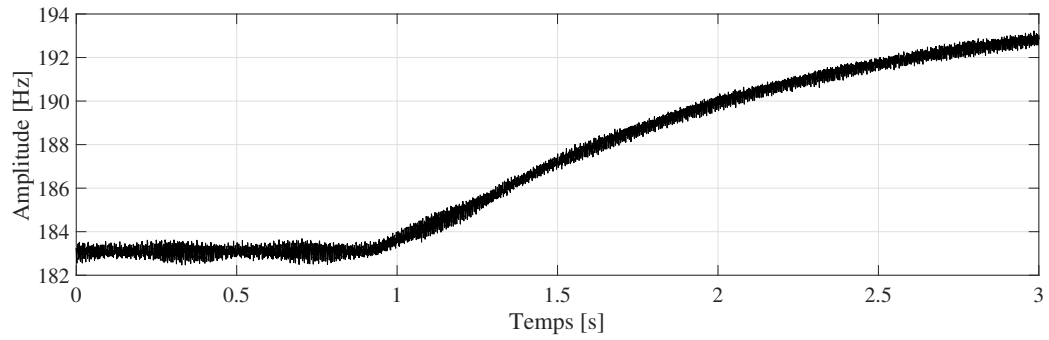
question a été fourni pour la compétition organisée lors de la conférence internationale 'Surveillance 8'. Elle s'est déroulée à l'institut universitaire de technologie de Roanne du 20 au 21 Octobre 2015 en France. Le lecteur trouvera plus de détails sur ce signal dans cette référence [128].

Les signaux fournis ont été enregistrés en régime variable pendant 200 s à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 50$ kHz. L'analyse effectuée a porté sur une tranche de 3 s du signal correspondant à la fréquence de rotation qui varie de 183 Hz à 193 Hz.

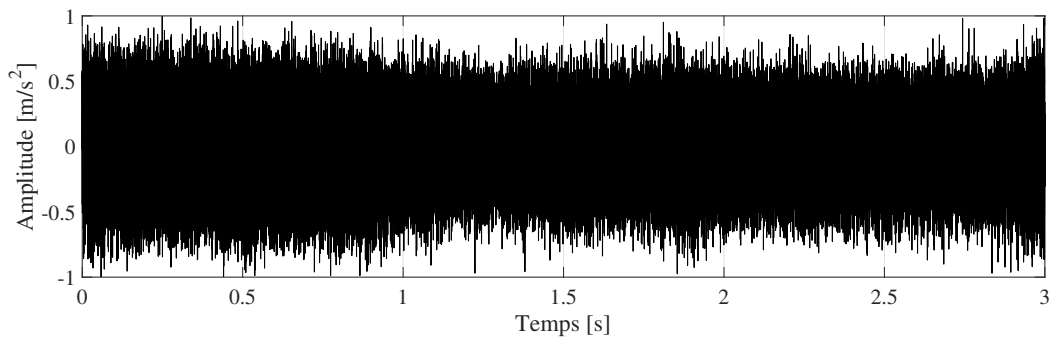
Sur la figure 5.11, nous affichons (a) la fréquence de rotation, (b) la représentation temporelle et (c) la représentation temps-fréquence du signal vibratoire.

Les ordres des défauts potentiels sur ce roulement sont présentés sur le tableau 5.1. Ils correspondent à une synchronisation de la fréquence des défauts du roulement par rapport à celle de l'arbre HP.

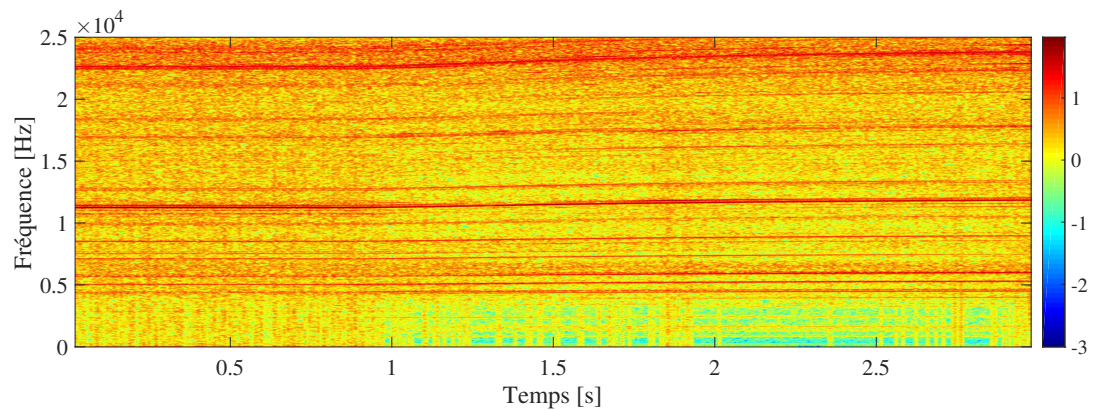
Les ordres d'engrènement, obtenus après une synchronisation par rapport à la



(a) Fréquence de rotation



(b) Représentation temporelle du signal vibratoire



(c) Représentation temps-fréquence du signal vibratoire

FIGURE 5.11 – Signal réel de vibration acquis en régime variable sur un réducteur de réacteur d'avion de SAFRAN.

fréquence de rotation de l'arbre HP, sont présentés sur la figure 5.13.

L'objectif de cette section est d'analyser le signal vibratoire à partir du SES afin d'identifier l'existence d'un éventuel défaut sur le réducteur.

La figure 5.12 montre respectivement le spectre du signal mesuré et son SES. Comme nous pouvons le remarquer, le spectre du signal brut contient principalement des pics relatifs aux ordres d'engrènement. Le niveau d'énergie élevé de

BPOO	BPOI	BSO	FTO
7.7768	10.2646	3.5642	0.432

TABLEAU 5.1 – Les ordres de défaut du roulement localisé sur l'arbre L5. BPOO est l'ordre de passage des billes sur un défaut de la bague externe, BPOI l'ordre de passage des éléments roulants sur un défaut de la bague interne, BSO l'ordre d'un défaut des éléments roulants et FTO l'ordre d'un défaut de cage.

ces pics ne permettent pas d'identifier clairement les ordres caractéristiques d'un défaut de roulement. Par contre, avec le SES du signal brut, des pics relatifs aux harmoniques BPOO sont identifiés.

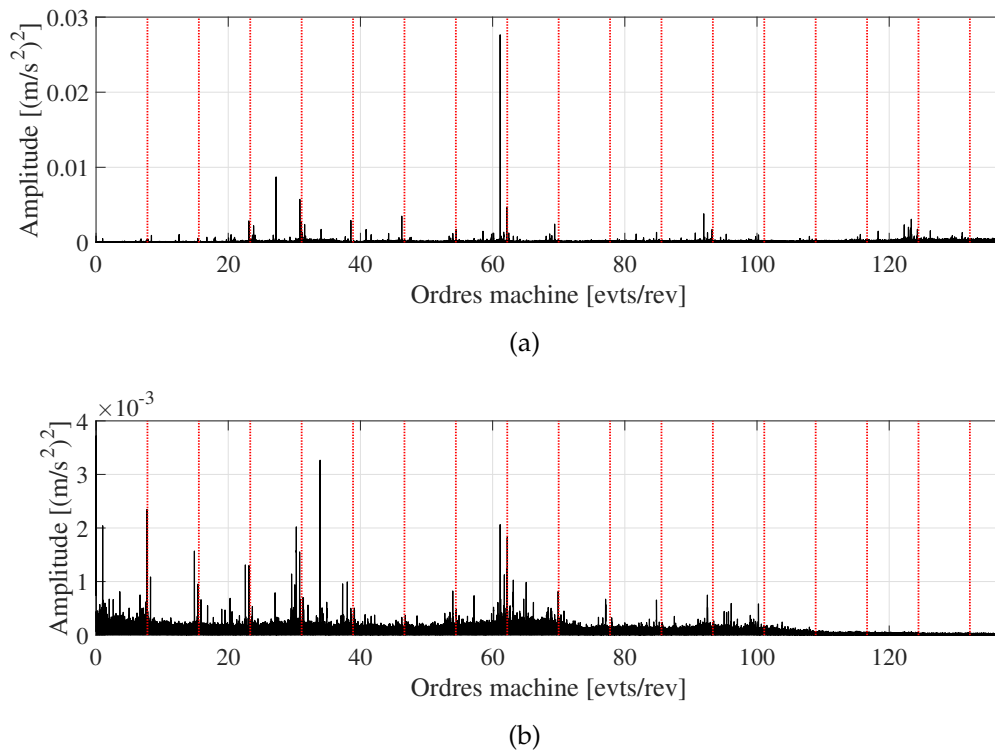


FIGURE 5.12 – Représentation spectrale : (a) Spectre du signal brut après ré-échantillonnage angulaire et (b) SES du signal brut. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de BPOO.

Toutefois, certaines composantes d'engrènement restent toujours dominantes notamment celles localisées aux ordres $1\times$, $33.9\times$, $61.14\times$ et $62.21\times$. Afin de ne retrouver dans le SES que les ordres du défaut de roulement, s'ils existent bien évidemment, nous proposons dans ce qui suit d'extraire les composantes déterministes avec les différentes approches présentées dans ce manuscrit.

5.3. DIAGNOSTIC DE L'ÉTAT DES ROULEMENTS

N2 speed (rpm)									N2 Tacho visu:														
	Line 1			Line 2		Line 3			44 Teeth	Line 4	Line 5		Line 6		Line 7		Line 8		Line 9		Line 10		Line 11
	HP shaft	RDS		Horizontal drive shaft		EEC alternator		Handcranking		Starter		Fuel pump		Intermediate		IDG		Intermediate		Hydro pump		Lubrication unit	
		Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont
10000																							
Number of teeth	47	35	31	32	47	47	47	62	62	61	31	73	73	41	41	55	55	73	44	73	73	44	44
Rotating speed (rpm)	10,000	13,429		13,009		13,009		9862		10,023		4256		7579		5649		4256		2566		4256	
F1 tooth (Hz)	167	224	224	217	217	217	217	164	164	167	167	71	71	126	126	94	94	71	71	43	43	71	71
F1 tooth (N2)	1.0000	1.3429	1.3429	1.3009	1.3009	1.3009	1.3009	0.9862	0.9862	1.0023	1.0023	0.4256	0.4256	0.7579	0.7579	0.5649	0.5649	0.4256	0.4256	0.2566	0.2566	0.4256	0.4256
Gear mesh frequency (Hz)	7833		6938		10,190		10,190		10,190		5179		5179		5179		5179		3121		3121		
Gear mesh (mult N2)	47.0000		41.6286		61.1420		61.1420		61.1420		31.0721		31.0721		31.0721		31.0721		18.7284		18.7284		
F coincidence (Hz)	4.8		7.0		216.8		3.5		2.7		2.3		1.7		2.3		1.3		1.0		1.0		

FIGURE 5.13 – Fréquences caractéristiques du réducteur référencées par rapport à l'arbre HP [128].

