



ÉCOLE Nationale des Ingénieurs de Sousse

Laboratoire Networked Objects, Control, and Communication Systems

**École Doctorale "Mathématiques, Informatique, Physique Théorique et Ingénierie
des systèmes**

Laboratoire PRISME EA 4229

Thèse en cotutelle internationale présentée par :

Amine ABADI

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université de Sousse et l'Université d'Orléans**

**Contribution à la génération des trajectoires
optimales pour les systèmes différentiellement
plats, application au cas d'un quadrirotor**

JURY :

Pr. Jaleleddine BEN HADJ SLAMA	Président
Pr. Tarek RAISSI	Rapporteur
Pr. Kais BOUZRARA	Rapporteur
Pr. Ali ZOLGHADRI	Examineur
Pr. Hassen MEKKI	Directeur de thèse
Pr. Nacim RAMDANI	Co-directeur de thèse
Mc. Adnen EL AMRAOUI	Co-encadrant de thèse

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à Mr Hassen MEKKI mon directeur de thèse à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sousse , son expérience, ses orientations, ses qualités pédagogiques et humaines m'ont permis de mener à bien cette thèse. Je le remercie de m'avoir accordé une entière confiance et surtout beaucoup d'autonomie.

Je ne saurais jamais comment exprimer ma reconnaissance à Mr. Nacim RAMDANI mon directeur de thèse à l'Université d'Orléans qui a enrichi mes recherches avec ses remarques pertinentes et qui a toujours cru en moi. Je le remercie pour son soutien dans les moments difficiles et de m'avoir assuré les conditions nécessaires pour l'accomplissement de mon travail de thèse.

J'adresse mes remerciements au Mr Adnen EL AMRAOUI, Co-encadrant de cette thèse, de m'avoir guidé et conseillé tout au long de mes travaux de recherche.

Je remercie également Mr Jaleleddine BEN HADJ SLAMA, d'avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie Mr Tarek RAISSI et Mr Kais BOUZRARA d'avoir accepté de rapporter ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également au Mr Ali ZOLGHADRI d'avoir pris la peine de juger ce travail et d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin je voudrais, aussi, exprimer ma profonde sympathie à tous les membres des laboratoires Networked Objects, Control, and Communication Systems à Sousse et Prisme à Bourges, pour leur aide et leur sincère amitié.

Table des matières

Liste des figures	iv
Liste des tableaux	v
Liste des publications	1
Abréviations	3
Terminologies	4
Abstract	5
Résumé	6
Introduction Générale	7
I État d’art et concepts généraux	11
I.1 Introduction	12
I.2 État de l’art sur les drones	12
I.2.1 Les drones HALE (Haute Altitude Longue Endurance)	13
I.2.2 Les drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance)	13
I.2.3 Les drones tactiques à moyenne endurance (MAME)	14
I.2.4 Les mini drones	14
I.2.5 Les micros drones	16
I.3 Analyse de la modélisation dynamique d’un quadrirotor	16
I.3.1 Choix des coordonnées	17
I.3.2 Équations de mouvement de translation	18
I.3.3 Équations de mouvement de rotation	20
I.3.4 Modèle dynamique complet de quadrirotor	21
I.4 Le concept de la platitude différentielle	22
I.4.1 Définition de la platitude	23
I.4.2 Platitude et linéarisation	23

I.4.2.1	Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique	23
I.4.2.2	Linéarisation par bouclage dynamique endogène	24
I.4.3	Platitude et planification de trajectoire	25
I.4.4	Commande par platitude de suivi	26
I.5	Méthode de génération de trajectoires optimales	27
I.5.1	Méthode indirecte	28
I.5.2	Méthode directe	31
I.6	Conclusion	36
II	Génération de trajectoire optimale	38
II.1	Introduction	39
II.2	Méthode de génération de trajectoires optimales proposée	39
II.2.1	Problème de commande optimale dans l'espace des sorties plates	40
II.2.2	Approximations des sorties plates	40
II.2.3	Transformation en un problème de programmation non linéaire	42
II.3	Génération de trajectoires optimales pour un quadrirotor	43
II.3.1	Définition de problème d'optimisation	43
II.3.2	Résolution de problème d'optimisation	46
II.4	Conclusion	55
III	Commande robuste par platitude	56
III.1	Introduction	57
III.2	Synthèse de régulateur robuste par platitude basé sur la commande par mode glissant	58
III.3	Synthèse de régulateur robuste par platitude basé sur la commande par mode glissant et la commande par rejet actif des perturbations	62
III.4	Étude par simulation	66
III.4.1	Conception de la commande par platitude basée sur le mode glissant pour un modèle incertain de quadrirotor	67
III.4.2	Conception de la commande par platitude basée sur le mode glissant et le contrôle par rejet actif des perturbations pour un modèle incertain de quadrirotor	77
III.5	Conclusion	87
IV	Commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle	88
IV.1	Introduction	89
IV.2	Observateur par intervalle	89

IV.3 Conception de la commande de suivi garantie pour un modèle incertain de quadrirotor	94
IV.3.1 Incertitudes modérées	104
IV.3.2 Incertitudes importantes	110
IV.4 Conclusion	110
Conclusion Générale	117
Références	119

Liste des figures

Figure I.1	Global Hawk RQ-4B (USA-Allemagne).	13
Figure I.2	Predator	14
Figure I.3	Shadow-200-RQ-7B (USA)	15
Figure I.4	Novadem U130	15
Figure I.5	Drone insecte	16
Figure I.6	Schéma de quadrirotor.	17
Figure I.7	Génération de trajectoires dans l'espace des sorties plates	26
Figure I.8	Schéma de pendule inversé	34
Figure I.9	Les trajectoires optimales des états	36
Figure I.10	Trajectoire optimale de commande de pendule inversé	37
Figure II.1	Environnement de travail en 2D	45
Figure II.2	Environnement de travail en 3D	45
Figure II.3	Trajectoire optimale en jerk du quadrirotor en 2D	50
Figure II.4	Trajectoire optimale en jerk du quadrirotor en 3D	50
Figure II.5	Trajectoires optimales des positions du quadrirotor	51
Figure II.6	Trajectoires optimales des vitesses du quadrirotor	52
Figure II.7	Trajectoires optimales des angles du quadrirotor	53
Figure II.8	Trajectoires optimales des vitesses angulaires du quadrirotor	53
Figure II.9	Commandes optimales du quadrirotor	54
Figure III.1	Schéma global de la commande FSMC appliquée sur un système non linéaire plat perturbé en boucle fermée	59
Figure III.2	Le phénomène de broutement.	61
Figure III.3	Fonction saturation	62
Figure III.4	Schéma global de la commande FSADRC appliquée sur un système non linéaire plat perturbé en boucle fermée	63
Figure III.5	Entrées de commande de quadrirotor	74
Figure III.6	Comportement des trajectoires de quadrirotor en 3D	74
Figure III.7	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant x , y et z	75

Figure III.8	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant ϕ , θ et ψ	76
Figure III.9	Entrées de commande de quadrirotor.	83
Figure III.10	Comportement des trajectoires de quadrirotor en 3D.	83
Figure III.11	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant x , y et z	84
Figure III.12	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant ϕ , θ et ψ	85
Figure III.13	Estimation des perturbations totales affectant les systèmes de Brunovsky	86
Figure IV.1	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les positions x , y et z	105
Figure IV.2	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses v_x , v_y et v_z	106
Figure IV.3	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les angles d'Euler ϕ , θ et ψ	107
Figure IV.4	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses angulaires de ω_ϕ , ω_θ et ω_ψ	108
Figure IV.5	Entrées de commande de quadrirotor	109
Figure IV.6	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les positions x , y et z	111
Figure IV.7	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses v_x , v_y et v_z	112
Figure IV.8	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les angles d'Euler ϕ , θ et ψ	113
Figure IV.9	Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses angulaires de ω_ϕ , ω_θ et ω_ψ	114

Liste des tableaux

Tableau III.1	Indicateur de performance IAE	87
---------------	---	----

Liste des Publications/Communications

Les divers résultats obtenus au cours de cette thèse ont fait l'objet de plusieurs publications et présentations lors de conférences ou de séminaires. Par catégories, ces différentes contributions sont :

Publications

Abadi, A., El Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2019b). Optimal trajectory generation and robust flatness-based tracking control of quadrotors. *Optimal Control Applications and Methods*, Impact factor (1.6), Doi:10.1002/oca.2508, [Abadi et al., 2019b].

Abadi, A., El Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2019a). Guaranteed trajectory tracking control based on interval observer for quadrotors. *International Journal of Control*, Impact factor (2.1), Doi:10.1080/00207179.2019.1610903, [Abadi et al., 2019a].

Abadi, A., El Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2020). Robust tracking control of quadrotor based on flatness and active disturbance rejection control. *IET Control Theory & Applications*, Impact factor (3.5), Doi:10.1049/iet-cta.2019.1363, [Abadi et al., 2020c].

Communications

Abadi, A., Mekki, H., Brahim, A. B. H., El Amraoui, A., & Ramdani, N. (2017). Optimal trajectory generation and flatness tracking control for a mobile robot. In *2017 18th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, Doi:10.1109/STA.2017.8314880, [Abadi et al., 2017].

Abadi, A., Brahim, A. B. H., Mekki, H., El Amraoui, A., & Ramdani, N. (2018). Sliding mode control of quadrotor based on differential flatness. In *2018 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, Doi: 10.1109/CADIAG.2018.8751334, [Abadi et al., 2018].

Abadi, A., Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2019a). Guaranteed tracking controller for wheeled mobile robot based on flatness and interval observer. In *58th IEEE Conference on Decision and Control*, Doi: 10.1109/CDC40024.2019.9029479 [Abadi et al., 2020a].

Abadi, A., Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, Flatness-Based Active Disturbance Re-

jection Control For a Wheeled Mobile Robot Subject To Slips and External Environmental Disturbances, the 21st IFAC World Congress to be held in Berlin, Germany, 12-17 July 2020, [Abadi et al., 2020b].

Abréviations

PCO	Problème de commande optimale
PCOP	Problème de commande optimale plate
NLP	Problème d'optimisation non linéaire
ESO	Observateur à état étendu
ADRC	Contrôle actif par rejet des perturbations
FBTC	Commande par platitude de suivie
GFTC	Commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle
FSMC	Commande par platitude de basée sur le mode glissant
FSADRC	Commande par platitude basée sur le mode glissant et l'ADRC
IAE	Intégrale de l'erreur absolue
obs(x,y,z)	Équation de modélisation des formes géométriques dans l'espace.

Terminologies

$\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}^n$ Espace réel euclidien de dimension n

P_q Vecteur de position de quadrirotor

ϕ Angle de roulis

θ Angle de tangage

ψ Angle de lacet

$R_O : \{O, e_x, e_y, e_z\}$ Repère de base lié à la terre

$R_q : \{O_q, x, y, z\}$ Repère local lié au corps du quadrirotor

m Masse de quadrirotor

$\mathbf{g}$ Accélération de gravité

J_q Matrice d'inertie du quadrirotor

T_q Force de portance appliquée au quadrirotor

k_{ftx} , k_{fTy} et k_{ftz} Coefficients de traînée de translation

Ω_q Vecteur vitesses de rotation de quadrirotor

l_q Distance entre le centre du quadrirotor et l'axe de rotation du rotor

F_q Vecteur des sorties plates pour le quadrirotor

δ_q Vecteur des perturbations externes affectant le quadrirotor

δ_q Vecteur des bruits de mesure affectant le quadrirotor

σ_q Vecteur de surface de glissement de quadrirotor

v_q Terme de bouclage de stabilisation pour le quadrirotor

η_q Vecteur des perturbations totales contenant les perturbations externes et les paramètres incertains affectant le quadrirotor

F_{qd} Vecteur des trajectoires de références pour le quadrirotor

Abstract

In this thesis, we are interested in the autonomous navigation of robotic systems, particularly quadrotor UAV systems. We have focused on the problems related to the generation of optimal trajectories and the design of robust control to ensure tracking.

In the first part of the thesis, a new method for generating trajectories is proposed. This method is based on the direct-collocation technique, differential flatness and Bézier curves. Differential flatness is used to reduce the number of parameters of the optimization problem. Bézier curves are used to approximate the flat outputs. The direct-collocation method transforms the problem of infinite optimization into a problem of nonlinear programming with finite dimension. The suggested methodology allows solving complex problems of calculating optimal trajectories in a fast, simple and efficient way, because the number of parameters will be considerably decreased, exceeding a reduction rate of 60 %.

In the second part of the thesis, we put forward robust control to parametric uncertainties and external disturbances. Using flatness, the nonlinear system is transformed into a linear Brunovsky canonical form, for which it is easier to create a state feedback controller. To consider the parametric uncertainties and the external disturbances affecting the system, we propose an algorithm which uses the sliding mode and active disturbance rejection control. The simulation results show that the considered approach permits eliminating the effect of total disturbances and reducing the effect of chattering while ensuring the required degree of robustness.

For unknown disturbances with significant variations affecting both the system and the measurements, we are interested in the last part of the thesis in developing new flatness control based on an interval observer.

Keywords: Optimal trajectory generation, flatness, robust control, tracking trajectory, interval observer, quadrotor.

Résumé

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la navigation autonome des systèmes robotiques et particulièrement pour les systèmes UAV, cas d'un quadri-rotor. Nous nous sommes focalisés sur les problèmes liés à la génération des trajectoires optimales et la conception des commandes robustes assurant la poursuite.

Dans une première partie de la thèse, une nouvelle méthode de génération de trajectoires a été proposée. Cette méthode est basée sur la technique de collocation directe, la platitude différentielle et les courbes de Bézier. La platitude différentielle a été utilisée pour réduire le nombre de paramètres du problème d'optimisation. Les courbes de Bézier sont utilisées pour approximer les sorties plates. La méthode de collocation directe permet de transformer le problème d'optimisation infinie en un problème de programmation non linéaire de dimension finie. La méthodologie proposée permet de résoudre des problèmes complexes de calcul des trajectoires optimales d'une manière rapide, simple et efficace, puisque le nombre de paramètres sera réduit d'une façon considérable qui dépasse un taux de réduction de 60 %.

Dans la seconde partie de la thèse, nous avons proposé une commande robuste par platitude qui assure le suivi de la trajectoire proposée en présence d'incertitude paramétrique et de perturbation externe. En utilisant la platitude, le système non linéaire est transformé en un système linéaire commandable sous la forme de Brunovsky, pour lequel il est plus facile de trouver un bouclage de rétroaction. Pour tenir compte des incertitudes paramétriques et des perturbations externes affectant le système, nous avons proposé un algorithme qui utilise le mode glissant et le contrôle actif par rejet des perturbations. Les résultats de simulation ont prouvé que l'approche considérée permet d'éliminer l'effet des perturbations et de réduire l'effet de broutement tout en assurant le degré de robustesse demandé.

Pour le cas des perturbations inconnues à variations significatives affectant aussi bien le système que les mesures, nous nous sommes intéressés dans la dernière partie de la thèse à développer une nouvelle commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle.

Mots-clés: Génération de trajectoire optimale, platitude différentielle, commande robuste, poursuite de trajectoire, observateur par intervalles, quadrirotor.

Introduction Générale

Le développement de plates-formes robotiques volantes connaît un essor croissant depuis quelques années grâce à la possibilité d'embarquer des cartes de commande performantes et rapides capables d'exécuter une masse de calcul considérable. Ces robots volants sont connus sous le nom de drones ou UAV (Unmanned Aerial Vehicle). Parmi lesquels nous pouvons citer les drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance), les quadrirotors, les micros drones et les nano drones.

Le quadrirotor, qui est le sujet de notre application, est un aéronef qui possède certains avantages en comparaison aux hélicoptères classiques. À cause de sa symétrie, ce véhicule est dynamiquement élégant, facile à modéliser et à construire. Malgré ces avantages, le quadrirotor est classé dans la catégorie des systèmes volants les plus complexes vu qu'il est sous actionné et fortement non linéaire. Cette complexité induit une grande difficulté dans la conception de la commande.

En robotique, on est souvent amené à devoir générer des trajectoires pour permettre à un robot mobile ou un drone de se déplacer d'un état initial à un état final. La génération de trajectoire est un sujet souvent traité. Il existe donc pas mal d'algorithmes différents permettant de réaliser une telle tâche comme les méthodes déterministes [[Hart et al., 1968](#)], les méthodes probabilistes [[Siméon et al., 2000](#)] etc. Cependant, ces méthodes n'utilisent pas la dynamique du système dans leurs stratégies de résolution du problème de la génération des trajectoires.

Au début des années quatre vingt-dix, Fliess et son équipe [[Fliess et al., 1992](#)] ont introduit une nouvelle vision de l'inversion dynamique des systèmes non linéaires, basée sur la notion de platitude différentielle. Ce concept établit une relation d'équivalence entre un système non linéaire et un système linéaire commandable [[Charlet et al., 1989](#)] dont les dimensions d'état ne sont pas nécessairement identiques.

La platitude prouve tout son intérêt dans le cadre de génération et de poursuite de trajectoire. En effet, dans un système plat, l'état et la commande se déduisent directement à partir de la sortie plate. Ainsi, une commande en boucle ouverte est obtenue permettant de déplacer un système d'un état initial à un état final sans avoir à intégrer des équations différentielles. Ce résultat est très important car nous pouvons déterminer implicitement une trajectoire physiquement réalisable pour n'importe quel système plat.

Afin de répondre aux besoins industriels, les trajectoires générées par la commande par platitude en boucle ouverte doivent tenir compte de quelques contraintes et critères de performance comme, les obstacles, le temps, l'énergie etc. Nous parlons donc de problème de génération de trajectoires optimales.

La génération des trajectoires optimales pour les systèmes robotiques est un sujet théorique difficile d'un intérêt pratique avéré. Le problème de ce dernier est défini comme un problème de commande optimale [Sussmann, 1996] qui ne possède pas de solution analytique connue, bien que sa formulation soit relativement facile. Dans la littérature, il existe principalement deux grands courants méthodologiques de résolution du problème de commande optimale. Les méthodes dites indirectes qui se basent sur l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin [Pontryagin, 1985] et les méthodes directes [Von Stryk & Bulirsch, 1992] qui formulent le problème en termes de programmation paramétrique non linéaire. Malgré l'efficacité de ces méthodes, la dimension du problème d'optimisation reste grande et peut poser certains problèmes aux algorithmes de résolution. Réduire la dimension de problème d'optimisation par élimination de quelques contraintes ne peut pas être une bonne idée car les systèmes robotiques imposent beaucoup de contraintes nécessaires pour l'efficacité de leur tâche industrielle. Donc la question qui se pose c'est comment développer un algorithme qui génère des trajectoires optimales pour les systèmes robotiques d'une manière rapide et sans négliger aucune contrainte imposée par le cahier de charge.

Pour remédier à ce problème, nous présentons une approche pour résoudre rapidement le problème de génération des trajectoires optimales pour les systèmes non linéaires plats. Cette approche est basée sur la platitude différentielle pour diminuer l'espace dimensionnel de problèmes d'optimisation, les courbes de Bézier pour approximer les trajectoires et la méthode de collocation pour transformer le problème de commande optimale en un problème d'optimisation non linéaire (NLP).

Bien que la commande par platitude optimale en boucle ouverte soit efficace, elle trouve des difficultés d'implantation pratiques, du fait qu'elle a besoin de la connaissance complète du modèle dynamique. En effet, cette commande est basée sur des modèles exacts qui ne tiennent pas compte des perturbations externes et d'incertitudes de modélisation affectant le système. D'où le besoin de l'intégration d'un bouclage de rétroaction robuste dans la commande par

platitude pour la poursuite de trajectoire. Pour ce faire, différentes lois de commande robuste ont été associées à la commande par platitude. Citons, entre autres, les travaux de [Lavigne et al., 2001] [Hagenmeyer & Delaleau, 2003], [Zerar et al., 2004], [Hagenmeyer & Delaleau, 2010], [Ryu & Agrawal, 2011], [Chen et al., 2016]. Parmi ces travaux, nous nous intéressons aux approches basées sur la platitude et la commande par mode glissant.

Le principe de la commande par mode glissant [Slotine et al., 1991] consiste à forcer le système à converger vers une surface choisie dite de glissement, qui vérifie une dynamique désirée de l'erreur en présence des incertitudes paramétriques et des perturbations externes. La commande par mode glissant contient un terme discontinu qui peut entraîner un phénomène de broutement ou chattering en anglais.

Pour remédier au problème du broutement, plusieurs méthodes ont été proposées comme la méthode de couche limite qui consiste à remplacer la fonction de commutation par une approximation continue. Bien que la minimisation de broutement par la méthode de couche limite soit très efficace, la robustesse obtenue par la discontinuité de la commande par mode glissant sera fortement réduite. D'autre part, la mise en œuvre de la commande par platitude en boucle fermée a besoin de la connaissance exacte et à chaque instant des valeurs des sorties plates et leurs dérivés. Il est à noter ici que quelques variables d'état subissent des perturbations externes ou parfois ne sont pas accessibles pour la mesure, ceci rend leurs estimations indispensables.

Pour résoudre ces problèmes, nous proposons de combiner la commande par platitude basée sur le mode glissant avec la méthode de contrôle actif par rejet des perturbations (ADRC) fondée par [Han, 1995]. La méthode ADRC repose sur le bon fonctionnement de l'observateur à état étendu (ESO) [Gao & Hung, 1993] qui estime l'état complet du système et un état supplémentaire représentant la somme des incertitudes paramétriques et les perturbations externes, regroupée dans la perturbation totale. L'observateur à état étendu est incapable d'estimer les perturbations inconnues à variations significatives affectant le système et les mesures. Dans ces conditions, la commande robuste proposée ne peut pas assurer le suivi de trajectoire de référence.

Pour surmonter ces limitations, nous proposons une nouvelle loi de commande de suivi basée sur le concept de platitude et l'observateur par intervalle. La méthodologie proposée permet de garantir le suivi de trajectoire de référence du système non linéaire dans un intervalle bien précis malgré l'existence des perturbations inconnues à variations significatives affectant le système et les mesures.

Le manuscrit de thèse est structuré en quatre chapitres comme suit :

- **Le premier chapitre** présente un état de l'art sur les drones et les méthodes de génération de trajectoires optimales.

- **Le deuxième chapitre** présente une nouvelle méthode de génération de trajectoires optimales qui se base sur la technique de collocation directe, la platitude différentielle et les courbes de Bézier. La méthodologie proposée permet de résoudre des problèmes complexes de calcul de trajectoire optimale pour les systèmes robotiques, particulièrement le quadrirotor, d'une manière rapide, simple et efficace. La méthodologie proposée dans le deuxième chapitre est publiée dans les articles [Abadi et al., 2017, Abadi et al., 2019b].

- **Le troisième chapitre** présente deux stratégies de commandes par platitude robuste. La première est la commande par platitude basée sur le mode glissant, notée FSMC et la deuxième est la commande par platitude basée sur le mode glissant et le contrôle actif par rejet des perturbations, notée FSADRC. Ensuite nous appliquons ces deux commandes robustes de suivi sur un modèle dynamique du quadrirotor comprenant des incertitudes paramétriques et des perturbations externes et nous interprétons les résultats. La commande robuste par platitude basée sur l'ADRC est publiée dans [Abadi et al., 2020c]. La commande robuste par platitude basée sur le mode glissant est publiée dans [Abadi et al., 2018]. La méthodologie proposée dans le chapitre III représente une combinaison des commandes publiées dans ces deux articles.

Le quatrième chapitre s'intéresse à la conception d'une nouvelle commande de suivi pour le système non linéaire plat dans le contexte d'erreurs inconnues mais bornées où les signaux mesurés, les paramètres du système et les perturbations sont supposées bornées et appartenir à des intervalles déterminés a priori. La méthodologie proposée permet de garantir le suivi de trajectoire de référence du système non linéaire plat dans un intervalle bien précis malgré l'existence des perturbations inconnues à variation significative affectant le système et les mesures. Nous détaillerons la nouvelle loi de commande basée sur le concept de platitude et l'observateur par intervalle pour un modèle de quadrirotor incertain. La commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle est publiée dans les articles [Abadi et al., 2019a, Abadi et al., 2020a].

Pour illustrer l'efficacité des approches proposées, les résultats théoriques présentés dans les chapitres II, III et IV sont appuyés par des simulations numériques.

État d'art et concepts généraux

I.1	Introduction	12
I.2	État de l'art sur les drones	12
I.2.1	Les drones HALE (Haute Altitude Longue Endurance)	13
I.2.2	Les drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance)	13
I.2.3	Les drones tactiques à moyenne endurance (MAME)	14
I.2.4	Les mini drones	14
I.2.5	Les micros drones	16
I.3	Analyse de la modélisation dynamique d'un quadrirotor	16
I.3.1	Choix des coordonnées	17
I.3.2	Équations de mouvement de translation	18
I.3.3	Équations de mouvement de rotation	20
I.3.4	Modèle dynamique complet de quadrirotor	21
I.4	Le concept de la platitude différentielle	22
I.4.1	Définition de la platitude	23
I.4.2	Platitude et linéarisation	23
I.4.3	Platitude et planification de trajectoire	25
I.4.4	Commande par platitude de suivi	26
I.5	Méthode de génération de trajectoires optimales	27
I.5.1	Méthode indirecte	28
I.5.2	Méthode directe	31
I.6	Conclusion	36

I.1 Introduction

L'exploration autonome des plateformes robotiques aériennes présente un intérêt croissant car elle permet la réalisation de tâches nombreuses et diverses, comme des missions militaires, le recueil d'informations, la surveillance de zone, le transport, etc. Le quadrirotor peut explorer des zones inaccessibles pour les robots terrestres. Cependant, il est sous-actionné et fortement non linéaire. Ces inconvénients présentent un problème pour générer des trajectoires optimales pour ce dernier.

Le problème de génération de trajectoires optimales est habituellement formulé comme un problème de commande optimale [Sussmann, 1996]. Un tel problème ne connaît pas encore de solution analytique exacte. Cependant de nombreuses méthodes numériques sont disponibles dans la littérature [Rao, 2009]. Nous pouvons classer l'ensemble de ces travaux en deux catégories : les méthodes indirectes qui utilisent le principe du maximum de Pontryagin [Pontryagin, 1985] et les méthodes directes [Von Stryk & Bulirsch, 1992] qui formulent le problème en termes de programmation paramétrique non linéaire.

La platitude différentielle est une propriété structurelle d'une classe de systèmes dynamiques, où il est possible d'exprimer tous les états et les commandes du système en fonction d'une variable spécifique et de ses dérivées. Cette variable est connue sous le nom de sortie plate. La platitude trouve tout son intérêt dans le cadre de génération et de poursuite de trajectoire. En effet, une commande en boucle ouverte est obtenue permettant de déplacer un système d'un état initial à un état final sans avoir à intégrer des équations différentielles. Ce résultat est très important car nous pouvons déterminer implicitement une trajectoire physiquement réalisable pour n'importe quel système plat.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter un état de l'art général sur les drones et la modélisation dynamique de quadrirotor. Ensuite, nous détaillerons le concept de la platitude différentielle. Enfin, nous présenterons un état de l'art sur les méthodes de génération de trajectoires optimales.

I.2 État de l'art sur les drones

Les débuts des drones sont principalement dans le domaine militaire. Un premier drone a été réalisé et expérimenté avec succès en France en 1932 à Étampes par un ingénieur et un capitaine Français. Après quelques années, en 1938, l'armée allemande a décidé de le développer, mais sous forme des bombes planaires et antichar. Durant la guerre du Vietnam, les américains ont utilisé les drones (Firebee) pour la localisation des rampes de lancement des missiles sol-air par 3500 missions. En 1991, lors de la guerre du Golfe, les

américains ont fait appel au drone (Pioneer) pour la surveillance jour et nuit, l'acquisition des objectifs ainsi que pour les réglages de l'artillerie. On peut citer aussi le drone (Hunter) qui a successivement assuré la surveillance des réunions du G8 à Evian en 2003 et les cérémonies de célébration du 60^{ème} anniversaire du débarquement allié en Normandie en 2004. Pour ce qui est du transport de personnes par drones sans pilotes, Dubaï vient d'autoriser des essais du drone taxi de la société chinoise Ehang, annonant même désirer que 25 % de ses transports urbains soient autonomes dès 2030, en commençant par des bus et des voitures. Ce drone Ehang 184 pesant 300 kg est capable de transporter 100 kg (un passager et ses bagages) pendant 26 minutes, à une vitesse moyenne de 100 km/h.

Dans les paragraphes suivants, nous classons les drones selon leur taille.

I.2.1 Les drones HALE (Haute Altitude Longue Endurance)



Figure I.1 – Global Hawk RQ-4B (USA-Allemagne).

Les drones HALE sont de grandes tailles, lourds et rapides. Ils sont chargés de missions de surveillance à haute altitude. Ils sont caractérisés par une autonomie élevée pouvant atteindre les 30 heures. Exclusivement employé en militaire, ce type de drone peut assurer la permanence du renseignement et ces observations peuvent servir à l'estimation des dommages de combat. Il existe des HALE géostationnaires pouvant servir pour la radiodiffusion (télévision), télécommunications mobiles et environnement (incendies) mais qui ne sont toujours pas entrés en action. Parmi les drones Hale, on cite le Global Hawk RQ-4B présenté par la figure I.1

I.2.2 Les drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance)

Les drones appartenant à cette catégorie sont destinés aux militaires et ne peuvent être intégrés au trafic civil. Ils sont de la taille d'un avion d'arme classique. L'exemple cité

ci-dessous , Predator figure I.2, a été déployé par les Américains en Afghanistan en 2001. Ce type de drone peut remplacer les équipages humains pour la reconnaissance aérienne à risque. Les drones MALE représentent une première application tirée des recherches pour le développement de drones de combat. Vu que ces appareils ne sont, pour le moment, destinés qu'aux applications militaires, la présence d'un humain est nécessaire (décision de tir, annulation de mission. . .).



Figure I.2 – Predator

I.2.3 Les drones tactiques à moyenne endurance (MAME)

Les drones tactiques évoluent sur une zone d'étendue limitée, employés principalement en militaire. Ils servent principalement comme outil de reconnaissance et de robotisation du champ de bataille dans le but de réduire les pertes (principalement humaines). Les drones tactiques sont faciles à transporter et à utiliser (encombrement réduit et facilité d'adaptation aux conditions de la mission), ce qui les rend incontournables. Par contre, ils sont vulnérables à cause de leur faible autonomie, vitesse réduite et vol à basse altitude. Parmi les drones tactiques, on cite le Shadow-200-RQ-7B présenté par la figure I.3

I.2.4 Les mini drones

Les mini drones sont des robots volant de taille réduite qui sont utilisés en militaire. Ces drones commencent à intéresser de plus en plus les privés car ils ne sont pas soumis aux mêmes restrictions de circulation dans l'espace aérien civil en comparaison avec les drones de catégories supérieures. La plupart des drones de ce type sont équipés de logiciels de



Figure I.3 – Shadow-200-RQ-7B (USA)

commandes simples avec des capteurs souvent photographiques (appareils photos, Caméscopes...).

Le Novadem présenté par la figure I.4 est un mini drone destiné à la prise de vue et les mesures aériennes pour les experts de l'inspection et la photographie. Ce drone apporte une solution performante et sûre pour l'inspection visuelle, l'inspection infrarouge, les photos haute résolution et la vidéo aérienne. Il permet entre autres d'identifier les pathologies du béton, détecter les fissures, et effectuer des relevés techniques.



Figure I.4 – Novadem U130

I.2.5 Les micros drones

Les micros drones sont des drones ayant des tailles variant du centimètre à quelques dizaines de centimètres et caractérisés par une faible charge. Comme application des micros drones dans le domaine civil, on cite la surveillance des grandes surfaces ou les couloirs des métros. Selon les militaires, le micro drone est adapté à la déportation de la vue d'un fantassin pour lui permettre d'emprunter un itinéraire sûr en permettant de détecter d'éventuelles menaces comme les tireurs embusqués et les soldats ennemis en approche. Parmi les micros drones, on cite le drone insecte présenté par la figure I.5.



Figure I.5 – Drone insecte

I.3 Analyse de la modélisation dynamique d'un quadrirotor

Le type de drone considéré dans les travaux de cette thèse est de type Mini drone appelé quadrirotor. Le schéma du quadrirotor est donné par la figure I.6. Comme son nom l'indique, il se compose de quatre moteurs situés aux extrémités d'une armature qui n'est autre que deux axes en croix. Le modèle dynamique complet d'un quadrirotor est relativement difficile à établir et nécessite une étude mathématique assez poussée. Il existe différentes manières pour définir les équations dynamiques d'un quadrirotor. Parmi les modélisations fréquentes dans la littérature, nous choisissons celle qui considère le quadrirotor comme étant un corps rigide. D'après [Hamel et al., 2002], cette modélisation particulière nécessite les hypothèses suivantes :

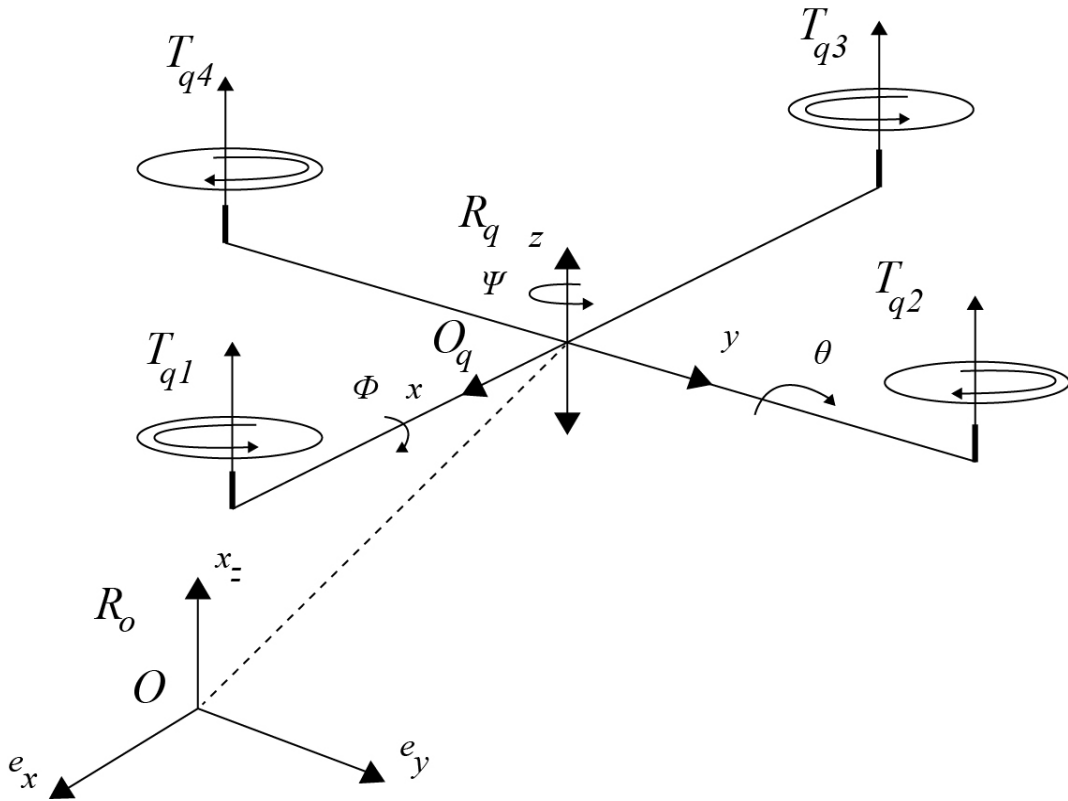


Figure I.6 – Schéma de quadrirotor.

- La matrice d'inertie est diagonale.
- Les hélices sont supposées rigides pour pouvoir négliger l'effet de leur déformation lors de la rotation.
- Le repère lié à cette structure est généralement supposé confondu avec son centre de gravité.
- La portance de chaque moteur est proportionnelle au carré de la vitesse de l'hélice.

Nous présenterons dans ce paragraphe l'espace d'évolution de quadrirotor, les équations de mouvement de translation et de rotation de quadrirotor ainsi que son modèle dynamique complet.

I.3.1 Choix des coordonnées

L'étude du mouvement d'un quadrirotor évoluant dans l'espace, requiert la connaissance de sa position et de son orientation. Cette localisation nécessite la définition de deux repères, le premier est le repère de base $R_o = \{O, e_x, e_y, e_z\}$ lié à la terre (supposé galiléen), le second est le repère local $R_q = \{O_q, x, y, z\}$ attaché au centre de masse O_q du quadrirotor.

Le quadrirotor est un robot volant à six degrés de liberté, trois translations suivant les axes (x, y, z) et trois rotations (ϕ, θ, ψ) , autour respectivement des axes (x, y, z) . Les translations

du quadrirotor sont les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du centre de masse O_q dans le repère inertiel. Les rotations du quadrirotor sont décrites par trois rotations consécutives à travers trois angles qui s'appellent les angles d'Euler. L'orientation du système de référence attachée au quadrirotor $R_q = \{O_q, x, y, z\}$ par rapport au système de référence inertiel lié à la terre $R_o = \{O, e_x, e_y, e_z\}$ est décrite suivant la combinaison des trois rotations consécutives suivantes :

- Une rotation autour de l'axe x d'un angle ϕ avec : $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$
- Une rotation autour de l'axe y d'un angle θ avec : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
- Une rotation autour de l'axe z d'un angle ψ avec : $-\pi < \psi < \pi$

Les matrices relatives à ces transformations sont :

$$\begin{aligned} R(x, \phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, R(y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ R(z, \psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (I.1)$$

Où $R(x, \phi)$ est une matrice de rotation orthogonale d'angle ϕ autour de Ox , $R(y, \theta)$ est une matrice de rotation orthogonale d'angle θ autour de Oy et $R(z, \psi)$ est une matrice de rotation orthogonale d'angle ψ autour de Oz .

I.3.2 Équations de mouvement de translation

Selon les équations de Newton-Euler [BELLAHCENE, 2013], l'équation dynamique du mouvement de translation peut être obtenue comme suit :

$$m\ddot{P}_q + mge_z = R_t u_{q1} e_z + F_t \quad (I.2)$$

Telle que :

- $P_q = [x, y, z]^T$ est le vecteur de position qui définit les coordonnées du centre de gravité du quadrirotor dans le repère inertiel R_o .
- m est la masse de quadrirotor.
- g est l'accélération de gravité.

- e_z est le vecteur unitaire le long de l'axe z défini comme suit :

$$e_z = [0, 0, 1]^T \quad (\text{I.3})$$

- R_t est la matrice de transformation qui permet de passer du repère local vers le repère inertiel, cette matrice est donnée par :

$$R_t = R(z, \psi) * R(y, \theta) * R(x, \phi) \quad (\text{I.4})$$

- u_{q1} est la force de portance appliquée aux quadrirotors donnée par :

$$u_{q1} = \sum_{i=1}^4 T_{qi} \quad (\text{I.5})$$

Avec T_{qi} ($i = 1, 2, 3, 4$) est la force de sustentation de chaque rotor, telle que :

$$T_{qi} = b_q \omega_{qi}^2 \quad (\text{I.6})$$

Où b_q est la constante de portance dépendante des propriétés aérodynamiques des hélices et ω_{qi} est la vitesse de rotation du rotor (vitesse de l'hélice).

- $F_t = [F_{tx}, F_{ty}, F_{tz}]^T$ sont les forces de résistance à l'avancement qui dépendent essentiellement des vitesses de translation suivant les trois axes, et qui sont données par :

$$F_t = \begin{pmatrix} -k_{ftx} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{fty} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{ftz} \end{pmatrix} \dot{P}_q \quad (\text{I.7})$$

Où $k_{ftx}, k_{fty}, k_{ftz}$ sont les coefficients de résistance à l'avancement respectivement suivant les axes x, y et z .

Introduisant les équations (I.3), (I.4), (I.5) et (I.7) dans l'équation (I.2), l'équation dynamique de mouvement de translation est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\sum_{i=1}^4 T_{qi}}{m} (\cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\phi) \sin(\psi)) - \frac{k_{ftx}}{m} \dot{x} \\ \ddot{y} &= \frac{\sum_{i=1}^4 T_{qi}}{m} (\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\phi) \sin(\psi)) - \frac{k_{fty}}{m} \dot{y} \\ \ddot{z} &= \frac{\sum_{i=1}^4 T_{qi}}{m} (\cos(\theta) \cos(\phi)) - g - \frac{k_{ftz}}{m} \dot{z} \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

I.3.3 Équations de mouvement de rotation

Selon [Zheng et al., 2014], l'équation dynamique de mouvement de rotation du quadrirotor est définie comme suit :

$$J_q \dot{\Omega}_q = -\Omega_q \wedge J_q \Omega_q + \tau_f - \tau_m \quad (\text{I.9})$$

Tel que :

- $\wedge$ est le produit vectoriel.

- $\Omega_q = [\Omega_{qx}, \Omega_{qy}, \Omega_{qz}]^T$ est le vecteur vitesses de rotation du quadrirotor exprimées dans le repère R_q . Ce dernier est exprimé dans le repère inertiel comme suit :

$$\Omega_q = \begin{pmatrix} \Omega_{qx} \\ \Omega_{qy} \\ \Omega_{qz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R(x, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R(x, \phi)R(y, \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

Après calcul, Ω_q peut être écrit sous la forme :

$$\Omega_q = M_q \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$

Avec

$$M_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

La plupart des cas étudiés dans la littérature travaillent avec un modèle simplifié du quadrirotor. Dans notre cas, nous allons procéder de même i.e; on considère le cas de petits angles, alors la fonction sin est prise égale à 0, et la fonction cos est prise égale à 1, ceci nous permet d'avoir que $M_q = I_3$. D'après l'équation (I.12), nous pouvons déduire que : $[\Omega_{qx}, \Omega_{qy}, \Omega_{qz}]^T = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$.

- J_q est la matrice d'inertie diagonale donnée par :

$$J_q = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (\text{I.13})$$

- τ_f représente le vecteur des moments développés par le quadrirotor dans son propre repère, il est donné par :

$$\tau_f = \begin{pmatrix} l_q(T_{q4} - T_{q2}) \\ l_q(T_{q3} - T_{q1}) \\ (-T_{q1} + T_{q2} - T_{q3} + T_{q4}) \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

Où l_q est la distance entre le centre de masse du quadrirotor et l'axe de rotation du rotor.

- τ_m : moment résultant des frottements aérodynamiques, il est donné par :

$$\tau_m = \begin{pmatrix} K_{fax}\dot{\phi}^2 \\ K_{fay}\dot{\theta}^2 \\ K_{faz}\dot{\psi}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Où $k_{fa\phi}$, $k_{fa\theta}$, $k_{fa\psi}$ représentent les coefficients des frottements aérodynamiques .