5.3.3 Extraction de la composante déterministe

Afin de réduire la proéminence de ces composantes dans le SES, nous proposons d'extraire les cinq composantes d'engrènement ainsi que leur deuxième harmonique dynamique. En plus de ces composantes, nous proposons d'estimer celle localisée à l'ordre 27. Elle ne correspond à aucune des composantes d'engrènement. Elle est sans doute caractéristique d'un autre phénomène que nous ignorons ici. Pour l'extraction de ces composantes, nous utilisons :

- l'estimateur BCOH_∞ .
- l'estimateur VK;
- la moyenne synchrone (MS);
- la prédiction linéaire (PL);
- le cepstre;

Le polynôme d'approximation pour l'estimation BCOH_∞ est de degré deux. En effet, un polynôme de degré supérieur ou égal à deux est suffisant pour la prise en compte de phénomènes non-linéaires. Les paramètres pour l'estimation BCOH_∞ et VK sont tels que : $R = 1$, $q = 10^{-1}I$, $P[1] = I$, $\gamma = 0.95$ et $x[1] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T$. I est la matrice identité de dimension appropriée.

La figure 5.15 affiche l'estimation fournie par l'estimateur BCOH_∞ et VK. L'estimateur BCOH_∞ fournit une bonne estimation des composantes d'engrènement sélectionnées. Il évite la distorsion de l'amplitude et le signal résiduel obtenu est pratiquement dépourvu de composantes déterministes. Pour ce qui concerne l'estimateur VK, il contient toujours des composantes déterministes. En plus de cela, nous remarquons que l'estimation VK écrase complètement le signal vibratoire original. Cela est dû au fait que l'erreur d'estimation d'une composante d'engrènement à une autre s'amplifie. En effet, l'estimation de chacune des composantes d'engrènement sélectionnées engendre une infiltration des autres composantes d'intérêts. Ainsi, par *effet domino* le signal estimé est complètement distordu.

Pour la PL, l'ordre du modèle AR choisi correspond à celui qui maximise le kurtosis du signal résiduel. La figure 5.14 ci-dessous représente l'évolution du kurtosis du signal résiduel en fonction de l'ordre du modèle AR. L'ordre choisi est égal à 200. Comme nous pouvons l'observer sur la figure 5.14 le kurtosis est pratiquement constante à partir de cette valeur.

Pour la mise en œuvre de la MS, nous avons échantillonné le signal de vibration dans le domaine angulaire par rapport à l'ordre de rotation de l'arbre L1. Le signal déterministe est obtenu après la moyenne de 754 segments de 205

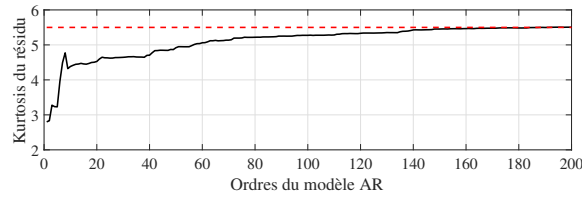


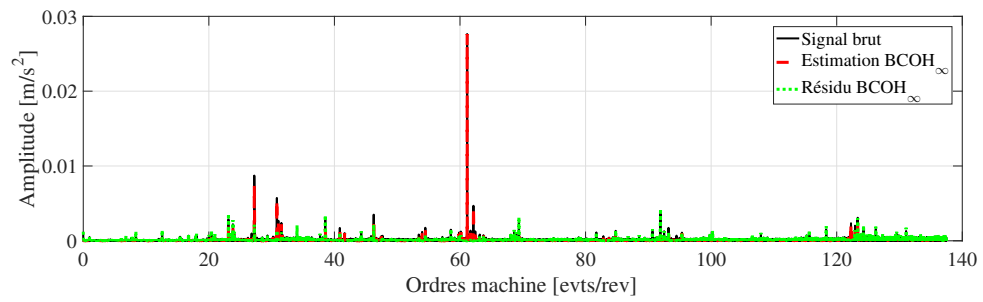
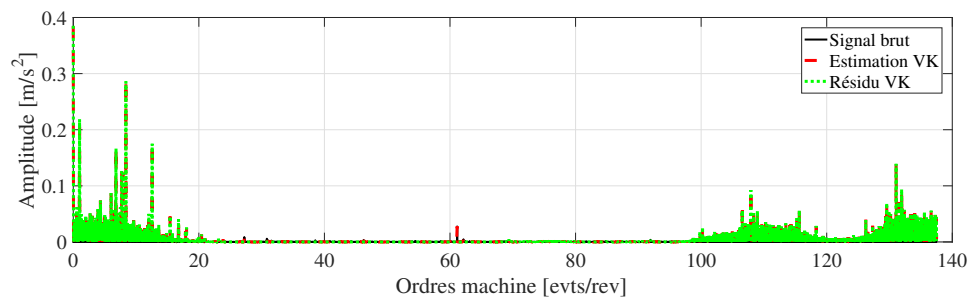
FIGURE 5.14 – Évolution du kurtosis en fonction de l'ordre du modèle AR.

échantillons chacun.

Sur la figure 5.16, la MS, la PL et le cepstre fournissent une estimation plutôt satisfaisante des composantes déterministes. Par contre, ces méthodes ont l'inconvénient de sous-estimer la composante 61.1420. Avec le cepstre et la PL, le résidu contient toujours une composante localisée à l'ordre 27.

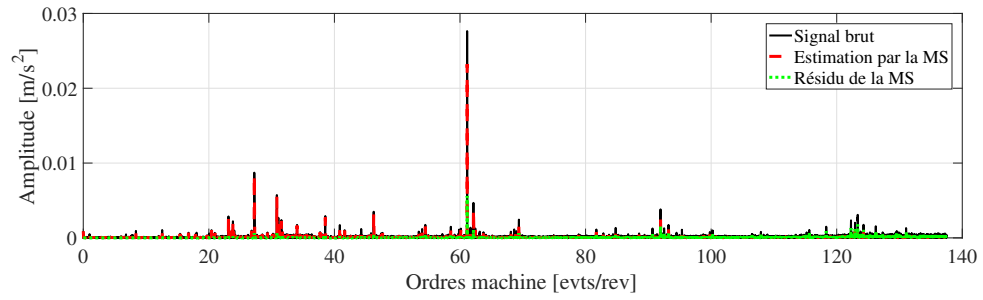
Ce premier résultat montre que l'estimateur BCOH_∞ de composantes déterministes en régime variable fournit de meilleurs résultats que les approches classiques exposées dans ce chapitre.

Dans la section suivante, nous analysons le SES du signal résiduel obtenu par chacune des approches.

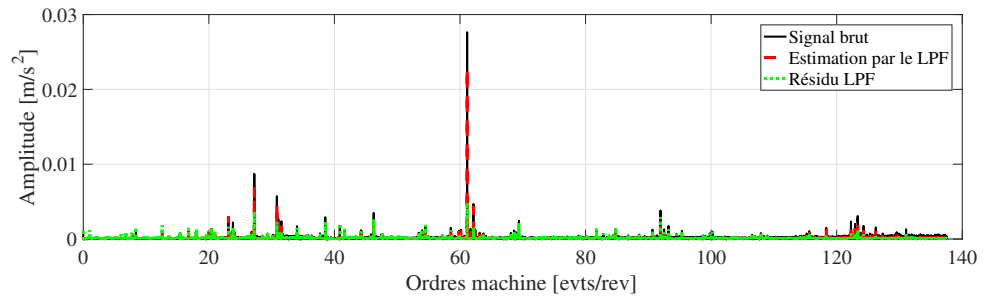
(a) BCOH_∞ 

(b) VK

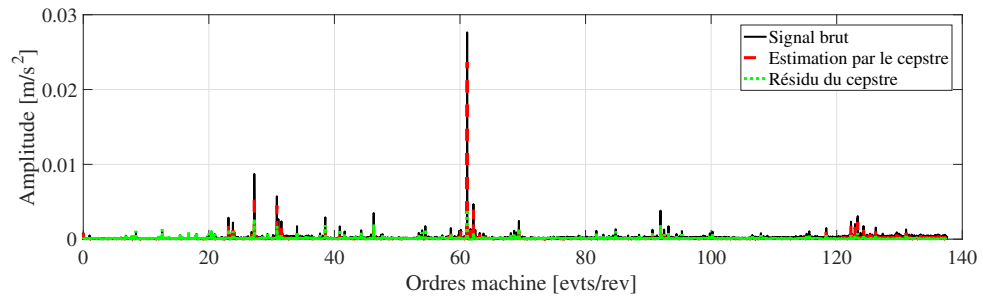
FIGURE 5.15 – Estimation des composantes d'engrènement par les estimateurs BCOH_∞ et VK.



(a) MS



(b) PL



(c) Cepstre

FIGURE 5.16 – Estimation des composantes d'engrènement par la MS, la PL et le cepstre.

5.3.4 SES du signal résiduel

Après l'extraction des composantes d'engrènement sélectionnées, ces dernières sont retranchées du signal brut afin de retrouver le signal résiduel. La figure 5.17 affiche le SES du résidu fourni par les estimateurs BCOH_∞ et VK. Quant à la figure 5.18, elle représente le SES de ce signal résiduel obtenu par la MS, la PL et le cepstre.

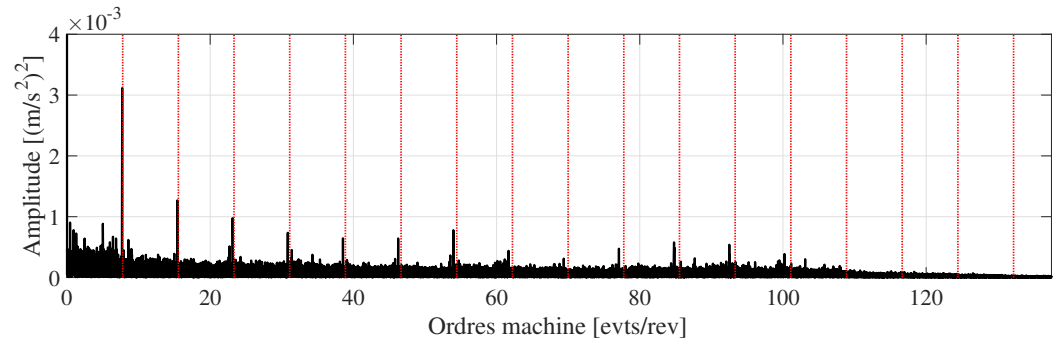
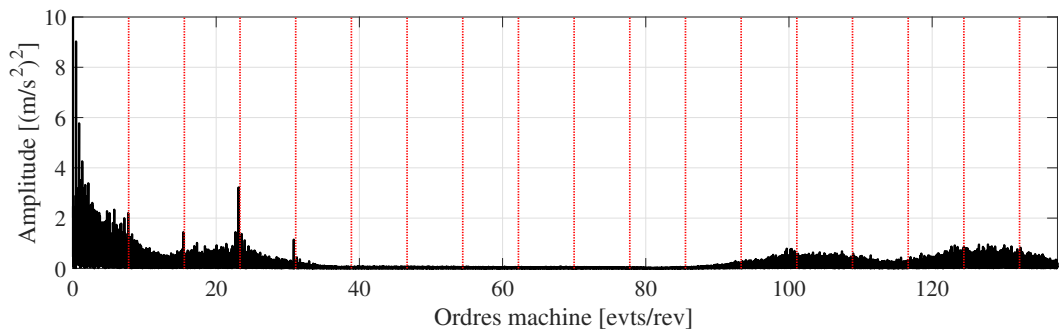
Sur la première figure, nous remarquons que l'estimateur BCOH_∞ fournit un signal résiduel dont le SES est dépourvu de composantes déterministes. En plus de révéler les pics à BPOO et ses harmoniques, nous observons également les trois premiers harmoniques de l'ordre FTO du défaut de la cage. Cet ordre apparaît à cause d'une modulation du défaut de la bague externe par la cage du roulement.

S'agissant de l'estimateur VK, nous constatons qu'il ne permet pas de distinguer clairement les harmoniques BPOO. En plus, le SES est complètement distordu et montre la présence d'un niveau important de bruit. Par contre, il permet d'identifier clairement les harmoniques FTO générés par la modulation de la cage. Cependant, l'amplitude est sur-estimée par un facteur de 10^4 .

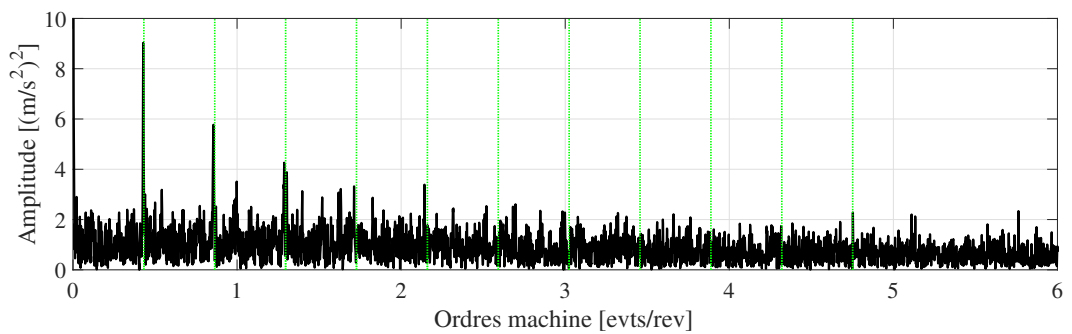
Sur la deuxième figure, nous remarquons que l'amplitude du SES a fortement été atténuée par la MS, la PL et le cepstre. Avec ces trois approches, ce sont les trois premiers harmoniques qui sont les plus énergétiques. Par ailleurs, quelques composantes déterministes émergent dans le SES du résidu fourni par la PL et le cepstre et les raies correspondant à FTO ne sont pas identifiées.

Nous rappelons que le rapport faisant état de l'analyse de ce signal vibratoire mentionne la présence d'un défaut sur la bague externe du roulement modulé par la rotation de la cage [128]. Cela se manifeste théoriquement par des harmoniques à BPOO et FTO dans le SES. D'après les résultats obtenus avec les approches présentées dans ce manuscrit, l'estimateur BCOH_∞ est celle qui permet de révéler clairement les harmoniques à BPOO et à FTO.

Cette étude expérimentale confirme bien l'avantage de l'estimateur BCOH_∞ par rapport aux approches classiques (MS, PL, cepstre et estimateur VK) lorsqu'il s'agit d'extraire des composantes d'engrènement dans le cadre de la surveillance de l'état des roulements en régime variable.

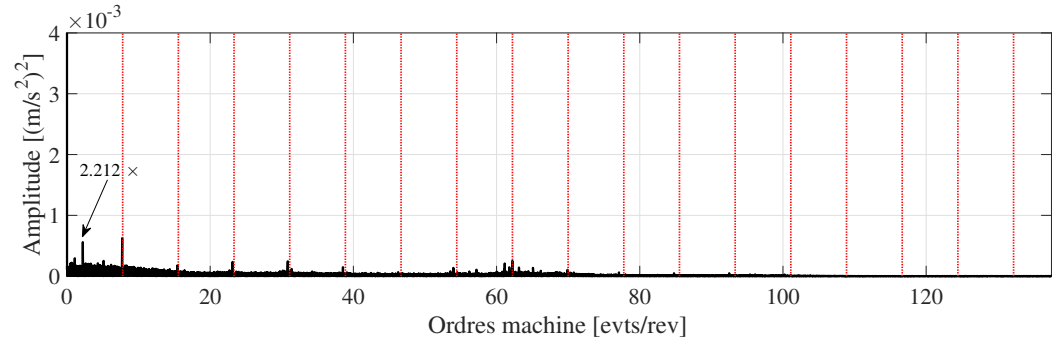
(a) BCOH_∞ (b) Zoom BCOH_∞ 

(c) VK

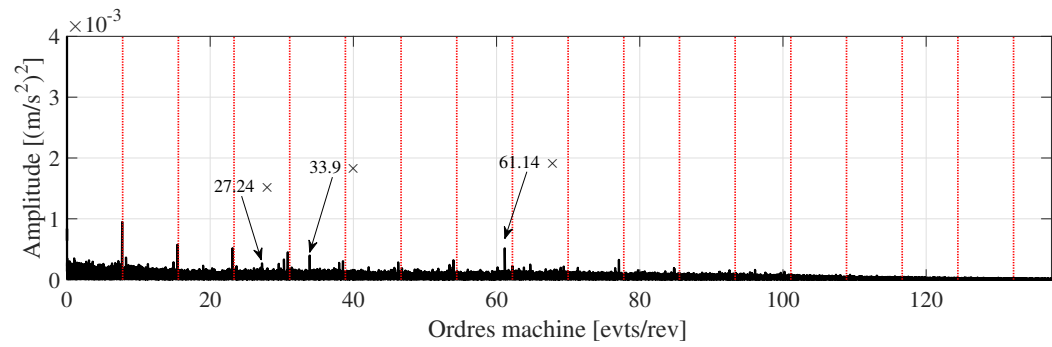


(d) Zoom VK

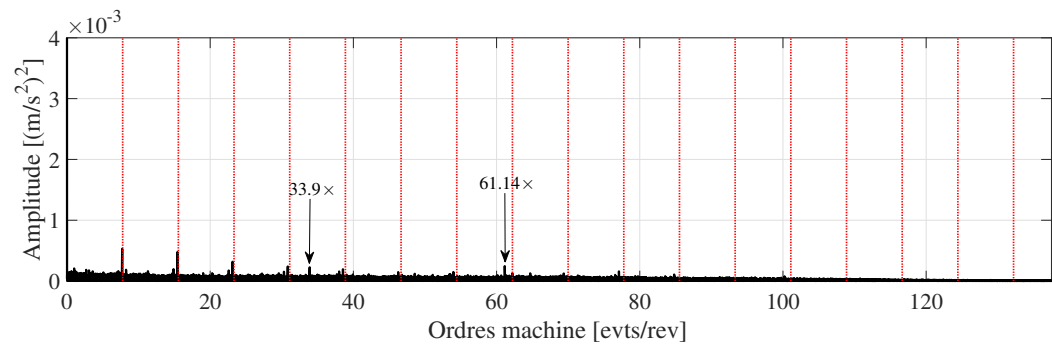
FIGURE 5.17 – SES du signal résiduel fourni par les estimateurs BCOH_∞ et VK. Les traits verticaux en pointillés rouge et vert correspondent respectivement aux harmoniques de BPOO et de de FTO théoriquement évalués.



(a) MS



(b) PL



(c) Cepstre

FIGURE 5.18 – SES du signal résiduel obtenu par la MS, la PL et le cepstre. Les traits verticaux en pointillés correspondent aux harmoniques de BPOO théoriquement évalués.

5.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons appliqué à des signaux expérimentaux diverses méthodes de diagnostic dont la nouvelle approche BCOH_∞ . Nous avons présenté deux signaux acquis en régime variable sur des réducteurs à engrenages.

- Le premier signal réel a été acquis sur un banc d'essai du laboratoire Vibration et Acoustique de l'université de Lyon pour le diagnostic de l'état des engrenages en régime variable. Une des dents de la roue de sortie de ce réducteur a été endommagée. Étant donné que la présence d'un défaut d'engrenage se manifeste par une modulation d'amplitude et une modulation de phase, ces dernières ont été estimées par les outils VK et BCOH_∞ . L'estimateur BCOH_∞ est celui qui fournit les meilleures estimations tout en atténuant les raies parasites. En outre, contrairement à l'estimateur VK, il évite une distorsion de l'amplitude et de la phase.
- Le deuxième signal provenait du réducteur d'un des réacteurs de SAFRAN. Un des roulements de ce réducteur présentait un défaut de bague externe modulé par un défaut de cage. Ce signal a été proposé lors d'une compétition organisée durant la conférence Surveillance 8. Pour la détection de ces défauts, nous avons suggéré d'analyser le SES qui est une méthode très répandue dans la littérature. Dans le SES du signal brut, les ordres caractéristiques des défauts sur le roulement étaient masqués par les composantes d'engrènement. Par conséquent, nous avons estimé ces composantes en utilisant la MS, la PL, le cespêtre, les estimateurs VK et BCOH_∞ et nous avons ensuite analysé le SES du signal résiduel ainsi obtenu. Parmi toutes ces approches, l'estimateur BCOH_∞ est celle qui estime le mieux les composantes déterministes. Le SES du signal résiduel qu'il fournit met clairement en évidence la présence du défaut de bague externe et du défaut de cage. Avec les autres estimateurs, des composantes déterministes apparaissent toujours dans le signal résiduel.

A l'issue de cette étude, nous retenons que par rapport aux autres estimateurs, l'estimateur BCOH_∞ fournit un diagnostic plus précis de l'état des roulements et des engrenages en régime variable. Dans le chapitre suivant, nous présentons les conclusions générales et quelques perspectives de ce travail.

Conclusion générale et perspectives

6.1 CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire de thèse est la restitution de trois ans de travail de recherche au sein du Laboratoire PRISME de l'Université d'Orléans. Le sujet de thèse a porté sur le diagnostic des machines tournantes en régime variable par une analyse du signal vibratoire.

Depuis une dizaine d'années, l'analyse des signaux vibratoires non-stationnaires est devenue une problématique d'intérêt pour de nombreuses équipes de recherche en diagnostic des machines tournantes à travers le monde. En effet, les outils classiques initialement développés pour l'analyse des signaux stationnaires ne sont plus applicables aux signaux non-stationnaires. Certains auteurs ont déjà tenté la possibilité d'étendre au cas non-stationnaire les outils classiques développés pour le cas stationnaire. Cependant, la plupart de ces outils sont limités à des applications bien spécifiques ou n'offrent pas un cadre théorique permettant de justifier leur utilisation dans les situations réelles. Le but de cette thèse est justement de pallier ces limitations, et ce en proposant une nouvelle approche permettant d'analyser les signaux vibratoires acquis en régime variable. Cette nouvelle approche a été ensuite appliquée pour le diagnostic des engrenages et des roulements.

La stratégie proposée dans cette thèse repose sur une extension de méthodes paramétriques développées pour l'analyse de signaux non-stationnaires. Nous nous sommes particulièrement intéressés à celles exploitant une modélisation du signal vibratoire dans l'espace d'état. Parmi cette famille de méthodes, l'estimateur (ou filtre) de Vold-Kalman est sans doute le plus populaire dans la littérature. Il consiste à décrire le signal vibratoire dans l'espace d'état et à mettre en

œuvre une estimation de Kalman de l'enveloppe des composantes fréquentielles. Cette approche formule les hypothèses suivantes :

- l'enveloppe des composantes fréquentielles varie de manière lisse ;
- les bruits du modèle d'état sont blancs, Gaussiens et centrés et de variance connue.

Or, l'hypothèse sur l'évolution de l'enveloppe des composantes fréquentielles ne prend pas suffisamment en compte le caractère fortement non-linéaire des modulations d'amplitude et de phase. En effet, dans ces conditions, l'enveloppe a une dynamique de variation rapide. En plus de cela, l'hypothèse sur la nature statistique des bruits est invalide dans les situations réelles.

Afin de pallier les insuffisances mentionnées précédemment, nous avons proposé une nouvelle stratégie consistant à décrire le signal vibratoire dans l'espace d'état et à mettre en œuvre une estimation H_∞ des paramètres du signal.