Le terme $\Omega_q \wedge J_q \Omega_q$ est donné par [Derafa et al., 2006] :

$$\Omega_q \wedge J_q \Omega_q = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z) \\ \dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) \\ \dot{\phi}\dot{\theta}(I_x - I_y) \end{pmatrix} \quad (\text{I.16})$$

En remplaçant J_q , τ_f , τ_m et le terme $\Omega_q \wedge J_q \Omega_q$ par leur expression donnée par les équations (I.13), (I.14), (I.15) et (I.16) dans l'équation (I.9), nous obtenons les équations différentielles définissant le mouvement de rotation de quadrirotor suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_y}{I_x}\right) + \frac{l_q}{I_x}(-T_{q2} + T_{q4}) - K_{fax}\dot{\phi}^2 \\ \ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right) + \frac{l_q}{I_y}(-T_{q1} + T_{q3}) - K_{fay}\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_y - I_x}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}(-T_{q1} + T_{q2} - T_{q3} + T_{q4}) - K_{faz}\dot{\psi}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

I.3.4 Modèle dynamique complet de quadrirotor

Pour simplifier la présentation du système de quadrirotor, les entrées de commande du système u_{q1} , $u_{q\phi}$, $u_{q\theta}$ et $u_{q\psi}$ sont exprimées en fonction des forces de portance T_{q1} , T_{q2} , T_{q3} et

T_{q4} comme suit :

$$\begin{bmatrix} u_{q1} \\ u_{q\varphi} \\ u_{q\theta} \\ u_{q\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{q1} \\ T_{q2} \\ T_{q3} \\ T_{q4} \end{bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

Par conséquent, nous pouvons tirer des équations (I.8), (I.17) et (I.18), le modèle dynamique complet qui régit la dynamique du quadrirotor :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{u_{q1}}{m}(\cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\phi) \sin(\psi)) - \frac{k_{ftx}}{m} \dot{x} \\ \ddot{y} &= \frac{u_{q1}}{m}(\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi)) - \frac{k_{fity}}{m} \dot{y} \\ \ddot{z} &= \frac{u_{q1}}{m}(\cos(\theta) \cos(\phi)) - g - \frac{k_{ftz}}{m} \dot{z} \\ \ddot{\phi} &= \dot{\theta} \dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_y}{I_x} \right) + \frac{l_q}{I_x} u_{q\phi} - K_{fax} \dot{\phi}^2 \\ \ddot{\theta} &= \dot{\phi} \dot{\psi} \left(\frac{I_x - I_z}{I_y} \right) + \frac{l_q}{I_y} u_{q\theta} - K_{fay} \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\psi} &= \dot{\phi} \dot{\theta} \left(\frac{I_y - I_x}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} u_{q\psi} - K_{faz} \dot{\psi}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Où $X_q = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]^T$ et $U_q = [u_{q1}, u_{q\phi}, u_{q\theta}, u_{q\psi}]^T$ représentent les vecteurs des états et des commandes virtuelles du quadrirotor.

I.4 Le concept de la platitude différentielle

La propriété de platitude d'un système a été proposée et développée, à partir de 1992, par M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon [Fliess et al., 1993, Fliess et al., 1995]. Cette propriété, qui permet de paramétrer de façon très simple le comportement dynamique d'un système, est basée sur la mise en évidence d'un ensemble de variables fondamentales du système, appelées sorties plates. Ce point de vue, comme nous allons le voir, a des multiples et intéressantes conséquences relativement à la commande des systèmes.

En premier lieu, cela permet de remettre au centre de la commande d'un processus la notion de trajectoire que le système doit exécuter, c'est-à-dire que le mouvement demandé à un système doit avant tout être réalisable par ce système. Cela permet ainsi d'éviter de nombreux problèmes auxquels sont confrontés les automaticiens. L'une des premières étapes de la commande par platitude consiste alors à générer une trajectoire désirée adéquate qui tient compte implicitement du modèle du système.

En deuxième lieu, cette commande permet de transformer un système non linéaire en un système linéarisé connu sous la forme canonique de Brunovsky ce qui facilite la conception d'un contrôle par bouclage permettant la poursuite de trajectoire désirée. Cette caractéristique a encouragé les chercheurs à utiliser les propriétés de la platitude dans plusieurs domaines d'application, comme par exemple la commande des systèmes hydrauliques [Jing et al., 2018], la commande des moteurs [Rigatos, 2015], pilotage automatique des robots mobiles [Boubezoula et al., 2018] ou des drones [Faessler et al., 2017].

I.4.1 Définition de la platitude

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (\text{I.20})$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée et f est une fonction régulière de classe C^∞ . Le système non linéaire défini par l'équation (I.20) est considéré comme un système plat si, et seulement si, il existe un vecteur $F(t) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$F(t) = \Xi_F(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u(t)^{(\delta)}) \quad (\text{I.21})$$

$$x(t) = \Gamma_1(F(t), \dot{F}(t), \ddot{F}(t), \dots, F(t)^{(r-1)}) \quad (\text{I.22})$$

$$u(t) = \Gamma_2(F(t), \dot{F}(t), \ddot{F}(t), \dots, F(t)^{(r)}) \quad (\text{I.23})$$

Où Ξ_F , Γ_1 et Γ_2 sont des fonctions régulières, δ et r sont deux entiers finis. Le vecteur $F(t)$ qui apparaît dans cette définition s'appelle la sortie plate du système. Par l'introduction des fonctions Γ_1 et Γ_2 , on peut déduire que le comportement dynamique du système donné par l'équation (I.20) peut être décrit par le comportement dynamique de la sortie plate.

I.4.2 Platitude et linéarisation

Un système non linéaire plat par bouclage dynamique endogène est équivalent, à un système linéaire commandable [Charlet et al., 1989]. La construction du bouclage dynamique endogène se base sur la technique de la linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique.

I.4.2.1 Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique

Pour le système dynamique donné par l'équation (I.20), le problème de linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique consiste à trouver un changement de coordonnées (un

difféomorphisme de classe C^∞) donné par :

$$\xi = \Omega(x), \quad \Omega(0) = 0 \quad (\text{I.24})$$

Et un bouclage statique d'état de la forme :

$$u(t) = \alpha_2(x) + \alpha_1(x)v(t) \quad (\text{I.25})$$

Avec $\alpha_2(0) = 0$ et $\alpha_1(x)$ est une fonction inversible. Après un bouclage et un changement de coordonnées, nous obtenons un système linéaire commandable de la forme :

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bv(t) \quad (\text{I.26})$$

Où A et B sont deux matrices, $\xi(t)$ est l'état associé à la nouvelle entrée de commande $v(t)$ du système linéaire équivalent donné par l'équation (I.26). Ce bouclage est dit statique car nous pouvons passer de l'entrée $v(t)$ à l'entrée $u(t)$ réciproquement sans intégrer des équations différentielles grâce aux équations suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = \alpha_2(x) + \alpha_1(x)v(t) \\ v(t) = -\alpha_2(x)^{-1}\alpha_1(x) + \alpha_1(x)^{-1}u(t) \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

I.4.2.2 Linéarisation par bouclage dynamique endogène

Un système dynamique donné par (I.20) est linéarisable par bouclage dynamique s'il existe un bouclage dynamique endogène défini par :

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = a_1(x(t), w(t), v(t)); w(t) \in R^q \\ u(t) = b_1(x(t), w(t), v(t)); v(t) \in R^m \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

Où $w(t)$ est l'état du compensateur, $v(t)$ est la commande du système augmenté, a_1 et b_1 sont deux changements de coordonnées définies par un difféomorphisme $\xi = \Xi(x(t), w(t)) \in \mathcal{R}^{m+q}$, tel que le système augmenté défini par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t), b(x(t), w(t), v(t))) \\ a(x(t), w(t), v(t)) \end{pmatrix} \quad (\text{I.29})$$

puisse être linéarisable par bouclage statique, c'est-à-dire qu'il peut se mettre sous la forme de Brunovsky donnée par l'équation (I.30) :

$$\begin{aligned} F_1^{r_1}(t) &= v_1(t) \\ F_2^{r_2}(t) &= v_2(t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ F_m^{r_m}(t) &= v_m(t) \end{aligned} \tag{I.30}$$

Où r_i est l'indice de commandabilité associé à F_i

Notons qu'à travers le bouclage dynamique endogène, le modèle linéaire obtenu est équivalent à un système plat. Après avoir défini la notion de platitude, nous allons montrer l'apport essentiel de la platitude pour la planification et la poursuite de trajectoires.

I.4.3 Platitude et planification de trajectoire

Considérons le système non linéaire donné par (I.20). Le problème de la planification de trajectoires consiste à trouver une trajectoire $t \rightarrow (x(t), u(t))$ pour $t \in [t_0, t_f]$ qui vérifie l'équation (I.20) ainsi que les conditions initiales et finales définies par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, u(t_0) = u_0 \\ x(t_f) &= x_f, u(t_f) = u_f \end{aligned} \tag{I.31}$$

Ce problème est généralement relativement épineux car il nécessite une résolution itérative. Pour une commande u_0 fixée, nous intégrons les équations du système à partir des conditions initiales pour évaluer la solution à l'instant final t_f , puis nous donnons une procédure pour choisir une commande $t \rightarrow u_1(t)$ qui rapproche les conditions finales des conditions voulues, et ainsi de suite. La solution à ce problème nécessite alors la résolution numérique des équations différentielles.

Comme indiqué précédemment, la propriété de la platitude permet d'avoir une relation directe entre les trajectoires des sorties plates et celles de l'état et des entrées de commande du système. En effet, à partir des trajectoires des sorties plates de références $F_d(t)$ et de leurs dérivées successives, nous pouvons en déduire la trajectoire de l'état de référence $x_d(t)$ et celles des commandes nominales correspondantes $u_d(t)$ de la manière suivante :

$$x_d(t) = \Gamma_1(F_d(t), \dot{F}_d(t), \dots, F_d^{r-1}(t)) \tag{I.32}$$

$$u_d(t) = \Gamma_2(F_d(t), \dot{F}_d(t), \dots, F_d^r(t)) \tag{I.33}$$

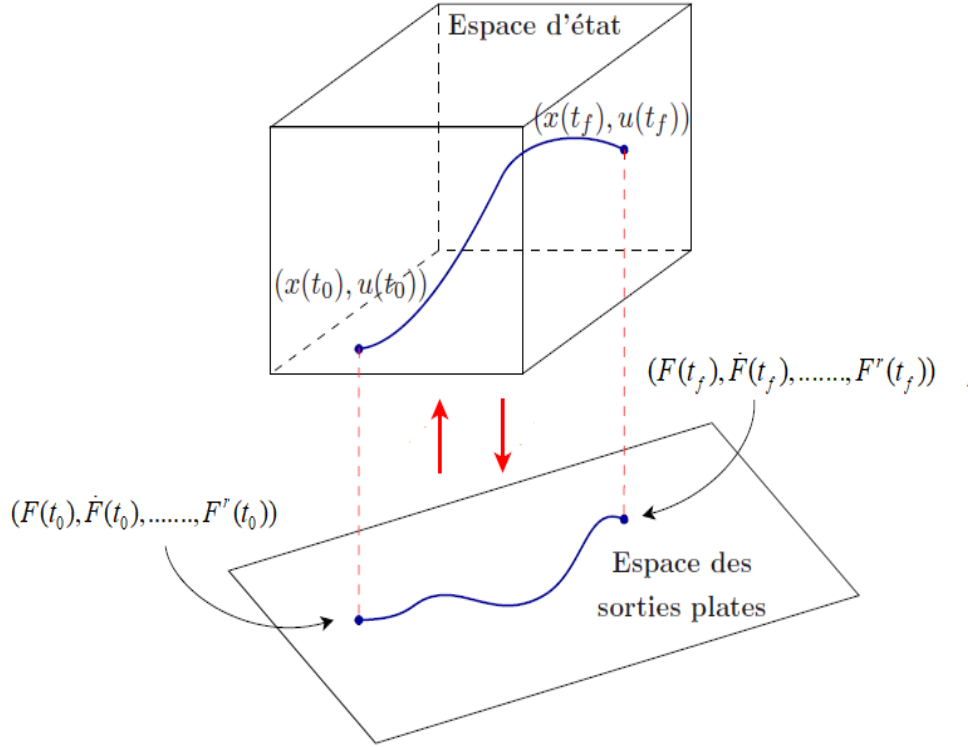


Figure I.7 – Génération de trajectoires dans l'espace des sorties plates

Ainsi, la planification de trajectoires consiste donc à définir une trajectoire continue $t \rightarrow F_d(t)$ au moins $r + 1$ fois dérivable sur $[t_0, t_f]$ qui satisfait les conditions initiales et finales de $(F_d(t), \dot{F}_d(t), \dots, F_d^r(t))$. Les trajectoires générées dans l'espace des sorties plates peuvent être converties en trajectoires dans l'espace d'état par les relations (I.32) et (I.33). et sans qu'aucune intégration numérique ne soit nécessaire (voir figure I.7). Comme par ailleurs la trajectoire $t \rightarrow F_d(t)$ ne doit vérifier aucune équation différentielle, nous pouvons simplement la construire par interpolation polynomiale.

I.4.4 Commande par platitude de suivi

Concernant le problème de planification de trajectoires, les informations demandées sont le modèle dynamique et le temps. Ainsi, à ce niveau, la commande développée est en boucle ouverte car elle n'utilise pas des informations obtenues au fur et à mesure du fonctionnement du système. Lorsque la dynamique du système est parfaitement établie et si les perturbations externes n'ont pas un grand effet sur le système, la commande en boucle ouverte, va nous permettre d'atteindre l'objectif désiré. Par contre, si la modélisation n'est pas assez précise ou trop perturbée, la commande en boucle ouverte doit être complétée par une loi

d'asservissement pour fermer la boucle. Si l'état du système est bien mesuré à chaque instant, nous pouvons calculer l'écart entre la trajectoire réellement parcourue et la trajectoire de référence et nous déduisons une loi de commande "en boucle fermée" permettant de minimiser cet écart. Ainsi, la connaissance de l'équation (I.23) conduit à proposer la commande :

$$u(t) = \Gamma_2(F(t), \dot{F}(t), \dots, F^{r-1}(t), v(t)) \quad (\text{I.34})$$

où $v(t)$ est une nouvelle commande. Lorsque $\frac{\partial \Gamma_2(\cdot)}{\partial F^s}$ est localement inversible, cela conduit au système découplé :

$$F^r(t) = v(t) \quad (\text{I.35})$$

Ce résultat est à comparer à la linéarisation et au découplage par bouclage des systèmes non linéaires qui sont toujours conditionnés par la stabilité des zéros du système. En effet, nous obtenons ici un découplage et une linéarisation inconditionnelle. Cependant, il est évident qu'un bouclage supplémentaire de stabilisation est nécessaire. Ce bouclage est défini par :

$$v(t) = F_d^r(t) - \sum_{j=1}^{r-1} k_j (F^j(t) - F_d^j(t)) \quad (\text{I.36})$$

Avec k_j est une matrice diagonale de gains. Les gains sont choisis de sorte que toutes les racines du polynôme de la matrice soient à partie réelle négative.

La commande par platitude en boucle fermée permet à la sortie plate $F(t)$ de suivre la trajectoire continue $F_d(t)$ avec une erreur qui tend asymptotiquement vers zéro. La dynamique de l'erreur de poursuite est définie par les gains de commande dont le choix permet d'obtenir les pôles qui correspondent au modèle de poursuite désiré.

I.5 Méthode de génération de trajectoires optimales

Fondamentalement, un problème de génération de trajectoire optimale peut être formulé comme un problème de commande optimale. Cette section se focalise sur la résolution de tels problèmes. Il existe principalement deux grands courants méthodologiques de résolution du problème de commande optimale. Les méthodes indirectes et les méthodes directes. Dans ce paragraphe, nous expliquons les principes de ces deux méthodes.

I.5.1 Méthode indirecte

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin [Pontryagin, 1985] qui donne des conditions nécessaires d'optimalité. Le qualificatif indirect vient du fait que nous allons exploiter des variables supplémentaires, appelées états adjoints, dont certains possèdent une dynamique. L'obtention d'une solution au problème passe alors par la détermination de ces états adjoints.

Considérons le système non linéaire régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (\text{I.37})$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ représentent l'état et l'entrée de commande du système.

Le problème de commande optimale (PCO) consiste à déterminer l'état $x(t)$ et la commande $u(t)$ qui permet à la fois :

- de vérifier la dynamique du système donné par l'équation (I.37)
- de vérifier les conditions initiales et finales sur les profils temporels de l'état et de la commande :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, u(t_0) = u_0 \\ x(t_f) &= x_f, u(t_f) = u_f \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

- de satisfaire des contraintes imposées au système défini comme suit :

$$C_t(x(t), u(t)) \geq 0 \quad (\text{I.39})$$

- d'optimiser un critère de coût :

$$J(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t)) dt, \varphi \in R \quad (\text{I.40})$$

Où φ est une fonction de coût.

Soit H le Hamiltonien associé au problème d'optimisation précédent, défini par [Pontryagin et al., 1974] :

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = p(t)^T (f(x(t), u(t)) + \varphi(x(t), u(t))) \quad (\text{I.41})$$

Avec $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t))$ est un vecteur connu sous le nom des états adjoints.

Pontryagin [Pontryagin, 1985] a montré que trouver une solution optimale au sens du critère J donné par l'équation (I.40) respectant la dynamique du système donné par l'équation (I.37), les conditions initiales et finales données par les équations (I.38) et les contraintes

données par l'équation (I.39) équivaut à trouver une trajectoire $t \rightarrow (x(t), u(t), p(t))$ telle que le Hamiltonien associé à H soit minimale vis-à-vis de toutes les entrées de commande. Il énonce alors le principe du maximum suivant :

$$u^*(t) = \min_u H(x(t), u(t), p(t), t) \quad (\text{I.42})$$

où * désigne le terme optimal. Les conditions nécessaires d'optimalité sont formées par :

- Les équations adjointes :

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^*}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \quad (\text{I.43})$$

- Les équations de contrôle :

$$\frac{\partial H}{\partial u^*}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = 0 \quad (\text{I.44})$$

Afin d'expliquer mieux le principe de la méthode indirecte. Nous considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) + 1 \quad (\text{I.45})$$

L'objectif est de chercher l'état $x^*(t)$ et la commande $u^*(t)$ qui permet de satisfaire la dynamique du système donnée par l'équation (I.45), vérifier les conditions initiales sur les profils temporels de l'état et de la commande choisies comme suit:

$$x(0) = 0, u(0) = 0 \quad (\text{I.46})$$

et de minimiser le critère défini par :

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^{t_f} x(t) + u^2(t) dt \quad (\text{I.47})$$

La fonction Hamiltonien correspondante au problème de commande optimale est donnée par l'équation suivante :

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = x(t) + u^2(t) + p(t)x(t) + p(t)u(t) + p(t) \quad (\text{I.48})$$

L'application directe du principe du maximum de Pontryagin nous donne l'équation de commande suivante :

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), p(t), t)}{\partial u^*} = 0 \quad \text{ce qui donne } 2u^*(t) + p(t) = 0 \quad (\text{I.49})$$

D'où l'expression de la commande optimale en fonction de l'état adjoint sera exprimée comme suit :

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}p(t) \quad (\text{I.50})$$

En appliquant la condition d'optimalité (I.43), nous obtenons l'équation différentielle de l'état adjoint suivant :

$$\dot{p}(t) = -p(t) - 1 \quad (\text{I.51})$$

La résolution de l'équation différentielle (I.51), donne l'état adjoint suivant :

$$p(t) = e^{Co-t} - 1 \quad (\text{I.52})$$

Avec Co est une constante. D'après les équations (I.50) et (I.52), nous obtenons :

$$u^*(t) = \frac{1 - e^{Co-t}}{2} \quad (\text{I.53})$$

La constante $Co = 0$, vu que $u(0) = 0$. Par conséquent, l'expression finale de la commande optimale est définie par :

$$u^*(t) = \frac{1 - e^{-t}}{2} \quad (\text{I.54})$$

Pour obtenir l'expression de l'état $x^*(t)$ correspondante à la commande optimale, il suffit d'intégrer l'expression de la commande optimale donnée par l'équation (I.54) dans la dynamique du système donné par l'équation (I.45) et résoudre l'équation différentielle de l'état obtenu.

Le problème de commande optimale traité dans cet exemple sera compliqué si nous considérons des conditions finales sur les profils temporels de l'état et de la commande. Ainsi, le principe du maximum de Pontryagin nous conduit à un système différentiel à deux équations et à une condition initiale et une condition finale, en d'autres termes à la résolution d'un problème aux deux bouts.

L'écriture du principe du maximum de Pontryagin pour des problèmes de commande optimale avec contraintes sur l'état est en général délicate. Lorsque le problème aux deux bouts est écrit, la résolution est aussi difficile puisque l'on ne connaît pas la valeur initiale de l'état adjoint. Pour la déterminer, les méthodes utilisées sont des méthodes de tir simple [Trent et al., 2004] ou multiples [Diedam & Sager, 2018].

En résumé, les méthodes indirectes possèdent une bonne précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale et nécessitent une étude théorique préalable sur les variables adjointes. Ceci limite l'utilisation de ces méthodes pour la génération de trajectoires des systèmes robotiques fortement non linéaires comme les quadrirotors.

I.5.2 Méthode directe

Le principe de la méthode directe est de discrétiser la commande $u(t)$ et l'état $x(t)$ afin de transformer le problème de commande optimale considéré en un problème de programmation non linéaire avec contraintes de dimension finie. Le problème obtenu peut alors être résolu avec des solveurs classiques pour les problèmes d'optimisation non linéaires avec contraintes. Nous reprenons la formulation générale de problème de commande optimale (PCO) définie dans le paragraphe précédent. Ce problème à résoudre revient alors à :

$$\begin{aligned}
 & \min_{x(t), u(t)} J(x(t), u(t)) \\
 & \text{respectant} \\
 & \text{PCO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ C_t(x(t), u(t)) \geq 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \\ u(t_0) = u_0 \quad u(t_f) = u_f \end{array} \right. \quad (I.55)
 \end{aligned}$$

Le principe de la méthode directe pour résoudre le PCO donné par l'équation (I.55) est décrit par quatre étapes :

1ère étape :

La première étape de la méthode directe revient à partitionner l'espace-temps $[t_0, t_f]$ en N segments équidistants, tel que :

$$[t_0, t_f] \rightarrow [t_0 = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N = t_f] \quad (I.56)$$

avec $\tau_i = i \frac{t_f}{N}$, $i = 0, \dots, N$, sont appelés points de collocation. Ce sont les points où les contraintes de problème d'optimisation sont vérifiées. On note par z_c les variables du problème d'optimisation qui sont choisies comme étant les valeurs des états et des commandes aux points de collocation, τ_i , $i = 0, \dots, N$, tels que :

$$z_c = [x_0, x_1, \dots, x_N, u_0, u_1, \dots, u_N] \quad (I.57)$$

Le choix de nombre des points de collocation est très important pour définir la taille de problème d'optimisation. En effet, un grand nombre de points de collocation augmentera la précision de la solution optimale, mais conduira à obtenir une dimension forte du problème d'optimisation, ce qui compliquera la tâche de résolution. Ainsi, le nombre de points de collocation est choisi de manière que les contraintes soient satisfaites à tout instant, et le temps de calcul nécessaire pour résoudre le problème d'optimisation reste dans une plage raisonnable. Généralement, il n'existe pas de règle pour satisfaire ces deux conditions. Selon Louembet [Louembet et al., 2009], il faut au moins choisir les points de collocation afin que les contraintes soient vérifiées à une fréquence d'un point par seconde.

2^{ème} étape :

La deuxième étape consiste à utiliser les méthodes d'intégration numérique afin de discrétiser le problème de commande optimale (PCO) donné par l'équation (I.55) et obtenir un problème d'optimisation non linéaire, en anglais nonlinear programming (NLP). En effet, la dynamique globale du système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ est remplacée par un ensemble de contraintes, devant être satisfaites en chaque point de collocation. Ces derniers peuvent être évalués à l'aide des différentes techniques d'intégration implicite telles que la méthode trapézoïdale [Hammer & Hollingsworth, 1955], la méthode de Hermite-Simpson [Dickmanns & Well, 1975], la méthode de Runge-Kutta [Butcher, 1976] ou encore la méthode de Gauss-Lobatto [Herman & Conway, 1996]. Par exemple, en utilisant la méthode d'intégration trapézoïdale, le problème d'optimisation donné par l'équation (I.55) sera converti en un NLP de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \min_{x(t), u(t)} J(x(t), u(t)) & & \min_{z_c} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{2} (J_k + J_{k+1}) \\
 \text{respectant} & & \text{respectant} \\
 PCO \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ C_t(x(t), u(t)) \geq 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \\ u(t_0) = u_0 \quad u(t_f) = u_f \end{array} \right. & \longrightarrow & NLP \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{2} (f_{k+1} + f_k) \\ C_t(z_c) \geq 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_N = x_f \\ u(t_0) = u_0 \quad u(t_f) = u_N = u_f \end{array} \right. \quad (I.58)
 \end{array}$$

avec $k = 0, \dots, N-1$, $z_c = [x_0, x_1, \dots, x_N, u_0, u_1, \dots, u_N]$, $J_k = J(x(\tau_k), u(\tau_k))$, $f_k = f(x(\tau_k), u(\tau_k))$, $x_k = x(\tau_k)$ et $u_k = u(\tau_k)$.

3^{ème} étape :

La troisième étape consiste à résoudre le problème de programmation non linéaire obtenu en

utilisant un solveur adéquat. Parmi les solveurs de programmation non linéaire existant, nous citons le solveur Fmincon [Branch & Grace, 1996], le solveur SNOPT [Gill et al., 2005], le solveur KNITRO [Nocedal, 2006].

Nous allons choisir pour notre problème de programmation non linéaire le solveur Snopt. Ce solveur est créé par des chercheurs de l'Université de Californie et il est utilisé dans plusieurs progiciels d'optimisation de trajectoire, comme, Copernicus et ASTOS (AeroSpaceTrajectory Optimisation and Software). Généralement, Snopt est bien adapté pour traiter les problèmes de grande dimension comprenant plusieurs centaines de variables et de contraintes.

La résolution du problème de programmation non linéaire nous permet d'obtenir les solutions optimales des trajectoires des états et des commandes à chaque point de collocation comme suit :

$$x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^* \quad (\text{I.59})$$

$$u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^* \quad (\text{I.60})$$

4ème étape :

Une fois les solutions optimales pour les états et les commandes sont obtenues à chaque point de collocation, une trajectoire continue passant par ces derniers sera définie. On parle donc de problème de l'interpolation. Plusieurs méthodes d'interpolation existent dans la littérature telle que la méthode de Spline linéaire, méthode de Spline cubique, méthode de Spline quadratique, méthode d'interpolation de Lagrange, etc. La méthode d'interpolation choisit dépend du choix de la méthode d'intégration. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [Kelly, 2017].

Pour bien mettre en oeuvre la méthode directe représentée par ces quatre étapes, on propose l'exemple suivant du pendule inversé.

Exemple: pendule inversé :

Le pendule inversé [Riedmiller et al., 2007] est composé de deux éléments (Figure I.8). Le premier élément est un chariot libre en translation le long d'un rail de guidage. Le deuxième élément est un pendule pesant solidaire du chariot et libre en rotation. On note par q_1 la position du chariot, q_2 l'angle du pendule par rapport à la verticale, u_p la force de commande qui s'exerce sur le chariot, m_1 la masse du chariot, m_2 la masse du pendule, l_p la longueur du pendule, g la gravité, $x_p = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$ le vecteur d'état de pendule inversé et par $\dot{x}_p = f(x_p, u_p) = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2]^T$ sa dynamique.

Le modèle mathématique du système pendule inversé est donné par [Pati, 2014] :

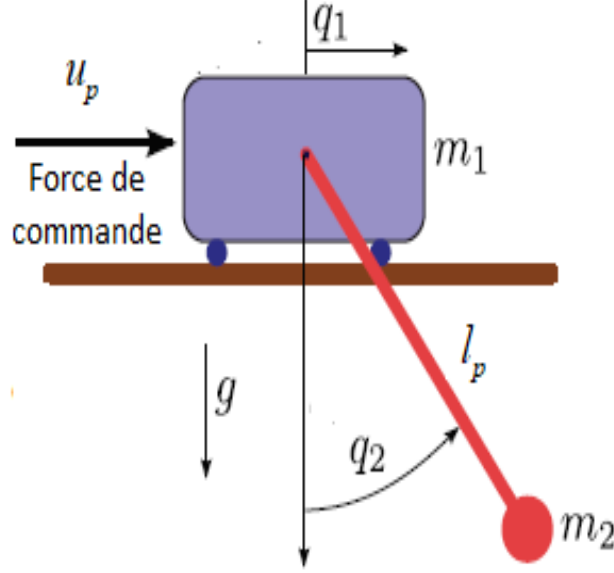


Figure I.8 – Schéma de pendule inversé

$$\ddot{q}_1 = \frac{l_p m_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + u_p + m_2 g \cos(q_2) \sin(q_2)}{m_1 + m_2 (1 - \cos^2(q_2))} \quad (\text{I.61})$$

$$\ddot{q}_2 = - \frac{l_p m_2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + u_p \cos(q_2) + (m_1 + m_2) g \sin(q_2)}{l_p m_1 + l_p m_2 (1 - \cos^2(q_2))} \quad (\text{I.62})$$

Le problème de commande optimale considérée consiste à chercher les trajectoires $t \rightarrow (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, u_p)$ qui minimisent l'énergie entre $[0, 2s]$:

$$J = \int_0^2 u_p^2 dt, \quad (\text{I.63})$$

en respectant les conditions initiales et finales suivantes :

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0 & q_1(2) &= 1 \\ q_2(0) &= 0 & q_2(2) &= \pi \\ \dot{q}_1(0) &= 0 & \dot{q}_1(2) &= 0 \\ \dot{q}_2(0) &= 0 & \dot{q}_2(2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

et les contraintes sur les trajectoires suivantes :

$$\begin{aligned} -2\,m &\leq q_1 \leq 2\,m \\ -20\,N &\leq u_p \leq 20\,N \end{aligned} \quad (\text{I.65})$$

Nous allons résoudre le problème de commande optimale de pendule inversé par la méthode directe en appliquant les quatre étapes expliquées précédemment. Comme première étape, nous pouvons choisir 11 points de collocation pour subdiviser l'espace-temps $[t_0, t_f]$, tel que

$$t \rightarrow [\tau_0 = 0, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.4, \dots, \tau_{10} = 2] \quad (\text{I.66})$$

On note par z_p les variables du problème d'optimisation de pendule inversé, tels que :

$$z_p = [x_{p0}, x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{p10}, u_{p0}, u_{p1}, u_{p2}, \dots, u_{p10}] \quad (\text{I.67})$$

En utilisant la méthode trapézoïdale, on se ramène à un problème de programmation non linéaire (NLP) de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{z_p} \quad & \sum_{k=0}^{k=9} \frac{h_k}{2} (u_{pk}^2 + u_{p(k+1)}^2) \\ \text{respectant} \quad & \begin{cases} x_{p(k+1)} = x_{pk} + \frac{h_k}{2} (f_{p(k+1)} + f_{pk}) \\ -2 \leq q_{1k} \leq 2 \\ -20 \leq u_{pk} \leq 20 \\ x_{p0} = [q_{10}, q_{20}, \dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}]^T = [0, 0, 0, 0]^T \\ x_{p10} = [q_{110}, q_{210}, \dot{q}_{110}, \dot{q}_{210}]^T = [1, \pi, 0, 0]^T \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.68})$$

avec $k = 0, \dots, 9$, $x_{pk} = [q_{1k}, q_{2k}, \dot{q}_{1k}, \dot{q}_{2k}]^T$, $f_{pk} = [\dot{q}_{1k}, \dot{q}_{2k}, \ddot{q}_{1k}, \ddot{q}_{2k}]^T$, $h_k = \tau_{k+1} - \tau_k = 0.2$.

Les paramètres de pendule inversé sont choisis tels que : $m_1 = 1\,kg$, $m_2 = 0.3\,kg$ et $l_p = 0.3\,m$. Le solveur Snopt est utilisé pour résoudre le problème non linéaire donné par l'équation (I.68).

L'étape finale pour obtenir les trajectoires optimales pour les états et la commande de pendule inversé consiste à l'interpolation des solutions obtenues par le solveur Snopt. Lorsque la méthode trapézoïdale est utilisée pour discrétiser le problème de commande optimale, les méthodes d'interpolation de spline linéaire et cubique sont utilisées pour l'interpolation des trajectoires des états et de commande de pendule inversé. La figure I.9 et la figure I.10 montrent les trajectoires optimales des états et de commande de pendule inversé.

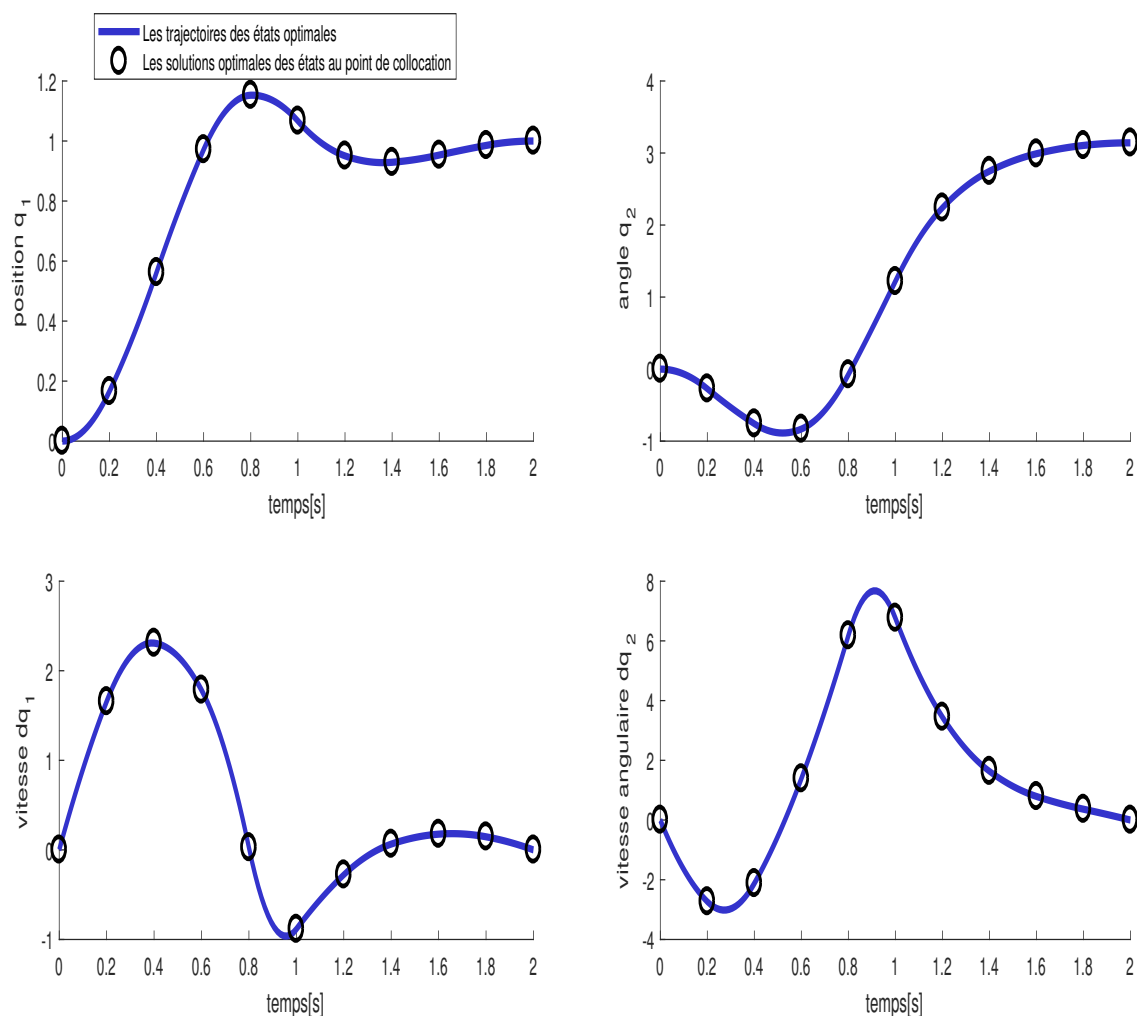


Figure I.9 – Les trajectoires optimales des états

D'après les figures I.9 et I.10, nous remarquons l'efficacité de la méthode directe pour la résolution de problème de commande optimale de pendule inversé.

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art sur les drones. Puis nous avons détaillé le modèle de quadrirotor qui sera le centre d'intérêt dans la thèse. Dans la deuxième partie de chapitre, nous avons présenté un état de l'art sur les méthodes de génération de trajectoire sans contraintes et le concept de platitude différentielle et ses propriétés. Enfin, nous avons présenté les méthodes de génération de trajectoires optimales rencontrées dans la littérature.

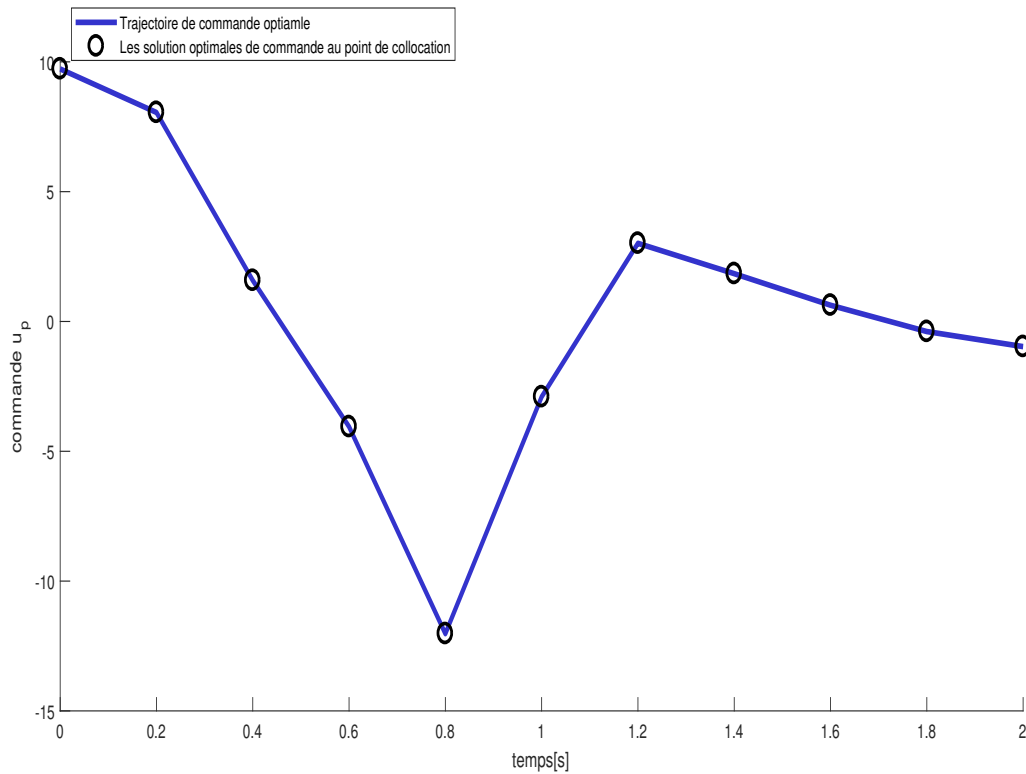


Figure I.10 – Trajectoire optimale de commande de pendule inversé

Ce tour d’horizon des différents travaux réalisés dans le domaine de la génération de trajectoires optimale permet de positionner nos travaux et de justifier les orientations suivies par la suite. Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser les propriétés de la platitude pour proposer une nouvelle méthode de génération de trajectoire optimale.

CHAPITRE II

Génération de trajectoire optimale

II.1	Introduction	39
II.2	Méthode de génération de trajectoires optimales proposée	39
II.2.1	Problème de commande optimale dans l'espace des sorties plates . .	40
II.2.2	Approximations des sorties plates	40
II.2.3	Transformation en un problème de programmation non linéaire . . .	42
II.3	Génération de trajectoires optimales pour un quadrirotor	43
II.3.1	Définition de problème d'optimisation	43
II.3.2	Résolution de problème d'optimisation	46
II.4	Conclusion	55

II.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les méthodes directes et indirectes qui peuvent résoudre le problème de génération de trajectoires optimales pour les systèmes robotiques. Les méthodes directes ne nécessitent pas l'emploi des conditions nécessaires d'optimalité comme les méthodes indirectes et elles sont donc robustes et faciles à utiliser lorsque l'application devient complexe. Cependant, la dimension du problème d'optimisation est grande et peut poser certains problèmes aux algorithmes d'optimisation non linéaires. Générer des trajectoires optimales pour le quadrirotor est un problème compliqué car ce dernier possède beaucoup de variables d'état et de commande. Les méthodes directes ont été utilisées pour générer des trajectoires pour les quadrirotors dans [Cowling et al., 2010] et [Kahale et al., 2014]. Néanmoins, ces méthodes ont été appliquées sur des modèles simplifiés et avec un nombre limité de contraintes.

La simplification de problème d'optimisation de trajectoire par élimination de quelques contraintes ne peut pas être une bonne idée car cela peut limiter l'utilisation de quadrirotor dans des applications précises. Donc, nous cherchons à exploiter un outil qui permet de simplifier le problème d'optimisation sans faire aucune hypothèse sur la dynamique du système et les contraintes de trajectoires. En effet, pour répondre à ces exigences, nous allons utiliser le concept de platitude pour résoudre le problème de génération de trajectoire optimale.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode de génération de trajectoires optimales qui se base sur la technique de collocation directe, la platitude différentielle et les courbes de Bézier. La méthodologie proposée permet de résoudre des problèmes complexes de calcul de trajectoire optimale pour les systèmes robotiques d'une manière rapide, simple et efficace. Ensuite, nous appliquerons la méthodologie proposée dans ce chapitre pour résoudre un problème du guidage d'un quadrirotor.

II.2 Méthode de génération de trajectoires optimales proposée

Dans ce paragraphe, nous proposons une nouvelle méthode de génération de trajectoires optimales basée sur la platitude, les courbes de Bézier et la méthode de collocation directe. La platitude sert à transformer le problème de commande optimale dans l'espace des sorties plates afin de réduire le nombre de variables d'optimisation. Les courbes de Bézier sont utilisées pour approximer les sorties plates. La méthode de collocation directe permet de transformer le problème d'optimisation infinie en problème de programmation non linéaire

de dimension finie. Finalement, le problème obtenu est résolu par le solveur Snopt dans le but d'avoir les valeurs optimales des paramètres des courbes de Bézier.

II.2.1 Problème de commande optimale dans l'espace des sorties plates

L'utilisation de la platitude dans le cadre de l'optimisation de trajectoires consiste à transcrire le problème de commande optimale donné par l'équation (I.55) dans l'espace des sorties plates, et à optimiser non plus les profils des états et des commandes, mais uniquement les profils des sorties plates. Ainsi, les variables de décision du problème de commande optimale sont alors définies par le vecteur des sorties plates et de leurs dérivées, noté $\bar{F}(t) = [F(t), \dot{F}(t), \dots, F^r(t)]$.

Une fois la contrainte dynamique donnée par l'équation (I.37) intervenant dans le problème de commande optimale enlevée grâce à la propriété de platitude du système, et en réécrivant les contraintes données par l'équation (I.39) et la fonctionnelle de coût donnée par l'équation (I.40) en fonction des sorties plates et de leurs dérivées, le PCO donné par l'équation (I.55) sera converti en un problème de commande optimale plate (PCOP) de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \min_{x(t), u(t)} J(x(t), u(t)) & & \min_{\bar{F}(t)} J(\bar{F}(t)) \\
 \text{respectant} & & \text{respectant} \\
 PCO \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ C_t(x(t), u(t)) \geq 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \\ u(t_0) = u_0 \quad u(t_f) = u_f \end{array} \right. & \longrightarrow & PCP \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}(t_0) = \bar{F}_0 \quad \bar{F}(t_f) = \bar{F}_f \\ C_t(\bar{F}(t)) \geq 0 \end{array} \right. \quad (II.1)
 \end{array}$$

Avec $C_t(\bar{F}(t))$ représente les contraintes du problème d'optimisation qui dépendent de la sortie plate et ses dérivées. Comme les sorties plates dénotent une description minimale du comportement du système, le nombre de variables de décision pour le PCOP a été considérablement réduit ce qui facilite la tâche de résolution de problème d'optimisation.