La description dans l'espace d'état est faite d'une part grâce à une projection de l'enveloppe de chaque composante fréquentielle du signal sur la base canonique orthogonale. Cette base est obtenue après une orthogonalisation par la procédure de Gram-Schmidt de la base canonique des puissances du temps. L'orthogonalisation assure l'unicité de la décomposition et permet de découpler les paramètres du signal. D'autre part, nous supposons que les coefficients résultant de la projection de l'enveloppe sur la base polynomiale suivent une marche aléatoire.

La modélisation proposée permet de tenir compte des non-linéarités de l'enveloppe surtout en présence d'une modulation des composantes fréquentielles. Ensuite, nous avons proposé une estimation H_∞ des coefficients de la base. Quant à l'approche d'estimation, elle repose sur une optimisation *minimax* et consiste à minimiser le maximum de l'erreur d'estimation sans faire d'hypothèse sur la nature statistique des bruits du modèle d'état. Cette stratégie a conduit à ce que nous avons appelé dans ce manuscrit '*estimateur BCOH $_\infty$* '.

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons exposé respectivement les fondements théoriques pour la modélisation de l'enveloppe des composantes fréquentielles d'un signal vibratoire avec la base canonique orthogonale et la mise en œuvre d'une estimation H_∞ à partir de la théorie des jeux.

Par ailleurs, en exploitant les équations fournies grâce à l'optimisation *minimax*, nous avons proposé un réglage des paramètres de l'estimateur H_∞ . Ce réglage assure une optimalité de l'estimation H_∞ dans la limite de la stabilité de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

Dans le chapitre 4, nous avons évalué la performance des estimateurs BCOH $_\infty$ et VK à estimer une composante déterministe lorsque le bruit de mesure est constitué de composantes déterministes non prises en compte lors de la procédure d'estimation. Cette analyse a montré que l'estimateur BCOH $_\infty$ présente l'avantage d'estimer la composante déterministe d'intérêt modulée en amplitude

et en phase. En plus de cela, il est très sélectif et permet de fortement atténuer le bruit de mesure.

Quant à l'estimateur VK, en plus de la composante déterministe d'intérêt, il fournit une estimation d'autres composantes déterministes rejetées dans le bruit de mesure. Ce qui amplifie l'erreur d'estimation et conduit à une distorsion de la composante aléatoire. Cet estimateur possède une large bande passante qui favorise l'infiltration du bruit de mesure.

Dans le même chapitre, nous avons montré que l'estimation H_∞ est plus robuste que l'estimation de Kalman face aux incertitudes de modèle à partir d'un signal synthétique. Cela corrobore les résultats obtenus dans la littérature où il est montré que l'estimateur H_∞ est une version robuste de l'estimateur de Kalman.

Dans le chapitre 5, nous avons présenté deux signaux réels pour valider l'approche proposée. Le premier signal a été acquis sur un banc d'essai du laboratoire Vibration et Acoustique de l'Université de Lyon. Le but de l'analyse de ce signal était d'établir un diagnostic de l'état des engrenages en régime variable. Étant donné que la présence d'un défaut d'engrenage se manifeste par une modulation d'amplitude et une modulation de phase, ces dernières ont été estimées par les outils VK et $BCOH_\infty$. Nous avons pu constater que l'estimateur $BCOH_\infty$ fournit de meilleurs résultats que l'estimateur VK. Il permet de distinguer clairement la présence du défaut sur ledit engrenage tout en atténuant fortement l'effet du bruit de mesure.

Le deuxième signal provient du réducteur d'un réacteur d'avion de SAFRAN fonctionnant en régime variable. Il s'agissait d'identifier l'existence d'un défaut de bague externe modulé par la fréquence de rotation de la cage. Pour cela, nous avons analysé le spectre du carré de l'enveloppe du signal résiduel obtenu après une extraction des composantes déterministes.

Cette extraction a été faite par la moyenne synchrone, la prédiction linéaire, le cepstre, l'estimateur VK et l'estimateur $BCOH_\infty$. De toutes ces techniques, l'estimateur $BCOH_\infty$ est celle qui permet de mettre le plus en évidence une détection du défaut de la bague externe avec la modulation de la cage. Contrairement aux autres techniques, il fournit également un signal résiduel sans distorsion et exempt de composantes déterministes.

6.2 PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce mémoire ouvre de nombreuses perspectives pour le diagnostic des machines tournantes en régime variable.

1. L'estimateur $BCOH_\infty$ pourrait être utilisé pour suivre la fréquence des défauts de roulement à partir du carré de l'enveloppe du signal brut de vibration, et ce sans l'étape de suppression des composantes déterministes. L'avantage de cette approche est qu'elle offrirait un gain en temps de calcul.

En outre, elle serait robuste par rapport aux approches classiques, notamment celle exploitant la cyclo-stationnarité ou la cyclo-non-stationnarité, face aux incertitudes sur la fréquence de défaut de roulement. Cette dernière fluctue de manière aléatoire entre 1% et 2% [123].

2. Nous pensons également qu'il serait possible de rehausser l'impulsivité de l'enveloppe du signal résiduel par une estimation BCOH_∞ . Il faut rappeler que l'enveloppe du signal résiduel a été obtenue dans ce manuscrit par une démodulation sur toute la bande de fréquence. Cette démodulation n'est pas faite autour de la fréquence de résonance du roulement qui est excitée par le passage des éléments roulants sur le défaut. Cette démodulation fournit une enveloppe peu impulsive et assez polluée par le bruit. Dans le but de rehausser l'impulsivité de l'enveloppe, nous suggérons une estimation BCOH_∞ en cascade de l'enveloppe sur différentes bandes de fréquences du signal résiduel afin de retenir l'enveloppe la plus impulsive. Cette approche pourrait être une alternative au kurtogramme [138, 139].
3. Il pourrait également être envisagé la modélisation de l'enveloppe des composantes d'engrènement par une famille de polynômes trigonométriques combinée avec une estimation H_∞ . Cette approche permet d'estimer un nombre défini de raies latérales autour de composantes d'engrènement spécifiques en régime variable. Nous pensons que cette approche serait adéquate pour le diagnostic des engrenages planétaires. En effet, la vibration de ces derniers présentent des modulations complexes rendant difficiles l'identification de la roue défectueuse.
4. Dans le manuscrit, certaines méthodes requièrent la connaissance de la vitesse de rotation de la machine. Cette vitesse est souvent mesurée par le biais de capteurs dédiés montés sur l'arbre de rotation ou placés à proximité d'un élément tournant. Cependant, dans certaines situations pratiques les arbres ne sont pas accessibles. En plus, l'utilisation d'un capteur supplémentaire peut représenter un coût onéreux pour certains industriels. Pour répondre à cette problématique, nous suggérons le développement d'une version modifiée de l'estimateur BCOH_∞ . Un tel estimateur incorporerait l'estimation de la vitesse instantanée de rotation à partir du signal de vibration.

Travaux de recherche publiés au cours de cette thèse

- [1] A. Assoumane, E. Sekko, C. Capdessus, P. Ravier, Order tracking using H_{∞} estimator and polynomial approximation, *Mechanics & Industry* **Vol**, No (2018), [Preprint.researchgate](https://preprint.researchgate.net)
- [2] Assoumane A., Sekko E., Antoni J., Ravier P., Bearing signal enhancement using Taylor- H_{∞} estimator under variable speed condition. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8359444>
- [3] A. Assoumane, E. Sekko, P. Ravier, Kalman filtering using speed-dependent basis for the gear crack detection under a variable speed condition. In 15th CM-MFPT, 10-12 September 2018, Nottingham, United Kingdom.
- [4] Assoumane A., Roussel J., Sekko E., Capdessus C. (2018) A New Approach to Tune the Vold-Kalman Estimator for Order Tracking. In : *Advances in Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations. Applied Condition Monitoring*, vol 9. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61927-9_2
- [5] Roussel J., Assoumane A., Capdessus C., Sekko E. (2018) Estimation of Cyclic Cumulants of Machinery Vibration Signals in Non-stationary Operation. In : *Advances in Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations. Applied Condition Monitoring*, vol 9. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61927-9_3
- [6] A. Assoumane, P Ravier, C. Capdessus, E. Sekko, H_{∞} Estimator for Gearbox Diagnosis in Variable Speed Conditions, In : 25th EUSIPCO, 28 August - 2 september 2017, IEEE International Conference. DOI: [10.23919/EUSIPCO.2017.8081192](https://doi.org/10.23919/EUSIPCO.2017.8081192)
- [7] A. Assoumane, C. Capdessus, E. Sekko, P. Ravier, Order Tracking using Kalman Estimator and Taylor Series Approximation, In 13th CM-MFPT, 10-12 October 2016, Paris, France. <http://www.proceedings.com/32118.html>
- [8] A. Assoumane, E. Sekko, P. Ravier, C. Capdessus, Taylor- H_{∞} Estimator for Gearbox Diagnosis under Variable Speed Conditions, In : 26ième Colloque du GRETSI, 5 au 8 Septembre 2017, Juan-Les-Pins, France.

Bibliographie

- [1] Martin, K. F. (1994). A review by discussion of condition monitoring and fault diagnosis in machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 34(4), 527-551.
- [2] Randall, R. B. (2004). State of the art in monitoring rotating machinery-part 1. *Sound and vibration*, 38(3), 14-21.
- [3] Randall, R. B. (1982). A new method of modeling gear faults. *Journal of Mechanical Design*, 104(2), 259-267.
- [4] McFadden, P. D. (1986). Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing vibration. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 108(2), 165-170.
- [5] Randall, R. B. (2016). A history of cepstrum analysis and its application to mechanical problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*.
- [6] Dalpiaz, G., Rivola, A., & Rubini, R. (2000). Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears. *Mechanical systems and signal processing*, 14(3), 387-412.
- [7] Capdessus, C., Sidahmed, M., & Lacoume, J. L. (2000). Cyclostationary processes : application in gear faults early diagnosis. *Mechanical systems and signal processing*, 14(3), 371-385.
- [8] Antoni, J., Daniere, J., & Guillet, F. (2002). Effective vibration analysis of IC engines using cyclostationarity. Part IA methodology for condition monitoring. *Journal of sound and vibration*, 257(5), 815-837.
- [9] Antoni, J. (2009). Cyclostationarity by examples. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(4), 987-1036.

- [10] Ho, D., & Randall, R. B. (2000). Optimisation of bearing diagnostic techniques using simulated and actual bearing fault signals. *Mechanical systems and signal processing*, 14(5), 763-788.
- [11] Mechefske, C. K., & Mathew, J. (1992). Fault detection and diagnosis in low speed rolling element bearings Part I : The use of parametric spectra. *Mechanical systems and signal processing*, 6(4), 297-307.
- [12] Chen, Y. (1992). Machinery condition monitoring by inverse filtering and statistical analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 6(2), 177-189.
- [13] Wang, W., & Wong, A. K. (2002). Autoregressive model-based gear fault diagnosis. *Transactions-American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration and Acoustics*, 124(2), 172-179.
- [14] Zhan, Y., Makis, V., & Jardine, A. K. (2006). Adaptive state detection of gearboxes under varying load conditions based on parametric modelling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(1), 188-221.
- [15] Wang, W. J., & McFadden, P. D. (1993). Early detection of gear failure by vibration analysis i. calculation of the time-frequency distribution. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(3), 193-203.
- [16] Urbanek, J., Barszcz, T., & Antoni, J. (2013). Time-frequency approach to extraction of selected second-order cyclostationary vibration components for varying operational conditions. *Measurement*, 46(4), 1454-1463.
- [17] Fyfe, K. R., & Munck, E. D. S. (1997). Analysis of computed order tracking. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2), 187-205.
- [18] Hewlett-Packard Company (1997) Hewlett-Packard Application Note 243-1, Dynamic Signal Analyzer Applications.
- [19] Potter, R. W. (1990). U.S. Patent No. 4,912,661. Washington, DC : U.S. Patent and Trademark Office.
- [20] Potter, R. (1990). A new order tracking method for rotating machinery. *Sound and Vibration*, 24(9), 30-34.
- [21] Antoni, J. (2000). Apports de l'échantillonnage angulaire et de la cyclostationnarité au diagnostic par analyse vibratoire des moteurs thermiques (Doctoral dissertation, Grenoble, INPG).
- [22] Bonnardot, F. (2004). Comparaison entre les analyses angulaire et temporelle des signaux vibratoires de machines tournantes. Etude du concept de cyclostationnarité floue (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG).