II.2.2 Approximations des sorties plates

Pour obtenir des trajectoires réalisables, nous devons définir toutes les sorties plates avec des fonctions appropriées. De nombreuses courbes peuvent être utilisées pour approximer la sortie plate comme les séries de Fourier [Nandi & Singh, 2019], les polynômes, les courbes B-spline [De Boor et al., 1978]. En plus de réduire le nombre de variables pour le problème de génération de trajectoires, il est utile de pouvoir aisément choisir le degré de continuité de la courbe (classe C^r), sans ajouter de nouvelles contraintes, puisque l'état $x(t)$ et la commande $u(t)$ se déduisent des sorties plates $F(t)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre r .

Quoique les polynômes puissent être une bonne solution pour ces problèmes car ils sont facilement évaluables et différentiables. Cependant, ils nécessitent un nombre important de paramètres si l'horizon de planification est grand où le problème d'optimisation considéré comporte beaucoup de contraintes. Donc, l'objectif ici est d'utiliser une famille très riche de courbe dépendant d'un nombre suffisant de paramètres pour pouvoir satisfaire les différentes contraintes.

Parmi les solutions, on peut utiliser les courbes de Bézier. L'intérêt de la courbe de Bézier pour la paramétrisation des sorties plates est multiple. Elle permet d'établir simplement la classe de continuité sur la trajectoire avec un nombre raisonnable de variables et sans contrainte supplémentaire. De plus, elle présente une forte courbure, ce qui facilite la modification de la courbe par déplacement d'un minimum de points. Ainsi, il est possible de décrire chaque sortie plate $F_i(t)$ par des courbes de Bézier de degré d_i telles que :

$$F_i(t) = \sum_{j=0}^{d_i} B_j^{d_i}(t) \alpha_{i,j}, \quad t \in [t_0, t_f], i = 1 \dots, m \quad (\text{II.2})$$

Où $\alpha_{i,j}$ sont les points de contrôle de la sortie plate $F_i(t)$, qui représentent les nouvelles variables de problème d'optimisation, et $B_j^{d_i}(t)$ sont des polynômes de Bernstein d'ordre d_i , définies par :

$$B_j^{d_i}(t) = \frac{d_i!}{j!(d_i - j)!} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{d_i - j} \left(\frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right)^j \quad (\text{II.3})$$

L'ordre de polynômes de Bernstein d_i doit être sélectionné avec soin pour représenter précisément la trajectoire de la sortie plate tout en maintenant l'efficacité des calculs. De manière générale, augmenter l'ordre de polynômes de Bernstein d_i permet d'avoir plus de flexibilité pour la trajectoire, mais cela conduit aussi à plus de points de contrôle, ce qui complique le problème d'optimisation. Par conséquent, le choix du paramètre d_i est un compromis entre obtenir des trajectoires flexibles avec une grande continuité et utiliser un petit nombre de paramètres pour résoudre facilement le problème d'optimisation. La paramétrisation des sorties plates par des courbes de Bézier permet de transformer le problème décrit par l'équation (II.1) en un problème de programmation semi-infinie défini par :

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\alpha}} J(\bar{\alpha}) \\ & \text{respectant} \\ & \begin{cases} \bar{F}(t_0, \bar{\alpha}) = \bar{F}_0 & \bar{F}(t_f, \bar{\alpha}) = \bar{F}_f \\ C_t(\bar{F}(t, \bar{\alpha})) \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$\bar{\alpha} = (\alpha_{10}, \dots, \alpha_{1d_1}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{2d_2}, \dots, \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{md_m})$ est le vecteur des paramètres de contrôle des trajectoires (II.2). Le problème d'optimisation donné par l'équation (II.4) donné par l'équation est semi-infini car les variables d'optimisation sont en nombre fini mais elles doivent vérifier les contraintes de la trajectoire sur un continuum temporel.

II.2.3 Transformation en un problème de programmation non linéaire

Après avoir exprimé les trajectoires de la sortie plate à l'aide des courbes de Bézier, le problème de commande optimale donné par l'équation (II.4) peut se transformer en un problème de programmation non linéaire. La résolution numérique du problème d'optimisation nécessite une discrétisation du temps. Soit

$$[t_0, t_f] \rightarrow [t_0 = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N = t_f] \quad (\text{II.5})$$

une subdivision uniforme de $[t_0, t_f]$ où N est un entier non nul choisi selon le nombre de points de collocation. Pour chaque point de collocation τ_k , $k = 0, \dots, N$, le critère ainsi que les contraintes sont vérifiées. Afin de discrétiser le problème de programmation semi infinie (II.4), chaque sortie plate $F_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, est évoluée aux points de collocation $\bar{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N)$ comme suit :

$$\begin{aligned} & [F_1(\tau_0), \dot{F}_1(\tau_0), \dots, F_1^{r_1}(\tau_0), F_1(\tau_1), \dot{F}_1(\tau_1), \dots, F_1^{r_1}(\tau_1), \dots, F_1(\tau_N), \dot{F}_1(\tau_N), \dots, F_1^{r_1}(\tau_N)] \\ & [F_2(\tau_0), \dot{F}_2(\tau_0), \dots, F_2^{r_2}(\tau_0), F_2(\tau_1), \dot{F}_2(\tau_1), \dots, F_2^{r_2}(\tau_1), \dots, F_2(\tau_N), \dot{F}_2(\tau_N), \dots, F_2^{r_2}(\tau_N)] \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & [F_m(\tau_0), \dot{F}_m(\tau_0), \dots, F_m^{r_m}(\tau_0), F_m(\tau_1), \dot{F}_m(\tau_1), \dots, F_m^{r_m}(\tau_1), \dots, F_m(\tau_N), \dot{F}_m(\tau_N), \dots, F_m^{r_m}(\tau_N)] \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

En se basant sur l'équation (II.6), nous obtenons le problème de programmation non linéaire de dimension finie suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\alpha}} J(\bar{\alpha}) \\ & \text{respectant} \\ & \left\{ C_t(\bar{\alpha}) \geq 0 \right. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Avec $C_t(\bar{\alpha})$ représente les contraintes de problème d'optimisation qui dépend des paramètres de contrôle donnés par l'équation (II.2). Finalement, nous utilisons le solveur Snopt pour résoudre le problème donné par l'équation (II.7).

II.3 Génération de trajectoires optimales pour un quadrirotor

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode expliquée dans le paragraphe précédent pour générer des trajectoires optimales pour un quadrirotor.

II.3.1 Définition de problème d'optimisation

Dans cette section nous considérons les hypothèses suivantes :

- Les coefficients de résistance à l'avancement k_{ftx} , k_{fty} , k_{ftz} sont négligables.
- Les coefficients des frottements aérodynamiques $k_{fa\phi}$, $k_{fa\theta}$ et $k_{fa\psi}$ sont négligables.
- l'angle de tangage $\psi = 0$.

Le modèle simplifié du quadrirotor sera donné par :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \frac{u_{q1}}{m}(\sin(\theta) \cos(\phi)) \\
 \ddot{y} &= \frac{u_{q1}}{m}(-\sin(\phi)) \\
 \ddot{z} &= \frac{u_{q1}}{m}(\cos(\theta) \cos(\phi)) - g \\
 \ddot{\phi} &= \frac{l_q}{I_x} u_{q\phi} \\
 \ddot{\theta} &= \frac{l_q}{I_y} u_{q\theta}
 \end{aligned} \tag{II.8}$$

Les paramètres de quadrirotor sont choisis tels que : $m = 0.5 \text{ kg}$, $I_x = I_y = 0.002 \text{ kg.m}^2$, $I_z = 0.004 \text{ kg.m}^2$, $l_q = 0.3 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.

L'espace de travail considéré dans notre problème d'optimisation est une salle dont les dimensions sont données par :

$$0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 15, 0 \leq z \leq 15 \tag{II.9}$$

L'espace de travail contient aussi des obstacles de géométries différentes, connus à priori (forme et emplacement). Pour tenir compte de ces obstacles, nous devons les modéliser et l'intégrer dans les contraintes du problème d'optimisation. La plupart des travaux dans la littérature ont défini algébriquement les obstacles en utilisant la méthode de p-norme [Harada et al., 2013, Abadi et al., 2019b] comme suit :

$$obs(x, y, z) = \left(\frac{x - x_{ob}}{a}\right)^p + \left(\frac{y - y_{ob}}{b}\right)^p + \left(\frac{z - z_{ob}}{c}\right)^p - 1 \tag{II.10}$$

Où x_{ob}, y_{ob}, z_{ob} représente le centre de l'obstacle, a est la distance entre le centre de l'obstacle et la frontière limite de l'obstacle pour la direction x , b est la distance entre le centre de l'obstacle et la frontière limite de l'obstacle pour la direction y , c est la distance entre le centre de l'obstacle et la frontière limite de l'obstacle pour la direction z .

Nous avons considéré six obstacles, trois cylindres et trois blocs rectangulaires. Pour définir le modèle de bloc rectangulaire, il suffit de choisir $p = 10$. Les modèles des blocs rectangulaires sont définis par les équations suivantes :

$$obs_1(x, y, z) = \left(\frac{x - x_{ob1}}{a_1}\right)^{10} + \left(\frac{y - y_{ob1}}{b_1}\right)^{10} + \left(\frac{z - z_{ob1}}{c_1}\right)^{10} - 1 \quad (II.11)$$

$$obs_2(x, y, z) = \left(\frac{x - x_{ob2}}{a_2}\right)^{10} + \left(\frac{y - y_{ob2}}{b_2}\right)^{10} + \left(\frac{z - z_{ob2}}{c_2}\right)^{10} - 1 \quad (II.12)$$

$$obs_3(x, y, z) = \left(\frac{x - x_{ob3}}{a_3}\right)^{10} + \left(\frac{y - y_{ob3}}{b_3}\right)^{10} + \left(\frac{z - z_{ob3}}{c_3}\right)^{10} - 1 \quad (II.13)$$

Avec $a_1 = a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = b_2 = b_3 = 1, c_1 = c_2 = c_3 = 5, x_{ob1} = 2, y_{ob1} = 7, z_{ob1} = 5, x_{ob2} = 8, y_{ob2} = 7, z_{ob2} = 5, x_{ob3} = 7, y_{ob3} = 3, z_{ob3} = 5$.

Pour définir le modèle de cylindre, il suffit de choisir $p = 2$. Les modèles des cylindres sont définis par les équations suivantes :

$$obs_4(x, y, z) = \left(\frac{x - x_{ob4}}{a_4}\right)^2 + \left(\frac{y - y_{ob4}}{b_4}\right)^2 + \left(\frac{z - z_{ob4}}{c_4}\right)^2 - 1 \quad (II.14)$$

$$obs_5(x, y, z) = \left(\frac{x - x_{ob5}}{a_5}\right)^2 + \left(\frac{y - y_{ob5}}{b_5}\right)^2 + \left(\frac{z - z_{ob5}}{c_5}\right)^2 - 1 \quad (II.15)$$

$$obs_6(x, y, z) = \left(\frac{x - x_{ob6}}{a_6}\right)^2 + \left(\frac{y - y_{ob6}}{b_6}\right)^2 + \left(\frac{z - z_{ob6}}{c_6}\right)^2 - 1 \quad (II.16)$$

Avec $a_4 = a_5 = a_6 = b_4 = b_5 = b_6 = 0.9, c_4 = c_5 = c_6 = 5, x_{ob4} = 2, y_{ob4} = 3, z_{ob4} = 5, x_{ob5} = 3, y_{ob5} = 10, z_{ob5} = 5, x_{ob6} = 5, y_{ob6} = 9, z_{ob6} = 5$.

L'environnement de travail contenant les obstacles est décrit par les figures II.1 et II.2.

La contrainte qui signifie que n'importe quel système aérien peut éviter les obstacles donnés par les équations (II.11-II.16) est défini comme suit :

$$obs_i(x, y, z) > 0 \quad i = 1..6 \quad (II.17)$$

La contrainte d'évitement d'obstacle donnée par l'équation (II.17) ne tient pas compte de rayon de courbure du quadrirotor lors de son mouvement. Alors, afin d'assurer plus de

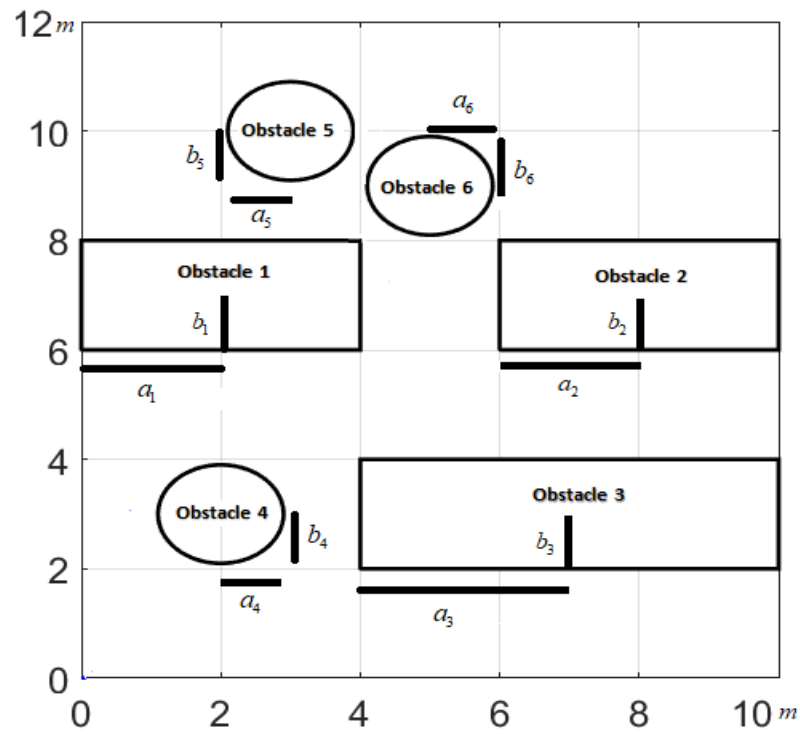


Figure II.1 – Environnement de travail en 2D

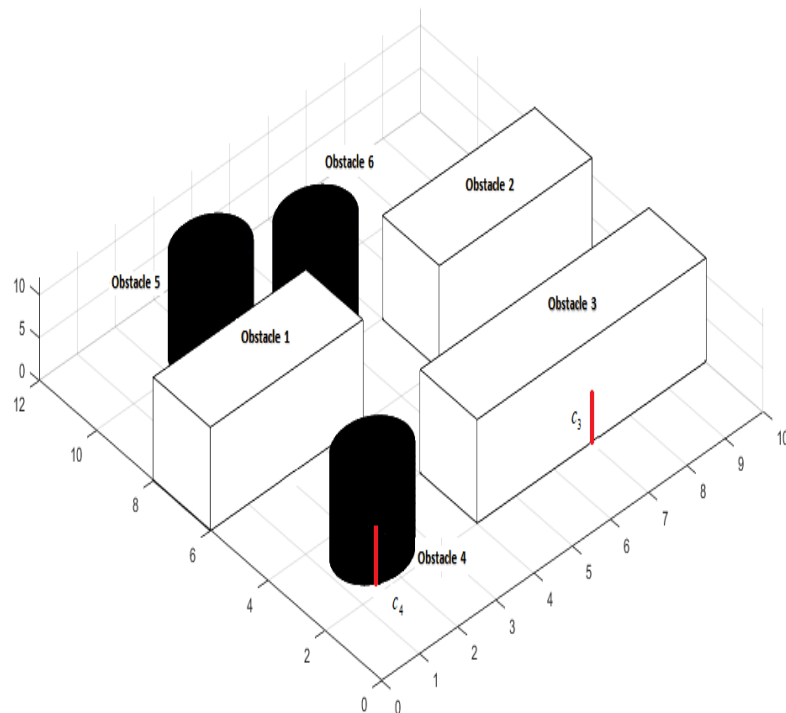


Figure II.2 – Environnement de travail en 3D

sécurité, nous intégrons un entier R_s à cette contrainte telle que :

$$obs_i(x, y, z) > R_s \quad i = 1..6 \quad (II.18)$$

Pour notre problème d'optimisation, nous allons choisir comme critère de performance le jerk. Le jerk traduit le taux de variation de l'accélération par unité de temps. Ce terme est utilisé comme critère caractérisant la douceur d'une trajectoire (smoothness). Plus sa valeur maximale est faible, plus la trajectoire sera considérée comme douce et par conséquent peu contraignante pour le système dynamique. Selon [Yu et al., 2016], le critère jerk pour le quadrirotor est défini entre $[t_0, t_f]$ comme suit:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^2 dt \quad (II.19)$$

Le problème d'optimisation consiste à chercher l'état X_q^* et la commande U_q^* optimale correspondante qui permet, de vérifier la dynamique du système donné par l'équation (II.8), de satisfaire les conditions initiales $X_q(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ et les conditions finales $X_q(5) = [5, 0, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, de respecter les dimensions de l'espace de travail données par l'équation (II.9), de respecter les contraintes d'évitement d'obstacle données par l'équation (II.18) et de minimiser le critère jerk donné par l'équation (II.19). Mathématiquement, le problème d'optimisation pour le quadrirotor se résume comme suit :

$$\begin{aligned} & \min_{X_q, U_q} \int_0^5 (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^2 dt \\ & \text{respectant} \\ & \left\{ \begin{array}{l} II.8 \\ X_q(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\ X_q(5) = [5, 0, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\ 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 15, 0 \leq z \leq 15 \\ obs_i(x, y, z) \geq 0.1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right. \quad (II.20) \end{aligned}$$

II.3.2 Résolution de problème d'optimisation

Dans cette section, nous appliquons la méthode proposée dans la section II.2 pour résoudre le problème de commande optimale pour le quadrirotor décrit dans le paragraphe précédent. Afin de simplifier le problème d'optimisation, nous allons exploiter la propriété de platitude pour le quadrirotor. Le modèle dynamique de quadrirotor décrit par (II.8) est

différentiellement plat et admet le vecteur $F_q = [F_{q11}, F_{q21}, F_{q31}, F_{q41}] = [x, y, z, \psi]$ comme sortie plate. Alors, il est possible d'exprimer successivement toutes les variables d'état et de commande de quadrirotor comme fonctions des sorties plates et de leur dérivée comme suit :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\ddot{F}_{q11}}{g + \ddot{F}_{q31}}\right) \quad (\text{II.21})$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{-\ddot{F}_{q21}}{\sqrt{\ddot{F}_{q11}^2 + \ddot{F}_{q21}^2 + (g + \ddot{F}_{q31})^2}}\right) \quad (\text{II.22})$$

$$u_{q1} = m \sqrt{\ddot{F}_{q11}^2 + \ddot{F}_{q21}^2 + (g + \ddot{F}_{q31})^2} \quad (\text{II.23})$$

$$u_{q\theta} = \frac{l_q}{I_y} \left(\frac{\ddot{F}_{q11}}{g + \ddot{F}_{q31}} - \frac{\ddot{F}_{q11} \ddot{F}_{q31}}{(g + \ddot{F}_{q31})^2} - 2 \frac{\ddot{F}_{q11} \ddot{F}_{q31}}{(g + \ddot{F}_{q31})^2} + 2 \frac{\ddot{F}_{q11} (\ddot{F}_{q31})^2}{(g + \ddot{F}_{q31})^3} \right) \quad (\text{II.24})$$

$$\begin{aligned} u_{q\phi} = & \frac{ml_q}{I_x} \left(\frac{(\ddot{u}_{q1} F_{q21} - u_{q1} \ddot{F}_{q21})(u_{q1} \sqrt{u_{q1}^2 - m^2 \ddot{F}_{q21}^2})}{u_{q1}^2 (u_{q1}^2 - m^2 \ddot{F}_{q21}^2)} \right) - \\ & \frac{ml_q}{I_x} \left(\frac{(\dot{u}_{q1} \ddot{F}_{q21} - u_{q1} \ddot{\ddot{F}}_{q21})(u_{q1} \sqrt{u_{q1}^2 - m^2 \ddot{F}_{q21}^2})}{u_{q1}^2 (u_{q1}^2 - m^2 \ddot{F}_{q21}^2)} \right) + \\ & \frac{ml_q}{I_x} \left(\frac{(u_{q1} (u_{q1}^2 (u_{q1}^2 - m^2 \ddot{F}_{q21}^2)^{1/2} (u_{q1} \dot{u}_{q1} - m^2 \ddot{F}_{q21} \ddot{\ddot{F}}_{q21})))}{u_{q1}^2 (u_{q1}^2 - m^2 \ddot{F}_{q21}^2)} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

L'utilisation de la propriété de platitude pour le quadrirotor permet de transformer le problème d'optimisation donné par l'équation (II.20) en un problème de commande optimale équivalent qui s'écrit, dans l'espace des sorties plates, sous la forme :

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{F}_q} \int_0^5 (\ddot{F}_{q11}^2 + \ddot{F}_{q21}^2 + \ddot{F}_{q31}^2)^2 dt \\ & \text{respectant} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \text{II.21 - II.25} \\ \bar{F}_q(0) = F_{q31}(5) = \dot{F}_q(5) = \ddot{F}_q(5) = \ddot{\ddot{F}}_q(5) = 0 \\ F_{q11}(5) = 5, F_{q21}(5) = 11 \\ 0 \leq F_{q11} \leq 10, 0 \leq F_{q21} \leq 15, 0 \leq F_{q31} \leq 15 \\ \text{obs}_i(F_{q11}, F_{q21}, F_{q31}) \geq 0.1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right. \quad (\text{II.26}) \end{aligned}$$

Avec $\bar{F}_q = [F_{q11}, \dots, \ddot{F}_{q11}, F_{q21}, \dots, \ddot{F}_{q21}, F_{q31}, \dots, \ddot{F}_{q31}]$.

Afin d'obtenir le nombre nécessaire des paramètres de contrôle pour résoudre le problème d'optimisation (II.26), nous choisissons pour les sorties plates F_{q11} , F_{q21} et F_{q31} , les courbes de Bézier d'ordre 11 telles que :

$$F_{q11} = \sum_{j=0}^{11} B_j^{11}(t) \alpha_{x,j}, F_{q21}(t) = \sum_{j=0}^{11} B_j^{11} \alpha_{y,j}, F_{q31} = \sum_{j=0}^{11} B_j^{11}(t) \alpha_{z,j} \quad t \in [0, 5] \quad (\text{II.27})$$

Où $\bar{\alpha}_q = [\alpha_{x0}, \alpha_{x1}, \dots, \alpha_{x11}, \alpha_{y0}, \alpha_{y1}, \dots, \alpha_{y11}, \alpha_{z0}, \alpha_{z1}, \dots, \alpha_{z11}]$ est le vecteur des paramètres de contrôle pour les sorties plates F_{q11} , F_{q21} et F_{q31} , $B_j^{11}(t)$ sont des polynômes de Bernstein d'ordre 11, définies par :

$$B_j^{11}(t) = \frac{11!}{j!(11-j)!} \left(\frac{5-t}{5}\right)^{11-j} \left(\frac{t}{5}\right)^j \quad (\text{II.28})$$

Nous choisissons les points de collocation tels que les contraintes soient vérifiées à une fréquence d'un point par seconde comme suit :

$$\bar{\tau}_q = [0, 1, 2, 3, 4, 5] \quad (\text{II.29})$$

Pour chaque point de collocation, les sorties plates $F_{q11}(t)$, $F_{q21}(t)$ et $F_{q31}(t)$ sont évoluées aux points de collocation $\bar{\tau}_q = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$ comme suit :

$$\begin{aligned} & [F_{q11}(0), \dot{F}_{q11}(0), \dots, F_{q11}^4(0), F_{q11}(1), \dot{F}_{q11}(1), \dots, F_{q11}^4(1), \dots, F_{q11}(5), \dot{F}_{q11}(5), \dots, F_{q11}^4(5)] \\ & [F_{q21}(0), \dot{F}_{q21}(0), \dots, F_{q21}^4(0), F_{q21}(1), \dot{F}_{q21}(1), \dots, F_{q21}^4(1), \dots, F_{q21}(5), \dot{F}_{q21}(5), \dots, F_{q21}^4(5)] \\ & [F_{q31}(0), \dot{F}_{q31}(0), \dots, F_{q31}^4(0), F_{q31}(1), \dot{F}_{q31}(1), \dots, F_{q31}^4(1), \dots, F_{q31}(5), \dot{F}_{q31}(5), \dots, F_{q31}^4(5)] \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Après avoir évolué les fonctions de Bézier aux points de collocation, nous obtenons le NLP suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\alpha}_q} J(\bar{\alpha}_q) \\ & \text{respectant} \\ & \left\{ C_q(\alpha_q) \geq 0 \right. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Avec $C_q(\alpha_q)$ représente les contraintes de problème d'optimisation qui dépendent de paramètre de contrôle $\bar{\alpha}_q$.

La résolution du problème d'optimisation (II.31) par le solveur Snopt permet d'obtenir les paramètres de contrôle suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_{x0} = \alpha_{x1} = \alpha_{x2} = \alpha_{x3} = \alpha_{y0} = \alpha_{y1} = \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \alpha_{z0} = \alpha_{z1} = \alpha_{z10} = \alpha_{z11} = 0, \alpha_{x4} = 19.55, \\ \alpha_{x5} = -56.8, \alpha_{x6} = 76.2, \alpha_{x7} = -24.1, \alpha_{x8} = \alpha_{x9} = \alpha_{x10} = \alpha_{x11} = 5, \alpha_{y4} = 0.69, \alpha_{y5} = 25.5, \\ \alpha_{y6} = -10.18, \alpha_{y7} = 3.46; \alpha_{y8} = 9, \alpha_{y9} = \alpha_{y10} = \alpha_{y11} = 11, \alpha_{z2} = 1.4, \alpha_{z3} = 3.9, \alpha_{z4} = 3.03, \\ \alpha_{z5} = 2.28, \alpha_{z6} = 0.13, \alpha_{z7} = 8.48, \alpha_{z8} = 6.06, \alpha_{z9} = 8.58 \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Le nombre de variables pour le problème d'optimisation (II.31) est défini par : (le nombre des sorties plates pour le système de quadrirotor multiplié par le nombre des paramètres de contrôle pour chaque courbe Bézier) soit $3 * 12 = 36$. Par contre, lorsque nous utilisons les méthodes directes ou indirectes existant dans la littérature pour résoudre le même problème d'optimisation de trajectoire de quadrirotor, le nombre de variables d'optimisation est défini par : (le nombre de variables d'états et de contrôles pour le quadrirotor multiplié par le nombre de points de collocation) soit $(3 + 10) * 6 = 78$. Ainsi, cette importante réduction du nombre de variables d'optimisation, comparée à d'autres méthodes conventionnelles, nous permet d'obtenir une solution plus rapide au niveau temps considéré par les solveurs pour résoudre le problème d'optimisation.

Le temps CPU nécessaire pour résoudre le problème d'optimisation (II.31) est environ de 1.3 s. Une large gamme des conditions initiales a été considérées pour que le processus d'optimisation convergera vers la solution optimale.

La figure II.3 et la figure II.4 montrent le mouvement optimal en jerk pour le quadrirotor en 2D et 3D. Les figures (II.5-II.9) montrent les trajectoires optimales des états et des commandes de quadrirotor.

D'après les figures (II.5-II.9), nous remarquons l'efficacité de la méthode de génération de trajectoires optimales proposée pour la résolution de problème de commande optimale de quadrirotor. D'autre part, les résultats de simulation montrent que considérer le Jerk comme un critère de performance permet d'obtenir des trajectoires lisses qui réduisent la difficulté de concevoir des lois de commande.

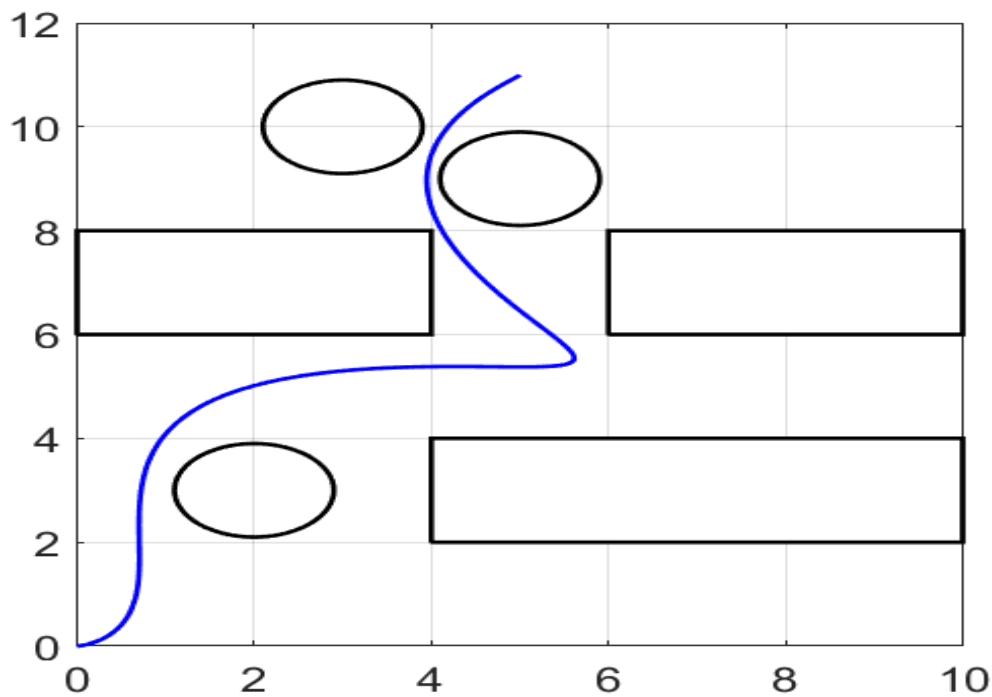


Figure II.3 – Trajectoire optimale en jerk du quadrirotor en 2D

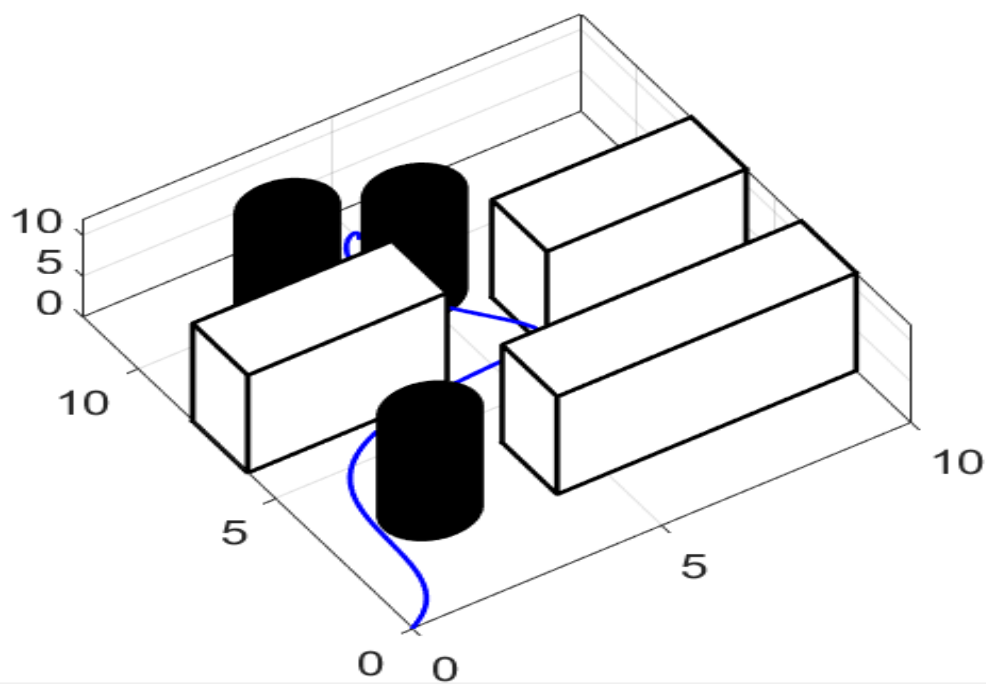
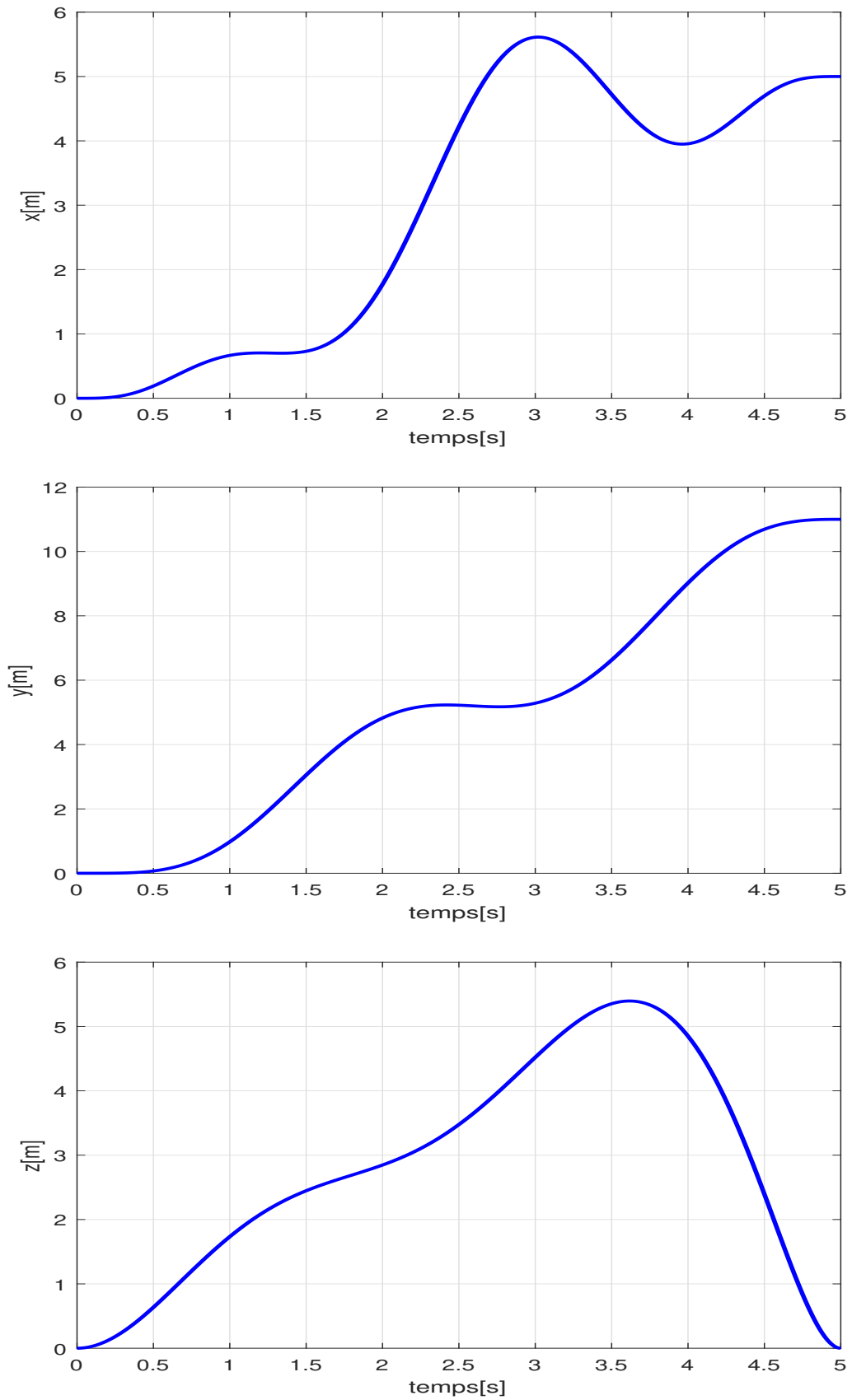
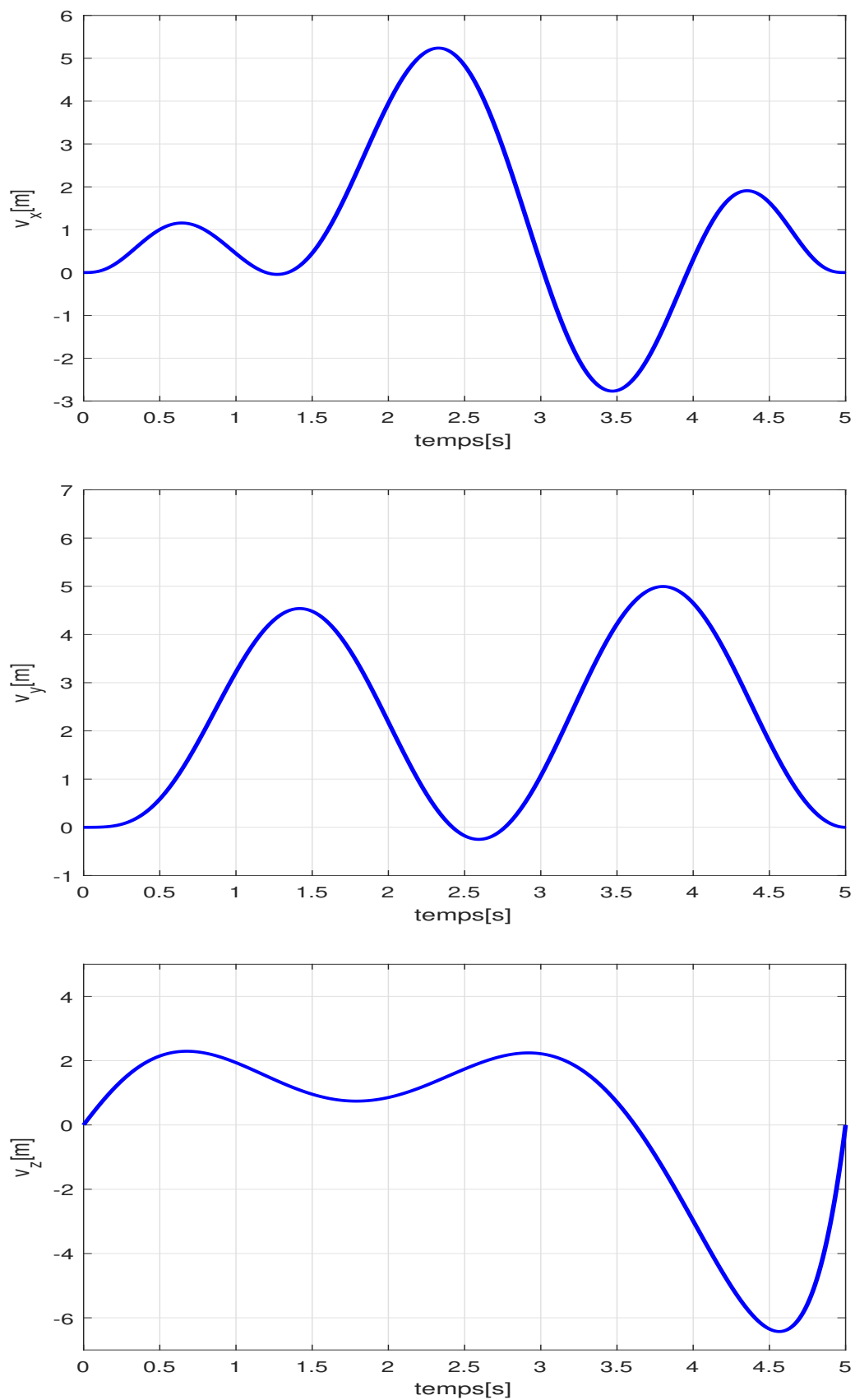
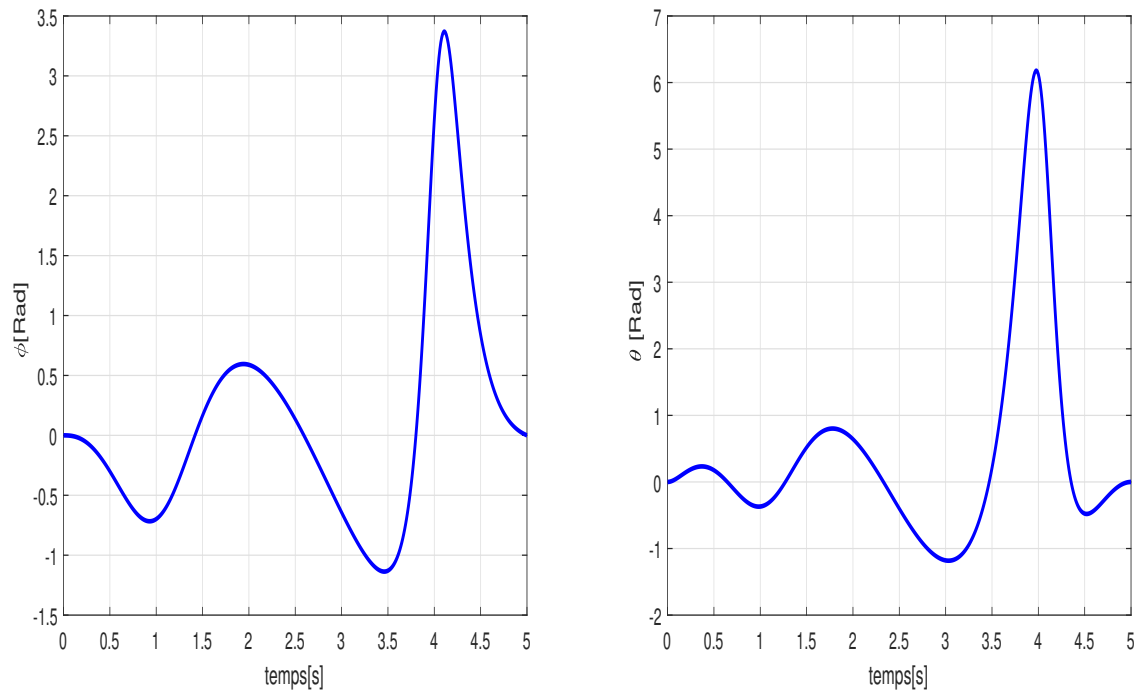
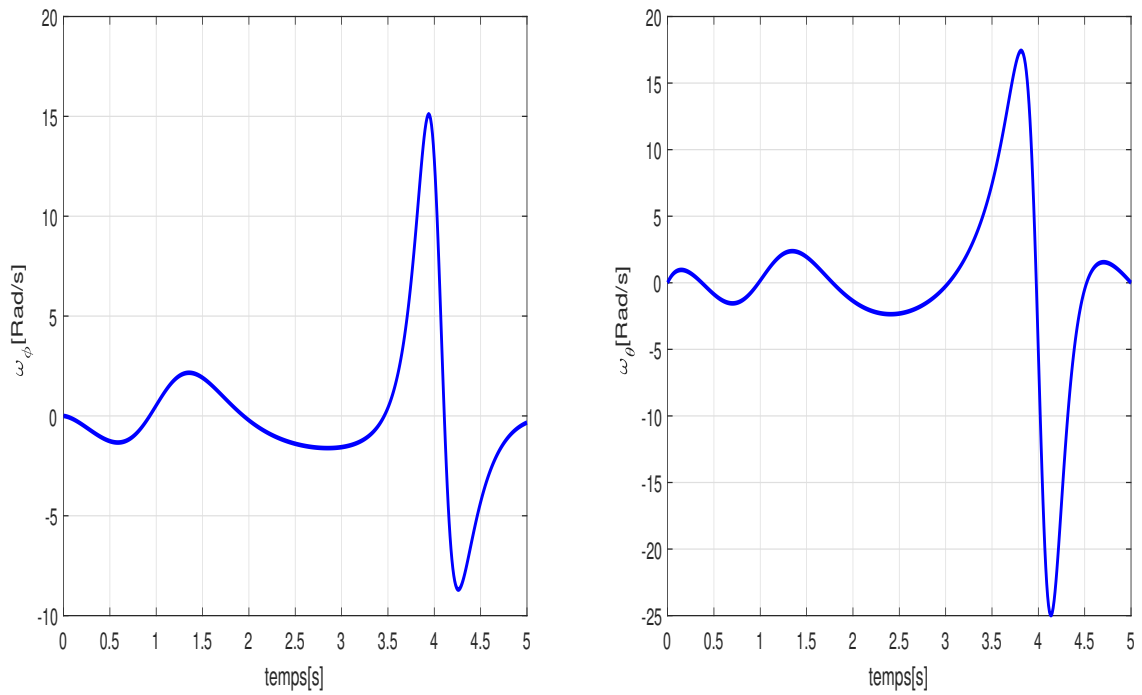
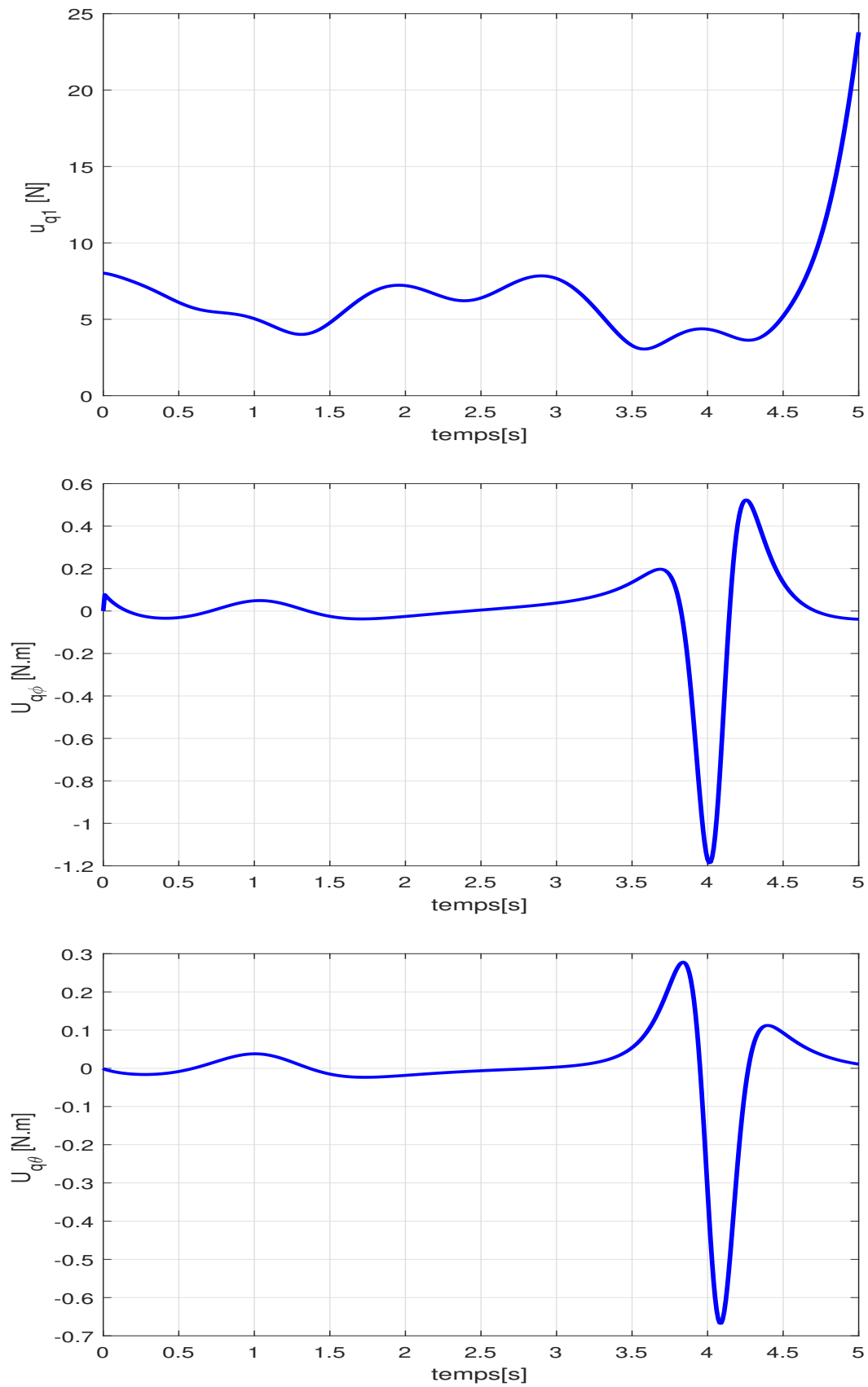


Figure II.4 – Trajectoire optimale en jerk du quadrirotor en 3D

**Figure II.5** – Trajectoires optimales des positions du quadrirotor

**Figure II.6** – Trajectoires optimales des vitesses du quadrirotor

**Figure II.7** – Trajectoires optimales des angles du quadrirotor**Figure II.8** – Trajectoires optimales des vitesses angulaires du quadrirotor

**Figure II.9** – Commandes optimales du quadrirotor

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une technique d'optimisation de trajectoires basées sur les courbes de Bézier, la platitude et la méthode de collocation. L'avantage principal de cette approche par rapport aux techniques existantes est que le problème de commande optimal initial est transcrit dans un cadre géométrique par l'utilisation de la propriété de platitude du modèle. Ceci conduit à un nouveau problème de commande optimale dépourvue de contraintes dynamiques et pouvant être résolu plus rapidement que dans l'espace d'état. Nous avons appliqué avec succès la méthode de génération de trajectoires optimales développées au cas du guidage d'un quadrirotor. L'espace de travail considéré dans notre problème d'optimisation est une salle qui possède des obstacles de géométries différentes, connus à priori (forme et emplacement). Pour tenir compte de ces obstacles, nous avons intégré les modèles algébriques des obstacles obtenus par la méthode p-norme dans les contraintes du problème d'optimisation.

Commande robuste par platitude

III.1	Introduction	57
III.2	Synthèse de régulateur robuste par platitude basé sur la commande par mode glissant	58
III.3	Synthèse de régulateur robuste par platitude basé sur la commande par mode glissant et la commande par rejet actif des perturbations	62
III.4	Étude par simulation	66
III.4.1	Conception de la commande par platitude basée sur le mode glissant pour un modèle incertain de quadrirotor	67
III.4.2	Conception de la commande par platitude basée sur le mode glissant et le contrôle par rejet actif des perturbations pour un modèle incertain de quadrirotor	77
III.5	Conclusion	87

III.1 Introduction

Il existe toujours une différence entre le modèle mathématique de procédé et la réalité. Cette différence est due à des phénomènes environnementaux négligés lors de modélisations et des erreurs de précision des valeurs de paramètres du modèle. La question qui se pose donc c'est comment obtenir les performances souhaitées malgré la présence des dynamiques négligées dans le modèle du processus.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu l'efficacité de la platitude dans le cadre de génération de trajectoires optimales. En effet, à partir de la connaissance des trajectoires optimales des sorties plates, une commande en boucle ouverte est calculée permettant de déplacer un système d'un état initial à un état final en satisfaisant quelques contraintes et en minimisant un critère de performance.

La présence des perturbations externes et d'incertitudes de modélisation nécessite l'intégration d'un bouclage de rétroaction robuste dans la commande par platitude pour la poursuite de trajectoire. Pour ce faire, différentes lois de commande robuste ont été associées à la commande par platitude. Citons, entre autres, les travaux de [Lavigne et al., 2001] [Hagenmeyer & Delaleau, 2003], [Zerar et al., 2004], [Hagenmeyer & Delaleau, 2010], [Ryu & Agrawal, 2011], [Chen et al., 2016]. Parmi ces travaux, nous nous intéressons aux approches basées sur la platitude et la commande par mode glissant.

Le principe de la commande par mode glissant consiste à forcer le système à converger vers une surface choisie dite de glissement, qui vérifie une dynamique désirée de l'erreur en présence des incertitudes paramétriques et des perturbations externes. Le choix des surfaces de glissement concerne leur nombre ainsi que leurs formes en fonction de l'application et de l'objectif visé. La combinaison de la propriété de platitude et de techniques basées sur les modes glissants implique des propriétés de découplage entrées/sorties et une linéarisation dynamique et robuste. Cependant, ces performances sont obtenues au prix de certains inconvénients.

La commande par mode glissant contient un terme discontinu qui peut entraîner un phénomène de broutement ou chattering en anglais. Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont les limitations des actionneurs ou les retards de commutation au niveau de la commande. Cet inconvénient n'altère théoriquement en rien les performances mais il peut se révéler dommageable pour certains composants du système (actionneur, éléments mécaniques,...). Ainsi, les principales contributions sur les commandes par modes glissants au cours de ces dernières années concernent la diminution du chattering.

Pour remédier au problème du broutement, plusieurs méthodes ont été proposées comme la méthode de couche limite qui consiste à remplacer la fonction de commutation par une ap-

proximation continue. Néanmoins, selon [HEDJAR et al., 2002] l'atténuation de phénomènes de broutement par la méthode de couche limite, bien que très efficace, est obtenue au dépend de la robustesse qui s'en trouve ainsi réduite, ceci élimine l'avantage essentiel de l'utilisation de la commande par mode glissant. En plus du problème du broutement, la mise en œuvre de la commande par platitude en boucle fermée a besoin de capteurs permettant de donner à chaque instant les valeurs des sorties plates et ses dérivés. À cause d'absence de capteur adéquats, il arrive souvent que certaines variables d'état d'un système ne soient pas accessibles à la mesure.

Pour cela, nous proposons de combiner la méthode par platitude basée sur le mode glissant avec la méthode de contrôle actif par rejet des perturbations (ADRC) fondée par [Han, 1995]. La méthode ADRC repose sur le bon fonctionnement de l'observateur à état étendu (ESO) qui estime l'état complet du système et un état supplémentaire représentant la somme des incertitudes paramétriques et les perturbations externes connues par la perturbation totale. En effet, cet état étendu estimé en ligne avec l'ESO est utilisé dans le signal de commande afin d'éliminer les perturbations totales agissant sur le système.

L'association de l'ADRC, le mode glissant et la platitude nous permettent d'obtenir une nouvelle commande robuste et lisse. Cette nouvelle commande, notée FSADRC, a pour avantage d'optimiser le nombre de capteurs nécessaires pour mesurer l'état du système, d'éliminer les effets des perturbations totales sur le système et d'atténuer le phénomène de broutement par la méthode de couche limite sans perdre la robustesse obtenue grâce à la discontinuité de la commande par mode glissant.

Dans ce chapitre, nous détaillerons deux stratégies de commandes par platitude robuste. La première est la commande par platitude basée sur le mode glissant, notée FSMC et la deuxième est la commande par platitude basée sur le mode glissant et l'ADRC, notée FSADRC. Ensuite nous appliquons ces deux commandes robustes sur un modèle dynamique du quadrirotor comprenant des incertitudes paramétriques et des perturbations externes et nous interprétons les résultats.

III.2 Synthèse de régulateur robuste par platitude basé sur la commande par mode glissant

La classe des modèles considérés tout le long de ce chapitre est :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{i=m} g_i(x) u_i \quad (\text{III.1})$$

Où $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des commandes. $f(x)$ et $g_i(x)$ sont des champs de vecteur lisse.

Le modèle donné par l'équation (III.1) trouve légitimité du fait que tous les robots mobiles notamment les quadrirotors vérifient cette forme. En tenant compte des incertitudes qui peuvent affecter le système, le modèle donné par l'équation (III.1) prend la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i + \Delta f(x) + \sum_{i=1}^m \Delta g_i(x) u_i \quad (\text{III.2})$$

Avec $\Delta f(x)$, $\Delta g_i(x)$ sont des champs de vecteur qui représentent les paramètres négligés de système.

Soit $F = [F_1, F_2, \dots, F_m]^T \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des sorties plates. Soit $F_d = [F_{d1}, F_{d2}, \dots, F_{dm}]^T$ le vecteur de trajectoire de référence correspond au vecteur de sortie plate F .

L'objectif est de proposer une loi de commande telle que le vecteur de sortie plate F suit parfaitement le vecteur de trajectoire désirée F_d malgré l'existence des incertitudes de modèle.

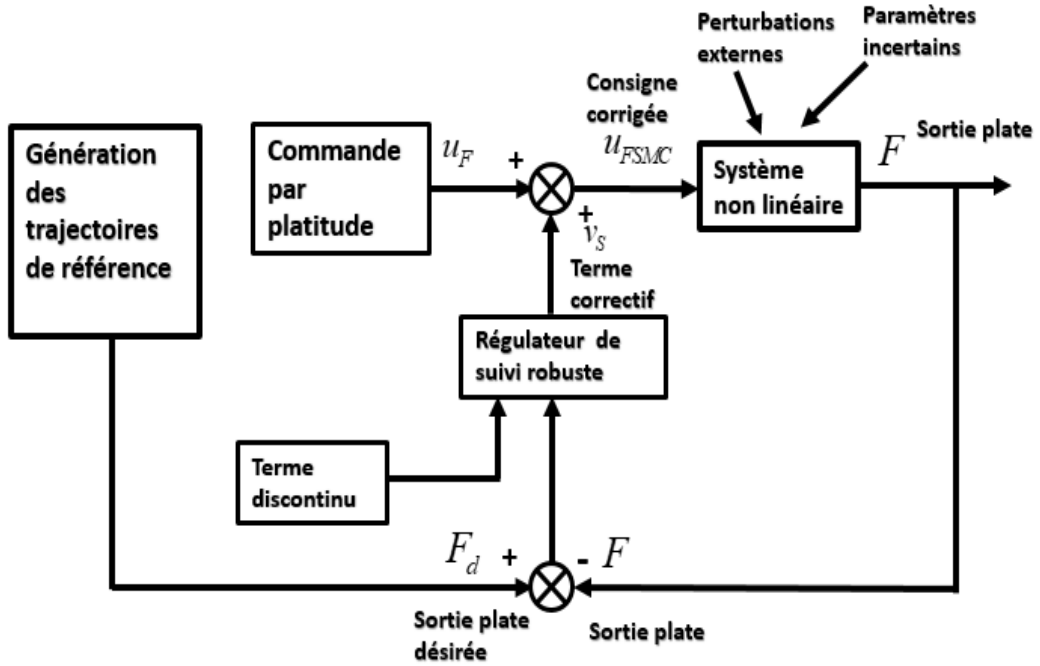


Figure III.1 – Schéma global de la commande FSMC appliquée sur un système non linéaire plat perturbé en boucle fermée

La commande suggérée dans ce paragraphe est décrite par schéma global donné par la figure III.1. Cette commande est composée de deux parties : une partie basée sur la platitude et une partie comportant un régulateur par mode glissant utilisé pour la rétroaction.

Pour calculer la commande par platitude linéarisante, il suffit de dériver successivement les

sorties plates du système certain (III.1) jusqu'à avoir une relation directe entre les commandes et les dérivées des sorties plates. Soit :

$$F^r = A_r(x) + B_r(x)u \quad (\text{III.3})$$

Avec r est défini comme étant la somme de tous les degrés relatifs obtenus et doit être inférieur ou égal à l'ordre du système, $F^r = [F_1^{r_1}, F_2^{r_2}, \dots, F_m^{r_m}]^T$, $A_r(x)$ et $B_r(x)$ sont deux matrices contenant les états nominaux de systèmes et leur dérivé.

Si la matrice de découplage $B_r(x)$ n'est pas singulière, l'expression de la commande par platitude linéarisante u_F est définie par :

$$u_F = B_r^{-1}(x)(F^r - A_r(x)) \quad (\text{III.4})$$

Selon [Slotine et al., 1991], lorsque la consigne est une trajectoire de référence, le vecteur de surface de glissement est défini par la forme suivante :

$$\sigma_r = [\sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \dots, \sigma_{rm}]^T = e_r^{(r-1)} + K_{s(r-2)}e_r^{(r-2)} + \dots + K_{s1}e_r \quad (\text{III.5})$$

Où $K_s = [K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{s(r-2)}]$ est le vecteur des matrices diagonales ($m \times m$) des gains de commande par mode glissant et $e_r = [e_{r1}, e_{r2}, \dots, e_{rm}]^T = [F_1 - F_{d1}, F_2 - F_{d2}, \dots, F_m - F_{dm}]^T$ est le vecteur des erreurs de suivi. Les gains de la commande par mode glissant sont choisis tels que le polynôme caractéristique de l'erreur de suivi soit un polynôme Hurwitz.

Pour déterminer la condition d'attractivité, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_s = 0.5 \sigma_r^2 \quad (\text{III.6})$$

Une condition nécessaire et suffisante, appelée condition d'attractivité, pour que le vecteur de surface de glissement σ_r converge vers 0 est défini par l'inégalité suivante :

$$\sigma_r \dot{\sigma}_r \leq 0 \quad (\text{III.7})$$

Pour vérifier la condition (III.7), il faut que le vecteur de surface de glissement et son dérivé soient de signes contraires tels que :

$$\dot{\sigma}_r = -W_s \operatorname{sgn}(\sigma_r) \quad (\text{III.8})$$

Avec $W_s = [W_{s1}, W_{s2}, \dots, W_{sm}]$ représente le vecteur des gains de commutation et sgn est la fonction signe. La dérivée temporelle de la fonction de surface de glissement est définie par :

$$\dot{\sigma}_r = e_r^{(r)} + K_{s(r-2)}e_r^{(r-1)} + \dots + K_{s1}\dot{e}_r \quad (\text{III.9})$$

D'après les équations (III.8) et (III.9), nous obtenons :

$$e_r^{(r)} + K_{s(r-2)}e_r^{(r-1)} + \dots + K_{s1}\dot{e}_r = -W_s \text{sgn}(\sigma_r) \quad (\text{III.10})$$

On note par v_s le nouveau terme de rétroaction par mode glissant, d'après l'équation (III.10), ce dernier est défini par :

$$v_s = F_d^r - K_{s(r-2)}e_r^{(r-1)} - \dots - K_{s1}\dot{e}_r - W_s \text{sgn}(\sigma_r) \quad (\text{III.11})$$

En remplaçant F^r par v_s dans la commande (III.4), nous obtenons la commande FSMC suivante :

$$u_{FSMC} = B_r^{-1}(x)(F_d^r - K_{s(r-2)}e_r^{(r-1)} - \dots - K_{s1}\dot{e}_r - W_s \text{sgn}(\sigma_r) - A_r(x)) \quad (\text{III.12})$$

Pour atténuer les effets des incertitudes de modèle, généralement dans la littérature, on choisit W_s suffisamment grand. Bien que ce choix permette d'obtenir une convergence en temps fini vers la surface de glissement ainsi que les propriétés de robustesse vis-à-vis des perturbations, il provoque le phénomène de broutement Figure III.2. Pour réduire ce phénomène, nous

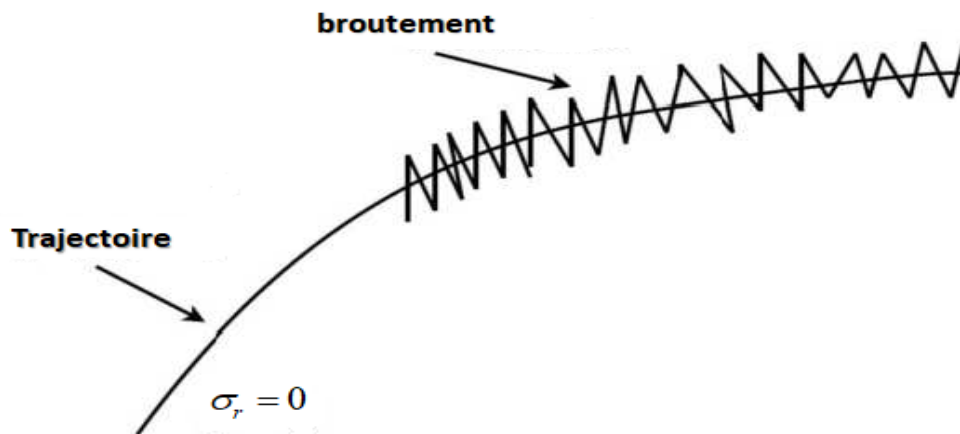


Figure III.2 – Le phénomène de broutement.

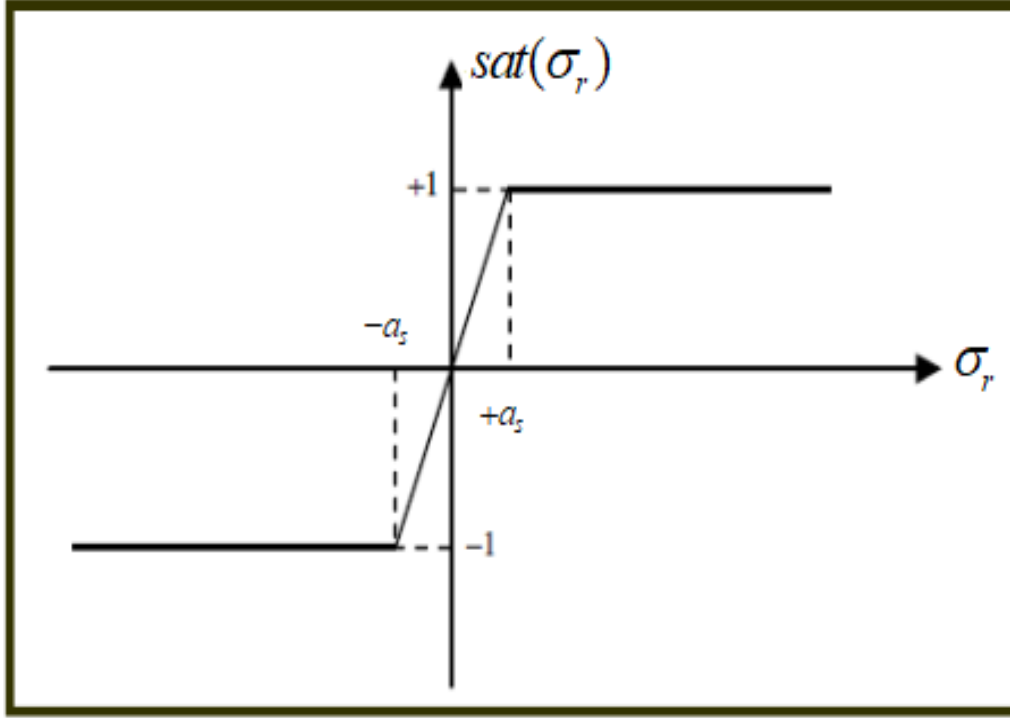


Figure III.3 – Fonction saturation

remplaçons la fonction signe par la fonction saturation Figure III.3 définie telle que :

$$Sat(\sigma_r) \begin{cases} \frac{\sigma_r}{a_s} & si \quad |\sigma_r| \leq a_s \\ sgn(\sigma_r) & si \quad |\sigma_r| > a_s \end{cases} \quad (III.13)$$

Avec a_s est la largeur du seuil de la fonction de saturation.

Plus la variable a_s est grande, plus l'approximation diverge de la fonction signe, et donc c'est meilleur pour la réduction du chattering, mais détriment de la conservation de la robustesse.

III.3 Synthèse de régulateur robuste par platitude basé sur la commande par mode glissant et la commande par rejet actif des perturbations

Pour compenser la réduction de robustesse dû par la fonction saturation, nous allons combiner la commande FSMC avec la méthode de commande active par rejet des perturbations (ADRC). Le schéma global de cette méthode sera donné comme l'indique la figure

(III.4). En utilisant la platitude, le système non linéaire est transformé en un système linéaire

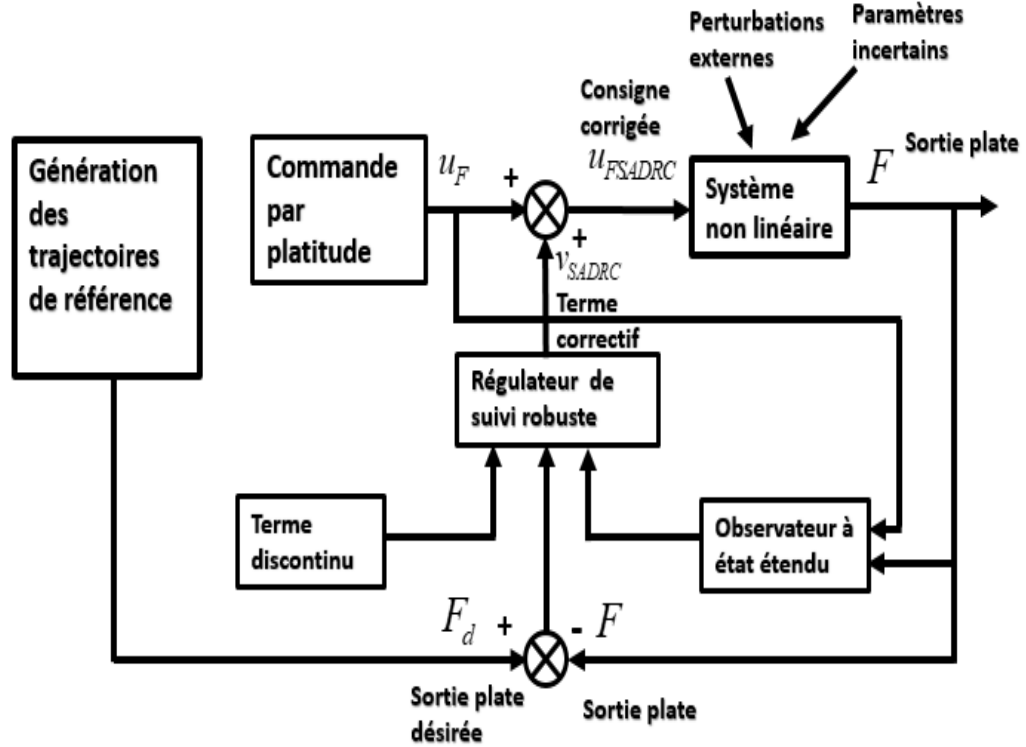


Figure III.4 – Schéma global de la commande FSADRC appliquée sur un système non linéaire plat perturbé en boucle fermée

commandable sous la forme de Brunovsky, pour lequel il est plus facile de créer un bouclage de rétroaction. Puisque les systèmes non linéaires sont soumis à des incertitudes, les systèmes linéarisés obtenus sont affectés par des perturbations appelées perturbations totales qui regroupent les effets des paramètres incertains et des perturbations externes sur le modèle de système non linéaire. Les états des systèmes linéarisés et les perturbations totales sont estimés par un observateur à état étendu. En se basant sur les estimations de l'observateur, les sorties plates et leurs dérivées sont remplacées par leurs estimations dans le bouclage v_s . D'autre part, un nouveau terme est ajouté à ce bouclage afin de compenser l'effet des perturbations totales.

Lorsque nous dérivons successivement les sorties plates du système incertain (III.2), la relation directe entre les commandes et les dérivées des sorties plates données par l'équation (III.3) sera définie telle que :

$$F^r = A_r(x) + B_r(x)u + C_r(x) + D_r(x)u \quad (\text{III.14})$$

Avec $C_r(x)$ et $D_r(x)$ sont deux matrices contenant les éléments des états nominaux, les paramètres négligés et leurs dérivées.

En remplaçant la commande par platitude en boucle ouverte donnée par l'équation (III.4) dans le système (III.14), nous obtenons le système linéarisé incertain suivant :

$$F^r = v + \eta \quad (\text{III.15})$$

Avec

$$\eta = D_r(x)B_r(x)^{-1}v + C_r(x) - D_r(x)B_r(x)^{-1}A_r(x) \quad (\text{III.16})$$

où $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ représente le vecteur de bouclage et $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m]^T$ représente le vecteur des incertitudes totales contenant les paramètres incertains et les perturbations externes affectant le système linéarisé.

Soit le vecteur d'état étendu défini par chaque sortie plate et ses dérivées augmentées par la perturbation totale :

$$x_e = [x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{e(r)}, x_{e(r+1)}]^T = [F, \dot{F}, \dots, F^r, \eta]^T \quad (\text{III.17})$$

L'équation (III.15) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{e1} = x_{e2} \\ \dot{x}_{e2} = x_{e3} \\ \vdots \\ \dot{x}_{er} = x_{e(r+1)} + v \\ \dot{x}_{e(r+1)} = \dot{\eta} \\ y_e = x_{e1} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

La forme matricielle du système (III.18) est donnée par :

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e + E_e \quad (\text{III.19})$$

Avec

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ v \\ 0 \end{bmatrix}_{(r+1) \times (1)} \quad E_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}_{(r+1) \times (1)}$$

L'observateur à état étendu pour le système (III.19) est construit sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}_e = A_e \hat{x}_e + B_e + L_g C_e (x_e - \hat{x}_e) \quad (\text{III.20})$$

Avec $\hat{x}_e = [\hat{x}_{e1}, \hat{x}_{e2}, \dots, \hat{x}_{e(r)}, \hat{x}_{e(r+1)}]^T$, $C_e = [1, 0, \dots, 0]$ de dimension $(1) \times (r+1)$ et $L_g = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(r+1)}]^T$ représente le vecteur des matrices diagonales des gains de l'observateur. D'après l'équation (III.19) et (III.20), la dynamique d'erreur de l'observateur à état étendu est définie par :

$$\dot{\hat{e}}_e = \hat{H}_e \hat{e}_e + E_e \quad (\text{III.21})$$

Avec

$$\hat{H}_e = A_e - L_g C_e, \hat{e}_e = [\hat{e}_{e1}, \hat{e}_{e2}, \dots, \hat{e}_{e(r)}, \hat{e}_{e(r+1)}]^T = [x_{e1} - \hat{x}_{e1}, x_{e2} - \hat{x}_{e2}, \dots, x_{er} - \hat{x}_{er}, x_{e(r+1)} - \hat{x}_{e(r+1)}]^T.$$

D'après Yang [Yang & Huang, 2009], si les gains d'observateur sont choisis tels que la matrice $\hat{H}_e$ est de Hurwitz et si la perturbation totale η ou sa dérivée $\dot{\eta}$ est bornée alors la dynamique de l'erreur de l'observateur à état étendu est stable au sens EBSB (Entrée Bornée Sortie Bornée). Afin d'assurer une stabilité asymptotique pour l'erreur (III.21), il faut que la perturbation totale soit constante ou son taux de variation négligable.

Une fois les perturbations totales sont estimées, nous allons pouvoir les rejeter en ajoutant un terme de compensation au bouclage v_s , d'où le terme (*disturbance rejection*) dans le nom ADRC. En se basant sur les estimations d'observateur à état étendu donné par l'équation (III.20), nous proposons un terme de bouclage robuste v_{SADRC} qui combine les avantages de l'ADRC et le mode glissant, défini tel que :

$$v_{SADRC} = F_d^r - K_{s(r-2)} \hat{e}_r^{r-1} - \dots - K_{s1} \dot{\hat{e}}_r - W_s \text{sgn}(\hat{\sigma}_r) - \hat{\eta} \quad (\text{III.22})$$

Avec $\hat{e}_r = [\hat{e}_{r1}, \hat{e}_{r2}, \dots, \hat{e}_{rm}]^T = [\hat{F}_1 - F_{d1}, \hat{F}_2 - F_{d2}, \dots, \hat{F}_m - F_{dm}]^T$, $\hat{\sigma}_r = \hat{e}_r^{(r-1)} + K_{s(r-2)} \hat{e}_r^{(r-2)} + \dots + K_{s1} \hat{e}_r$.

En remplaçant v_s par v_{SADRC} dans la commande (III.12), nous obtenons la commande par platitude basée sur l'ADRC et le mode glissant, notée par $FSADRC$, suivante :

$$u_{FSADRC} = B_r^{-1}(x)(F_d^r - K_{s(r-2)} \hat{e}_r^{r-1} - \dots - K_{s1} \dot{\hat{e}}_r - W_s \text{sgn}(\hat{\sigma}_r) - \hat{\eta} - A_r(x)) \quad (\text{III.23})$$

Étude de stabilité :

Soit la fonction de Lyapunov :

$$V_o = \frac{1}{2} \sigma_r^2 \quad (\text{III.24})$$

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est définie par :

$$\dot{V}_o = \sigma_r \dot{\sigma}_r = \sigma_r (F^r - F_d^r + K_{s(r-2)} e_r^{(r-1)} + \dots + K_{s1} \dot{e}_r) \quad (\text{III.25})$$

En remplaçant F^r par son expression définie par l'équation (III.15), nous obtenons

$$\dot{V}_o = \sigma_r (v + \eta - F_d^r + K_{s(r-2)} e_r^{(r-1)} + \dots + K_{s1} \dot{e}_r) \quad (\text{III.26})$$

En remplaçant v par v_{SADRC} dans l'équation (III.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= \sigma_r (F_d^r - K_{s(r-2)} \hat{e}_r^{r-1} - \dots - K_{s1} \dot{\hat{e}}_r - W_s \text{sgn}(\hat{\sigma}_r) - \hat{\eta} + \eta - F_d^r + K_{s(r-2)} e_r^{(r-1)} + \dots + K_{s1} \dot{e}_r) \\ &= \sigma_r (K_{s(r-2)} (e_r^{(r-1)} - \hat{e}_r^{(r-1)}) + \dots + K_{s1} (\dot{e}_r - \dot{\hat{e}}_r) + \eta - \hat{\eta} - W_s \text{sgn}(\hat{\sigma}_r)) \\ &= \sigma_r (K_{s(r-2)} (F^{(r-1)} - \hat{F}^{(r-1)}) + \dots + K_{s1} (\dot{F} - \dot{\hat{F}}) + \eta - \hat{\eta} - W_s \text{sgn}(\hat{\sigma}_r)) \\ &= -(\hat{\sigma}_r + \sigma_r - \hat{\sigma}_r) W_s \text{sgn}(\hat{\sigma}_r) + (\hat{\sigma}_r + \sigma_r - \hat{\sigma}_r) (K_{s(r-2)} (F^{(r-1)} - \hat{F}^{(r-1)}) + \dots \\ &\quad + K_{s1} (\dot{F} - \dot{\hat{F}}) + \eta - \hat{\eta}) \\ &\leq -\hat{\sigma}_r W_s \text{sgn}(\hat{\sigma}_r) + W_s |\sigma_r - \hat{\sigma}_r| + (|\hat{\sigma}_r| + |\sigma_r - \hat{\sigma}_r|) (K_{s(r-2)} |F^{(r-1)} - \hat{F}^{(r-1)}| + \dots \\ &\quad + K_{s1} |\dot{F} - \dot{\hat{F}}| + |\eta - \hat{\eta}|) \\ &\leq -W_s |\hat{\sigma}_r| + W_s |\sigma_r - \hat{\sigma}_r| + (|\hat{\sigma}_r| + |\sigma_r - \hat{\sigma}_r|) (K_{s(r-2)} |F^{(r-1)} - \hat{F}^{(r-1)}| + \dots \\ &\quad + K_{s1} |\dot{F} - \dot{\hat{F}}| + |\eta - \hat{\eta}|) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Vue la convergence de l'observateur par état étendu, les fonction $\dot{F} \rightarrow \dot{\hat{F}}, \dots, F^{(r-1)} \rightarrow \hat{F}^{(r-1)}, \eta \rightarrow \hat{\eta}$ et $\hat{\sigma}_r \rightarrow \sigma_r$. Par conséquent $\dot{V}_o < -W_s |\hat{\sigma}_r| < 0$

III.4 Étude par simulation

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la commande par platitude basée sur le mode glissant, noté FSMC et la commande par platitude basée sur le mode glissant et l'ADRC, noté FSADRC, sur un modèle de quadrirotor incertain en comparant les résultats obtenus.

III.4.1 Conception de la commande par platitude basée sur le mode glissant pour un modèle incertain de quadrirotor

Dans la littérature, beaucoup de chercheurs [Aguilar-Ibáñez et al., 2012, Faessler et al., 2017, Fethalla et al., 2018] ont choisi le modèle donné par l'équation (III.28) pour décrire le comportement de quadrirotor.

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_{q1}}{m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \\ \ddot{y} = \frac{u_{q1}}{m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) \\ \ddot{z} = \frac{u_{q1}}{m}(\cos \theta \cos \phi) - g \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_y}{I_x}\right) + \frac{l_q}{I_x}u_{q\phi} \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right) + \frac{l_q}{I_y}u_{q\theta} \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_y - I_x}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}u_{q\psi} \\ Y_q = [x, y, z, \psi]^T \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Quelle que soit la méthode utilisée pour obtenir un modèle mathématique de quadrirotor, il existe toujours un compromis entre la simplicité du modèle et son aptitude à décrire l'ensemble des phénomènes qui le caractérise. Ainsi, un nouveau modèle de quadrirotor qui prend en compte les incertitudes paramétriques et les perturbations externes doit être défini. Soit Δ_m et Δl_q les variations paramétriques de la masse m et la distance entre le centre du quadrirotor et l'axe de rotation du rotor l_q . Soit $d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta$ et d_ψ les perturbations externes affectant les positions $[x, y, z]$ et les angles d'Euler $[\phi, \theta, \psi]$ de quadrirotor. Le modèle de quadrirotor infecté par les incertitudes paramétriques et les perturbations externes est décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_{q1}}{m+\Delta_m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) + d_x \\ \ddot{y} = \frac{u_{q1}}{m+\Delta_m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) + d_y \\ \ddot{z} = \frac{u_{q1}}{m+\Delta_m}(\cos \theta \cos \phi) - g + d_z \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_y}{I_x}\right) + \frac{l_q + \Delta l_q}{I_x}u_{q\phi} + d_\phi \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right) + \frac{l_q + \Delta l_q}{I_y}u_{q\theta} + d_\theta \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_y - I_x}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}u_{q\psi} + d_\psi \\ Y_q = [x, y, z, \psi]^T \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

La dynamique de la position x peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{u_{q1}}{m + \Delta_m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) + d_x = \\ &= \frac{u_{q1}}{m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) - \frac{u_{q1}\Delta_m}{m(m + \Delta_m)}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) + d_x\end{aligned}\quad (\text{III.30})$$

La dynamique de la position y peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \frac{u_{q1}}{m + \Delta_m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) + d_y = \\ &= \frac{u_{q1}}{m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) - \frac{u_{q1}\Delta_m}{m(m + \Delta_m)}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) + d_y\end{aligned}\quad (\text{III.31})$$

La dynamique de la position z peut être définie comme suit :

$$\ddot{z} = \cos(\theta)\cos(\phi)\frac{u_{q1}}{m + \Delta m} - g + d_z = \frac{u_{q1}}{m}\cos(\theta)\cos(\phi) - g + d_z - \cos(\theta)\cos(\phi)\frac{u_{q1}\Delta m}{m(m + \Delta m)}\quad (\text{III.32})$$

En se basant sur les équations (III.30), (III.31), (III.32), le modèle (III.29) peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_{q1}}{m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) - (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)\frac{u_{q1}\Delta m}{m(m + \Delta m)} + d_x \\ \ddot{y} = \frac{u_{q1}}{m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) - (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi)\frac{u_{q1}\Delta m}{m(m + \Delta m)} + d_y \\ \ddot{z} = \frac{u_{q1}}{m}(\cos \theta \cos \phi) - g + (-\cos \theta \cos \phi)\frac{u_{q1}\Delta m}{m(m + \Delta m)} + d_z \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_y}{I_x}\right) + \frac{l_q}{I_x}u_{q\phi} + \frac{\Delta l_q}{I_x}u_{q\phi} + d_\phi \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right) + \frac{l_q}{I_y}u_{q\theta} + \frac{\Delta l_q}{I_y}u_{q\theta} + d_\theta \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_y - I_x}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}u_{q\psi} + d_\psi \\ Y_q = [x, y, z, \psi]^T \end{cases}\quad (\text{III.33})$$

Dans ce paragraphe, nous allons concevoir la commande par platitude basée sur le mode glissant pour le modèle incertain de quadrirotor donné par l'équation (III.33).

Afin de déterminer la commande par platitude en boucle ouverte, nous considérons le modèle de quadrirotor donné par l'équation (III.28). Ce dernier est différentiellement plat et admet le vecteur $F_q = [F_{q11}, F_{q21}, F_{q31}, F_{q41}]^T = [x, y, z, \psi]^T$ comme sortie plate. Alors, il est possible

d'exprimer successivement toutes les variables d'état et de commande de quadrirotor en fonctions des sorties plates et de leurs dérivées comme suit :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\ddot{F}_{q11} \cos(F_{q41}) + \sin(F_{q41}) \ddot{F}_{q21}}{g + \ddot{F}_{q31}} \right) \quad (\text{III.34})$$

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{\sin(F_{q41}) \ddot{F}_{q11} - \cos(F_{q41}) \ddot{F}_{q21}}{\sqrt{\ddot{F}_{q11}^2 + \ddot{F}_{q21}^2 + (g + \ddot{F}_{q31})^2}} \right) \quad (\text{III.35})$$

$$u_{q1} = m \sqrt{\ddot{F}_{q11}^2 + \ddot{F}_{q21}^2 + (g + \ddot{F}_{q31})^2} \quad (\text{III.36})$$

$$u_{q\theta} = \frac{I_y}{l_q} \ddot{\theta} - \dot{\phi} \dot{F}_{q41} \frac{I_z - I_x}{l_q} \quad (\text{III.37})$$

$$u_{q\phi} = \frac{I_x}{l_q} \ddot{\phi} - \dot{\theta} \dot{F}_{q41} \frac{I_z - I_y}{l_q} \quad (\text{III.38})$$

$$u_{q\psi} = I_z \ddot{F}_{q41} - \dot{\phi} \dot{\theta} (I_y - I_x) \quad (\text{III.39})$$

Les commandes $u_{q\phi}$ et $u_{q\theta}$ dépendent de dérivées quatrièmes des sorties plates F_{q11} , F_{q21} et F_{q31} . Cependant, la commande u_{q1} ne dépend que des dérivées temporelles de second ordre de F_{q11} , F_{q21} et F_{q31} . Ce problème expose évidemment un obstacle pour trouver une relation directe entre le vecteur d'entrée de commande $U_q = [u_{q1}, u_{q\phi}, u_{q\theta}, u_{q\psi}]^T$ et les dérivées des sorties plates F_{q11} , F_{q21} , F_{q31} et F_{q41} . Par conséquent, la réalisation d'une linéarisation par bouclage statique pour le système non linéaire de quadrirotor sera impossible. Pour surmonter ce problème, les commandes u_{q1} et $\dot{u}_{q1}$ sont considérées comme un état supplémentaire pour le modèle de quadrirotor (III.28). Dans ce cas, les nouveaux vecteurs d'état et de commande pour le modèle de quadrirotor (III.28) sont définis par $X_q = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, u_{q1}, \dot{u}_{q1}]^T$ et $U_q = [\ddot{u}_{q1}, u_{q\phi}, u_{q\theta}, u_{q\psi}]^T$. On note par $J_\theta = \frac{(I_x - I_z)}{I_y}$, $J_\phi = \frac{(I_z - I_y)}{I_x}$, $J_\psi = \frac{(I_y - I_x)}{I_z}$.