- [23] Antoni, J., Bonnardot, F., Raad, A., & El Badaoui, M. (2004). Cyclostationary modelling of rotating machine vibration signals. *Mechanical systems and signal processing*, 18(6), 1285-1314.
- [24] Stander, C. J., & Heyns, P. S. (2006). Transmission path phase compensation for gear monitoring under fluctuating load conditions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7), 1511-1522.
- [25] Borghesani, P., Pennacchi, P., Randall, R. B., & Ricci, R. (2012). Order tracking for discrete-random separation in variable speed conditions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30, 1-22.
- [26] Antoni, J., Ducleaux, N., NGhiem, G., & Wang, S. (2013). Separation of combustion noise in IC engines under cyclo-non-stationary regime. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(1), 223-236.
- [27] Abboud, D., Antoni, J., Sieg-Zieba, S., & Eltabach, M. (2016). Deterministic-random separation in nonstationary regime. *Journal of Sound and Vibration*, 362, 305-326.
- [28] Abboud, D., Antoni, J., Sieg-Zieba, S., & Eltabach, M. (2017). Envelope analysis of rotating machine vibrations in variable speed conditions : a comprehensive treatment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 84, 200-226.
- [29] Feng, Z., Ma, H., & Zuo, M. J. (2016). Amplitude and frequency demodulation analysis for fault diagnosis of planet bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 382, 395-412.
- [30] Wang, T., Liang, M., Li, J., Cheng, W., & Li, C. (2015). Bearing fault diagnosis under unknown variable speed via gear noise cancellation and rotational order sideband identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 62, 30-53.
- [31] Daubechies, I. (1992). Ten lectures on wavelets. *Society for industrial and applied mathematics*.
- [32] Staszewski, W. J., & Tomlinson, G. R. (1994). Application of the wavelet transform to fault detection in a spur gear. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(3), 289-307.
- [33] Samuel, P., & Pines, D. J. (1997, March). Health monitoring and damage detection of a rotorcraft planetary geartrain system using piezoelectric sensors. In *Proceedings of SPIE* (Vol. 3041, pp. 44-53).
- [34] Dalpiaz, G., Rivola, A., & Rubini, R. (2000). Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears. *Mechanical systems and signal processing*, 14(3), 387-412.

- [35] Rubini, R., & Meneghetti, U. (2001). Application of the envelope and wavelet transform analyses for the diagnosis of incipient faults in ball bearings. *Mechanical systems and signal processing*, 15(2), 287-302.
- [36] Luo, G. Y., Osypiw, D., & Irle, M. (2003). On-line vibration analysis with fast continuous wavelet algorithm for condition monitoring of bearing. *Modal Analysis*, 9(8), 931-947.
- [37] Peng, Z. K., & Chu, F. L. (2004). Application of the wavelet transform in machine condition monitoring and fault diagnostics : a review with bibliography. *Mechanical systems and signal processing*, 18(2), 199-221.
- [38] Feng, Z., Liang, M., & Chu, F. (2013). Recent advances in time-frequency analysis methods for machinery fault diagnosis : A review with application examples. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(1), 165-205.
- [39] Cohen, L. (1989). Time-frequency distributions-a review. *Proceedings of the IEEE*, 77(7), 941-981.
- [40] McFadden, P. D. (1990). Time-frequency domain analysis of vibration signals for machinery diagnostics (1) Introduction to the Wigner-Ville distribution.
- [41] McFadden, P. D. (1991). Time-frequency domain analysis of vibration signals for machinery diagnostics (II) the weighted Wigner-Ville Distribution.
- [42] Staszewski, W. J., Worden, K., & Tomlinson, G. R. (1997). Time-frequency analysis in gearbox fault detection using the Wigner-Ville distribution and pattern recognition. *Mechanical systems and signal processing*, 11(5), 673-692.
- [43] Oehlmann, H., Brie, D., Tomczak, M., & Richard, A. (1997). A method for analysing gearbox faults using time-frequency representations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(4), 529-545.
- [44] Baydar, N., & Ball, A. (2001). A comparative study of acoustic and vibration signals in detection of gear failures using Wigner-Ville distribution. *Mechanical systems and signal processing*, 15(6), 1091-1107.
- [45] Meng, Q., & Qu, L. (1991). Rotating machinery fault diagnosis using Wigner distribution. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(3), 155-166.
- [46] Qian, S. (2003). Gabor expansion for order tracking. *Sound and Vibration*, 37(6), 18-23.
- [47] Gabor, D. (1946). Theory of communication. Part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering*, 93(26), 429-441.

- [48] Pan, M. C., & Chiu, C. C. (2006). Investigation on improved Gabor order tracking technique and its applications. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5), 810-826.
- [49] H. Vold, and J. Leuridan. High resolution order tracking at extreme slew rates, using Kalman tracking filter, *SAE paper* 931288, 1993,
- [50] Pan, M. C., & Wu, C. X. (2010). Extended angular-velocity Vold–Kalman order tracking. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 132(3), 031001.
- [51] Vold, H., Mains, M., & Blough, J. (1997). Theoretical foundations for high performance order tracking with the Vold-Kalman tracking filter (No. 972007). *SAE Technical Paper*.
- [52] Vold, H., Herlufsen, H., Mains, M., & Corwin-Renner, D. (1997). Multi axle order tracking with the Vold-Kalman tracking filter. *Sound and Vibration*, 31(5), 30-35.
- [53] Bai, M., Huang, J., Hong, M., & Su, F. (2005). Fault diagnosis of rotating machinery using an intelligent order tracking system. *Journal of sound and vibration*, 280(3), 699-718.
- [54] Wu, J. D., Huang, C. W., & Huang, R. (2004). An application of a recursive Kalman filtering algorithm in rotating machinery fault diagnosis. *NDT & E International*, 37(5), 411-419.
- [55] Pan, M. C., & Lin, Y. F. (2006). Further exploration of Vold–Kalman-filtering order tracking with shaft-speed information—I : Theoretical part, numerical implementation and parameter investigations. *Mechanical systems and signal processing*, 20(5), 1134-1154.
- [56] Pan, M. C., and Wu, C. X. Adaptive Vold-Kalman filtering order tracking. *Mech. Syst. Signal Process*, 21(8), 2957-2969, 2007.
- [57] Pan, M. C., Chu, W. C., & Le, D. D. (2016). Adaptive angular-velocity Vold–Kalman filter order tracking—Theoretical basis, numerical implementation and parameter investigation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 81, 148-161.
- [58] Pan, M. C., & Lin, Y. F. (2006). Further exploration of Vold–Kalman-filtering order tracking with shaft-speed information—II : Engineering applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(6), 1410-1428.
- [59] Feldbauer, C., & Holdrich, R. (2000, December). Realization of a Vold-Kalman tracking filter—a least squares problem. In *Proceedings of the COST G-6 Conference on Digital Audio Effects* (pp. 1-4).

- [60] Li, Y., Wang, X., Liu, Z., & Si, S. (2018, June). A fault diagnosis method of planetary gearbox under variable speed condition using Vold-Kalman filter and Laplacian score. In 2018 IEEE International Conference on Prognostics and Health Management (ICPHM) (pp. 1-5). IEEE.
- [61] Hong, J., Guangrui, W., Xiangfeng, Z., Yongfang, S., & Bin, X. (2017, July). Application of spectral kurtosis and vold-Kalman filter based order tracking in wind turbine gearbox fault diagnosis. In Modelling, Identification and Control (ICMIC), 2017 9th International Conference on (pp. 49-53). IEEE.
- [62] Feng, Z., Qin, S., & Liang, M. (2016). Time-frequency analysis based on Vold-Kalman filter and higher order energy separation for fault diagnosis of wind turbine planetary gearbox under nonstationary conditions. *Renewable Energy*, 85, 45-56.
- [63] Li, Y., Wei, Y., Feng, K., Wang, X., & Liu, Z. (2018). Fault Diagnosis of Rolling Bearing Under Speed Fluctuation Condition Based on Vold-Kalman Filter and RCMFE. *IEEE Access*, 6, 37349-37360.
- [64] Haykin, S. S. (2014). *Adaptive filter theory*. Upper Saddle River : Pearson.
- [65] Shen, X. (1995, May). Discrete H_∞ filter design with application to speech enhancement. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1995. ICASSP-95., 1995 International Conference on (Vol. 2, pp. 1504-1507). IEEE.
- [66] Shen, X., & Deng, L. (1999). A dynamic system approach to speech enhancement using the H_∞ filtering algorithm. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 7(4), 391-399.
- [67] Yaesh, I., & Shaked, U. (1991). A transfer function approach to the problems of discrete-time systems : $H/\text{sub infinity}/$ -optimal linear control and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11), 1264-1271.
- [68] Grimble, M. J., and El Sayed, A. Solution of the $H/\text{sub infinity}/$ optimal linear filtering problem for discrete-time systems. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, 38(7), 1092-1104, 1990.
- [69] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1), 35-45.
- [70] Kailath, T. (1981). Lectures on Wiener and Kalman filtering. In *Lectures on Wiener and Kalman Filtering* (pp. 1-143). Springer, Vienna.
- [71] Kailath, T. (1968). An innovations approach to least-squares estimation—Part I : Linear filtering in additive white noise. *IEEE transactions on automatic control*, 13(6), 646-655.

- [72] Simon, D. The discrete-time Kalman filter. In *Optimal state estimation : Kalman, H infinity, and nonlinear approaches* (pp. 336). John Wiley & Sons, 2006.
- [73] Sebghati, M., Amindavar, H., & Ritcey, J. A. Basis approach to estimate the instantaneous frequencies in multicomponent AM-FM signals. *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, 2014(1), 8.
- [74] Philips, W., and De Jonghe, G. (1992). Data compression of ECG's by high-degree polynomial approximation. *IEEE transactions on biomedical engineering*, 39(4), 330-337.
- [75] Poulimenos, A. G., & Fassois, S. D. (2006). Parametric time-domain methods for non-stationary random vibration modelling and analysis—a critical survey and comparison. *Mech. Syst. Signal Process.*, 20(4), 763-816.
- [76] Dimitriadis, G., Fassois, S. D., Poulimenos, A. G., & Shi, D. (2004, January). Identification and model updating of a non-stationary vibrating system. In *ASME 7th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis* (pp. 143-152). American Society of Mechanical Engineers.
- [77] de la O Serna, J. A., and Rodríguez-Maldonado, J. Taylor-Kalman-Fourier filters for instantaneous oscillating phasor and harmonic estimates. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 61(4), 941-951, 2012.
- [78] Wang, W. (2001). Early detection of gear tooth cracking using the resonance demodulation technique. *Mech. Syst. Signal Process.*, 15(5), 887-903.
- [79] Randall, R. B. (2016). Vibration-based diagnostics of gearboxes under variable speed and load conditions. *Meccanica*, 51(12), 3227-3239.
- [80] Bartelmus, W., & Zimroz, R. (2009). A new feature for monitoring the condition of gearboxes in non-stationary operating conditions. *Mech. Syst. Signal Process.*, 23(5), 1528-1534.
- [81] Guercioni, G. R., Galvagno, E., & Vigliani, A. (2015). An alternative method for order tracking using autopower spectrum. *Advances in Mechanical Engineering*, 7(11), 1687814015619277.
- [82] Capdessus, C., Sekko, E., & Antoni, J. (2014). Speed transform, a new time-varying frequency analysis technique. In *Advances in Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations* (pp. 23-35). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [83] Sorenson, H. W. (1970). Least-squares estimation : from Gauss to Kalman. *IEEE spectrum*, 7(7), 63-68.