Nous dérivons F_{q11} , F_{q21} , F_{q31} et F_{q41} jusqu'à apparaître les entrées de commande $\ddot{u}_{q1}$, $u_{q\phi}$, $u_{q\theta}$ et $u_{q\psi}$. Ainsi, nous constatons que le terme de la commande de quadrirotor n'apparaît que dans la dérivée quatrième des sorties plates. Soit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\ddot{F}}_{q11} \\ \ddot{\ddot{F}}_{q21} \\ \ddot{\ddot{F}}_{q31} \\ \ddot{\ddot{F}}_{q41} \end{bmatrix} = A_q + B_q \begin{bmatrix} \ddot{u}_{q1} \\ u_{q\phi} \\ u_{q\theta} \\ u_{q\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

$$\text{avec } A_q = \begin{bmatrix} f_{qx} \\ f_{qy} \\ f_{qz} \\ f_{q\psi} \end{bmatrix}, B_q = \begin{bmatrix} g_{qx1} & g_{qx2} & g_{qx3} & g_{qx4} \\ g_{qy1} & g_{qy2} & g_{qy3} & g_{qy4} \\ g_{qz1} & g_{qz2} & g_{qz3} & g_{qz4} \\ g_{q\psi1} & g_{q\psi2} & g_{q\psi3} & g_{q\psi4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{qx} = \frac{u_{q1}}{m} & [-\dot{\psi}^2 c_\phi s_\theta c_\psi - \dot{\psi} \dot{\theta} s_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\psi} \dot{\phi} s_\psi s_\theta s_\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} s_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\theta}^2 c_\psi s_\theta c_\phi - \dot{\phi} \dot{\theta} c_\psi c_\theta s_\phi + \dot{\phi} \dot{\psi} s_\psi s_\theta s_\phi - \\ & \dot{\phi} \dot{\theta} c_\psi c_\theta s_\phi - \dot{\phi}^2 c_\psi s_\theta c_\phi - \dot{\psi}^2 s_\psi s_\phi + 2\dot{\psi} \dot{\phi} c_\psi c_\phi - \dot{\phi}^2 s_\psi s_\phi + J_\theta \dot{\psi} \dot{\phi} c_\psi c_\phi c_\theta + J_\phi \dot{\psi} \dot{\theta} (-c_\psi s_\phi s_\theta + c_\phi s_\psi) + \\ & J_\psi \dot{\theta} \dot{\phi} (-s_\psi c_\phi s_\theta + s_\phi c_\psi)] + \frac{2\dot{u}_{q1}}{m} [-\dot{\psi} s_\psi s_\theta c_\phi + \dot{\theta} c_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\phi} c_\psi s_\theta s_\phi + \dot{\psi} c_\psi s_\phi + \dot{\phi} s_\psi c_\phi] \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

$$\begin{aligned} f_{qy} = \frac{u_{q1}}{m} & [-\dot{\psi}^2 s_\psi s_\theta c_\phi + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\psi} \dot{\phi} c_\psi s_\theta s_\phi + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\theta}^2 s_\psi s_\theta c_\phi - \dot{\phi} \dot{\theta} s_\psi c_\theta s_\phi - \dot{\phi} \dot{\psi} c_\psi s_\theta s_\phi - \\ & \dot{\phi} \dot{\theta} s_\psi c_\theta s_\phi - \dot{\phi}^2 s_\psi s_\theta c_\phi + \dot{\psi}^2 c_\psi s_\phi + 2\dot{\psi} \dot{\phi} s_\psi c_\phi + \dot{\phi}^2 c_\psi s_\phi + J_\theta \dot{\psi} \dot{\phi} s_\psi c_\phi c_\theta - J_\phi \dot{\psi} \dot{\theta} (s_\psi s_\phi s_\theta + c_\phi c_\psi) + \\ & J_\psi \dot{\theta} \dot{\phi} (c_\psi c_\phi s_\theta + s_\phi s_\psi)] + \frac{2\dot{u}_{q1}}{m} [\dot{\psi} c_\psi s_\theta c_\phi + \dot{\theta} s_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\phi} s_\psi s_\theta s_\phi + \dot{\psi} s_\psi s_\phi - \dot{\phi} c_\psi c_\phi] \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

$$f_{qz} = \frac{u_{q1}}{m} [-\dot{\theta}^2 c_\phi c_\theta - \dot{\phi}^2 c_\phi c_\theta + 2\dot{\theta} \dot{\phi} s_\theta s_\phi - J_\theta \dot{\phi} \dot{\psi} s_\theta c_\phi - J_\phi \dot{\theta} \dot{\psi} c_\theta s_\phi] + \frac{2\dot{u}_{q1}}{m} [-\dot{\theta} s_\theta c_\phi - \dot{\phi} c_\theta s_\phi] \quad (\text{III.43})$$

$$f_{q\psi} = J_\psi \dot{\theta} \dot{\phi}, g_{qx1} = \frac{1}{m} [c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi], g_{qx2} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_x} [-c_\psi s_\theta s_\phi + s_\psi c_\phi], g_{qx3} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_y} [c_\psi s_\theta c_\phi], \quad (\text{III.44})$$

$$g_{x4} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_z} [-s_\psi s_\theta c_\phi + c_\psi s_\phi], g_{qy1} = \frac{1}{m} [s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi], g_{qy2} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_x} [-s_\psi s_\theta s_\phi - c_\psi c_\phi] \quad (\text{III.45})$$

$$g_{qy3} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_y} [s_\psi c_\theta c_\phi], g_{qy4} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_z} [c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi], g_{qz1} = \frac{1}{m} [c_\theta c_\phi], g_{qz2} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_x} [-c_\theta s_\phi] \quad (\text{III.46})$$

$$g_{qz3} = \frac{l_q u_{q1}}{m I_y} [-s_\theta c_\phi], g_{qz4} = g_{\psi1} = g_{\psi2} = g_{\psi3} = 0, g_{\psi4} = \frac{1}{I_z}, \quad (\text{III.47})$$

Selon Fang [Fang et al., 2008], la matrice B_q n'est pas singulière si les conditions suivantes sont respectées :

Hypothèse III.1 *La commande de l'altitude doit être stictement positive $u_{q1} > 0$*

Hypothèse III.2 *Les Angles d'Euler sont définis tels que :*

$$-90^\circ < \theta < 90^\circ, -90^\circ < \phi < 90^\circ, -90^\circ < \psi < 90^\circ \quad (\text{III.48})$$

D'après l'équation (III.40), nous pouvons déduire la loi de commande par platitude en boucle ouverte pour le quadrirotor, noté U_{Fq} , comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_{Fq1} \\ u_{Fq\phi} \\ u_{Fq\theta} \\ u_{Fq\psi} \end{bmatrix} = B_q^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{F}_{q11} \\ \ddot{F}_{q21} \\ \ddot{F}_{q31} \\ \ddot{F}_{q41} \end{bmatrix} - B_q^{-1} A_q \quad (\text{III.49})$$

On note par $F_{qd} = [F_{qdx}, F_{qdy}, F_{qdz}, F_{qd\psi}]^T$ le vecteur de trajectoires de référence pour le vecteur des sorties plates $F_q = [F_{q11}, F_{q21}, F_{q31}, F_{q41}]^T$.

On note par $\sigma_q = [\sigma_{F_{q11}}, \sigma_{F_{q21}}, \sigma_{F_{q31}}, \sigma_{F_{q41}}]^T$ le vecteur de surface de glissement pour le quadrirotor. Les surfaces de glissement $\sigma_{F_{q11}}$, $\sigma_{F_{q21}}$, $\sigma_{F_{q31}}$ et $\sigma_{F_{q41}}$ sont choisies comme des fonctions des erreurs de poursuite telles que :

$$\sigma_{F_{q11}} = \ddot{e}_{q1} + \beta_{x3}\ddot{e}_{q1} + \beta_{x2}\dot{e}_{q1} + \beta_{x1}e_{q1} \quad (\text{III.50})$$

$$\sigma_{F_{q21}} = \ddot{e}_{q2} + \beta_{y3}\ddot{e}_{q2} + \beta_{y2}\dot{e}_{q2} + \beta_{y1}e_{q2} \quad (\text{III.51})$$

$$\sigma_{F_{q31}} = \ddot{e}_{q3} + \beta_{z3}\ddot{e}_{q3} + \beta_{z2}\dot{e}_{q3} + \beta_{z1}e_{q3} \quad (\text{III.52})$$

$$\sigma_{F_{q41}} = \dot{e}_{q4} + \beta_{\psi1}e_{q4} \quad (\text{III.53})$$

Avec $e_{q1} = F_{q11} - F_{qdx}$, $e_{q2} = F_{q21} - F_{qdy}$, $e_{q3} = F_{q31} - F_{qdz}$ et $e_{q4} = F_{q41} - F_{qd\psi}$. $\beta_{x1}, \beta_{x2}, \beta_{x3}, \beta_{y1}, \beta_{y2}, \beta_{y3}, \beta_{z1}, \beta_{z2}, \beta_{z3}$ et $\beta_{\psi1}$ sont les gains de la commande FSMC de quadrirotor. Ces gains sont choisis tels que :

$$s^3 + \beta_{x3}s^2 + \beta_{x2}s + \beta_{x1} = (s + \omega_{qxs})^3 \quad (\text{III.54})$$

$$s^3 + \beta_{y3}s^2 + \beta_{y2}s + \beta_{y1} = (s + \omega_{qys})^3 \quad (\text{III.55})$$

$$s^3 + \beta_{z3}s^2 + \beta_{z2}s + \beta_{z1} = (s + \omega_{qzs})^3 \quad (\text{III.56})$$

$$s + \beta_{\psi 1} = (s + \omega_{q\psi s}) \quad (\text{III.57})$$

Où $\omega_{cqs} = [\omega_{qxs}, \omega_{qys}, \omega_{qzs}, \omega_{q\psi s}]$ représente le vecteur des paramètres de la commande FSMC de quadrirotor. Cette méthode de sélection conduit à ce que toutes les racines du polynôme caractéristique de l'erreur de poursuite soient placées à $-\omega_{cqs}$. Ainsi ω_{cqs} devient le seul paramètre de réglage de la commande. Par identification, nous pouvons déduire les gains de la commande FSMC pour le quadrirotor comme suit :

$$\begin{aligned} B_{x1} &= \omega_{qxs}^3, B_{y1} = \omega_{qys}^3, B_{z1} = \omega_{qzs}^3, B_{x2} = 3\omega_{qxs}^2, B_{y2} = 3\omega_{qys}^2, \\ B_{z2} &= 3\omega_{qzs}^2, B_{x3} = 3\omega_{qxs}, B_{y3} = 3\omega_{qys}, B_{z3} = 3\omega_{qzs}, B_{\psi 1} = \omega_{q\psi s} \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Afin de rendre la surface de glissement $\sigma_q = 0$ attractive, cette dernière est obligée de satisfaire la dynamique suivante :

$$\dot{\sigma}_q = -W_{sqi} \text{sgn}(\sigma_q), i = 1..4 \quad (\text{III.59})$$

Avec W_{sqi} , $i = 1..4$, représentent les gains de commutation de la commande FSMC pour le quadrirotor. D'après les équations (III.50-III.53) et (III.59), nous obtenons :

$$-W_{sq1} \text{sign}(\sigma_{F_{q11}}) = \ddot{\ddot{e}}_{q1} + \beta_{x3} \ddot{e}_{q1} + \beta_{x2} \dot{e}_{q1} + \beta_{x1} \dot{e}_{q1} \quad (\text{III.60})$$

$$-W_{sq2} \text{sign}(\sigma_{F_{q21}}) = \ddot{\ddot{e}}_{q2} + \beta_{y3} \ddot{e}_{q2} + \beta_{y2} \dot{e}_{q2} + \beta_{y1} \dot{e}_{q2} \quad (\text{III.61})$$

$$-W_{sq3} \text{sign}(\sigma_{F_{q31}}) = \ddot{\ddot{e}}_{q3} + \beta_{z3} \ddot{e}_{q3} + \beta_{z2} \dot{e}_{q3} + \beta_{z1} \dot{e}_{q3} \quad (\text{III.62})$$

$$-W_{sq4} \text{sign}(\sigma_{F_{q41}}) = \ddot{e}_{q4} + \beta_{\psi 1} \dot{e}_{q4} \quad (\text{III.63})$$

D'après les équations (III.60-III.63), nous obtenons les bouclages de stabilisation basés sur le mode glissant comme suit :

$$v_{qxs} = \ddot{\ddot{F}}_{q11} = \ddot{\ddot{F}}_{qdx} - \beta_{x3} \ddot{e}_{q1} - \beta_{x2} \dot{e}_{q1} - \beta_{x1} \dot{e}_{q1} - W_{sq1} \text{sgn}(\sigma_{F_{q11}}) \quad (\text{III.64})$$

$$v_{qys} = \ddot{\ddot{F}}_{q21} = \ddot{\ddot{F}}_{qdy} - \beta_{y3} \ddot{e}_{q2} - \beta_{y2} \dot{e}_{q2} - \beta_{y1} \dot{e}_{q2} - W_{sq2} \text{sgn}(\sigma_{F_{q21}}) \quad (\text{III.65})$$

$$v_{qzs} = \ddot{\ddot{F}}_{q31} = \ddot{\ddot{F}}_{qdz} - \beta_{z3} \ddot{e}_{q3} - \beta_{z2} \dot{e}_{q3} - \beta_{z1} \dot{e}_{q3} - W_{sq3} \text{sgn}(\sigma_{F_{q31}}) \quad (\text{III.66})$$

$$v_{q\psi s} = \ddot{\ddot{F}}_{q\psi s} = \ddot{\ddot{F}}_{qd\psi} - \beta_{\psi 1} \dot{e}_{q4} - W_{sq4} \text{sgn}(\sigma_{F_{q41}}) \quad (\text{III.67})$$

En remplaçant $\ddot{\ddot{F}}_{q11}$, $\ddot{\ddot{F}}_{q21}$, $\ddot{\ddot{F}}_{q31}$ et $\ddot{\ddot{F}}_{q41}$ par les bouclages donnés par les équations (III.64-III.67) dans la commande par platitude (III.49), nous obtenons la commande FSMC appliquée sur le quadrirotor comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_{FSMCq1} \\ u_{FSMCq\phi} \\ u_{FSMCq\theta} \\ u_{FSMCq\psi} \end{bmatrix} = B_q^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{F}_{qdx} - \beta_{x3}\ddot{e}_{q1} - \beta_{x2}\ddot{e}_{q1} - \beta_{x1}\dot{e}_{q1} - W_{sq1}sgn(\sigma_{F_{q11}}) \\ \ddot{F}_{qdy} - \beta_{y3}\ddot{e}_{q2} - \beta_{y2}\ddot{e}_{q2} - \beta_{y1}\dot{e}_{q2} - W_{sq2}sgn(\sigma_{F_{q211}}) \\ \ddot{F}_{qdz} - \beta_{z3}\ddot{e}_{q3} - \beta_{z2}\ddot{e}_{q3} - \beta_{z1}\dot{e}_{q3} - W_{sq3}sgn(\sigma_{F_{q31}}) \\ \ddot{F}_{q\psi d} - \beta_{\psi1}\dot{e}_{q4} - W_{sq4}sgn(\sigma_{F_{q41}}) \end{bmatrix} - B_q^{-1}A_q \quad (III.68)$$

La simulation de la commande FSMC appliquée sur le modèle du quadrirotor (III.33) est faite par les données et les paramètres suivants :

Les paramètres de quadrirotor :

$m = 0.5kg$, $I_x = 0.002 kg.m^2$, $I_y = 0.002 kg.m^2$, $I_z = 0.004 kg.m^2$, $l_q = 0.3 m$, $g = 9.81 m.s^{-2}$.

Les données de la commande FSMC :

Les valeurs des paramètres pour la commande FSMC sont choisies telles que: $\omega_{qxs} = \omega_{qys} = \omega_{qzs} = 2 rad/s$, et $\omega_{q\psi s} = 5 rad/s$. Alors les valeurs des gains de la commande FSMC de quadrirotor sont déduites selon les équations (III.58) comme suit : $\beta_{x1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = 8$, $\beta_{x2} = \beta_{y2} = \beta_{z2} = 12$, $\beta_{x3} = \beta_{y3} = \beta_{z3} = 6$, $\beta_{\psi1} = 5$. Les valeurs des gains de commutation sont choisies telles que: $W_{sq1} = W_{sq2} = W_{sq3} = 20$, $W_{sq4} = 10$.

La simulation est réalisée avec une trajectoire hélicoïdale définie comme suit :

$$F_{qdx} = \cos(t), F_{qdy} = \sin(t), F_{qdz} = 0.5t, F_{qd\psi} = 1.7 + 0.8t \quad (III.69)$$

Dans cette simulation, nous considérons que le quadrirotor part d'une condition initiale incertaine $X_q(0) = [2, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, -0.1, 0, 0, 0]$ et que la variation paramétrique de m et de l_q est de 50 %. En plus, nous supposons que le quadrirotor est soumis à des rafales de vent définies selon [Fethalla et al., 2018] comme suit :

$$d_x = d_y = 1.5 + 2.5\sin(4t), d_z = 1.5 \quad (III.70)$$

$$d_\phi = 2.5\sin(4t), d_\theta = d_\psi = \sin(0.1t) \quad (III.71)$$

La figure III.5 présente la commande FSMC appliquée au modèle incertain de quadrirotor. La figure III.6 montre les résultats de la simulation de suivi du quadrirotor en 3D. Les figures III.7 et III.8 présentent les trajectoires désirées et réelles ainsi que l'erreur de poursuite lorsque nous appliquons la commande FSMC sur le modèle incertain de quadrirotor.

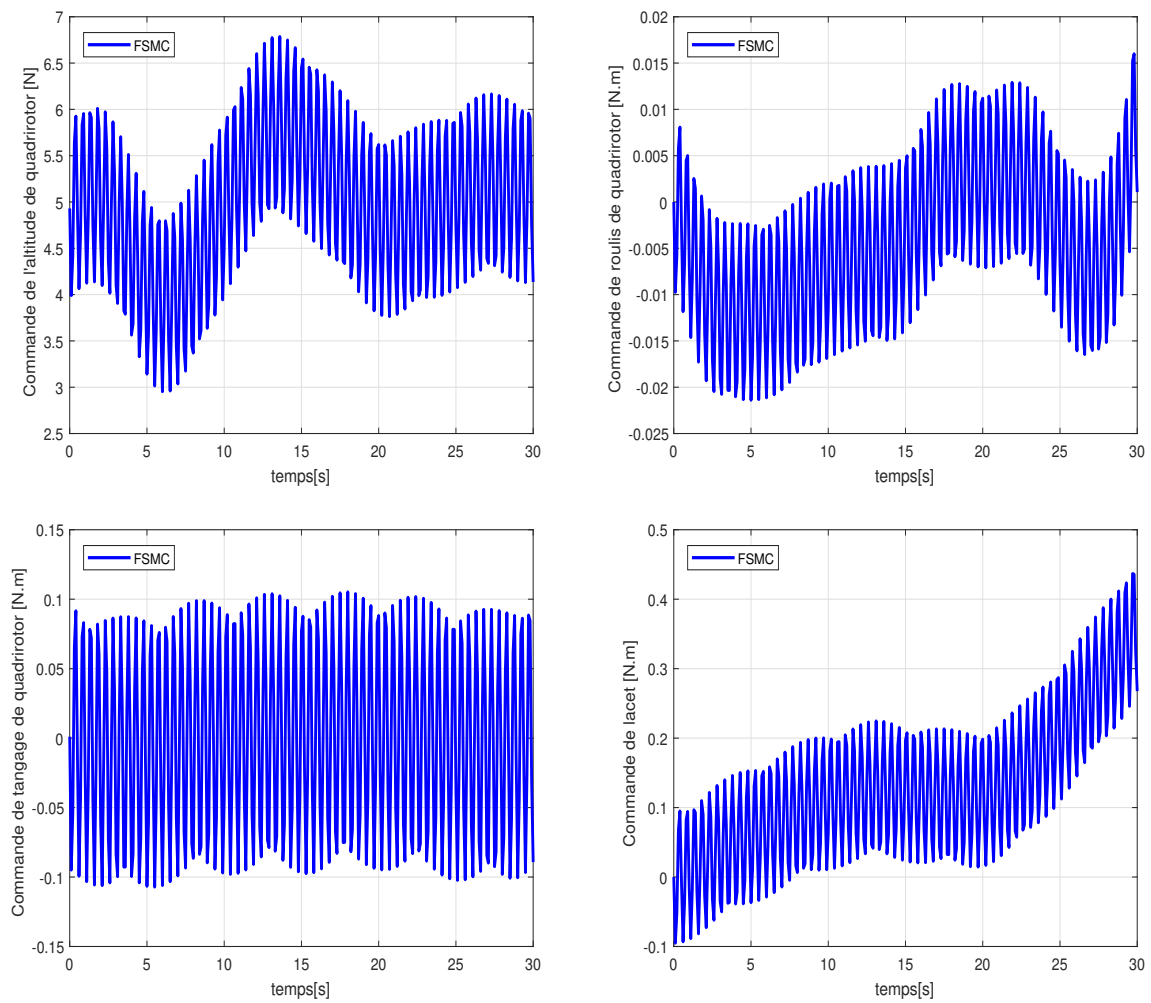


Figure III.5 – Entrées de commande de quadrirotor

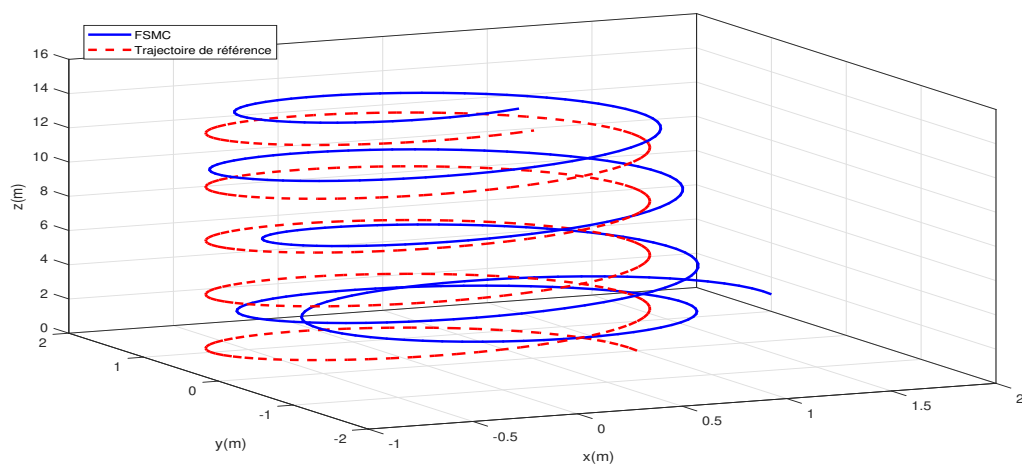
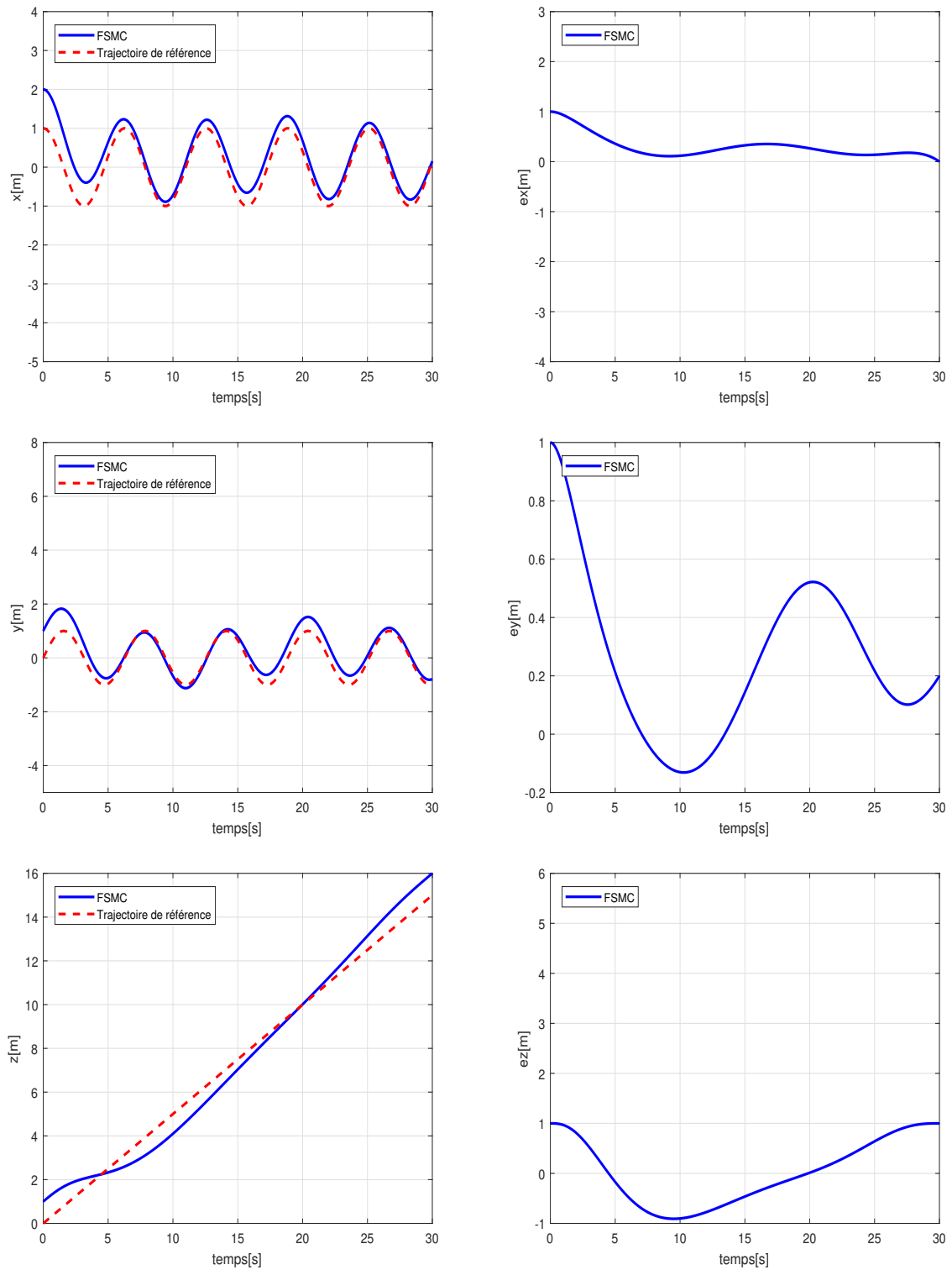


Figure III.6 – Comportement des trajectoires de quadrirotor en 3D

Figure III.7 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant x , y et z

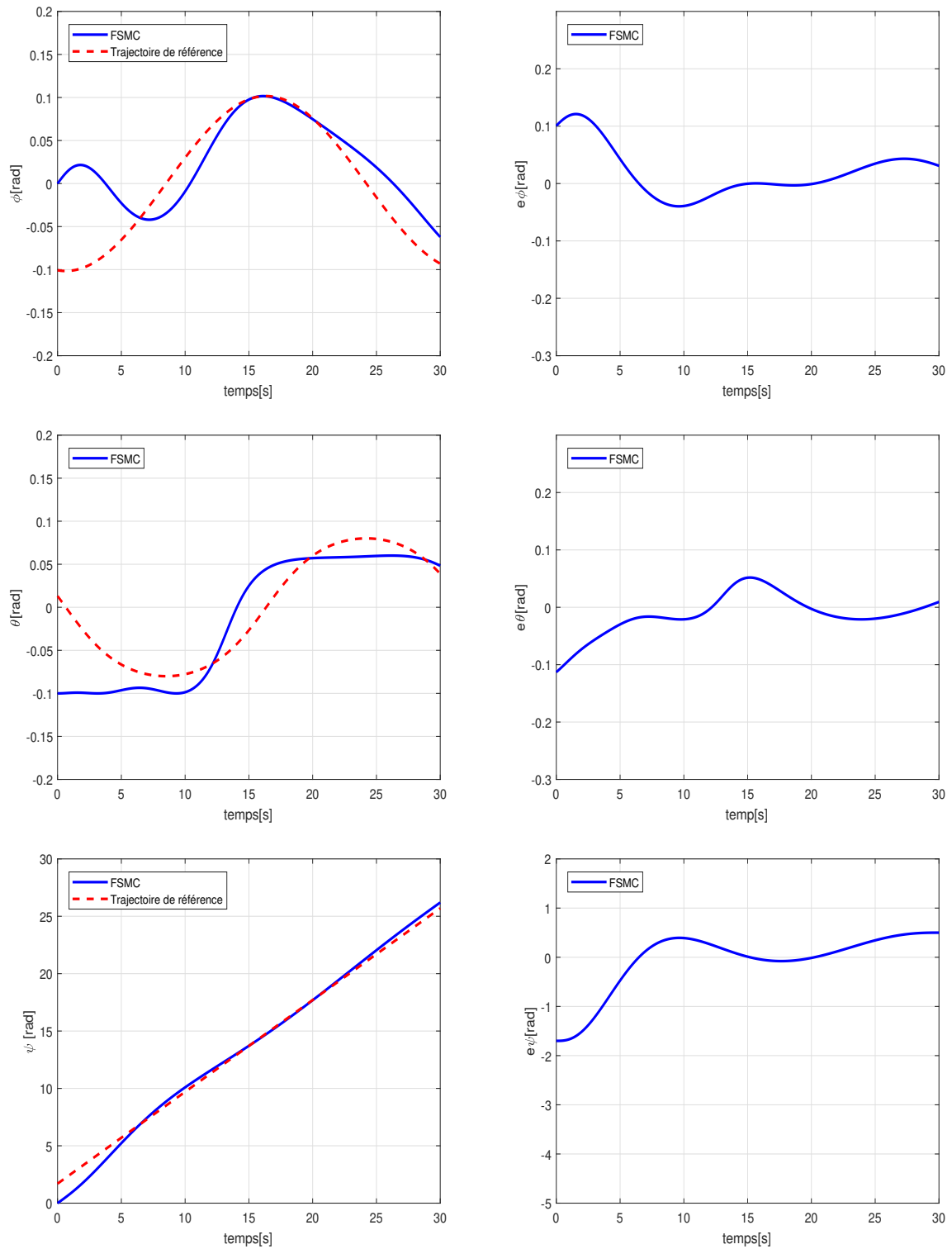


Figure III.8 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant ϕ , θ et ψ

D'après les figures (III.6, III.7, III.8), nous constatons que l'intervention de la commande FSMC par le biais du terme discontinu dû aux modes glissants, élimine l'effet des incertitudes et préserve la stabilité et les performances du schéma de commande globale de la boucle fermée. Cependant d'après la figure III.5, nous remarquons l'existence de phénomène de broutement dans les signaux de commande FSMC ce qui influe sur le comportement du système. En effet, nous pouvons déduire que le FSMC est une commande robuste dont la portée pratique est très limitée. D'où le besoin de concevoir une commande qui diminue le phénomène de broutement et garde l'avantage de robustesse induit par le mode glissant.

III.4.2 Conception de la commande par platitude basée sur le mode glissant et le contrôle par rejet actif des perturbations pour un modèle incertain de quadrirotor

Lorsque nous dérivons F_{q11} , F_{q21} , F_{q31} et F_{q41} jusqu'à apparaître les entrées de commande $\ddot{u}_{q1}$, $u_{q\phi}$, $u_{q\theta}$ et $u_{q\psi}$, nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \ddot{F}_{q11} \\ \ddot{F}_{q21} \\ \ddot{F}_{q31} \\ \ddot{F}_{q41} \end{bmatrix} = A_q + B_q \begin{bmatrix} \ddot{u}_{q1} \\ u_{q\phi} \\ u_{q\theta} \\ u_{q\psi} \end{bmatrix} + C_q + D_q \begin{bmatrix} \ddot{u}_{q1} \\ u_{q\phi} \\ u_{q\theta} \\ u_{q\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{III.72})$$

Où A_q et B_q sont deux matrices définies dans la section (III.4.1). C_q et D_q sont deux matrices contenant les éléments des états nominaux et les paramètres négligés de quadrirotor. Ces matrices sont définies comme suit :

$$C_q = \begin{bmatrix} c_{qx} \\ c_{qy} \\ c_{qz} \\ c_{q\psi} \end{bmatrix}, D_q = \begin{bmatrix} d_{qx1} & d_{qx2} & d_{qx3} & d_{qx4} \\ d_{qy1} & d_{qy2} & d_{qy3} & d_{qy4} \\ d_{qz1} & d_{qz2} & d_{qz3} & d_{qz4} \\ d_{q\psi1} & d_{q\psi2} & d_{q\psi3} & d_{q\psi4} \end{bmatrix} \quad (\text{III.73})$$

$$\begin{aligned} c_{qx} = & -\frac{u_{q1}\Delta m}{m(m+\Delta m)} [-\dot{\psi}^2 c_\phi s_\theta c_\psi - \dot{\psi}\dot{\theta} s_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\psi}\dot{\phi} s_\psi s_\theta s_\phi - \dot{\psi}\dot{\theta} s_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\theta}^2 c_\psi s_\theta c_\phi - \dot{\phi}\dot{\theta} c_\psi c_\theta s_\phi + \\ & \dot{\phi}\dot{\psi} s_\psi s_\theta s_\phi - \dot{\phi}\dot{\theta} c_\psi c_\theta s_\phi - \dot{\phi}^2 c_\psi s_\theta c_\phi - \dot{\psi}^2 s_\psi s_\phi + 2\dot{\psi}\dot{\phi} c_\psi c_\phi - \dot{\phi}^2 s_\psi s_\phi + (J_\theta \dot{\psi}\dot{\phi} + d_\theta) c_\psi c_\phi c_\theta + \\ & (J_\phi \dot{\psi}\dot{\theta} + d_\phi) (-c_\psi s_\phi s_\theta + c_\phi s_\psi) + (J_\psi \dot{\theta}\dot{\phi} + d_\psi) (-s_\psi c_\phi s_\theta + s_\phi c_\psi)] - \frac{2\ddot{u}_{q1}\Delta m}{m(m+\Delta m)} [-\dot{\psi} s_\psi s_\theta c_\phi + \\ & \dot{\theta} c_\psi c_\theta c_\phi - \dot{\phi} c_\psi s_\theta s_\phi + \dot{\psi} c_\psi s_\phi + \dot{\phi} s_\psi c_\phi] + \ddot{x} \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

$$\begin{aligned}
c_{qy} = & -\frac{u_{q1}\Delta m}{m(m+\Delta m)}[-\dot{\psi}^2 s_{\psi} s_{\theta} c_{\phi} + \dot{\psi}\dot{\theta}c_{\psi}c_{\theta}c_{\phi} - \dot{\psi}\dot{\phi}c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} + \dot{\psi}\dot{\theta}c_{\psi}c_{\theta}c_{\phi} - \dot{\theta}^2 s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} - \dot{\phi}\dot{\theta}s_{\psi}c_{\theta}s_{\phi} - \\
& \dot{\phi}\dot{\psi}c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} - \dot{\phi}\dot{\theta}s_{\psi}c_{\theta}s_{\phi} - \dot{\phi}^2 s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + \dot{\psi}^2 c_{\psi}s_{\phi} + 2\dot{\psi}\dot{\phi}s_{\psi}c_{\phi} + \dot{\phi}^2 c_{\psi}s_{\phi} + (J_{\theta}\dot{\psi}\dot{\phi} + d_{\theta})s_{\psi}c_{\phi}c_{\theta} - \\
& (J_{\phi}\dot{\psi}\dot{\theta} + d_{\phi})(s_{\psi}s_{\phi}s_{\theta} + c_{\phi}c_{\psi}) + (J_{\psi}\dot{\theta}\dot{\phi} + d_{\psi})(c_{\psi}c_{\phi}s_{\theta} + s_{\phi}s_{\psi})] - \frac{2\dot{u}_{q1}\Delta m}{m(m+\Delta m)}[\dot{\psi}c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + \\
& \dot{\theta}s_{\psi}c_{\theta}c_{\phi} - \dot{\phi}s_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} + \dot{\psi}s_{\psi}s_{\phi} - \dot{\phi}c_{\psi}c_{\phi}] + \ddot{d}_y
\end{aligned} \tag{III.75}$$

$$\begin{aligned}
c_{qz} = & -\frac{u_{q1}\Delta m}{m(m+\Delta m)}[-\dot{\theta}^2 c_{\phi}c_{\theta} - \dot{\phi}^2 c_{\phi}c_{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\phi}s_{\theta}s_{\phi} - (J_{\theta}\dot{\phi}\dot{\psi} + d_{\theta})s_{\theta}c_{\phi} - (J_{\phi}\dot{\theta}\dot{\psi} + d_{\phi})c_{\theta}s_{\phi}] \\
& - \frac{2\dot{u}_{q1}\Delta m}{m(m+\Delta m)}[-\dot{\theta}s_{\theta}c_{\phi} - \dot{\phi}c_{\theta}s_{\phi}] + \ddot{d}_z
\end{aligned} \tag{III.76}$$

$$d_{qx1} = -\frac{\Delta m}{m(m+\Delta m)}[c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + s_{\psi}s_{\phi}], d_{qx2} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_x}[-c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} + s_{\psi}c_{\phi}] \tag{III.77}$$

$$d_{qx3} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_y}[c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi}], d_{qx4} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_z}[-s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + c_{\psi}s_{\phi}] \tag{III.78}$$

$$d_{qy1} = -\frac{\Delta m}{m(m+\Delta m)}[s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} - c_{\psi}s_{\phi}], d_{qy2} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_x}[-s_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} - c_{\psi}c_{\phi}] \tag{III.79}$$

$$d_{qy3} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_y}[s_{\psi}c_{\theta}c_{\phi}], d_{qy4} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_z}[c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + s_{\psi}s_{\phi}] \tag{III.80}$$

$$d_{qz1} = \frac{\Delta m}{m(m+\Delta m)}[c_{\theta}c_{\phi}], d_{qz2} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_x}[-c_{\theta}s_{\phi}] \tag{III.81}$$

$$d_{qz3} = -\frac{\Delta l_q \Delta m u_{q1}}{m(m+\Delta m)I_y}[-s_{\theta}c_{\phi}], d_{qz4} = d_{q\psi_1} = d_{q\psi_2} = d_{q\psi_3} = d_{q\psi_4} = 0, c_{q\psi} = d_{\psi} \tag{III.82}$$

On note par $v_q = [v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}, v_{q\psi}]^T$ le terme de bouclage de stabilisation pour le quadrirotor. En appliquant la commande par platitude (III.49) aux systèmes (III.72), nous obtenons quatre systèmes de Brunovsky incertains tels que :

$$\begin{aligned}
PBF_x \begin{cases} \dot{F}_{q11} = F_{q12} \\ \dot{F}_{q12} = F_{q13} \\ \dot{F}_{q13} = F_{q14} \\ \dot{F}_{q14} = v_{qx} + \eta_{qx} \end{cases} \quad PBF_y \begin{cases} \dot{F}_{q21} = F_{q22} \\ \dot{F}_{q22} = F_{q23} \\ \dot{F}_{q23} = F_{q24} \\ \dot{F}_{q24} = v_{qy} + \eta_{qy} \end{cases}
\end{aligned} \tag{III.83}$$

$$PBF_z \begin{cases} \dot{F}_{q31} = F_{q32} \\ \dot{F}_{q32} = F_{q33} \\ \dot{F}_{q33} = F_{q34} \\ \dot{F}_{q34} = v_{qz} + \eta_{qz} \end{cases} \quad PBF_\psi \begin{cases} \dot{F}_{q41} = F_{q42} \\ \dot{F}_{q42} = v_{q\psi} + \eta_{q\psi} \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

Avec

$$\eta_q = [\eta_{qx}, \eta_{qy}, \eta_{qz}, \eta_{q\psi}]^T = D_q B_q^{-1} v_q + (C_q - D_q B_q^{-1} A_q) \quad (\text{III.85})$$

Où η_{qx} , η_{qy} , η_{qz} et $\eta_{q\psi}$ représentent les perturbations totales affectant les quatre systèmes découplés. Ces dernières perturbations sont supposées bornées.

Nous considérons $F_{q15} = \eta_{qx}$, $F_{q25} = \eta_{qy}$, $F_{q35} = \eta_{qz}$ et $F_{q43} = \eta_{q\psi}$ comme des états étendus pour les systèmes (III.83-III.84). Dans ce cas, les systèmes (III.83-III.84) sont réécrits sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{F}_{q11} = F_{q12} \\ \dot{F}_{q12} = F_{q13} \\ \dot{F}_{q13} = F_{q14} \\ \dot{F}_{q14} = F_{q15} + v_{qx} \\ \dot{F}_{q15} = h_{qx}, h_{qx} = \dot{\eta}_{qx} \\ Y_{qx} = F_{q11} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{F}_{q21} = F_{q22} \\ \dot{F}_{q22} = F_{q23} \\ \dot{F}_{q23} = F_{q24} \\ \dot{F}_{q24} = F_{q25} + v_{qy} \\ \dot{F}_{q25} = h_{qy}, h_{qy} = \dot{\eta}_{qy} \\ Y_{qy} = F_{q21} \end{cases} \quad (\text{III.86})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q31} = F_{q32} \\ \dot{F}_{q32} = F_{q33} \\ \dot{F}_{q33} = F_{q34} \\ \dot{F}_{q34} = F_{q35} + v_{qz} \\ \dot{F}_{q35} = h_{qz}, h_{qz} = \dot{\eta}_{qz} \\ Y_{qz} = F_{q31} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{F}_{q41} = F_{q42} \\ \dot{F}_{q42} = F_{q43} + v_{q\psi} \\ \dot{F}_{q43} = h_{q\psi}, h_{q\psi} = \dot{\eta}_{q\psi} \\ Y_{q\psi} = F_{q41} \end{cases} \quad (\text{III.87})$$

Les systèmes (III.86-III.87) peuvent être mis sous forme matricielle telle que :

$$\begin{cases} \dot{F}_{qx} = A_{qx} F_{qx} + B_{qx} v_{qx} + E_{qx} h_{qx} \\ Y_{qx} = C_{qx} F_{qx} \end{cases} \quad (\text{III.88})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{qy} = A_{qy} F_{qy} + B_{qy} v_{qy} + E_{qy} h_{qy} \\ Y_{qy} = C_{qy} F_{qy} \end{cases} \quad (\text{III.89})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{qz} = A_{qz}F_{qz} + B_{qz}v_{qz} + E_{qz}h_{qz} \\ Y_{qz} = C_{qz}F_{qz} \end{cases} \quad (\text{III.90})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q\psi} = A_{q\psi}F_{q\psi} + B_{q\psi}v_{q\psi} + E_{q\psi}h_{q\psi} \\ Y_{q\psi} = C_{q\psi}F_{q\psi} \end{cases} \quad (\text{III.91})$$

Avec

$$F_{qx} = [F_{q11}, F_{q12}, F_{q13}, F_{q14}, F_{q15}]^T, F_{qy} = [F_{q21}, F_{q22}, F_{q23}, F_{q24}, F_{q25}]^T, F_{qz} = [F_{q31}, F_{q32}, F_{q33}, F_{q34}, F_{q35}]^T, F_{q\psi} = [F_{q41}, F_{q42}, F_{q43}]^T.$$

$$A_{qx} = A_{qy} = A_{qz} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{q\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{qx} = B_{qy} = B_{qz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{q\psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{qx} = C_{qy} = C_{qz} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], C_{q\psi} = [1 \ 0 \ 0], E_{qx} = E_{qy} = E_{qz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_{q\psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les observateurs à état étendu (ESO) pour les systèmes (III.88-III.91) sont définis comme suit :

$$\dot{\hat{F}}_{qx} = A_{qx}\hat{F}_{qx} + B_{qx}v_{qx} + \lambda_{qx}C_x(F_{qx} - \hat{F}_{qx}) \quad (\text{III.92})$$

$$\dot{\hat{F}}_{qy} = A_{qy}\hat{F}_{qy} + B_{qy}v_{qy} + \lambda_{qy}C_{qy}(F_{qy} - \hat{F}_{qy}) \quad (\text{III.93})$$

$$\dot{\hat{F}}_{qz} = A_{qz}\hat{F}_{qz} + B_{qz}v_{qz} + \lambda_{qz}C_{qz}(F_{qz} - \hat{F}_{qz}) \quad (\text{III.94})$$

$$\dot{\hat{F}}_{q\psi} = A_{q\psi}\hat{F}_{q\psi} + B_{q\psi}v_{q\psi} + \lambda_{q\psi}C_{q\psi}(F_{q\psi} - \hat{F}_{q\psi}) \quad (\text{III.95})$$

avec

$$\hat{F}_{qx} = [\hat{F}_{q11}, \hat{F}_{q12}, \hat{F}_{q13}, \hat{F}_{q14}, \hat{F}_{q15}]^T, \hat{F}_{qy} = [\hat{F}_{q21}, \hat{F}_{q22}, \hat{F}_{q23}, \hat{F}_{q24}, \hat{F}_{q25}]^T, \hat{F}_{qz} = [\hat{F}_{q31}, \hat{F}_{q32}, \hat{F}_{q33}, \hat{F}_{q34}, \hat{F}_{q35}]^T, \hat{F}_{q\psi} = [\hat{F}_{q41}, \hat{F}_{q42}, \hat{F}_{q43}]^T, \lambda_{qx} = [\lambda_{qx1}, \lambda_{qx2}, \lambda_{qx3}, \lambda_{qx4}, \lambda_{qx5}]^T,$$

$$\lambda_{gy} = [\lambda_{gy1}, \lambda_{gy2}, \lambda_{gy3}, \lambda_{gy4}, \lambda_{gy5}]^T, \lambda_{gz} = [\lambda_{gz1}, \lambda_{gz2}, \lambda_{gz3}, \lambda_{gz4}, \lambda_{gz5}]^T, \lambda_{g\psi} = [\lambda_{q\psi1}, \lambda_{q\psi2}, \lambda_{q\psi3}]^T.$$

D'après Gao [Gao, 2006], les gains des observateurs à état étendu (III.92-III.95) sont choisis tels que :

$$s^5 + \lambda_{qx1}s^4 + \lambda_{qx2}s^3 + \lambda_{qx3}s^2 + \lambda_{qx4}s + \lambda_{qx5} = (s + \omega_{qxo})^5 \quad (\text{III.96})$$

$$s^5 + \lambda_{qy1}s^4 + \lambda_{qy2}s^3 + \lambda_{qy3}s^2 + \lambda_{qy4}s + \lambda_{qy5} = (s + \omega_{qyo})^5 \quad (\text{III.97})$$

$$s^5 + \lambda_{qz1}s^4 + \lambda_{qz2}s^3 + \lambda_{qz3}s^2 + \lambda_{qz4}s + \lambda_{qz5} = (s + \omega_{qzo})^5 \quad (\text{III.98})$$

$$s^3 + \lambda_{q\psi1}s^2 + \lambda_{q\psi2}s + \lambda_{q\psi3} = (s + \omega_{q\psi o})^3 \quad (\text{III.99})$$

Où ω_{qxo} , ω_{qyo} , ω_{qzo} et $\omega_{q\psi o}$ sont les paramètres des observateurs à état étendu (III.92-III.95). À partir des équations (III.96-III.99), nous pouvons calculer les gains des observateurs à état étendu comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda_{qx1} &= 5\omega_{qxo}, \lambda_{qy1} = 5\omega_{qyo}, \lambda_{qz1} = 5\omega_{qzo}, \lambda_{qx2} = 10\omega_{qxo}^2, \lambda_{qy2} = 10\omega_{qyo}^2, \lambda_{qz2} = 10\omega_{qzo}^2, \\ \lambda_{qx3} &= 10\omega_{qxo}^3, \lambda_{qy3} = 10\omega_{qyo}^3, \lambda_{qz3} = 10\omega_{qzo}^3, \lambda_{qx4} = 5\omega_{qxo}^4, \lambda_{qy4} = 5\omega_{qyo}^4, \lambda_{qz4} = 5\omega_{qzo}^4, \\ \lambda_{qx5} &= \omega_{qxo}^5, \lambda_{qy5} = \omega_{qyo}^5, \lambda_{qz5} = \omega_{qzo}^5, \lambda_{q\psi1} = 3\omega_{q\psi o}, \lambda_{q\psi2} = 3\omega_{q\psi o}^2, \lambda_{q\psi3} = \omega_{q\psi o}^3. \end{aligned} \quad (\text{III.100})$$

Les états utilisés dans le bouclage de rétroaction donné par les équations (III.64-III.67) ne peuvent pas être mesurés avec précision. Ainsi, ils sont remplacés par ces estimations données par les quatre observateurs (III.92-III.95). De plus, les perturbations totales η_x , η_y , η_z et η_ψ sont remplacées par ces estimations afin de faciliter leurs compensations. Par conséquent, un nouveau bouclage de rétroaction robuste peut être développé en utilisant les résultats des estimations des quatre observateurs (III.92-III.95) comme suit :

$$v_{qxsr} = \ddot{\ddot{F}}_{qdx} - \beta_{x3}\ddot{\ddot{e}}_{q1} - \beta_{x2}\ddot{\ddot{e}}_{q1} - \beta_{x1}\dot{\ddot{e}}_{q1} - W_{sq1}\text{sgn}(\hat{\sigma}_x) - \hat{\eta}_{qx} \quad (\text{III.101})$$

$$v_{qysr} = \ddot{\ddot{F}}_{qdy} - \beta_{y3}\ddot{\ddot{e}}_{q2} - \beta_{y2}\ddot{\ddot{e}}_{q2} - \beta_{y1}\dot{\ddot{e}}_{q2} - W_{sq2}\text{sgn}(\hat{\sigma}_y) - \hat{\eta}_{qy} \quad (\text{III.102})$$

$$v_{qzsr} = \ddot{\ddot{F}}_{qdz} - \beta_{z3}\ddot{\ddot{e}}_{q3} - \beta_{z2}\ddot{\ddot{e}}_{q3} - \beta_{z1}\dot{\ddot{e}}_{q3} - W_{sq3}\text{sgn}(\hat{\sigma}_z) - \hat{\eta}_{qz} \quad (\text{III.103})$$

$$v_{q\psi sr} = \ddot{\ddot{F}}_{qd\psi} - \beta_{\psi1}\dot{\ddot{e}}_{q4} - W_{sq4}\text{sgn}(\hat{\sigma}_\psi) - \hat{\eta}_{q\psi} \quad (\text{III.104})$$

avec $\hat{e}_{q1} = \hat{F}_{q11} - F_{qdx}$, $\hat{e}_{q2} = \hat{F}_{q21} - F_{qdy}$, $\hat{e}_{q3} = \hat{F}_{q31} - F_{qdz}$ et $\hat{e}_{q4} = \hat{F}_{q41} - F_{qd\psi}$.

En intégrant le bouclage robuste donné par les équations (III.101-III.104) dans la commande par platitude (III.49), nous obtenons la commande FSADRC appliquée sur le modèle incertain de quadrirotor (III.33) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_{FSADRC1} \\ \ddot{u}_{FSADRC\phi} \\ \ddot{u}_{FSADRC\theta} \\ \ddot{u}_{FSADRC\psi} \end{bmatrix} = B_q^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{\ddot{F}}_{qdx} - \beta_{x3}\ddot{\ddot{e}}_{q1} - \beta_{x2}\ddot{\ddot{e}}_{q1} - \beta_{x1}\dot{\ddot{e}}_{q1} - W_{sq1}\text{sgn}(\hat{\sigma}_x) - \hat{\eta}_{qx} \\ \ddot{\ddot{F}}_{qdy} - \beta_{y3}\ddot{\ddot{e}}_{q2} - \beta_{y2}\ddot{\ddot{e}}_{q2} - \beta_{y1}\dot{\ddot{e}}_{q2} - W_{sq2}\text{sgn}(\hat{\sigma}_y) - \hat{\eta}_{qy} \\ \ddot{\ddot{F}}_{qdz} - \beta_{z3}\ddot{\ddot{e}}_{q3} - \beta_{z2}\ddot{\ddot{e}}_{q3} - \beta_{z1}\dot{\ddot{e}}_{q3} - W_{sq3}\text{sgn}(\hat{\sigma}_z) - \hat{\eta}_{qz} \\ \ddot{\ddot{F}}_{qd\psi} - \beta_{\psi1}\dot{\ddot{e}}_{q4} - W_{sq4}\text{sgn}(\hat{\sigma}_\psi) - \hat{\eta}_{q\psi} \end{bmatrix} - B_q^{-1}A_q \quad (\text{III.105})$$

Afin de réduire l'effet de phénomène de broutement, nous remplaçons la fonction sgn pour chaque surface de glissement par la fonction sat comme suit :

$$sat(\sigma_x) = \begin{cases} \frac{\sigma_x}{a_{xs}} & si \ |\sigma_x| \leq a_{xs} \\ sgn(\sigma_x) & si \ |\sigma_x| > a_{xs} \end{cases} \quad (III.106)$$

$$sat(\sigma_y) = \begin{cases} \frac{\sigma_y}{a_{ys}} & si \ |\sigma_y| \leq a_{ys} \\ sgn(\sigma_y) & si \ |\sigma_y| > a_{ys} \end{cases} \quad (III.107)$$

$$sat(\sigma_z) = \begin{cases} \frac{\sigma_z}{a_{zs}} & si \ |\sigma_z| \leq a_{zs} \\ sgn(\sigma_z) & si \ |\sigma_z| > a_{zs} \end{cases} \quad (III.108)$$

$$sat(\sigma_\psi) = \begin{cases} \frac{\sigma_\psi}{a_{\psi s}} & si \ |\sigma_\psi| \leq a_{\psi s} \\ sgn(\sigma_\psi) & si \ |\sigma_\psi| > a_{\psi s} \end{cases} \quad (III.109)$$

Avec a_{xs} , a_{ys} , a_{zs} et $a_{\psi s}$ sont les largeurs du seuil pour les fonctions de saturation $sat(\sigma_x)$, $sat(\sigma_y)$, $sat(\sigma_z)$ et $sat(\sigma_\psi)$. Les valeurs des gains de la commande FSARDC sont les mêmes valeurs des gains pour la commande FSMC.

Les paramètres l'observateur à état étendu sont choisies telles que: $\omega_{qxo} = \omega_{qyo} = \omega_{qzo} = 6 \text{ rad/s}$ et $\omega_{q\psi o} = 15 \text{ rad/s}$. Alors les valeurs des gains de l'observateur à état étendu sont déduites selon les équations (III.100) comme suit : $\lambda_{qx1} = \lambda_{qy1} = \lambda_{qz1} = 30$, $\lambda_{qx2} = \lambda_{qy2} = \lambda_{qz2} = 360$, $\lambda_{qx3} = \lambda_{qy3} = \lambda_{qz3} = 2160$, $\lambda_{qx4} = \lambda_{qy4} = \lambda_{qz4} = 6480$, $\lambda_{qx5} = \lambda_{qy5} = \lambda_{qz5} = 7776$, $\lambda_{q\psi 1} = 45$, $\lambda_{q\psi 2} = 775$, $\lambda_{q\psi 3} = 3375$.

Les valeurs des gains de commutation sont choisies telles que : $W_{sq1} = W_{sq2} = W_{sq3} = 0.2$ et $W_{sq4} = 0.1$. Les valeurs des largeurs du seuil des fonctions Sat sont choisies comme suit : $a_{qsx} = a_{qsy} = a_{qsz} = a_{q\psi s} = 1$.

Dans cette simulation, nous considérons les mêmes trajectoires de référence et les mêmes conditions de robustesse choisies dans le paragraphe précédent.

La figure III.9 présente la commande FSADRC appliquée au quadrirotor incertain.

Les performances de suivi des trajectoires liées à cette simulation sont illustrées sur les figures (III.10, III.11, III.12). La figure III.13 illustre l'estimation de la perturbation totale η_q par l'observateur à état étendu.

Les résultats de simulation montrent une bonne performance de poursuite de trajectoires pour tous les états de quadrirotor. En effet, nous remarquons lorsque nous appliquons la commande FSADRC sur le modèle incertain de quadrirotor, d'abord que le phénomène de broutement induit par la fonction de commutation sgn est presque inexistant, par l'utilisation des fonctions sat à la place de la fonction sgn . Aussi, nous constatons une bonne robustesse par rapport aux incertitudes de modèles et aux conditions initiales incertaines.

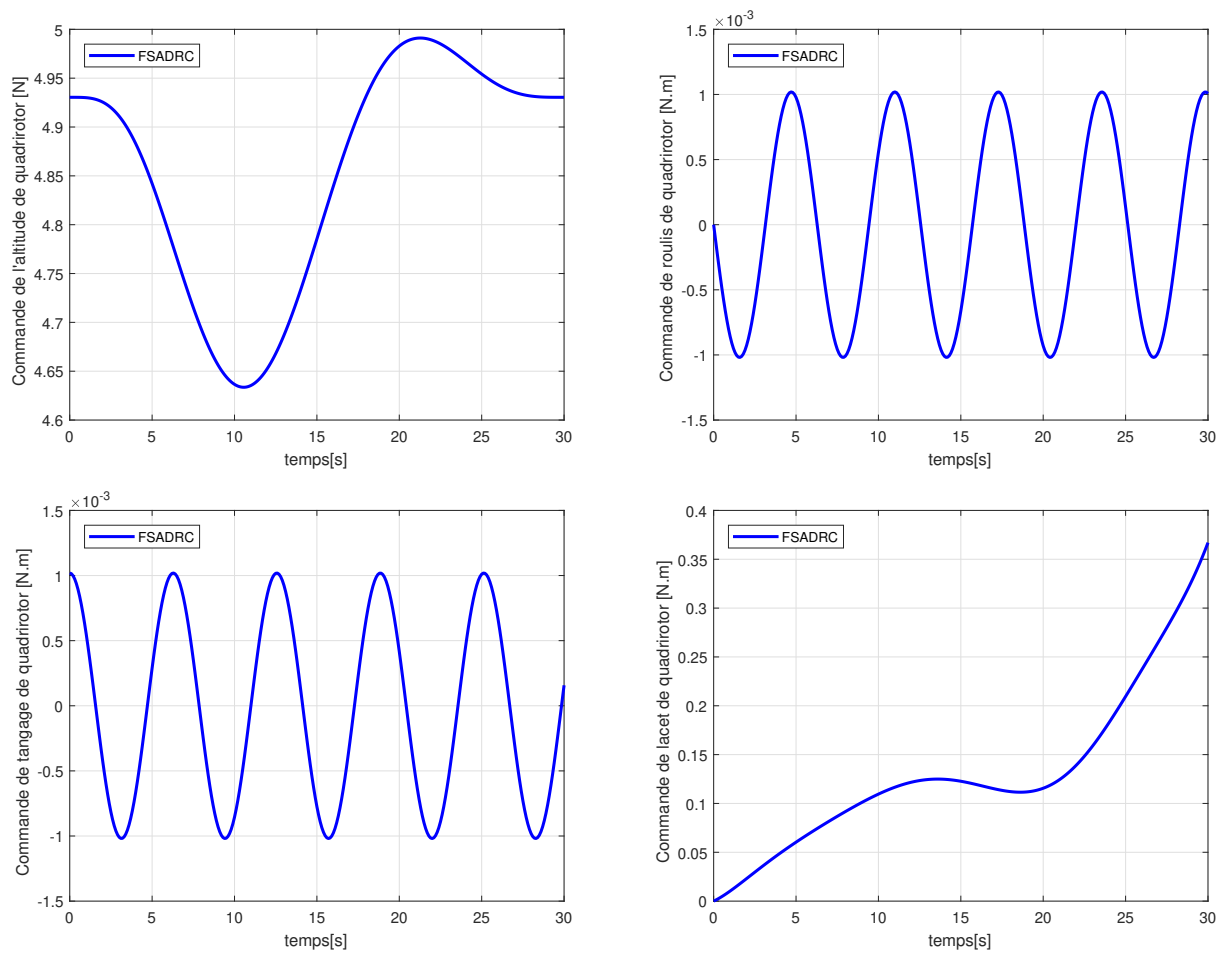


Figure III.9 – Entrées de commande de quadrirotor.

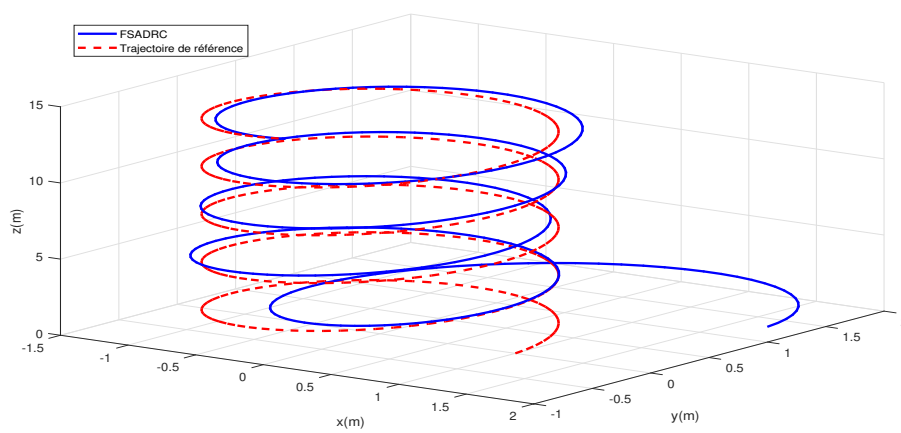


Figure III.10 – Comportement des trajectoires de quadrirotor en 3D.

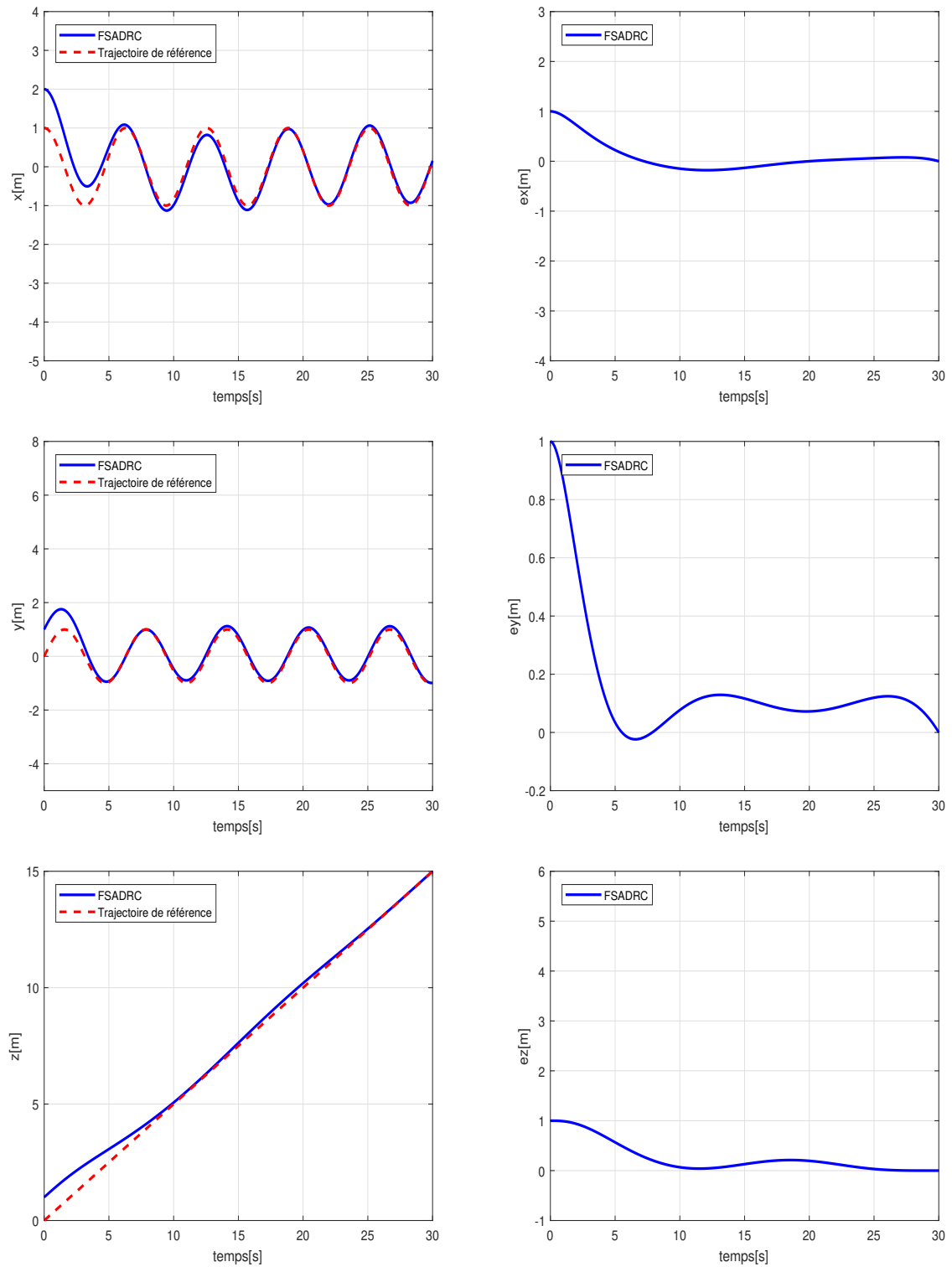


Figure III.11 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant x , y et z .

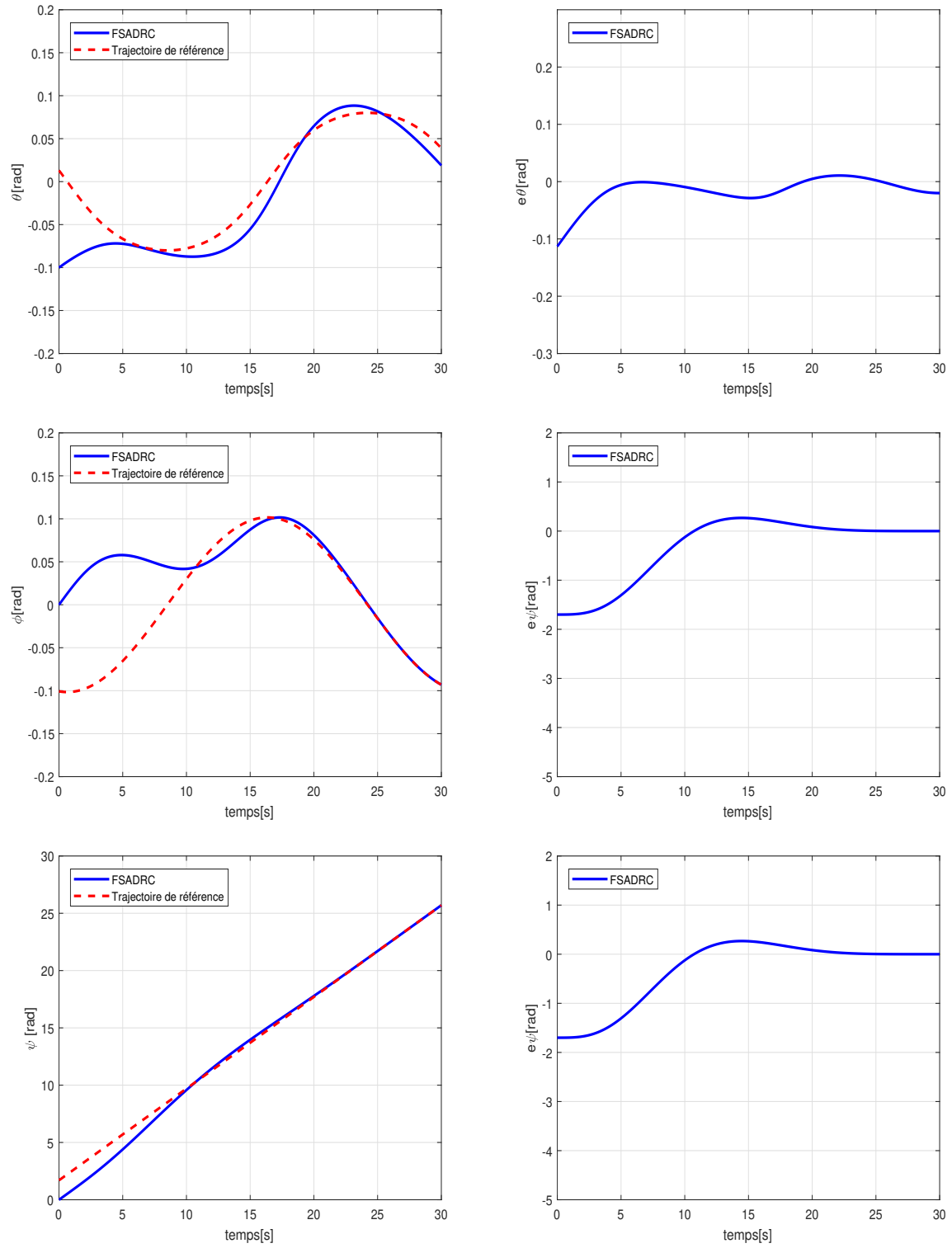


Figure III.12 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant ϕ , θ et ψ .

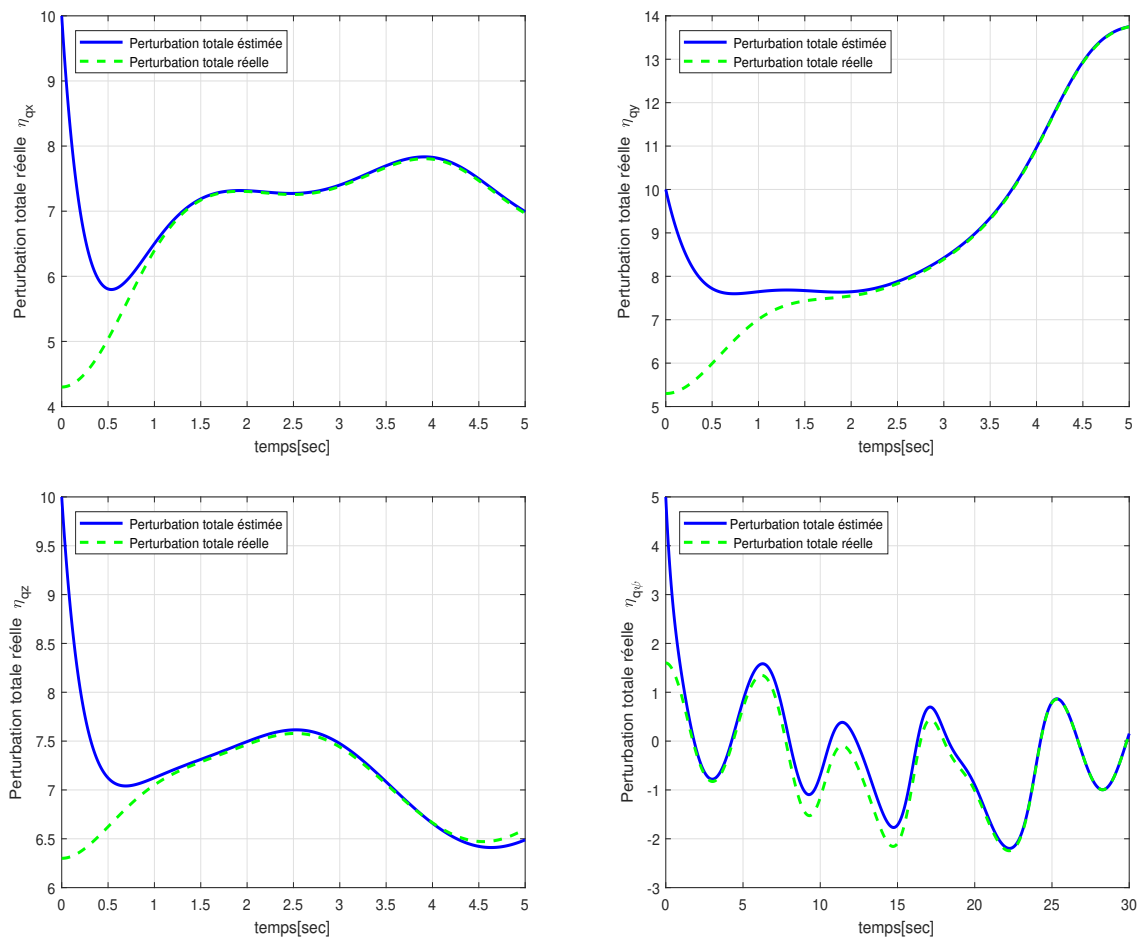


Figure III.13 – Estimation des perturbations totales affectant les systèmes de Brunovsky

Pour effectuer une comparaison quantitative entre les performances des commandes FSADRC et FSMC, l'intégrale de l'erreur absolue (IAE) est utilisée comme indicateur de performance des boucles de régulation. Le tableau III.1 donne les IAEs pour les positions et les angles d'Euler de quadrirotor.

Tableau III.1 – Indicateur de performance IAE

État	IAE de FSMC	IAE de FSADRC
x	0.2367	0.01
y	0.3823	0.025
z	0.265	0.0533
θ	0.31	0.0185
ϕ	0.35	0.112
ψ	0.25	0.04

Les résultats du tableau indiquent clairement la différence entre les deux contrôleurs vis-à-vis au rejet de perturbations car la commande FSADRC a donné le minimum IAE comparant par rapport à la commande FSMC. D'après les résultats de la première et la deuxième simulation, nous pouvons déduire que la fonction de rejet de perturbations permet à l'utilisateur de traiter le système considéré avec un modèle plus simple, car les effets négatifs de l'incertitude de modélisation sont compensés en temps réel. De ce fait, l'opérateur n'a pas besoin d'une description analytique précise du système, car nous pouvons supposer que les parties inconnues de la dynamique sont les perturbations internes de modèle.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le développement d'une commande par platitude robuste pour les systèmes non linéaires perturbés. La commande par platitude nous a permis de transformer le système non linéaire sous une forme canonique pour laquelle s'applique un régulateur de suivi robuste basé sur le mode glissant et l'ADRC. Afin de montrer l'efficacité de la commande FSADRC proposée, nous avons commandé un modèle de quadrirotor incertain par deux commandes différentes la FSMC et la FSADRC. Ensuite, nous avons établi les résultats de comparaisons par simulation pour ces deux commandes. Les résultats de simulation montrent l'efficacité de la commande FSADRC qui améliore les performances du vol en présence de la variation des paramètres du système et des perturbations externes de vent. Nous remarquons aussi que les signaux de la commande FSADRC sont lisses et physiquement réalisables. En conclusion, la commande FSADRC représente une solution pratique et efficace pour la résolution de problème de suivi de trajectoire de référence pour les systèmes non linéaires contenant des incertitudes de modèle.

CHAPITRE IV

Commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle

IV.1	Introduction	89
IV.2	Observateur par intervalle	89
IV.3	Conception de la commande de suivi garantie pour un modèle incertain de quadrirotor	94
IV.3.1	Incertitudes modérées	104
IV.3.2	Incertitudes importantes	110
IV.4	Conclusion	110

IV.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, une commande par platitude basée sur le mode glissant et le contrôle actif par rejet des perturbations (ADRC) a été proposée pour les systèmes non linéaires incertains. L'ADRC repose sur le bon fonctionnement de l'observateur à état étendu. Ce dernier est incapable d'estimer les perturbations inconnues à variations significatives affectant le système et les mesures. Dans ces conditions, la commande robuste proposée ne peut pas assurer le suivi de trajectoire de référence.

Ces dernières années, les méthodes ensemblistes basées sur l'analyse par intervalle ont significativement progressé d'un point de vue fondamental. Elles ont également montré leur intérêt dans de nombreux domaines, à savoir : synthèse des lois de commande [Maniu, 2014], sûreté de fonctionnement [Sallak, 2007], estimation [Ramdani, 2005, Meslem, 2008], etc. L'introduction de la théorie ensembliste par intervalles, pour la résolution de ces problèmes, est particulièrement intéressante puisqu'elle fournit des résultats garantis sous réserve de validité des hypothèses sur les bornes et sur le modèle utilisé.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle loi de commande de suivie basée sur le concept de platitude et de l'observateur par intervalle. La méthodologie proposée permet de garantir le suivi de trajectoire de référence du système non linéaire dans un intervalle bien précis malgré l'existence des perturbations inconnues affectant le système et les mesures.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons le contexte général des observateurs intervalles. Ensuite, nous détaillerons la nouvelle loi de commande basée sur le concept de platitude et de l'observateur par intervalle pour un modèle de quadrirotor incertain.

IV.2 Observateur par intervalle

Les observateurs par intervalles sont des estimateurs d'état garantis introduits par [Gouzé et al., 2000]. En se basant sur la connaissance des limites supérieures et inférieures des conditions initiales et des incertitudes, deux observateurs peuvent être développés pour produire des limites supérieures et inférieures des variables d'état de système à chaque instant. Ces bornes permettent d'avoir un tube qui contient toutes les estimations d'état de système malgré l'existence des incertitudes inconnues affectant le système et les mesures. La technique d'observation par intervalle a été largement utilisée dans plusieurs applications tel que [Meslem & Ramdani, 2011, Lamouchi et al., 2018, Zhang & Yang, 2018, Hammouche et al., 2018, Li et al., 2020, Huang et al., 2020]. Cette technique donne la possibilité de considérer le cas des perturbations inconnues et de valeur importante où certaines méthodes classiques d'estimation d'état ne peuvent pas résoudre ce genre de situation.

Pour expliquer les étapes de la construction d'un observateur intervalle, nous choisissons de présenter un cas relativement simple qui est celui des systèmes partiellement linéaires avec retour de sortie défini tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(y) \\ y(t) = Cx \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent l'état et la sortie de système, respectivement. $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs non linéaires par rapport au vecteur de sortie y . L'observateur intervalle développé dans [Gouzé et al., 2000] pour le système (IV.1) nécessite les hypothèses suivantes :

Hypothèse IV.1 *La paire (A, C) est détectable.*

Hypothèse IV.2 *Il existe un gain L tel que la matrice $(A - LC)$ soit Hurwitz et Metzler (c'est-à-dire que ses éléments non diagonaux sont non négatifs).*

Hypothèse IV.3 *Il existe deux champs de vecteur connus $\bar{\phi}$ et $\underline{\phi}$ mesurables par rapport au temps et Lipschitziennes, telles que :*

$$\underline{\phi}(y) \leq \phi(y) \leq \bar{\phi}(y)$$

Sous les hypothèses (IV.1), (IV.2) et (IV.3). Les bornes inférieures et supérieures pour le système (IV.1) sont calculées à l'aide de deux observateurs basés sur une structure de Luenberger décrite par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{\phi}(y) + LC(x - \bar{x}) \\ \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{\phi}(y) + LC(x - \underline{x}) \\ \underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

On considère l'erreur d'observation supérieure et inférieure $\bar{e}_x = \bar{x} - x$ et $\underline{e}_x = x - \underline{x}$. La dynamique de l'erreur d'observation supérieure et inférieure est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_x = H_x \bar{e}_x + \bar{\Pi}_x \\ \dot{\underline{e}}_x = H_x \underline{e}_x + \underline{\Pi}_x \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Avec $H_x = A - LC$, $\bar{\Pi}_x = \bar{\phi}(y) - \phi(y)$ and $\underline{\Pi}_x = \phi(y) - \underline{\phi}(y)$.

D'après les hypothèses (IV.2) et (IV.3), la matrice $A - LC$ est supposée Metzler et les termes $\bar{\Pi}_x$ et $\underline{\Pi}_x$ sont positifs. Alors, $\underline{e}_x$ et $\bar{e}_x$ sont toujours non négatifs. Par conséquent, l'état x est

borné comme suit :

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (\text{IV.4})$$

La construction des observateurs par intervalle pour le système (IV.2) nécessite le calcul d'un gain L tel que la matrice $A - LC$ soit simultanément stable et Metzler. En général, cette condition n'est pas toujours satisfaite. Par exemple, lorsqu'on considère les valeurs des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0], \quad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons :

$$A - LC = \begin{bmatrix} 1 - l_1 & -0.5 \\ -l_2 & -2 \end{bmatrix}$$

Il est clair qu'il n'existe pas de gain L garantissant la propriété Metzler de la matrice $(A - LC)$. Pour remédier à ce problème, plusieurs méthodes ont été proposées à savoir la méthode de changement de coordonnées invariantes dans le temps [Raissi et al., 2012], la méthode de changement de coordonnées variant dans le temps [Mazenc & Bernard, 2011] et la méthode de décomposition du système en deux systèmes positifs couplés [Meslem & Ramdani, 2011, Cacace et al., 2014]. Les observateurs par intervalle développés dans ce chapitre seront basés sur la méthode de changement de coordonnées invariantes dans le temps [Raissi et al., 2012]. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \rho \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représente l'état et la sortie de système, respectivement. $A(n, n)$ et $C(p, n)$ sont deux matrices. $\rho \in \mathbb{R}^n$ représente la perturbation affectant le système tel qu'il existe deux vecteurs connus $\underline{\rho}$ et $\bar{\rho}$ qui satisfont $\underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}$.

L'approche proposée par Raissi dans [Raissi et al., 2012] consiste à trouver un changement de base $z = Tx$ tel que la matrice $E = T(A - LC)T^{-1}$ soit Hurwitz et Metzler. Si on considère le changement de base $z = Tx$, le système (IV.5) est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = TAT^{-1}z + W \\ y = CT^{-1}z \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Avec $W = T\rho$.

L'observateur par intervalle associé à (IV.6) après la transformation z est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = TAT^{-1}\bar{z} + TLCT^{-1}(z - \bar{z}) + \bar{W} \\ \dot{\underline{z}} = TAT^{-1}\underline{z} + TLCT^{-1}(z - \underline{z}) + \underline{W} \\ \bar{z}(0) \leq z(0) \leq \underline{z}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

avec $\bar{W} = T^+\bar{\rho} - T^-\underline{\rho}$, $\underline{W} = T^+\underline{\rho} - T^-\bar{\rho}$, $T^+ = \max(T, 0)$, $T^- = T^+ - T$.

Les erreurs d'estimation sont maintenant définies dans la nouvelle base par : $\bar{e}_z = \bar{z} - z$, $\underline{e}_z = z - \underline{z}$. Leurs dynamiques sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_z = E\bar{e}_z + \bar{W} - W \\ \dot{\underline{e}}_z = E\underline{e}_z + W - \underline{W} \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

avec $E = T(A - LC)T^{-1}$.

Une fois l'observateur par intervalle est calculé dans la nouvelle base z , l'intervalle qui englobe l'état dans la base d'origine x sera déduit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = M^+\bar{z} - M^-\underline{z} \\ \dot{\underline{x}} = M^+\underline{z} - M^-\bar{z} \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

avec $\bar{M} = T^{-1}$, $M^+ = \max(M, 0)$, $M^- = M^+ - M$.

Lorsque la fonction ρ est multipliée par la matrice T^+ et la matrice T^- , les deux relations suivantes seront établies :

$$T^+\underline{\rho} \leq T^+\rho \leq T^+\bar{\rho} \quad (\text{IV.10})$$

$$T^-\underline{\rho} \leq T^-\rho \leq T^-\bar{\rho} \quad (\text{IV.11})$$

La différence entre ces deux dernières relations conduit à :

$$T^+\underline{\rho} - T^-\bar{\rho} \leq T^+\rho - T^-\rho \leq T^+\bar{\rho} - T^-\underline{\rho} \quad (\text{IV.12})$$

La relation (IV.12) peut être réécrite sous cette forme :

$$\underline{W} \leq W \leq \bar{W} \quad (\text{IV.13})$$

Étant donné que la matrice E est supposée Metzler et les termes $\bar{W} - W$ et $W - \underline{W}$ sont positifs, donc $\underline{e}_z$ et $\bar{e}_z$ sont toujours non négatives. Par conséquent, l'état z est borné comme

suit :

$$\underline{z} \leq z \leq \bar{z} \quad (\text{IV.14})$$

La procédure de calcul de la matrice de changement de base T est donnée par le lemme IV.1.

lemme IV.1 [Raissi et al., 2012] Soit une matrice $A - LC \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ayant les mêmes valeurs propres pour une matrice de gain $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$. S'il existe deux vecteurs $e_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $e_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tels que les paires $(A - LC, e_1)$ et (R_I, e_2) sont observables, alors, il existe une matrice non singulière $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que la matrice $T(A - LC)T^{-1}$ est Metzler et Hurwitz. Cette matrice est définie comme suit :

$$T = S_2^{-1} S_1 \quad (\text{IV.15})$$

avec

$$S_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_1(A - LC)^{n-1} \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_2 R_I^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

Une procédure simple pour choisir R_I peut être proposée pour le cas de valeurs propres réelles (non nécessairement simples). Par exemple, si la paire (A, C) est observable, nous pouvons déterminer un gain L tel que $(A - LC)$ possède des valeurs propres réelles. On choisit alors une matrice R_I sous une forme triangulaire inférieure avec les valeurs propres de $(A - LC)$ sur la diagonale et des éléments non négatifs en dehors de cette diagonale.

On considère un système incertain décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(p_1, p_2)f(x)u(t) \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

Où $x \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur d'état, $f(x) = x_1 x_2$ est une fonction non linéaire, $u \in \mathbb{R}_+$ est une entrée positive, $\underline{p}_1 \leq p_1 \leq \bar{p}_1$, $\underline{p}_2 \leq p_2 \leq \bar{p}_2$ sont des paramètres incertains,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0], B(p_1, p_2) = \begin{bmatrix} -2p_1 \\ 0 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

avec $\underline{p}_1 = 4.48$, $\bar{p}_1 = 6.12$, $\underline{p}_2 = 3.2$, $\bar{p}_2 = 3.6$, $u(t) = 1 + \sin(2t)$.

La paire (A, C) n'est pas observable et il n'existe aucun gain L tel que la matrice $(A - LC)$ soit Metzler, ce qui rend la construction de l'observateur par intervalle impossible. Pour

$L = [3 \ 0 \ 0]^T$, la matrice $(A - LC)$ est stable et possède les valeurs propres $-1, -4 \pm \sqrt{3}i$. Pour trouver un changement de base, il est nécessaire de construire une matrice R_I stable et Metzler avec les mêmes valeurs propres que $(A - LC)$.