- [84] Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of mathematical Psychology*, 47(1), 90-100.
- [85] Higham, N. J. (2002). Accuracy and stability of numerical algorithms (Vol. 80). Siam. p. 252.
- [86] Banavar, R. N., & Speyer, J. L. (1991, June). A linear-quadratic game approach to estimation and smoothing. In *American Control Conference*, 1991 (pp. 2818-2822). IEEE.
- [87] Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on automatic control*, 26(2), 301-320.
- [88] Zames, G., & Francis, B. A. (1981, December). A new approach to classical frequency methods : Feedback and minimax sensitivity. In *Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, 1981 20th IEEE Conference on (Vol. 20, pp. 867-874). IEEE.
- [89] Zames, G., & Francis, B. (1983). Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness. *IEEE transactions on Automatic Control*, 28(5), 585-601.
- [90] Yaesh, I., & Shaked, U. (1989, December). Game theory approach to optimal linear estimation in the minimum $H/\sup$ infinity/-norm sense. In *Decision and Control, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on* (pp. 421-425). IEEE.
- [91] Kwakernaak, H. (1985). Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(10), 994-1004.
- [92] Grimble, M. J. (1985). Polynomial systems approach to optimal linear filtering and prediction. *International Journal of Control*, 41(6), 1545-1564.
- [93] Grimble, M. J. (1986). Optimal H_∞ robustness and the relationship to LQG design problems. *International Journal of Control*, 43(2), 351-372.
- [94] Nagpal, K. M., & Khargonekar, P. P. (1991). Filtering and smoothing in an $H/\sup$ infinity/setting. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(2), 152-166.
- [95] Shen, X. M., & Deng, L. (1997). Game theory approach to discrete $H/\sub/spl$ infin/ /filter design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(4), 1092-1095.
- [96] Kwakernaak, H. (1986). A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems. *International Journal of Control*, 44(1), 117-156.

- [97] Elsayed, A., & Grimble, M. J. (1989). A new approach to the H_∞ design of optimal digital linear filters. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 6(2), 233-251.
- [98] Elsayed, A. E. A. (1988). Design of H_∞ filters (Doctoral dissertation, University of Strathclyde).
- [99] Iglesias, P. A., & Glover, K. (1991). State-space approach to discrete-time, $\mathcal{H}_\infty$ control. *International Journal of Control*, 54(5), 1031-1073.
- [100] Yaesh, I., & Shaked, U. (1992). Game theory approach to state estimation of linear discrete-time processes and its relation to H_∞ -optimal estimation. *International Journal of Control*, 55(6), 1443-1452.
- [101] Başar, T. (1991). Optimum performance levels for minimax filters, predictors and smoothers. *Systems & Control Letters*, 16(5), 309-317.
- [102] Shaked, U., & Theodor, Y. (1992, December). H_∞ -optimal estimation : a tutorial. In *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on* (pp. 2278-2286). IEEE.
- [103] Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1945). Theory of games and economic behavior. *Bull. Amer. Math. Soc*, 51(7), 498-504.
- [104] Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1), 48-49.
- [105] Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, 286-295.
- [106] Hassibi, B., Sayed, A. H., & Kailath, T. (1996). H_∞ optimality of the LMS algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(2), 267-280.
- [107] Speyer, J. L., Fan, C. H., & Banavar, R. N. (1992). Optimal stochastic estimation with exponential cost criteria. In *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on* (pp. 2293-2299). IEEE.
- [108] Başar, T., & Bernhard, P. (2008). Basic Elements of Static and Dynamic Games. In *H-infinity optimal control and related minimax design problems : a dynamic game approach* (pp. 63-65). Springer Science & Business Media.
- [109] Hilborn, C. G., & Lainiotis, D. G. (1969). Optimal estimation in the presence of unknown parameters. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 5(1), 38-43.
- [110] Alspach, D. (1974). A parallel filtering algorithm for linear systems with unknown time varying noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5), 552-556.

- [111] Kashyap, R. (1970). Maximum likelihood identification of stochastic linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(1), 25-34.
- [112] Bohlin, T. (1976). Four cases of identification of changing systems. In *Mathematics in Science and Engineering* (Vol. 126, pp. 441-518). Elsevier.
- [113] Myers, K., & Tapley, B. D. (1976). Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(4), 520-523.
- [114] Ding, W., Wang, J., Rigos, C., & Kinlyside, D. (2007). Improving adaptive Kalman estimation in GPS/INS integration. *The Journal of Navigation*, 60(3), 517-529.
- [115] Mehra, R. (1970). On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on automatic control*, 15(2), 175-184.
- [116] Mehra, R. (1972). Approaches to adaptive filtering. *IEEE Transactions on automatic control*, 17(5), 693-698.
- [117] Carew, B., & Belanger, P. (1973). Identification of optimum filter steady-state gain for systems with unknown noise covariances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(6), 582-587.
- [118] Bélanger, P. R. (1974). Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *Automatica*, 10(3), 267-275.
- [119] Kailath, T. (1968). An innovations approach to least-squares estimation—Part I : Linear filtering in additive white noise. *IEEE transactions on automatic control*, 13(6), 646-655.
- [120] Odelson, B. J., Lutz, A., & Rawlings, J. B. (2006). The autocovariance least-squares method for estimating covariances : application to model-based control of chemical reactors. *IEEE transactions on control systems technology*, 14(3), 532-540.
- [121] Odelson, B. J., Rajamani, M. R., & Rawlings, J. B. (2006). A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances. *Automatica*, 42(2), 303-308.
- [122] Rao, S. S., & Yap, F. F. Numerical Integration Methods In Vibration Analysis. In *Mechanical vibrations* (pp. 929 –943), (Vol. 4). Upper Saddle River : Prentice Hall, 2011.
- [123] Randall, R. B., and Antoni, J. Rolling element bearing diagnostics-a tutorial. *Mech. Syst. Signal Process.*, 25(2), 485-520, 2011.

- [124] Brie, D., Tomczak, M., Oehlmann, H., & Richard, A. (1997). Gear crack detection by adaptive amplitude and phase demodulation. *Mech. Syst. Signal Process*, 11(1), 149-167.
- [125] Randall, R. B. (1975). Gearbox fault diagnosis using cepstrum analysis. In *Proc. 4th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms* (Vol. 1, pp. 169-174).
- [126] Chen, X., & Feng, Z. (2016, June). Time-frequency demodulation analysis for gearbox fault diagnosis under nonstationary conditions. In *Prognostics and Health Management (ICPHM), 2016 IEEE International Conference on* (pp. 1-6). IEEE.
- [127] Howard, I., Jia, S., & Wang, J. (2001). The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack. *Mech. Syst. Signal Process*, 15(5), 831-853.
- [128] J. Antoni, J. Griffaton, H. André, et al. Feedback on the Surveillance 8 challenge : Vibration-based diagnosis of a Safran aircraft engine. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2017.
- [129] Madisetti, V. (2009). Digital signal processing fundamentals. CRC press.
- [130] Bediaga, I., Mendizabal, X., Arnaiz, A., and Munoa, J. Ball bearing damage detection using traditional signal processing algorithms. *IEEE Instrum. Meas. Mag.*, 16(2), 20-25, 2013.
- [131] Antoni, J. Cyclic spectral analysis of rolling-element bearing signals : Facts and fictions. *J. Sound Vibrat.*, 304(3-5), 497-529, 2017.
- [132] McFadden, P.D. and Toozy, M. Application of synchronous averaging to vibration monitoring of rolling element bearing, *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 14, no 6, p. 891-896, 2000.
- [133] Braun, S. The synchronous (time domain) average revisited, *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 25, no 4, p. 1087-1102, 2011.
- [134] Fyfe, K. R., and Munck, E. D. S. Analysis of computed order tracking. *Mech. Syst. Signal Process.*, 11(2), 187-205, 1997.
- [135] Antoni, J., Bonnardot, F., Raad, A., and El Badaoui, M. Cyclostationary modelling of rotating machine vibration signals. *Mech. Syst. Signal Process.*, 18(6), 1285-1314, 2004.
- [136] P.D. McFadden, J.D. Smith, Model for the vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing, *J. Sound Vibrat.* 96(1), 69-82, 1984.

- [137] Borghesani, P., Ricci, R., Chatterton, S., & Pennacchi, P. (2013). A new procedure for using envelope analysis for rolling element bearing diagnostics in variable operating conditions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(1), 23-35.
- [138] Antoni, J. (2007). Fast computation of the kurtogram for the detection of transient faults. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(1), 108-124.
- [139] Wang, D., Peter, W. T., & Tsui, K. L. (2013). An enhanced Kurtogram method for fault diagnosis of rolling element bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 35(1-2), 176-199.
- [140] Sawalhi, N., Randall, R. B., & Endo, H. (2007). The enhancement of fault detection and diagnosis in rolling element bearings using minimum entropy deconvolution combined with spectral kurtosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6), 2616-2633.
- [141] Barszcz, T., & Sawalhi, N. (2012). Fault detection enhancement in rolling element bearings using the minimum entropy deconvolution. *Archives of acoustics*, 37(2), 131-141.
- [142] Ramirez, Miguel Arjona. "A Levinson algorithm based on an isometric transformation of Durbin's." *IEEE Signal Processing Letters* 15 (2008) : 99-102.
- [143] H. Akaike, 'Fitting autoregressive models for prediction', *Ann Inst Math*, 21, pp 243-247, 1969.
- [144] N Sawalhi, 'Rolling element bearings : diagnostics, prognostics and fault simulations', PhD Dissertation, University of New South Wales, 2007.
- [145] Sawalhi, N., & Randall, R. B. (2011, May). Signal pre-whitening using cepstrum editing (liftering) to enhance fault detection in rolling element bearings. In *Proceedings of the 24 international congress on condition monitoring and diagnostic engineering management (comadem2011)*, may (pp. 330-336).
- [146] Borghesani, P., Pennacchi, P., Randall, R. B., Sawalhi, N., & Ricci, R. (2013). Application of cepstrum pre-whitening for the diagnosis of bearing faults under variable speed conditions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(2), 370-384.
- [147] Morel, J. (1992). *Surveillance vibratoire et maintenance prédictive*. Ed. Techniques Ingénieur.
- [148] Moret, M. (1990). *Roulements et butées à billes et à rouleaux*. Ed. Techniques Ingénieur.

Procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

La procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt consiste à transformer une famille de vecteurs linéairement indépendants en une famille de vecteurs orthogonaux selon la norme euclidienne. Cette opération peut être vue comme la recherche d'une matrice de passage d'une famille de vecteurs non orthogonaux en une famille de vecteurs orthogonaux.