La matrice $R_I = \begin{bmatrix} -a & b & 0 \\ 0 & -a & b \\ b & 0 & -a \end{bmatrix}$ possède les valeurs propres $b - a, -a - 0.5b \pm 0.5b\sqrt{3}i$,

nous avons donc choisi $b = 2$ et $a = 3$. Les paires $(A - LC, e_1)$ et (R_I, e_2) sont observables pour $e_1 = [1 \ 0 \ 1]$, $e_2 = [1 \ 1 \ 0]$. Donc

$$T = S_2^{-1}S_1 = \begin{bmatrix} 0.158 & 0.866 & 0.5 \\ 0.842 & -0.866 & 0.5 \\ 0.658 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

IV.3 Conception de la commande de suivi garantie pour un modèle incertain de quadrirotor

Dans ce paragraphe, nous allons concevoir la loi de commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle, noté GBTC, pour le cas d'un quadrirotor soumis à des incertitudes inconnues mais bornées.

Le modèle général d'un quadrirotor possédant des incertitudes paramétriques et subissant des perturbations externes et des bruits de mesure est donné par :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_{q1}}{m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) - (c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi) \frac{u_{q1} \Delta m}{m(m+\Delta m)} + d_x \\ \ddot{y} = \frac{u_{q1}}{m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) - (s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi) \frac{u_{q1} \Delta m}{m(m+\Delta m)} + d_y \\ \ddot{z} = \frac{u_{q1}}{m}(\cos \theta \cos \phi) - g + (-c_\theta c_\phi) \frac{u_{q1} \Delta m}{m(m+\Delta m)} + d_z \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_y}{I_x} \right) + \frac{l_q}{I_x} u_{q\phi} + \frac{\Delta l_q}{I_x} u_{q\phi} + d_\phi \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} \left(\frac{I_x - I_z}{I_y} \right) + \frac{l_q}{I_y} u_{q\theta} + \frac{\Delta l_q}{I_y} u_{q\theta} + d_\theta \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \left(\frac{I_y - I_x}{I_z} \right) + \frac{l_q}{I_z} u_{q\psi} + d_\psi \\ Y_q = [x, y, z, \psi]^T + [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]^T \end{cases} \quad (IV.18)$$

Où Δm et Δl_q représentent les variations paramétriques de m et l_q , $d_q = [d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta, d_\psi]^T$ et $\delta_q = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]^T$ représentent les vecteurs des perturbations externes et des bruits de mesure affectant le quadrirotor.

La masse du quadrirotor m , la distance entre le centre de masse du quadrirotor et l'axe de rotation du rotor l_q , les perturbations externes d_q et les bruits de mesure δ_q sont supposés

inconnus et bornés tels que :

$$m - \Delta_m \leq m \leq m + \Delta_m, l_q - \Delta l_q \leq l_q \leq l_q + \Delta l_q, \underline{d}_q \leq d_q \leq \bar{d}_q, \underline{\delta}_q \leq \delta_q \leq \bar{\delta}_q \quad (\text{IV.19})$$

Avec $\underline{d}_q, \bar{d}_q, \underline{\delta}_q$ et $\bar{\delta}_q$ sont les valeurs limites inférieures et supérieures de d_q et δ_q .

La commande proposée dans ce paragraphe se compose de deux parties, une partie basée sur la platitude du système et une partie comportant un bouclage basé sur l'observateur par intervalle.

En reprenant le même algorithme de la commande FSADRC pour le modèle de quadritotor donné par l'équation (IV.18), les systèmes de Brunovsky incertain (III.83-III.84) seront définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{F}_{q11} = F_{q12} \\ \dot{F}_{q12} = F_{q13} \\ \dot{F}_{q13} = F_{q14} \\ \dot{F}_{q14} = v_{qx} + \eta_{qx} \\ Y_{q1} = F_{q11} + \delta_{q1} \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q21} = F_{q22} \\ \dot{F}_{q22} = F_{q23} \\ \dot{F}_{q23} = F_{q24} \\ \dot{F}_{q24} = v_{qy} + \eta_{qy} \\ Y_{q2} = F_{q21} + \delta_{q2} \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q31} = F_{q32} \\ \dot{F}_{q32} = F_{q33} \\ \dot{F}_{q33} = F_{q34} \\ \dot{F}_{q34} = v_{qz} + \eta_{qz} \\ Y_{q3} = F_{q31} + \delta_{q3} \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q41} = F_{q42} \\ \dot{F}_{q42} = v_{q\psi} + \eta_{q\psi} \\ Y_{q4} = F_{q41} + \delta_{q4} \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Où $v_q = [v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}, v_{q\psi}]^T$ représente le vecteur de bouclage de stabilisation pour le quadrirotor et $\eta_q = [\eta_{qx}, \eta_{qy}, \eta_{qz}, \eta_{q\psi}]^T$ représente le vecteur des perturbations totales contenant les

perturbations externes et les paramètres incertains affectant le quadrirotor. Les systèmes donnés par les équations (IV.20-IV.23) peuvent être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{F}_{q1} = A_{q1}F_{q1} + B_{q1}(v_{qx} + \eta_{qx}) \\ Y_{q1} = C_{q1}F_{q1} + \delta_{q1} \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q2} = A_{q2}F_{q2} + B_{q2}(v_{qy} + \eta_{qy}) \\ Y_{q2} = C_{q2}F_{q2} + \delta_{q2} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q3} = A_{q3}F_{q3} + B_{q3}(v_{qz} + \eta_{qz}) \\ Y_{q3} = C_{q3}F_{q3} + \delta_{q3} \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{q4} = A_{q4}F_{q4} + B_{q4}(v_{q\psi} + \eta_{q\psi}) \\ Y_{q4} = C_{q4}F_{q4} + \delta_{q4} \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

Avec $F_{q1} = [F_{q11}, F_{q12}, F_{q13}, F_{q14}]^T$, $F_{q2} = [F_{q21}, F_{q22}, F_{q23}, F_{q24}]^T$, $F_{q3} = [F_{q31}, F_{q32}, F_{q33}, F_{q34}]^T$, $F_{q4} = [F_{q41}, F_{q42}]^T$.

$$A_{q1} = A_{q2} = A_{q3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{q4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{q1} = B_{q2} = B_{q3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{q4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{q1} = C_{q2} = C_{q3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{q4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La conception des observateurs par intervalle pour les systèmes (IV.24-IV.27) nécessitent les hypothèses suivantes :

Hypothèse IV.4 Les paires (A_{q1}, C_{q1}) , (A_{q2}, C_{q2}) , (A_{q3}, C_{q3}) et (A_{q4}, C_{q4}) sont détectables.

Hypothèse IV.5 Les incertitudes totales et les bruits de mesure sont inconnus mais bornés tels que :

$$\underline{\eta}_{qx} \leq \eta_{qx} \leq \bar{\eta}_{qx}, \underline{\eta}_{qy} \leq \eta_{qy} \leq \bar{\eta}_{qy}, \underline{\eta}_{qz} \leq \eta_{qz} \leq \bar{\eta}_{qz}, \underline{\eta}_{q\psi} \leq \eta_{q\psi} \leq \bar{\eta}_{q\psi} \quad (\text{IV.28})$$

$$\underline{\delta}_{q1} \leq \delta_{q1} \leq \bar{\delta}_{q1}, \underline{\delta}_{q2} \leq \delta_{q2} \leq \bar{\delta}_{q2}, \underline{\delta}_{q3} \leq \delta_{q3} \leq \bar{\delta}_{q3}, \underline{\delta}_{q4} \leq \delta_{q4} \leq \bar{\delta}_{q4} \quad (\text{IV.29})$$

Sous les hypothèses (IV.4) et (IV.5), des observateurs par intervalle pour les systèmes (IV.24-IV.27) sont donnés par [Abadi et al., 2019a] :

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q1} = A_{q1}\bar{F}_{q1} + B_{q1}v_{qx} + L_{q1}C_{q1}(F_{q1} - \bar{F}_{q1}) + B_{q1}\bar{\eta}_{qx} + L_{q1}\bar{\delta}_{q1} \\ \dot{\underline{F}}_{q1} = A_{q1}\underline{F}_{q1} + B_{q1}v_{qx} + L_{q1}C_{q1}(F_{q1} - \underline{F}_{q1}) + B_{q1}\underline{\eta}_{qx} + L_{q1}\underline{\delta}_{q1} \\ \underline{F}_{q1}(0) \leq F_{q1}(0) \leq \bar{F}_{q1}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q2} = A_{q2}\bar{F}_{q2} + B_{q2}v_{qy} + L_{q2}C_{q2}(F_{q2} - \bar{F}_{q2}) + B_{q2}\bar{\eta}_{qy} + L_{q2}\bar{\delta}_{q2} \\ \dot{\underline{F}}_{q2} = A_{q2}\underline{F}_{q2} + B_{q2}v_{qy} + L_{q2}C_{q2}(F_{q2} - \underline{F}_{q2}) + B_{q2}\underline{\eta}_{qy} + L_{q2}\underline{\delta}_{q2} \\ \underline{F}_{q2}(0) \leq F_{q2}(0) \leq \bar{F}_{q2}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q3} = A_{q3}\bar{F}_{q3} + B_{q3}v_{qz} + L_{q3}C_{q3}(F_{q3} - \bar{F}_{q3}) + B_{q3}\bar{\eta}_{qz} + L_{q3}\bar{\delta}_{q3} \\ \dot{\underline{F}}_{q3} = A_{q3}\underline{F}_{q3} + B_{q3}v_{qz} + L_{q3}C_{q3}(F_{q3} - \underline{F}_{q3}) + B_{q3}\underline{\eta}_{qz} + L_{q3}\underline{\delta}_{q3} \\ \underline{F}_{q3}(0) \leq F_{q3}(0) \leq \bar{F}_{q3}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q4} = A_{q4}\bar{F}_{q4} + B_{q4}v_{q\psi} + L_{q4}C_{q4}(F_{q4} - \bar{F}_{q4}) + B_{q4}\bar{\eta}_{q\psi} + L_{q4}\bar{\delta}_{q4} \\ \dot{\underline{F}}_{q4} = A_{q4}\underline{F}_{q4} + B_{q4}v_{q\psi} + L_{q4}C_{q4}(F_{q4} - \underline{F}_{q4}) + B_{q4}\underline{\eta}_{q\psi} + L_{q4}\underline{\delta}_{q4} \\ \underline{F}_{q4}(0) \leq F_{q4}(0) \leq \bar{F}_{q4}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Pour la synthèse de l'observateur, il faut utiliser la méthode par changement de coordonnées qui consiste à calculer des matrices T_{q1} , T_{q2} , T_{q3} et T_{q4} telles que les matrices $E_{q1} = T_{q1}(A_{q1} - L_{q1}C_{q1})T_{q1}^{-1}$, $E_{q2} = T_{q2}(A_{q2} - L_{q2}C_{q2})T_{q2}^{-1}$, $E_{q3} = T_{q3}(A_{q3} - L_{q3}C_{q3})T_{q3}^{-1}$ et $E_{q4} = T_{q4}(A_{q4} - L_{q4}C_{q4})T_{q4}^{-1}$ soient Hurwitz et Metzler. La procédure de calcul des matrices T_{q1} , T_{q2} , T_{q3} et T_{q4} est donnée par le lemme IV.1.

Soit les changements de base définis par $Z_{q1} = T_{q1}F_{q1}$, $Z_{q2} = T_{q2}F_{q2}$, $Z_{q3} = T_{q3}F_{q3}$ et $Z_{q4} = T_{q4}F_{q4}$. Grâce à ces changements de base, les systèmes (IV.24-IV.27) peuvent être réécrits par :

$$\begin{cases} \dot{Z}_{q1} = T_{q1}A_{q1}T_{q1}^{-1}Z_{q1} + T_{q1}B_{q1}v_{qx} + T_{q1}B_{q1}\eta_{qx} \\ Y_{q1} = C_{q1}T_{q1}^{-1}Z_{q1} + \delta_{q1} \end{cases} \quad (\text{IV.34})$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_{q2} = T_{q2}A_{q2}T_{q2}^{-1}Z_{q2} + T_{q2}B_{q2}v_{qy} + T_{q2}B_{q2}\eta_{qy} \\ Y_{q2} = C_{q2}T_{q2}^{-1}Z_{q2} + \delta_{q2} \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_{q3} = T_{q3}A_{q3}T_{q3}^{-1}Z_{q3} + T_{q3}B_{q3}v_{qz} + T_{q3}B_{q3}\eta_{qz} \\ Y_{q3} = C_{q3}T_{q3}^{-1}Z_{q3} + \delta_{q3} \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_{q4} = T_{q4}A_{q4}T_{q4}^{-1}Z_{q4} + T_{q4}B_{q4}v_{q\psi} + T_{q4}B_{q4}\eta_{q\psi} \\ Y_{q4} = C_{q4}T_{q4}^{-1}Z_{q4} + \delta_{q4} \end{cases} \quad (\text{IV.37})$$

Les observateurs par intervalle des systèmes (IV.34-IV.37) sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}}_{q1} = E_{q1}\bar{Z}_{q1} + T_{q1}B_{q1}v_{qx} + T_{q1}^+B_{q1}\bar{\eta}_{qx} - T_{q1}^-B_{q1}\underline{\eta}_{qx} + T_{q1}L_{q1}Y_{q1} + T_{q1}L_{q1}\bar{\delta}_{q1} \\ \dot{\underline{Z}}_{q1} = E_{q1}\underline{Z}_{q1} + T_{q1}B_{q1}v_{qx} + T_{q1}^+B_{q1}\underline{\eta}_{qx} - T_{q1}^-B_{q1}\bar{\eta}_{qx} + T_{q1}L_{q1}Y_{q1} + T_{q1}L_{q1}\underline{\delta}_{q1} \\ \bar{Z}_{q1}(0) = T_{q1}^+\bar{F}_{q1}(0) - T_{q1}^-\underline{F}_{q1}(0) \\ \underline{Z}_{q1}(0) = T_{q1}^+\underline{F}_{q1}(0) - T_{q1}^-\bar{F}_{q1}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}}_{q2} = E_{q2}\bar{Z}_{q2} + T_{q2}B_{q2}v_{qy} + T_{q2}^+B_{q2}\bar{\eta}_{qy} - T_{q2}^-B_{q2}\underline{\eta}_{qy} + T_{q2}L_{q2}Y_{q2} + T_{q2}L_{q2}\bar{\delta}_{q2} \\ \dot{\underline{Z}}_{q2} = E_{q2}\underline{Z}_{q2} + T_{q2}B_{q2}v_{qy} + T_{q2}^+B_{q2}\underline{\eta}_{qy} - T_{q2}^-B_{q2}\bar{\eta}_{qy} + T_{q2}L_{q2}Y_{q2} + T_{q2}L_{q2}\underline{\delta}_{q2} \\ \bar{Z}_{q2}(0) = T_{q2}^+\bar{F}_{q2}(0) - T_{q2}^-\underline{F}_{q2}(0) \\ \underline{Z}_{q2}(0) = T_{q2}^+\underline{F}_{q2}(0) - T_{q2}^-\bar{F}_{q2}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}}_{q3} = E_{q3}\bar{Z}_{q3} + T_{q3}B_{q3}v_{qz} + T_{q3}^+B_{q3}\bar{\eta}_{qz} - T_{q3}^-B_{q3}\underline{\eta}_{qz} + T_{q3}L_{q3}Y_{q3} + T_{q3}L_{q3}\bar{\delta}_{q3} \\ \dot{\underline{Z}}_{q3} = E_{q3}\underline{Z}_{q3} + T_{q3}B_{q3}v_{qz} + T_{q3}^+B_{q3}\underline{\eta}_{qz} - T_{q3}^-B_{q3}\bar{\eta}_{qz} + T_{q3}L_{q3}Y_{q3} + T_{q3}L_{q3}\underline{\delta}_{q3} \\ \bar{Z}_{q3}(0) = T_{q3}^+\bar{F}_{q3}(0) - T_{q3}^-\underline{F}_{q3}(0) \\ \underline{Z}_{q3}(0) = T_{q3}^+\underline{F}_{q3}(0) - T_{q3}^-\bar{F}_{q3}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}}_{q4} = E_{q4}\bar{Z}_{q4} + T_{q4}B_{q4}v_{q\psi} + T_{q4}^+B_{q4}\bar{\eta}_{q\psi} - T_{q4}^-B_{q4}\underline{\eta}_{q\psi} + T_{q4}L_{q4}Y_{q4} + T_{q4}L_{q4}\bar{\delta}_{q4} \\ \dot{\underline{Z}}_{q4} = E_{q4}\underline{Z}_{q4} + T_{q4}B_{q4}v_{q\psi} + T_{q4}^+B_{q4}\underline{\eta}_{q\psi} - T_{q4}^-B_{q4}\bar{\eta}_{q\psi} + T_{q4}L_{q4}Y_{q4} + T_{q4}L_{q4}\underline{\delta}_{q4} \\ \bar{Z}_{q4}(0) = T_{q4}^+\bar{F}_{q4}(0) - T_{q4}^-\underline{F}_{q4}(0) \\ \underline{Z}_{q4}(0) = T_{q4}^+\underline{F}_{q4}(0) - T_{q4}^-\bar{F}_{q4}(0) \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

Avec $E_{q1} = T_{q1}(A_{q1} - L_{q1}C_{q1})T_{q1}^{-1}$, $E_{q2} = T_{q2}(A_{q2} - L_{q2}C_{q2})T_{q2}^{-1}$, $E_{q3} = T_{q3}(A_{q3} - L_{q3}C_{q3})T_{q3}^{-1}$ et $E_{q4} = T_{q4}(A_{q4} - L_{q4}C_{q4})T_{q4}^{-1}$.

Les états supérieurs et inférieurs des systèmes originaux donnés par les équations (IV.24-IV.27) sont déduits comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q1} = M_{q1}^+\bar{Z}_{q1} - M_{q1}^-\underline{Z}_{q1} \\ \dot{\underline{F}}_{q1} = M_{q1}^+\underline{Z}_{q1} - M_{q1}^-\bar{Z}_{q1} \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q2} = M_{q2}^+\bar{Z}_{q2} - M_{q2}^-\underline{Z}_{q2} \\ \dot{\underline{F}}_{q2} = M_{q2}^+\underline{Z}_{q2} - M_{q2}^-\bar{Z}_{q2} \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q3} = M_{q3}^+ \bar{Z}_{q3} - M_{q3}^- \underline{Z}_{q3} \\ \dot{\underline{F}}_{q3} = M_{q3}^+ \underline{Z}_{q3} - M_{q3}^- \bar{Z}_{q3} \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{F}}_{q4} = M_{q4}^+ \bar{Z}_{q4} - M_{q4}^- \underline{Z}_{q4} \\ \dot{\underline{F}}_{q4} = M_{q4}^+ \underline{Z}_{q4} - M_{q4}^- \bar{Z}_{q4} \end{cases} \quad (\text{IV.45})$$

avec $\bar{M}_{q1} = T_{q1}^{-1}$, $M_{q1}^+ = \max(M_{q1}, 0)$, $M_{q1}^- = M_{q1}^+ - M_{q1}$, $\bar{M}_{q2} = T_{q2}^{-1}$, $M_{q2}^+ = \max(M_{q2}, 0)$, $M_{q2}^- = M_{q2}^+ - M_{q2}$, $\bar{M}_{q3} = T_{q3}^{-1}$, $M_{q3}^+ = \max(M_{q3}, 0)$, $M_{q3}^- = M_{q3}^+ - M_{q3}$, $\bar{M}_{q4} = T_{q4}^{-1}$, $M_{q4}^+ = \max(M_{q4}, 0)$, $M_{q4}^- = M_{q4}^+ - M_{q4}$.

Les erreurs d'estimation pour chaque observateur par intervalle sont définies dans les nouvelles bases par : $\bar{e}_{q1} = \bar{Z}_{q1} - Z_{q1}$, $\underline{e}_{q1} = Z_{q1} - \underline{Z}_{q1}$, $\bar{e}_{q2} = \bar{Z}_{q2} - Z_{q2}$, $\underline{e}_{q2} = Z_{q2} - \underline{Z}_{q2}$, $\bar{e}_{q3} = \bar{Z}_{q3} - Z_{q3}$, $\underline{e}_{q3} = Z_{q3} - \underline{Z}_{q3}$, $\bar{e}_{q4} = \bar{Z}_{q4} - Z_{q4}$, $\underline{e}_{q4} = Z_{q4} - \underline{Z}_{q4}$. Leurs dynamiques sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_{q1} = E_{q1} \bar{e}_{q1} + \bar{\Pi}_{q1} \\ \dot{\underline{e}}_{q1} = E_{q1} \underline{e}_{q1} + \underline{\Pi}_{q1} \end{cases} \quad (\text{IV.46})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_{q2} = E_{q2} \bar{e}_{q2} + \bar{\Pi}_{q2} \\ \dot{\underline{e}}_{q2} = E_{q2} \underline{e}_{q2} + \underline{\Pi}_{q2} \end{cases} \quad (\text{IV.47})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_{q3} = E_{q3} \bar{e}_{q3} + \bar{\Pi}_{q3} \\ \dot{\underline{e}}_{q3} = E_{q3} \underline{e}_{q3} + \underline{\Pi}_{q3} \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_{q4} = E_{q4} \bar{e}_{q4} + \bar{\Pi}_{q4} \\ \dot{\underline{e}}_{q4} = E_{q4} \underline{e}_{q4} + \underline{\Pi}_{q4} \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

Avec

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{q1} &= T_{q1}^+ B_{q1} \bar{\eta}_{qx} - T_{q1}^- B_{q1} \underline{\eta}_{qx} - T_{q1} B_{q1} \eta_{qx} + T_{q1} L_{q1} (\bar{\delta}_{q1} - \delta_{q1}), \\ \underline{\Pi}_{q1} &= T_{q1} B_{q1} \eta_{qx} + T_{q1}^- B_{q1} \bar{\eta}_{qx} - T_{q1}^+ B_{q1} \underline{\eta}_{qx} + T_{q1} L_{q1} (\delta_{q1} - \underline{\delta}_{q1}), \\ \bar{\Pi}_{q2} &= T_{q2}^+ B_{q2} \bar{\eta}_{qy} - T_{q2}^- B_{q2} \underline{\eta}_{qy} - T_{q2} B_{q2} \eta_{qy} + T_{q2} L_{q2} (\bar{\delta}_{q2} - \delta_{q2}), \\ \underline{\Pi}_{q2} &= T_{q2} B_{q2} \eta_{qy} + T_{q2}^- B_{q2} \bar{\eta}_{qy} - T_{q2}^+ B_{q2} \underline{\eta}_{qy} + T_{q2} L_{q2} (\delta_{q2} - \underline{\delta}_{q2}), \\ \bar{\Pi}_{q3} &= T_{q3}^+ B_{q3} \bar{\eta}_{qz} - T_{q3}^- B_{q3} \underline{\eta}_{qz} - T_{q3} B_{q3} \eta_{qz} + T_{q3} L_{q3} (\bar{\delta}_{q3} - \delta_{q3}), \\ \underline{\Pi}_{q3} &= T_{q3} B_{q3} \eta_{qz} + T_{q3}^- B_{q3} \bar{\eta}_{qz} - T_{q3}^+ B_{q3} \underline{\eta}_{qz} + T_{q3} L_{q3} (\delta_{q3} - \underline{\delta}_{q3}), \\ \bar{\Pi}_{q4} &= T_{q4}^+ B_{q4} \bar{\eta}_{q\psi} - T_{q4}^- B_{q4} \underline{\eta}_{q\psi} - T_{q4} B_{q4} \eta_{q\psi} + T_{q4} L_{q4} (\bar{\delta}_{q4} - \delta_{q4}), \\ \underline{\Pi}_{q4} &= T_{q4} B_{q4} \eta_{q\psi} + T_{q4}^- B_{q4} \bar{\eta}_{q\psi} - T_{q4}^+ B_{q4} \underline{\eta}_{q\psi} + T_{q4} L_{q4} (\delta_{q4} - \underline{\delta}_{q4}). \end{aligned}$$

Les fonctions $\underline{\Pi}_{q1}$, $\underline{\Pi}_{q2}$, $\underline{\Pi}_{q3}$, $\underline{\Pi}_{q4}$, $\bar{\Pi}_{q1}$, $\bar{\Pi}_{q2}$, $\bar{\Pi}_{q3}$ et $\bar{\Pi}_{q4}$ sont globalement lipschitziennes, alors pour $\underline{Z}_{q1} \leq Z_{q1} \leq \bar{Z}_{q1}$, $\underline{Z}_{q2} \leq Z_{q2} \leq \bar{Z}_{q2}$, $\underline{Z}_{q3} \leq Z_{q3} \leq \bar{Z}_{q3}$, $\underline{Z}_{q4} \leq Z_{q4} \leq \bar{Z}_{q4}$ et pour une norme

sous-multipliative choisie $\|\cdot\|$, il existe des constantes positives π_{qji} , $j = 1..4$, $i = 1..6$, telles que :

$$\|\bar{\Pi}_{q1}\| \leq \pi_{q11}\|\bar{Z}_{q1} - Z_{q1}\| + \pi_{q12}\|\underline{Z}_{q1} - Z_{q1}\| + \pi_{q13} \quad (\text{IV.50})$$

$$\|\underline{\Pi}_{q1}\| \leq \pi_{q14}\|\bar{Z}_{q1} - Z_{q1}\| + \pi_{q15}\|\underline{Z}_{q1} - Z_{q1}\| + \pi_{q16} \quad (\text{IV.51})$$

$$\|\bar{\Pi}_{q2}\| \leq \pi_{q21}\|\bar{Z}_{q2} - Z_{q2}\| + \pi_{q22}\|\underline{Z}_{q2} - Z_{q2}\| + \pi_{q23} \quad (\text{IV.52})$$

$$\|\underline{\Pi}_{q2}\| \leq \pi_{q24}\|\bar{Z}_{q2} - Z_{q2}\| + \pi_{q25}\|\underline{Z}_{q2} - Z_{q2}\| + \pi_{q26} \quad (\text{IV.53})$$

$$\|\bar{\Pi}_{q3}\| \leq \pi_{q31}\|\bar{Z}_{q3} - Z_{q3}\| + \pi_{q32}\|\underline{Z}_{q3} - Z_{q3}\| + \pi_{q33} \quad (\text{IV.54})$$

$$\|\underline{\Pi}_{q3}\| \leq \pi_{q34}\|\bar{Z}_{q3} - Z_{q3}\| + \pi_{q35}\|\underline{Z}_{q3} - Z_{q3}\| + \pi_{q36} \quad (\text{IV.55})$$

$$\|\bar{\Pi}_{q4}\| \leq \pi_{q41}\|\bar{Z}_{q4} - Z_{q4}\| + \pi_{q42}\|\underline{Z}_{q4} - Z_{q4}\| + \pi_{q43} \quad (\text{IV.56})$$

$$\|\underline{\Pi}_{q4}\| \leq \pi_{q44}\|\bar{Z}_{q4} - Z_{q4}\| + \pi_{q45}\|\underline{Z}_{q4} - Z_{q4}\| + \pi_{q46} \quad (\text{IV.57})$$

Étant donné que les matrices E_{q1} , E_{q2} , E_{q3} et E_{q4} sont positives et les fonctions $\underline{\Pi}_{q1}$, $\bar{\Pi}_{q1}$, $\underline{\Pi}_{q2}$, $\bar{\Pi}_{q2}$, $\underline{\Pi}_{q3}$, $\bar{\Pi}_{q3}$, $\underline{\Pi}_{q4}$ et $\bar{\Pi}_{q4}$ sont positives, nous pouvons déduire que les dynamiques des erreurs d'observation $\bar{e}_{q1}$, $\bar{e}_{q2}$, $\bar{e}_{q3}$, $\bar{e}_{q4}$, $\underline{e}_{q1}$, $\underline{e}_{q2}$, $\underline{e}_{q3}$ et $\underline{e}_{q4}$ sont positives.

Théorème IV.1 [Zheng et al., 2016] *S'il existe des matrices symétriques définies positives P_{q1} , P_{q2} , P_{q3} , P_{q4} , Q_{q1} , Q_{q2} , Q_{q3} et Q_{q4} et des entiers μ_{q1} , μ_{q2} , μ_{q3} et μ_{q4} telles que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} E_{Z1}^T P_{q1} + P_{q1} E_{Z1} + \mu_{q1} P_{q1}^2 + \frac{\gamma_{q1}}{\mu_{q1}} I_{q1} + Q_{q1} & P_{q1} \\ P_{q1} & \frac{-I_{q1}}{\mu_{q1}} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (\text{IV.58})$$

$$\begin{bmatrix} E_{Z2}^T P_{q2} + P_{q2} E_{Z2} + \mu_{q2} P_{q2}^2 + \frac{\gamma_{q2}}{\mu_{q2}} I_{q2} + Q_{q2} & P_{q2} \\ P_{q2} & \frac{-I_{q2}}{\mu_{q2}} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (\text{IV.59})$$

$$\begin{bmatrix} E_{Z3}^T P_{q3} + P_{q3} E_{Z3} + \mu_{q3} P_{q3}^2 + \frac{\gamma_{q3}}{\mu_{q3}} I_{q3} + Q_{q3} & P_{q3} \\ P_{q3} & \frac{-I_{q3}}{\mu_{q3}} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (\text{IV.60})$$

$$\begin{bmatrix} E_{Z4}^T P_{q4} + P_{q4} E_{Z4} + \mu_{q4} P_{q4}^2 + \frac{\gamma_{q4}}{\mu_{q4}} I_{q4} + Q_{q4} & P_{q4} \\ P_{q4} & \frac{-I_{q4}}{\mu_{q4}} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (\text{IV.61})$$

Avec $E_{Z1} = \text{diag}(E_{q1}, E_{q1})$, $E_{Z2} = \text{diag}(E_{q2}, E_{q2})$, $E_{Z3} = \text{diag}(E_{q3}, E_{q3})$, $E_{Z4} = \text{diag}(E_{q4}, E_{q4})$, $I_{q1} = I_{q2} = I_{q3} = I_4$, $I_{q4} = I_2$, $\gamma_{q1} = 2 \max(\pi_{q11}^2, \pi_{q12}^2, \pi_{q13}^2, \pi_{q14}^2, \pi_{q15}^2, \pi_{q16}^2)$, $\gamma_{q2} = 2 \max(\pi_{q21}^2, \pi_{q22}^2, \pi_{q23}^2, \pi_{q24}^2, \pi_{q25}^2, \pi_{q26}^2)$, $\gamma_{q3} = 2 \max(\pi_{q31}^2, \pi_{q32}^2, \pi_{q33}^2, \pi_{q34}^2, \pi_{q35}^2, \pi_{q36}^2)$ et $\gamma_{q4} = 2 \max(\pi_{q41}^2, \pi_{q42}^2, \pi_{q43}^2, \pi_{q44}^2, \pi_{q45}^2, \pi_{q46}^2)$. Alors, les variables $\underline{Z}_{q1}$, $\underline{Z}_{q2}$, $\underline{Z}_{q3}$, $\underline{Z}_{q4}$, $\bar{Z}_{q1}$, $\bar{Z}_{q2}$, $\bar{Z}_{q3}$ et $\bar{Z}_{q4}$ sont

bornées pour tout $t \geq 0$.

Finalement, la bornitude de $\underline{Z}_{q1}$, $\underline{Z}_{q2}$, $\underline{Z}_{q3}$, $\underline{Z}_{q4}$, $\bar{Z}_{q1}$, $\bar{Z}_{q2}$, $\bar{Z}_{q3}$ et $\bar{Z}_{q4}$ impliquent la même propriété pour Z_{q1} , Z_{q2} , Z_{q3} et Z_{q4} .

Pour prouver la stabilité de l'erreur d'observateur par intervalle pour la position x , nous rappelons la preuve définie dans [Zheng et al., 2016] qui montre que les variables $\bar{Z}_{q1}$ et $\underline{Z}_{q1}$ sont bornées.

Soit la fonction de Lyapunov :

$$V_{obsx} = e_{q1}^T P_{q1} e_{q1} \quad (IV.62)$$

Avec $e_{q1} = (\bar{e}_{q1}^T, \underline{e}_{q1}^T)^T$ et P_{q1} est une matrice symétrique définie positive. L'erreur d'estimation du système (IV.46) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{e}_{q1} = E_{Z1} e_{q1} + \Pi_{q1} \quad (IV.63)$$

Avec $E_{Z1} = \text{diag}(E_{q1}, E_{q1})$, $\Pi_{q1} = [\bar{\Pi}_{q1}^T, \underline{\Pi}_{q1}^T]^T$. La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est définie par :

$$\dot{V}_{obsx} = e_{q1}^T (E_{Z1}^T P_{q1} + P_{q1} E_{Z1}) e_{q1} + 2e_{q1}^T P_{q1} \Pi_{q1} \quad (IV.64)$$

$$\leq e_{q1}^T (E_{Z1}^T P_{q1} + P_{q1} E_{Z1}) e_{q1} + \mu_{q1} e_{q1}^T P_{q1}^2 e_{q1} + \frac{1}{\mu_{q1}} \|\Pi_{q1}\|^2 \quad (IV.65)$$

Selon le corollaire 1 défini dans [Zheng et al., 2016], il existe une constante positive γ_{q1} telle que :

$$\|\Pi_{q1}\|^2 \leq \gamma_{q1} (\|e_{q1}\|^2 + 1) \quad (IV.66)$$

avec $\gamma_{q1} = 2 \max(\pi_{q11}^2, \pi_{q12}^2, \pi_{q13}^2, \pi_{q14}^2, \pi_{q15}^2, \pi_{q16}^2)$. L'équation (IV.65) peut être définie comme suit :

$$\dot{V}_{obsx} \leq e_{q1}^T (E_{Z1}^T P_{q1} + P_{q1} E_{Z1} + \mu_{q1} P_{q1}^2 + \frac{\gamma_{q1}}{\mu_{q1}} I_{q1}) e_{q1} + \gamma_{q1} \quad (IV.67)$$

S'il existe des matrices symétriques définies positives P_{q1} et Q_{q1} et un scalaire positif Γ_{q1} tel que l'inégalité matricielle donnée par l'équation (IV.58) est satisfaite, l'équation (IV.67) est définie comme suit :

$$\dot{V}_{obsx} \leq e_z^T (-Q_{q1}) e_{q1} + \gamma_{q1} \quad (IV.68)$$

Ce qui implique que les variables $\underline{Z}_{q1}$ et $\bar{Z}_{q1}$ sont bornées pour tout $t \geq 0$. Finalement, la bornitude de $\underline{Z}_{q1}$ et $\bar{Z}_{q1}$ implique la même propriété pour Z_{q1} .

La preuve de la bornitude de $\underline{Z}_{q2}$, $\bar{Z}_{q2}$, $\underline{Z}_{q3}$, $\bar{Z}_{q3}$, $\underline{Z}_{q4}$ et $\bar{Z}_{q4}$ est similaire à celle de $\underline{Z}_{q1}$ et $\bar{Z}_{q1}$. Une fois nous avons calculé les observateurs par intervalle pour les systèmes (IV.24-IV.27), nous choisissons le centre des intervalles obtenus comme estimation robuste de vecteur de

sortie plate F_q et ses dérivés tels que :

$$F_{mq1} = \frac{F_{q1} + \bar{F}_{q1}}{2}, F_{mq2} = \frac{F_{q2} + \bar{F}_{q2}}{2}, F_{mq3} = \frac{F_{q3} + \bar{F}_{q3}}{2}, F_{mq4} = \frac{F_{q4} + \bar{F}_{q4}}{2} \quad (\text{IV.69})$$

En utilisant les estimations robustes données par l'équation (IV.69), nous proposons les nouveaux bouclages suivants :

$$v_{mqx} = \ddot{\bar{F}}_{qdx} - k_{x4}\ddot{e}_{mq1} - k_{x3}\dot{e}_{mq1} - k_{x2}\dot{e}_{mq1} - k_{x1}e_{mq1} \quad (\text{IV.70})$$

$$v_{mqy} = \ddot{\bar{F}}_{qdy} - k_{y4}\ddot{e}_{mq2} - k_{y3}\dot{e}_{mq2} - k_{y2}\dot{e}_{mq2} - k_{y1}e_{mq2} \quad (\text{IV.71})$$

$$v_{mqz} = \ddot{\bar{F}}_{qdz} - k_{z4}\ddot{e}_{mq3} - k_{z3}\dot{e}_{mq3} - k_{z2}\dot{e}_{mq3} - k_{z1}e_{mq3} \quad (\text{IV.72})$$

$$v_{mq\psi} = \ddot{\bar{F}}_{qd\psi} - k_{\psi2}\dot{e}_{mq4} - k_{\psi1}e_{mq4} \quad (\text{IV.73})$$

Avec $e_{mq1} = F_{mq11} - F_{qdx}$, $e_{mq2} = F_{mq21} - F_{qdy}$, $e_{mq3} = F_{mq31} - F_{qdz}$ et $e_{mq4} = F_{mq41} - F_{qd\psi}$. k_{x1} , k_{x2} , k_{x3} , k_{x4} , k_{y1} , k_{y2} , k_{y3} , k_{y4} , k_{z1} , k_{z2} , k_{z3} , k_{z4} , $k_{\psi1}$ et $k_{\psi2}$ sont les gains de la commande GFTC de quadrirotor. Ces gains sont choisis tels que :

$$s^4 + k_{x4}s^3 + k_{x3}s^2 + k_{x2}s + k_{x1} = (s + \omega_{qx})^3 \quad (\text{IV.74})$$

$$s^4 + k_{y4}s^3 + k_{y3}s^2 + k_{y2}s + k_{y1} = (s + \omega_{qy})^3 \quad (\text{IV.75})$$

$$s^4 + k_{z4}s^3 + k_{z3}s^2 + k_{z2}s + k_{z1} = (s + \omega_{qz})^3 \quad (\text{IV.76})$$

$$s^2 + k_{\psi2}s + k_{\psi1} = (s + \omega_{q\psi})^2 \quad (\text{IV.77})$$

Où $\omega_q = [\omega_{qx}, \omega_{qy}, \omega_{qz}, \omega_{q\psi}]$ représente le vecteur des paramètres commande GFTC de quadrirotor. Par identification, nous pouvons déduire les gains comme suit :

$$\begin{aligned} k_{x1} &= \omega_{qx}^4, k_{y1} = \omega_{qy}^4, k_{z1} = \omega_{qz}^4, k_{x2} = 4\omega_{qx}^3, k_{y2} = 4\omega_{qy}^3, k_{z2} = 4\omega_{qz}^3, k_{x3} = 6\omega_{qx}^2, \\ k_{y3} &= 6\omega_{qy}^2, k_{z3} = 6\omega_{qz}^2, k_{x4} = 4\omega_{qx}, k_{y4} = 4\omega_{qy}, k_{z4} = 4\omega_{qz}, k_{\psi1} = \omega_{q\psi}^2, k_{\psi2} = 2\omega_{q\psi} \end{aligned} \quad (\text{IV.78})$$

En remplaçant $\ddot{\bar{F}}_{q11}$, $\ddot{\bar{F}}_{q21}$, $\ddot{\bar{F}}_{q31}$ et $\ddot{\bar{F}}_{q41}$ par les bouclages donnés par les équations (IV.70-IV.73) dans la commande par platitude (III.49), nous obtenons la commande GFTC de quadrirotor comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_{GBTC1} \\ u_{GBTC\phi} \\ u_{GBTC\theta} \\ u_{GBTC\psi} \end{bmatrix} = B_q^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{F}_{qdx} - k_{x4}\ddot{e}_{mq1} - k_{x3}\dot{e}_{mq1} - k_{x2}\dot{e}_{mq1} - k_{x1}e_{mq1} \\ \ddot{F}_{qdy} - k_{y4}\ddot{e}_{mq2} - k_{y3}\dot{e}_{mq2} - k_{y2}\dot{e}_{mq2} - k_{y1}e_{mq2} \\ \ddot{F}_{qdz} - k_{z4}\ddot{e}_{mq3} - k_{z3}\dot{e}_{mq3} - k_{z2}\dot{e}_{mq3} - k_{z1}e_{mq3} \\ \ddot{F}_{qd\psi} - k_{\psi2}\dot{e}_{mq4} - k_{\psi1}e_{mq4} \end{bmatrix} - B_q^{-1}A_q \quad (IV.79)$$

Pour montrer l'efficacité de l'algorithme de la commande proposée, nous présentons deux cas de simulations selon l'amplitude des incertitudes considérées.

Nous choisissons les mêmes paramètres de quadrirotor des chapitres précédents. Ces derniers sont définis tels que :

$$m = 0.5 \text{ kg}, I_x = 0.002 \text{ kg.m}^2, I_y = 0.002 \text{ kg.m}^2, I_z = 0.004 \text{ kg.m}^2, l_q = 0.3 \text{ m}, g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}.$$

Pour les deux simulations, les trajectoires de référence choisies pour chaque sortie plate sont définies telles que :

$$F_{qdx} = \sum_{j=0}^{11} B_j^{11}(t)\alpha_{xj}, F_{qdy} = \sum_{j=0}^{11} B_j^{11}\alpha_{yj}, F_{qdz} = \sum_{j=0}^{11} B_j^{11}(t)\alpha_{zj}, F_{qd\psi} = \sum_{j=0}^{11} B_j^{11}(t)\alpha_{\psi j} \quad t \in [0, 10] \quad (IV.80)$$

$$\text{Avec } B_j^{11}(t) = \frac{11!}{j!(11-j)!} \left(\frac{5-t}{5}\right)^{11-j} \left(\frac{t}{5}\right)^j, \alpha_{x0} = \alpha_{x1} = \alpha_{x2} = \alpha_{x3} = 0, \alpha_{x4} = 24.55, \alpha_{x5} = -61.5, \alpha_{x6} = 72.6, \alpha_{x7} = -21.7, \alpha_{x8} = \alpha_{x9} = \alpha_{x10} = \alpha_{x11} = 10, \alpha_{y0} = \alpha_{y1} = \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = 0, \alpha_{y4} = 14.55, \alpha_{y5} = -11.5, \alpha_{y6} = -10.2, \alpha_{y7} = 3.8, \alpha_{y8} = \alpha_{y9} = \alpha_{y10} = \alpha_{y11} = 10, \alpha_{z0} = \alpha_{z1} = 0, \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \alpha_{z4} = \alpha_{z5} = \alpha_{z6} = \alpha_{z7} = \alpha_{z8} = \alpha_{z9} = 3, \alpha_{z10} = \alpha_{z11} = 0, \alpha_{\psi0} = \alpha_{\psi1} = 0, \alpha_{\psi2} = \alpha_{\psi3} = \alpha_{\psi4} = \alpha_{\psi5} = \alpha_{\psi6} = \alpha_{\psi7} = \alpha_{\psi8} = \alpha_{\psi9} = 2, \alpha_{\psi10} = \alpha_{\psi11} = 0.$$

Nous considérons que le quadrirotor part d'un état initial incertain $X_q(0) = [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$.