Soient $\mathcal{B}_1[n] = \begin{pmatrix} u_1[n] & u_2[n] & \cdots & u_m[n] \end{pmatrix}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants et $\mathcal{B}_2[n] = \begin{pmatrix} v_1[n] & v_2[n] & \cdots & v_m[n] \end{pmatrix}$ la famille de vecteurs orthogonaux correspondante telle que

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{n=1}^N v_i[n]v_j[n] = \begin{cases} \|v_i\|^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La procédure de Gram-Schmidt considère le i^{e} vecteur $v_i[n]$ comme combinaison linéaire de $u_i[n]$ et des précédents vecteurs $v_{i-1}[n], v_{i-2}[n], \dots$. Les coefficients de la combinaison sont déterminés pour garantir l'orthogonalité des vecteurs $v_i[n]$. Les étapes suivantes sont alors mises en œuvre :

- Poser $v_1[n] = u_1[n]$;
- Construire le vecteur $v_2[n]$ tel que $v_2[n] = u_2[n] + \alpha_{2,1}v_1[n]$ avec
 - $\alpha_{2,1} = -\frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$
- Construire les vecteurs $v_i[n]$ tels que
 - $v_i = u_i[n] + \alpha_{i,1}v_1 + \alpha_{i,2}v_2 + \cdots + \alpha_{i,i-1}v_{i-1}$
 - $\alpha_{i,j} = -\frac{\langle u_i, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$

Les trois premiers vecteurs de la base orthogonale $\mathcal{B}_2[n]$ sont exprimés ci-dessous :

$$v_1[n] = 1 \quad (A.2)$$

$$v_2[n] = \omega[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega[n] \quad (A.3)$$

$$v_3[n] = \omega^2[n] - \frac{\sum_{n=1}^N \omega^3[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega^2[n] \sum_{n=1}^N \omega[n]}{\sum_{n=1}^N \omega^2[n] - \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N \omega[n] \right)^2} \left(\omega[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega[n] \right) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega^2[n] \quad (A.4)$$

ANNEXE B

Estimation H_∞

B.1 DÉMONSTRATION DE L'ESTIMATION H_∞

Cette démonstration du problème de l'estimation H_∞ s'inspire en grande partie de celle proposée par Dan Simon [72]. Soit le modèle d'état défini ci-dessous :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n] \quad (\text{B.2})$$

Soit également la fonction coût définie par :

$$J = \frac{-1}{\gamma} \|\mathbf{x}[1] - \hat{\mathbf{x}}[1]\|_{\mathbf{P}[1]^{-1}}^2 + \sum_{n=1}^N \left[\|\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]\|^2 - \frac{1}{\gamma} \left(\|\mathbf{w}[n]\|_{\mathbf{Q}[n]^{-1}}^2 + \|\mathbf{v}[n]\|_{\mathbf{R}^{-1}[n]}^2 \right) \right] \quad (\text{B.3})$$

dans laquelle Le problème consiste à déterminer une estimation qui minimise cette fonction coût. Dans le cas particulier de l'estimation H_∞ , nous recherchons une estimation qui minimise le maximum de cette fonction coût. Ce problème peut être considéré comme un problème minimax dans lequel :

$$J^* = \min_{\hat{\mathbf{x}}[n]} \max_{(\mathbf{v}[n], \mathbf{w}[n], \mathbf{x}[1])} J(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}[1], \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (\text{B.4})$$

La maximisation de J par $\mathbf{v}[n]$ revient à sa maximisation par $\mathbf{y}$. Par conséquent, nous obtenons :

$$J^* = \min_{\hat{\mathbf{x}}[n]} \max_{(\mathbf{y}[n], \mathbf{w}[n], \mathbf{x}[1])} J(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}[1], \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (\text{B.5})$$

En substituant l'équation B.2 dans la fonction coût ci-dessous, il résulte que :

$$\begin{aligned}
 J &= + \sum_{n=1}^N \left[\|\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]\|^2 - \frac{1}{\gamma} \left(\|\mathbf{w}[n]\|_{\mathbf{Q}[n]^{-1}}^2 + \|\mathbf{y}[n] - \mathbf{h}[n]\mathbf{x}[n]\|_{\mathbf{R}^{-1}[n]}^2 \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} \|\mathbf{x}[1] - \hat{\mathbf{x}}[1]\|_{\mathbf{P}_1^{-1}}^2 \\
 &= \psi(\mathbf{x}[1]) + \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[n]
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

avec ψ une fonction connue de $\mathbf{x}[1]$ et $\mathcal{L}[n]$ une fonction connue dépendant de $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{w}[n]$ et $\mathbf{v}[n]$.

Le problème minimax est résolu en deux étapes. D'abord, la fonction coût J est optimisée par rapport à $\mathbf{x}[1]$ and $\mathbf{w}[n]$. Puis, elle est optimisée par rapport à $\hat{\mathbf{x}}[n]$ and $\mathbf{y}[n]$.

B.1.1 Optimisation de J par rapport à $\mathbf{x}[1]$ et $\mathbf{w}[n]$

Le problème ici est de maximiser J (tout en satisfaisant la contrainte $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n]$) par rapport $\mathbf{x}[1]$ et $\mathbf{w}[n]$. Cela consiste à définir le Hamiltonien comme suit :

$$\mathcal{H}[n] = \mathcal{L}[n] + \frac{2\lambda[n+1]^T}{\gamma} (\mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n]) \tag{B.7}$$

où $2\lambda[n+1]/\gamma$ est le multiplicateur de Lagrange variable. Soit la fonction coût augmentée J_a définie par

$$J_a = \psi(\mathbf{x}[1]) + \sum_{n=1}^N \left(\mathcal{H}[n] - \frac{2\lambda[n]^T}{\gamma} \mathbf{x}[n] \right) - \frac{2\lambda[N+1]^T}{\gamma} \mathbf{x}[N+1] + \frac{2\lambda[1]^T}{\gamma} \mathbf{x}[1] \tag{B.8}$$

En prenant la dérivée première de J_a par rapport à $\mathbf{x}[1]$, $\mathbf{w}[n]$ et $\lambda[n]$, les conditions nécessaires pour que J_a atteigne son maximum, il faut :

$$\mathbf{x}[1] = \hat{\mathbf{x}}[1] + \mathbf{P}[1]\lambda[1] \tag{B.9}$$

$$\lambda[N+1] = 0 \tag{B.10}$$

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{Q}[n]\lambda[n+1] \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda[n] &= \mathbf{F}^T[n]\lambda[n+1] + \gamma(\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) \\
 &\quad + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{h}[n]\mathbf{x}[n]), n = 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

À partir de l'équation B.9 nous supposons que :

$$\mathbf{x}[n] = \boldsymbol{\mu}[n] + \mathbf{P}[n]\lambda[n] \tag{B.13}$$

où $\boldsymbol{\mu}[n]$ et $\mathbf{P}[n]$ sont à déterminer. $\mathbf{P}[1]$ est donné par l'utilisateur et $\boldsymbol{\mu}[1] = \hat{\mathbf{x}}[1]$.

La substitution de l'équation B.13 dans l'équation B.1 et B.12 permet d'obtenir :

$$\boldsymbol{\mu}[n+1] + \mathbf{P}[n+1]\lambda[n+1] = \mathbf{F}[n]\boldsymbol{\mu}[n] + \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n]\lambda[n] + \mathbf{Q}[n]\lambda[n+1] \tag{B.14}$$

et

$$\lambda[n] = \mathbf{Z}[n] \left[\mathbf{F}^T[n] \lambda[n+1] + \gamma(\mu[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n](y[n] - \mathbf{h}[n]\mu[n]) \right] \quad (\text{B.15})$$

où $\mathbf{Z}[n] = (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{P}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n])^{-1}$. Cette expression de λ remplacée dans l'équation B.14 conduit à :

$$\begin{aligned} \mu[n+1] - \mathbf{F}[n]\mu[n] - \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n]\mathbf{Z}[n] \left[\gamma(\mu[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n](y[n] - \mathbf{h}[n]\mu[n]) \right] = \\ \left[-\mathbf{P}[n+1] + \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n]\mathbf{Z}[n]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \right] \lambda[n+1] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Cette équation est satisfaite si, et seulement si,

$$\mu[n+1] = \mathbf{F}[n]\mu[n] + \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n]\mathbf{Z}[n] \left[\gamma(\mu[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n](y[n] - \mathbf{h}[n]\mu[n]) \right] \quad (\text{B.17})$$

et

$$\mathbf{P}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{P}[n]\mathbf{Z}[n]\mathbf{F}^T[n] + \mathbf{Q}[n] \quad (\text{B.18})$$

B.1.2 Optimisation de J par rapport à $\hat{\mathbf{x}}[n]$ and $y[n]$

Le problème de l'optimisation est formulé ici comme suit :

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}[n]} \max_{y[n]} J \quad (\text{B.19})$$

sous la contrainte $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n]$. En utilisant la stratégie optimale formulée par les équations B.9, B.11 et B.13, la fonction coût J peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} J = & \frac{-1}{\gamma} \|\lambda[1]\|_{\mathbf{P}[1]}^2 + \sum_{n=1}^N \left[\|\mu[n] + \mathbf{P}[n]\lambda[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|y[n] - \mathbf{h}[n](\mu[n] + \mathbf{P}[n]\lambda[n])\|_{\mathbf{R}^{-1}[n]}^2 \right] \\ & - \frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^N \|\lambda[n+1]\|_{\mathbf{Q}[n]}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Étant donné que $\lambda[N+1] = 0$, nous pouvons remarquer que :

$$\sum_{n=1}^{N+1} \lambda^T[n] \mathbf{P}[n] \lambda[n] - \sum_{n=1}^N \lambda^T[n] \mathbf{P}[n] \lambda[n] = 0 \quad (\text{B.21})$$

Cette équation peut également s'écrire comme :

$$-\frac{1}{\gamma} \|\lambda[1]\|_{\mathbf{P}[1]}^2 = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^N \left(\lambda^T[n+1] \mathbf{P}[n+1] \lambda[n+1] - \lambda^T[n] \mathbf{P}[n] \lambda[n] \right) \quad (\text{B.22})$$

En remplaçant cette expression dans la fonction coût de l'équation B.20 ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} J = & \sum_{n=1}^N [(\mu[n] - \hat{x}[n])^T (\mu[n] - \hat{x}[n]) + 2(\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] \lambda[n] + \lambda[n]^T P[n] \lambda[n] + \\ & \frac{1}{\gamma} \lambda[n+1]^T (P[n+1] - Q[n]) \lambda[n+1] - \frac{1}{\gamma} \lambda[n]^T P[n] \lambda[n] - \frac{1}{\gamma} (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] (y[n] - h[n] \mu[n]) + \\ & \frac{2}{\gamma} (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] P[n] \lambda[n] - \frac{1}{\gamma} \lambda[n]^T P[n] h^T[n] R^{-1}[n] h[n] P[n] \lambda[n]] \quad (B.23) \end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant au terme $\lambda^T[n+1](P[n+1] - Q[n])\lambda[n+1]$ dans l'équation précédente. En remplaçant l'expression de $P[n+1]$ de l'équation B.18 et celle de $F_k^T \lambda[n+1]$ de l'équation B.15, le terme $\lambda^T[n+1](P[n+1] - Q[n])\lambda[n+1]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda[n+1]^T (P[n+1] - Q[n]) \lambda[n+1] = & \left[\lambda[n]^T Z[n]^{-1} - \gamma(\mu[n] - \hat{x}[n])^T - (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] \right] P[n] Z[n] \\ & \times \left[\lambda[n]^T Z[n]^{-1} - \gamma(\mu[n] - \hat{x}[n])^T - (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] \right]^T \quad (B.24) \end{aligned}$$

La forme développée de ce terme est :

$$\begin{aligned} \lambda[n+1]^T (P[n+1] - Q[n]) \lambda[n+1] = & \lambda[n]^T Z[n]^{-1} P[n] \lambda[n] + \gamma \lambda[n]^T Z[n]^{-1} P[n] Z[n] (\mu[n] - \hat{x}[n]) - \\ & \lambda[n]^T Z[n]^{-1} P[n] Z[n] h^T[n] R^{-1}[n] (y[n] - h[n] \mu[n]) - \gamma (\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] \lambda[n] + \gamma^2 (\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] Z[n] (\mu[n] - \hat{x}[n]) \\ & - (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] P[n] \lambda[n] + \gamma (\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] Z[n] h^T[n] R^{-1}[n] \times (y[n] - h[n] \mu[n]) \\ & + \gamma (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] P[n] Z[n] (\mu[n] - \hat{x}[n]) + (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] P[n] Z[n] h^T[n] R^{-1}[n] (y[n] - h[n] \mu[n]) \quad (B.25) \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que l'expression ci-dessus est un scalaire. Cela signifie que chaque terme est un scalaire et est égal à sa forme transposée.

Par exemple $\gamma \lambda^T[n] Z^{-1}[n] P[n] Z[n] (\mu[n] - \hat{x}[n]) = \gamma (\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] \lambda[n]$ étant donné que $P[n]$ et $Z[n]$ sont des matrices symétriques et γ est un scalaire. La substitution de l'expression de $Z[n]$ dans le premier terme de l'équation ci-dessus conduit à :

$$\begin{aligned} \lambda[n+1]^T (P[n+1] - Q[n]) \lambda[n+1] = & \lambda[n]^T P[n] \lambda[n] - \gamma \lambda[n]^T P[n] P[n] \lambda[n] \\ & + \lambda[n]^T P[n] h^T[n] R^{-1}[n] h[n] P[n] \lambda[n] - 2\gamma (\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] \lambda[n] - 2(y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] P[n] \lambda[n] + \\ & \gamma^2 (\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] Z[n] (\mu[n] - \hat{x}[n]) + 2\gamma (\mu[n] - \hat{x}[n])^T P[n] Z[n] h^T[n] R^{-1}[n] (y[n] - h[n] \mu[n]) \\ & + (y[n] - h[n] \mu[n])^T R^{-1}[n] h[n] P[n] Z[n] h^T[n] R^{-1}[n] (y[n] - h[n] \mu[n]) \quad (B.26) \end{aligned}$$

Remplaçons cette expression de $\lambda[n+1]^T (P[n+1] - Q[n])\lambda[n+1]$ dans l'équation B.23. Finalement, la fonction coût se met sous la forme :

$$\begin{aligned} J = & \sum_{k=1}^N [(\mu[k] - \hat{x}[k])^T (I + \gamma P[k] Z[k]) (\mu[k] - \hat{x}[k]) \\ & + 2(\mu[k] - \hat{x}[k])^T P[k] Z[k] h^T[k] R^{-1}[k] (y[k] - h[k] \mu[k]) + \\ & \frac{1}{\gamma} (y[k] - h[k] \mu[k])^T (R^{-1}[k] h[k] P[k] Z[k] h^T[k] R^{-1}[k] - R^{-1}[k]) (y[k] - h[k] \mu[k]) \quad (B.27) \end{aligned}$$

Rappelons que notre objectif est d'optimiser J par rapport à $\hat{x}[n]$ et $y[n]$. Pour cela, déterminons les dérivées partielles de l'équation B.27 par rapport à $\hat{x}[n]$. Ces dérivées s'écrivent :

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}[n]} = 2(\mathbf{I} + \gamma \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n]) (\hat{x}[n] - \mu[n]) + 2\mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] (\mathbf{h}[n] \mu[n] - y[n]) \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial y[n]} &= 2\mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] (\mu[n] - \hat{x}[n]) + \\ &\quad \frac{2}{\gamma} (\mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] - \mathbf{R}^{-1}[n]) (y[n] - \mathbf{h}[n] \mu[n]) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Les extremums de J sont obtenus en mettant à zéro les équations B.28 et B.29. Cela permet d'obtenir :

$$\hat{x}[n] = \mu[n] \quad (\text{B.30})$$

$$y[n] = \mathbf{h}[n] \mu[n] \quad (\text{B.31})$$

En remplaçant cette expression de $\hat{x}[n]$ dans l'équation B.17, nous obtenons l'estimation H_∞ sous la forme suivante :

$$\hat{x}[n+1] = \mathbf{F}[n] \hat{x}[n] + \mathbf{g}_\infty[n] (y[n] - \mathbf{h}[n] \hat{x}[n]) \quad (\text{B.32})$$

expression dans laquelle $\mathbf{g}_\infty$ est le gain de l'estimation H_∞ . Il est obtenu par identification à l'équation B.17 telle que :

$$\mathbf{g}_\infty[n] = \mathbf{F}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \quad (\text{B.33})$$

avec

$$\mathbf{Z}[n] = (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{P}[n] + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n])^{-1} \quad (\text{B.34})$$

Les extremums recherchés dans le problème *minimax* sont tels que $\hat{x}[n]$ minimise J et $y[n]$ maximise J . Ces extremums existent ssi,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{x}[n]^2} = 2(\mathbf{I} + \gamma \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n]) > 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y[n]^2} = \frac{2}{\gamma} (\mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] - \mathbf{R}^{-1}[n]) < 0 \quad (\text{B.36})$$

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée quelconque. L'expression $\mathbf{A} > 0$ signifie que $\mathbf{A}$ est définie positive. Par conséquent, à partir de l'équation B.35, $\hat{x}[n]$ minimise J si $\mathbf{Z}[n]$ est définie positive. Pour cela, il suffit que

$$\mathbf{P}[n]^{-1} - \gamma \mathbf{I} + \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] > 0 \quad (\text{B.37})$$

Quant à $y[n]$, il maximise J if $(\mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n] - \mathbf{R}^{-1}[n])$ est définie négative¹. En d'autres termes, J est maximisée par $y[n]$ ssi :

$$\mathbf{R}[n] > \mathbf{h}[n] \mathbf{P}[n] \mathbf{Z}[n] \mathbf{h}^T[n] \quad (\text{B.38})$$

CQFD²

1. Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est définie négative ssi $\mathbf{A} < 0$.

2. CQFD pour 'ce qu'il fallait démontrer'.

Conclusion Pour un modèle d'état définie par les équations B.1 et B.2, l'estimation H_∞ de la variable d'état est obtenue par les équations récursives B.18, B.32, B.33 et B.34. Par ailleurs, il faut s'assurer que les inégalités B.37 et B.38 sont satisfaites.

Caractéristiques des défauts de roulement

Dans le domaine fréquentiel, la fréquence d'un défaut de bague externe est :

$$\text{BPFO} = \frac{n f_r}{2} \left[1 - \frac{d}{D} \cos(\varphi) \right] \quad (\text{C.1})$$

La fréquence d'un défaut sur la bague interne est :

$$\text{BPFI} = \frac{n f_r}{2} \left[1 + \frac{d}{D} \cos(\varphi) \right] \quad (\text{C.2})$$

La fréquence d'un défaut de cage est :

$$\text{FTF} = \frac{f_r}{2} \left[1 - \frac{d}{D} \cos(\varphi) \right] \quad (\text{C.3})$$

La fréquence d'un défaut d'élément roulant est :

$$\text{BSF} = \frac{D f_r}{2d} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \cos(\varphi) \right)^2 \right] \quad (\text{C.4})$$

D est le diamètre interne de la bague externe, d est le diamètre des éléments roulants, φ est l'angle de contact, n est le nombre d'éléments roulants et f_r est la fréquence de rotation de la bague tournante.

La périodicité d'apparition de ces défauts dans le domaine des ordres machines est obtenue en normalisant les fréquences de défaut par la fréquence de rotation f_r .

Amadou ASSOUMANE

Diagnostic des machines tournantes par une analyse du signal vibratoire en régime variable

Depuis une dizaine d'années, plusieurs méthodes de traitement du signal vibratoire ont été développées pour le diagnostic des machines tournantes en régime stationnaire. Or, de plus en plus de machines sous surveillance fonctionnent en régime variable telles que les éoliennes, les concasseurs, etc... Les méthodes développées pour la surveillance et le diagnostic de ces machines en régime stationnaire ne sont plus adaptées en régime variable. Certains outils proposés pour le régime variable sont limités à des applications bien spécifiques ou offrent un cadre théorique qui limite leur utilisation dans les situations réelles. Le but de cette thèse est justement de pallier ces limitations, et ce, en proposant une nouvelle approche permettant d'analyser les signaux vibratoires acquis en régime variable. La stratégie mise en œuvre dans cette thèse repose sur une modélisation du signal vibratoire dans l'espace d'état et une estimation H^∞ des grandeurs caractéristiques de l'état de fonctionnement de la machine. Tout d'abord, nous avons décrit le signal vibratoire dans l'espace d'état grâce à une projection de l'enveloppe de chaque composante fréquentielle du signal sur la base canonique orthogonale. Ensuite, nous avons proposé une estimation de l'enveloppe. Cette approche d'estimation repose sur une optimisation minimax et consiste à minimiser le maximum de l'erreur d'estimation sans faire d'hypothèse sur la nature statistique des bruits du modèle d'état. Cette stratégie a conduit à ce que nous avons appelé dans cette thèse 'estimateur BCOH $^\infty$ '. La nouvelle approche proposée a été appliquée à des signaux synthétiques et expérimentaux pour le diagnostic de l'état des engrenages et des roulements en régime variable.

Mots clés : diagnostic, machines tournantes, signal vibratoire, régime variable, modèle d'état, estimation H^∞ .

Diagnostic based on vibration signal analysis of rotating machine under variable regime

Over the past ten years, several vibration signal-processing methods have been developed for the diagnosis of stationary rotating machines. However, more and more machines under surveillance operate in variable speed condition such as wind turbines, crushers, etc... The methods developed for the monitoring and diagnosis of these machines in steady state are no longer suitable for variable regimes. Some tools proposed for the variable regime case are limited to specific applications or offer a theoretical framework that limits their use in real situations. The purpose of this thesis is precisely to overcome these limitations, and this, by proposing a new approach to analyse the vibration signal acquired in variable regime. The strategy implemented in this thesis is based on a modelling of the vibration signal in the state space and an estimation H^∞ of the characteristic quantities of the operating state of the machine. First, we described the vibration signal in the state space through a projection of the envelope of each frequency component of the signal on the orthogonal canonical basis. Then we proposed an estimate of the envelope. This estimation approach is based on a minimax optimization and consists of minimizing the maximum of the estimation error without making any assumptions about the statistical nature of the state model noise. This strategy led to what we called in this thesis 'BCOH $^\infty$ estimator'. The proposed new approach has been applied to synthetic and experimental signals for the diagnosis of gears and bearings condition in variable speed.

Keywords : diagnostic, rotating machines, vibration signal, variable regime, state model, H^∞ estimation.



LABORATOIRE PRISME
8 Rue Léonard de Vinci – 45072 Orléans