Les paramètres de la commande GFTC sont choisies telles que : $\omega_{qx} = \omega_{qy} = \omega_{qz} = 2 \text{ rad/s}$, $\omega_{q\psi} = 5 \text{ rad/s}$. Alors les valeurs des gains de la commande GFTC sont déduites d'après les équations (IV.78) comme suit : $k_{x1} = k_{y1} = k_{z1} = 16$, $k_{x2} = k_{y2} = k_{z3} = 32$, $k_{x3} = k_{y3} = k_{z3} = 24$, $k_{x4} = k_{y4} = k_{z4} = 8$, $k_{\psi1} = 25$, $k_{\psi2} = 10$.

Les gains $L_{q1} = L_{q2} = L_{q3} = [30, 335, 1650, 3024]^T$ et $L_{q4} = [31, 240]^T$ sont obtenus par la méthode de placement des pôles $p_{x,y,z} = [-6, -7, -8, -9]^T$ et $p_{\psi} = [-15, -16]^T$. Ces choix permettent de diagonaliser les matrices $A_{q1} - L_{q1}C_{q1}$, $A_{q2} - L_{q2}C_{q2}$, $A_{q3} - L_{q3}C_{q3}$ et $A_{q4} - L_{q4}C_{q4}$.

Les matrices de passage $T_{q1} = T_{q2} = T_{q3} = 10^3 *$

$$\begin{bmatrix} -0.0640 & 0.0320 & -0.0160 & 0.0080 \\ 0.5265 & -0.1755 & 0.0585 & -0.0195 \\ -1.0240 & 0.2560 & -0.0640 & 0.0160 \\ 0.5625 & -0.1125 & 0.0225 & -0.0045 \end{bmatrix}$$

et $T_{q4} = \begin{bmatrix} -15 & -1 \\ 16 & -1 \end{bmatrix}$ sont calculés tels que les matrices E_{q1} , E_{q2} , E_{q3} et E_{q4} sont des matrices Metzler et Huriwitz.

IV.3.1 Incertitudes modérées

Dans cette simulation, on considère que l'état initial de quadrirotor $X_q(0)$, les paramètres incertains m et l_q , les perturbations externes d_q et les bruits de mesures δ_q sont bornés tels que :

$$\underline{X}_q(0) = [-2, -2, -2, -2, 0, 0, -4, -4, -4, -4, -4, -4]^T, \bar{X}_q(0) = [4, 4, 4, 4, 2, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8]^T. \quad (\text{IV.81})$$

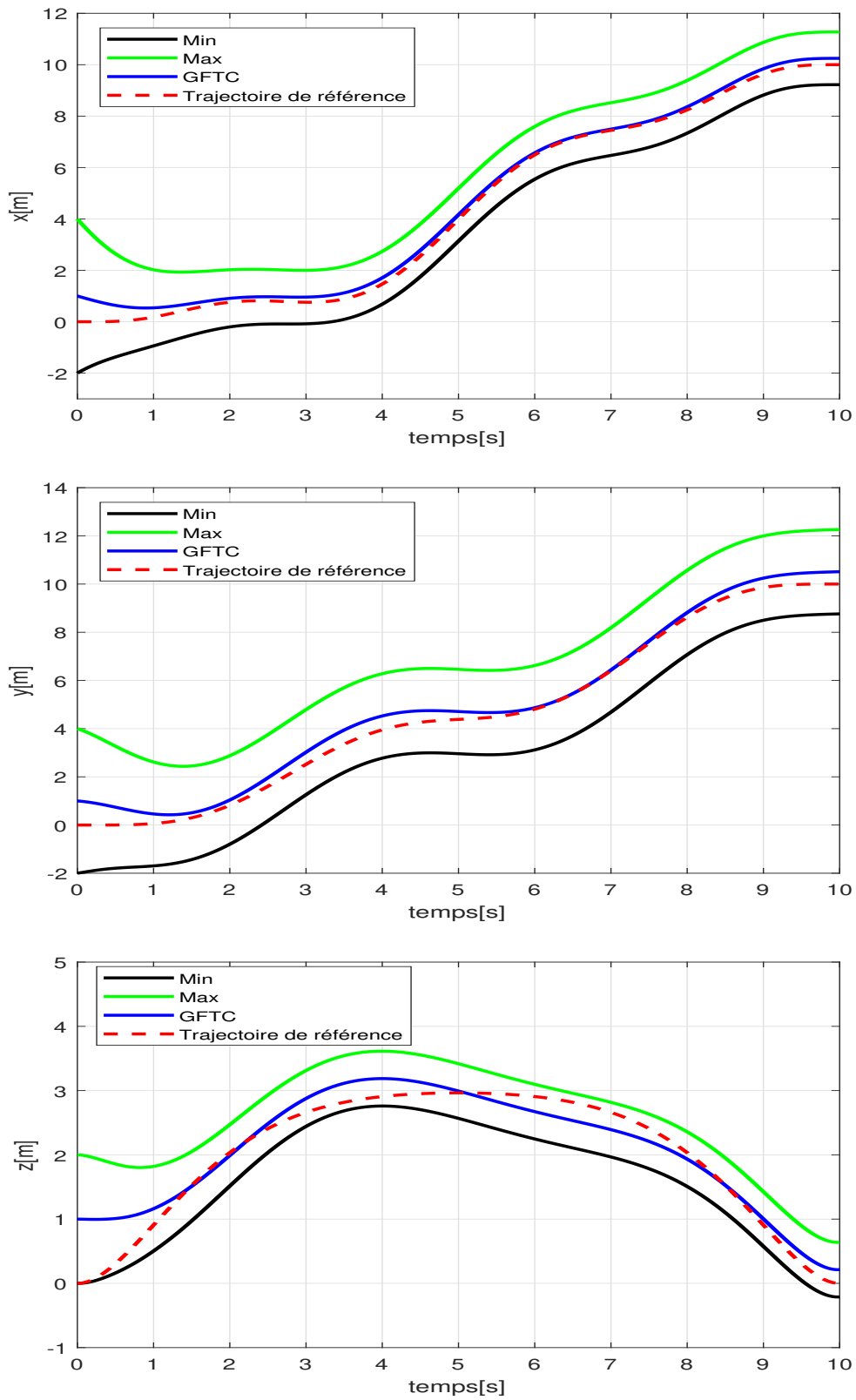
$$\underline{m} = 0.4 \text{ Kg}, \bar{m} = 0.6 \text{ Kg}, \underline{l}_q = 0.2 \text{ m}, \bar{l}_q = 0.4 \text{ m}, \quad (\text{IV.82})$$

$$\underline{d}_x = \underline{d}_y = \underline{d}_z = -0.5, \underline{d}_\theta = \underline{d}_\phi = d_\psi = -0.2, \bar{d}_x = \bar{d}_y = \bar{d}_z = 0.5, \bar{d}_\theta = \bar{d}_\phi = d_\psi = 0.2. \quad (\text{IV.83})$$

$$\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_2 = \underline{\delta}_3 = -0.1, \delta_4 = -0.3, \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0.4, \bar{\delta}_4 = 0.2. \quad (\text{IV.84})$$

Les résultats de simulation des états de quadrirotor sont donnés par les figures IV.1, IV.2, IV.3 et IV.4. La figure IV.5 présente l'entrée de commande GFTC appliquée au modèle incertain de quadrirotor (IV.18).

Les résultats de simulation montrent que l'observateur par intervalle permet d'encadrer la valeur réelle des états de quadrirotor malgré la présence de paramètres incertains, des perturbations externes et des bruits des mesures. D'autre part, nous remarquons une bonne performance de poursuite de trajectoires pour tous les états de quadrirotor. Dans le paragraphe suivant, nous allons tester cette performance lorsque nous considérons des valeurs limites importantes des incertitudes affectant le quadrirotor.

Figure IV.1 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les positions x , y et z .

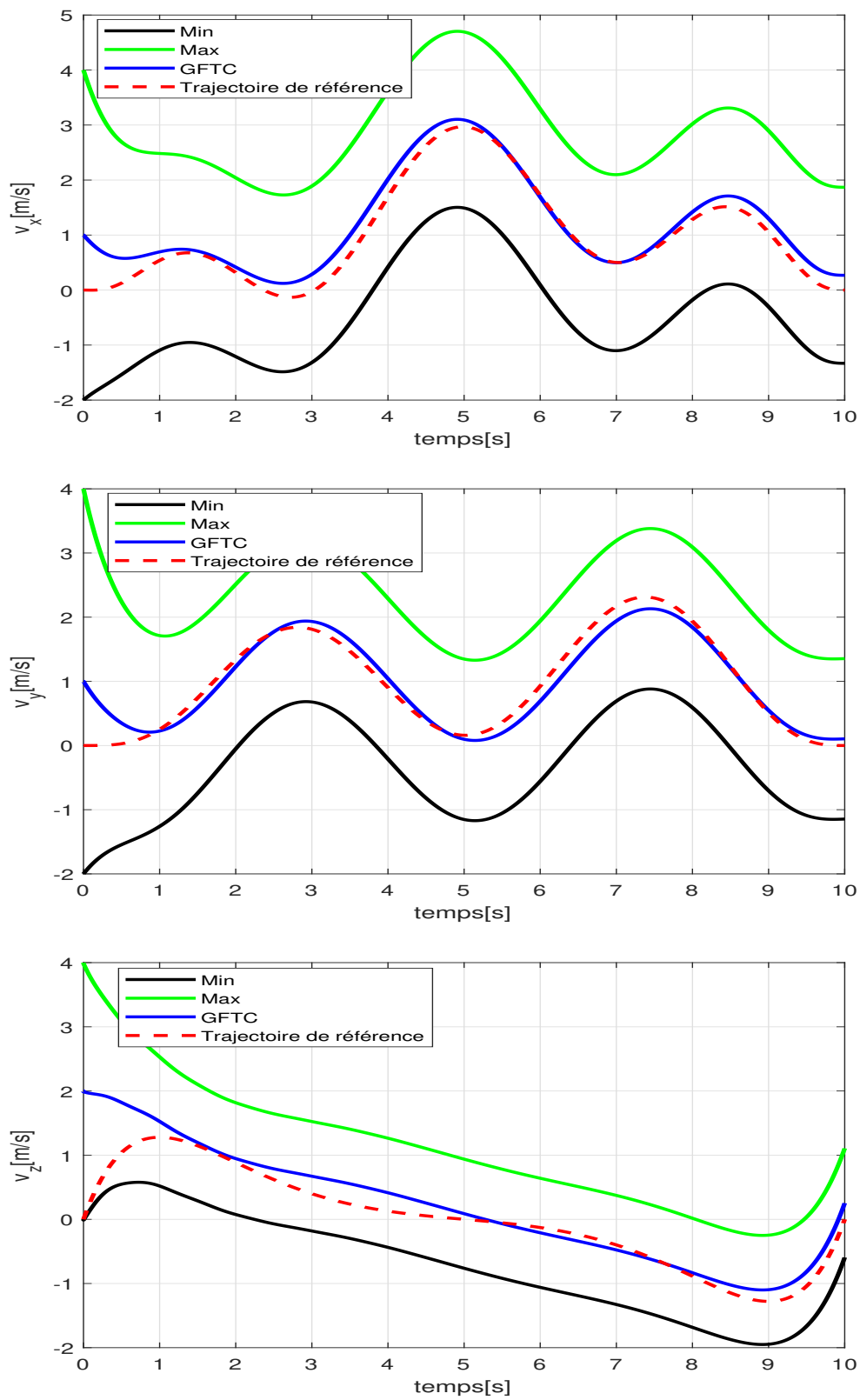


Figure IV.2 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses v_x , v_y et v_z .

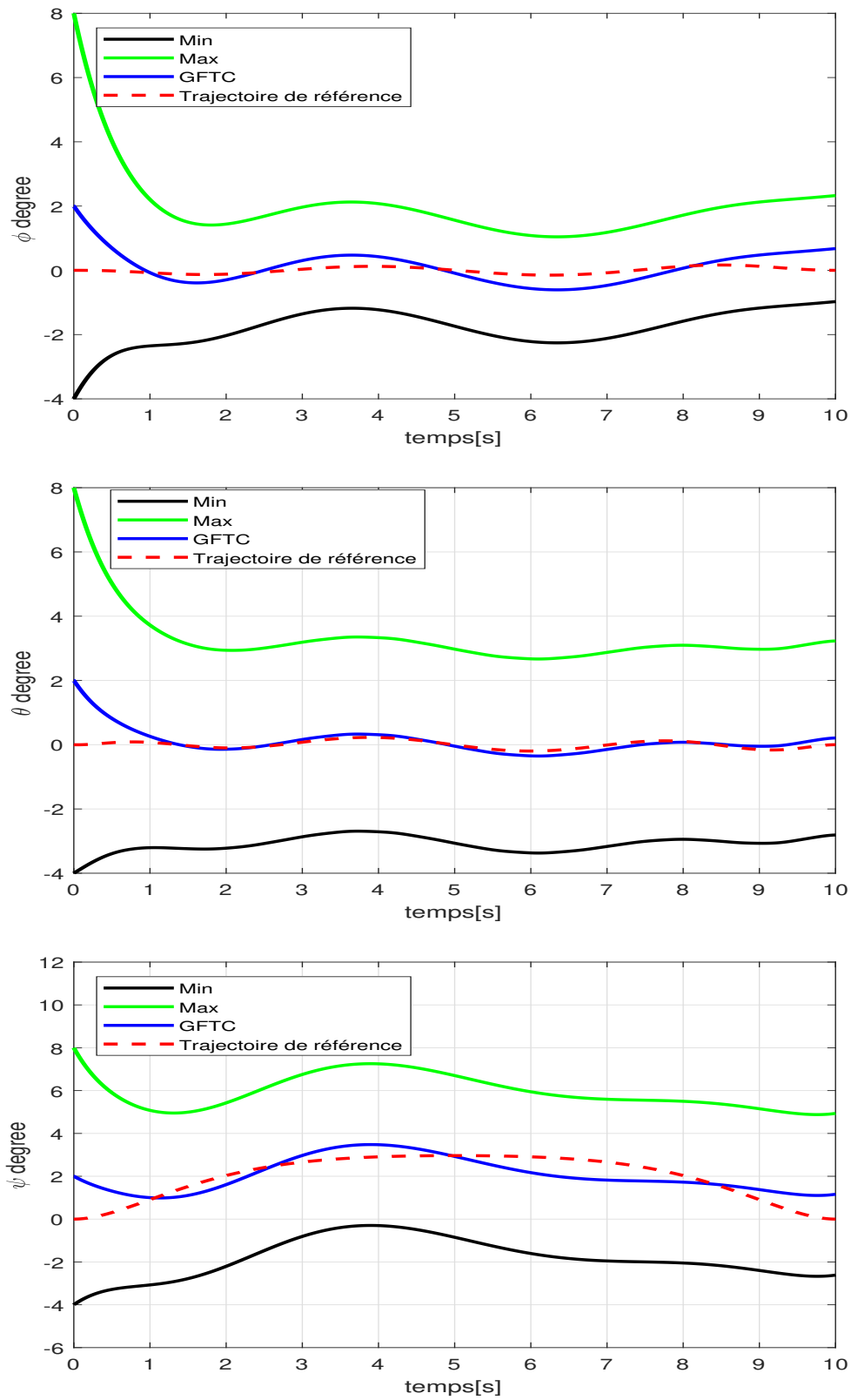


Figure IV.3 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les angles d'Euler ϕ , θ et ψ .

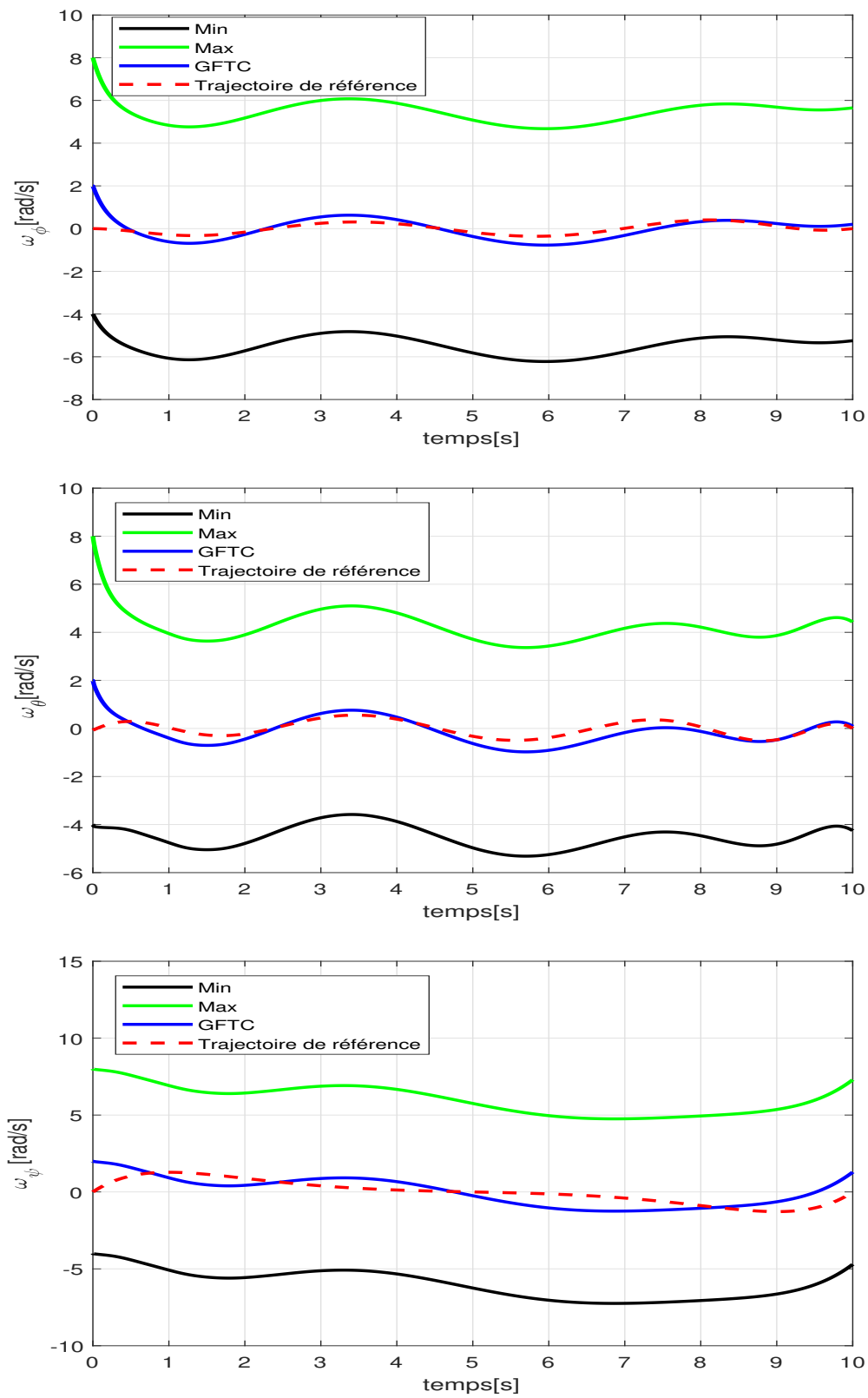
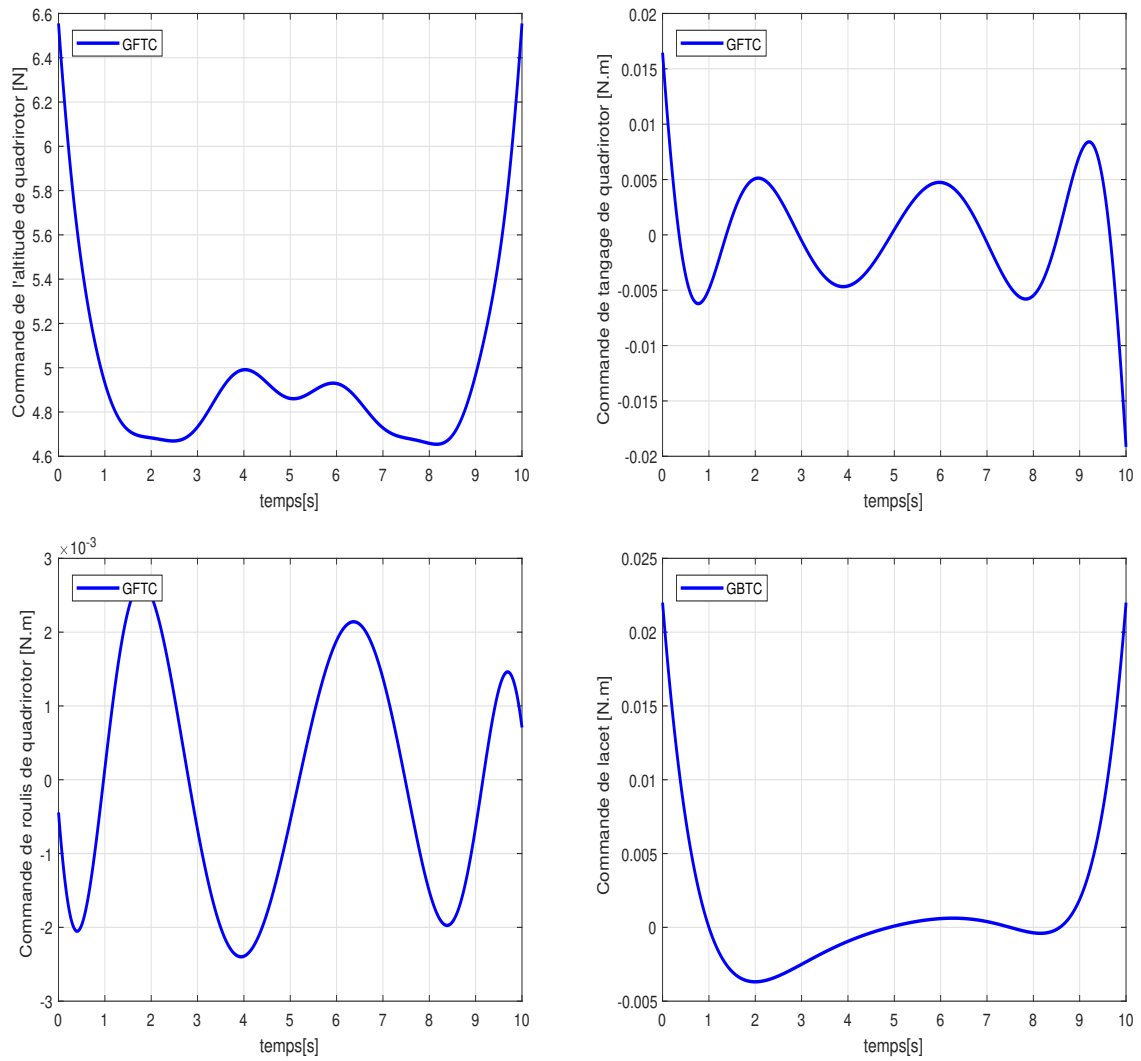


Figure IV.4 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses angulaires de ω_ϕ , ω_θ et ω_ψ

**Figure IV.5** – Entrées de commande de quadrirotor

IV.3.2 Incertitudes importantes

Dans cette simulation, on considère que l'état initial de quadrirotor $X_q(0)$, les paramètres incertains m et l_q , les perturbations d_q et les bruits des mesures δ_q sont bornés tels que ;

$$\underline{X}_q(0) = [-2, -2, -2, -2, 0, 0, -4, -4, -4, -4, -4, -4]^T, \bar{X}_q(0) = [4, 4, 4, 4, 2, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8]^T. \quad (\text{IV.85})$$

$$\underline{m} = 0.3 \text{ Kg}, \bar{m} = 0.7 \text{ Kg}, \underline{l}_q = 0.1 \text{ m}, \bar{l}_q = 0.5 \text{ m}, \quad (\text{IV.86})$$

$$\underline{d}_x = \underline{d}_y = \underline{d}_z = -2.5, \underline{d}_\theta = \underline{d}_\phi = \underline{d}_\psi = -1.2, \bar{d}_x = \bar{d}_y = \bar{d}_z = 2.5, \bar{d}_\theta = \bar{d}_\phi = \bar{d}_\psi = 1.2. \quad (\text{IV.87})$$

$$\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_2 = \underline{\delta}_3 = -0.5, \underline{\delta}_4 = -0.8, \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0.7, \bar{\delta}_4 = 0.9. \quad (\text{IV.88})$$

Les résultats de simulation des états de quadrirotor sont donnés par les figures IV.6, IV.7, IV.8 et IV.9.

Les résultats de la deuxième simulation montrent que la taille de l'intervalle estimée a augmenté par rapport à la taille d'intervalle estimée obtenue dans la simulation 1. Malgré cet inconvénient, on constate que le quadrirotor se déplace toujours dans un intervalle précis contenant la trajectoire de référence en présence des incertitudes inconnues et de valeur importante de limite.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le développement d'une commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle pour un modèle incertain de quadrirotor. La commande par platitude transforme le système non linéaire de quadrirotor soumis à des perturbations inconnues mais bornées à des systèmes linéaires incertains. L'observateur par intervalle est appliqué au système linéarisé incertain afin de générer un intervalle contenant tous les états possibles du système en présence des incertitudes. Le centre de l'intervalle obtenu est choisi comme estimation ponctuelle robuste pour le système incertain. Ainsi, un nouveau terme de bouclage basé sur les estimations robustes est conçu. Ce terme de rétroaction est intégré dans la commande par platitude donnant naissance à la nouvelle commande de suivi garantie. Les résultats de simulation montrent que la commande GFTC garantit le suivi de trajectoire de référence malgré l'existence des incertitudes inconnues de valeurs importantes affectant le quadrirotor.

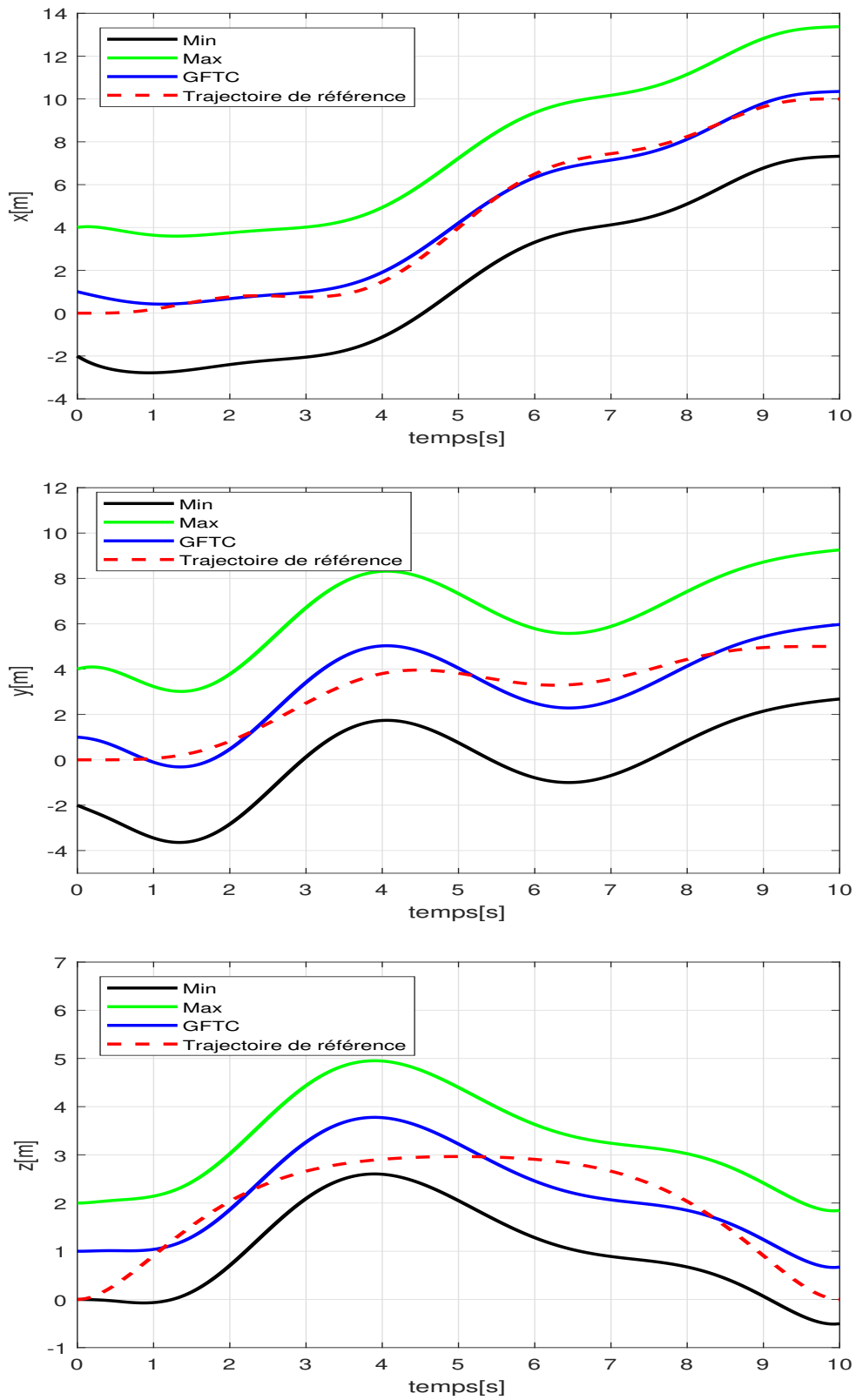


Figure IV.6 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les positions x , y et z .

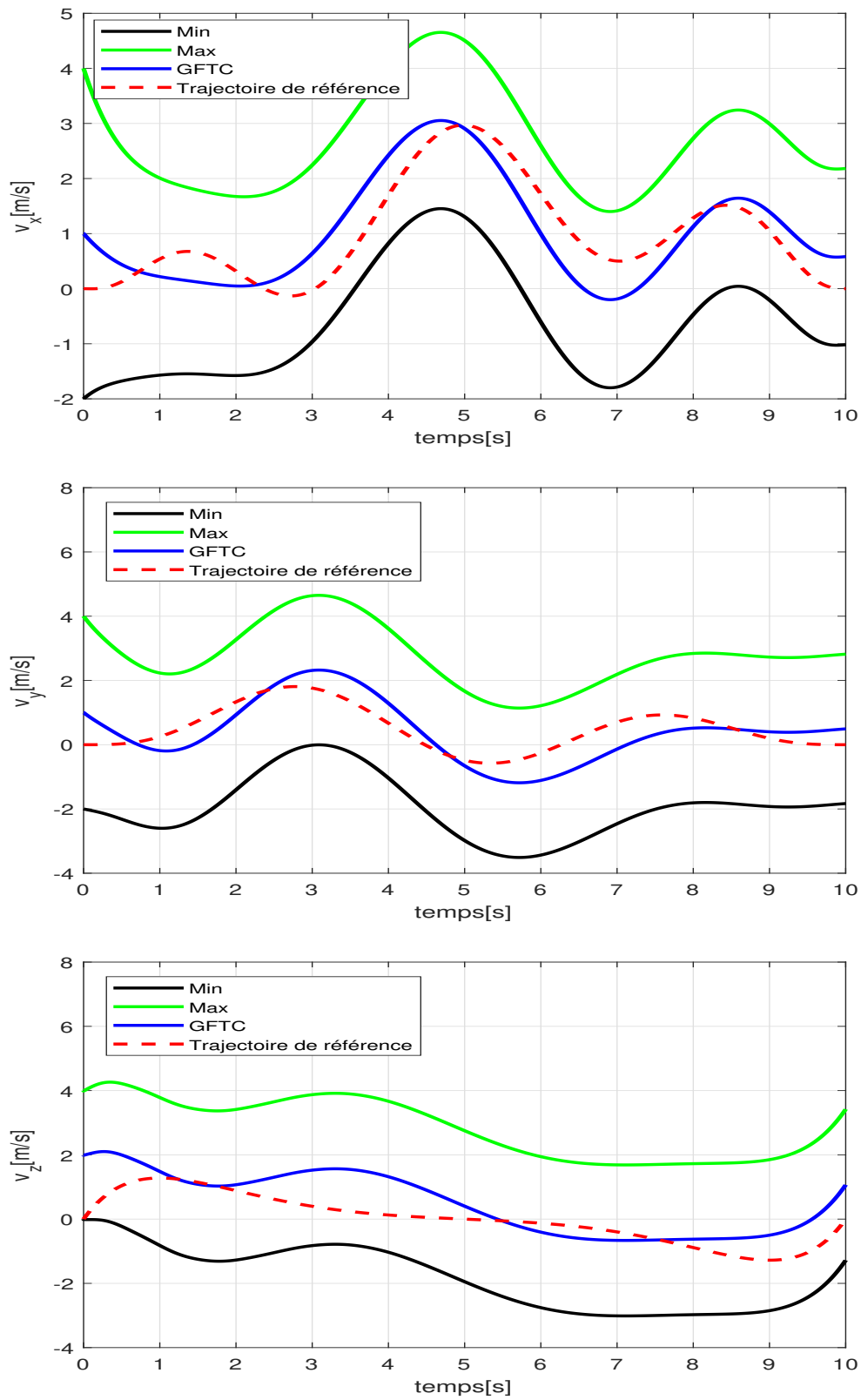


Figure IV.7 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses v_x , v_y et v_z .

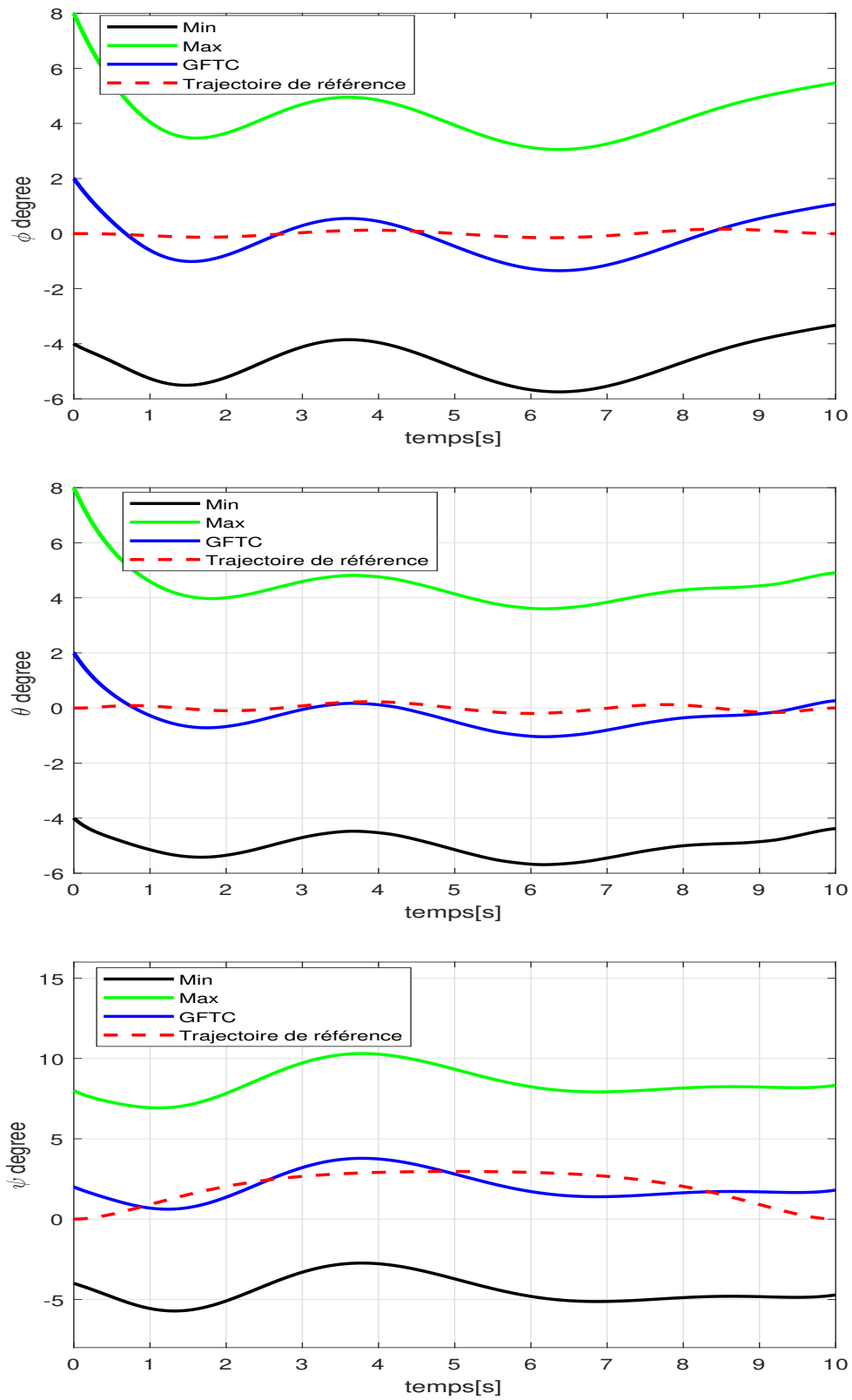


Figure IV.8 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les angles d'Euler ϕ , θ et ψ .

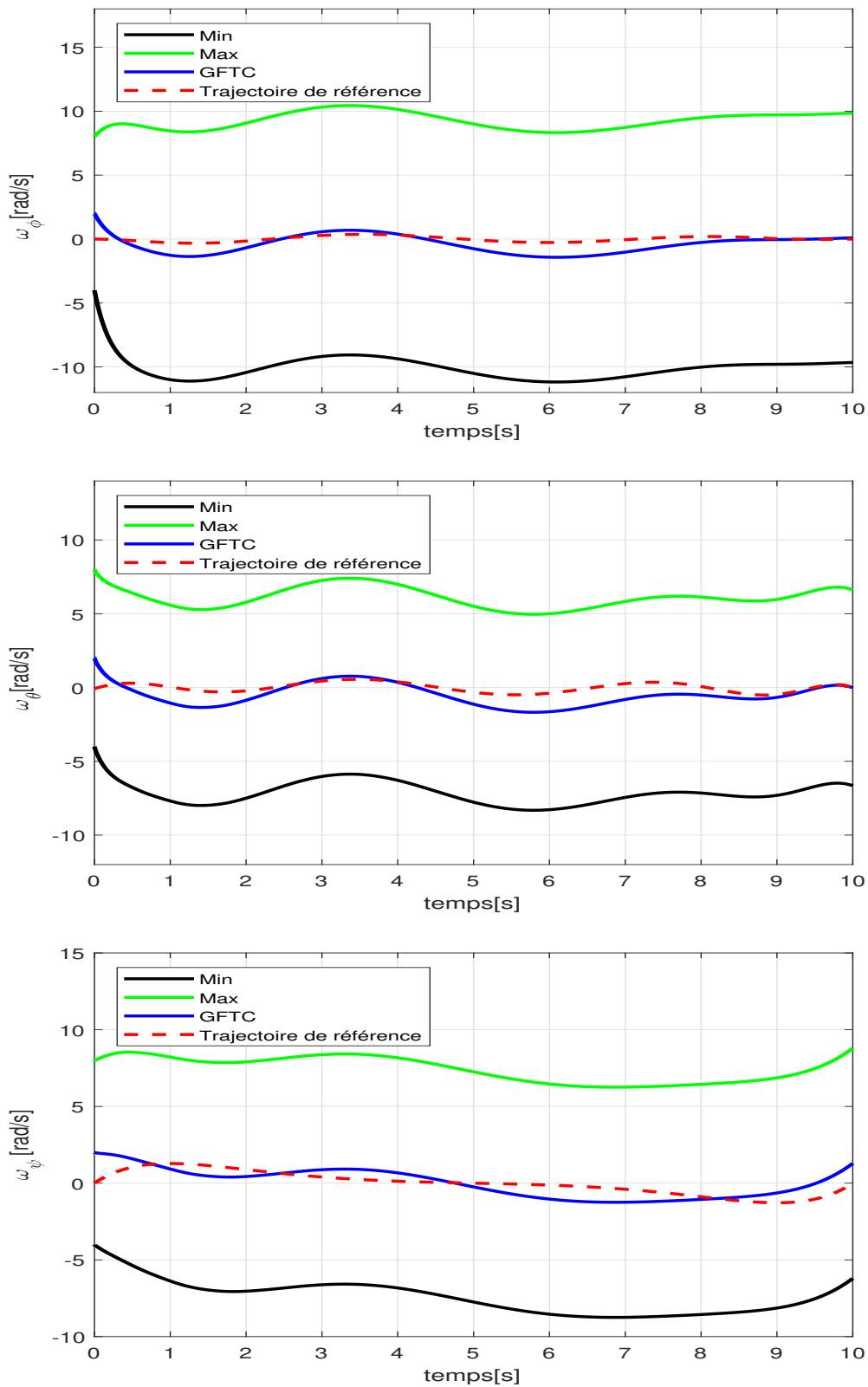


Figure IV.9 – Comportement des trajectoires de quadrirotor suivant les vitesses angulaires de ω_ϕ , ω_θ et ω_ψ

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la génération des trajectoires optimales et la conception des commandes robustes permettant de surmonter le problème de poursuite pour le quadrirotor. L'exploration autonome des plateformes robotiques aériennes présente un intérêt croissant car elle permet la réalisation de tâches nombreuses et diverses, comme des missions militaires, le recueil d'informations, la surveillance de zone, le transport, etc. De nouvelles techniques avancées ont été développées dans le cadre de notre thème de recherche. Nous citons en particulier l'utilisation de la commande par mode glissant, le contrôle actif par rejet des perturbations, l'observateur par intervalle et l'intégration du concept de la platitude différentielle.

Fondamentalement, la génération de trajectoires optimales pour les systèmes robotiques est formulée comme un problème de commande optimale. Bien que les méthodes directes utilisées pour résoudre le problème d'optimisation soient efficaces, elles trouvent des difficultés d'implantation pratiques, du fait que la dimension du problème soulevé est très grande.

Notre première contribution consiste à développer (chapitre 2) une nouvelle méthode de génération de trajectoires optimales. Cette méthode est basée sur la technique de collocation directe, la platitude différentielle et les courbes de Bézier. La platitude différentielle a été utilisée pour réduire le nombre de paramètres du problème d'optimisation. Les courbes de Bézier sont utilisées pour approximer les sorties plates. La méthode de collocation directe permet de transformer le problème d'optimisation infinie en un problème de programmation non linéaire de dimension finie. La méthodologie proposée permet de résoudre des problèmes complexes de calcul des trajectoires optimales d'une manière rapide, simple et efficace, puisque le nombre de paramètres sera réduit d'une façon considérable qui dépasse un taux de réduction de 60 %.

La méthode de génération de trajectoires optimales proposée dans le deuxième chapitre a été testée pour le cas du guidage d'un quadrirotor. L'espace de travail considéré était une salle 3D qui contient des obstacles de géométries différentes, connue a priori (forme et emplacement). Pour tenir compte de ces obstacles, nous avons intégré les modèles algébriques

des obstacles obtenus par la méthode p-norme [Abadi et al., 2017] dans les contraintes du problème d'optimisation.

La commande par platitude obtenue pour générer des trajectoires optimales révèle ses limites lorsque le modèle de système possède des incertitudes paramétriques ou le système subit des perturbations externes. Plusieurs types de commandes robustes ont été associées à la commande par platitude, telle que la commande par mode glissant. L'inconvénient majeur de cette approche est que la diminution du phénomène de broutement se fait au détriment de la robustesse de l'algorithme de commande, apporté par le terme discontinu du mode glissant. D'autre part, la mise en œuvre de la commande par platitude en boucle fermée a besoin de la connaissance exacte et à chaque instant des valeurs des sorties plates et leurs dérivées. Il est à noter ici que quelques variables d'état peuvent avoir des incertitudes ou ne sont parfois pas accessibles pour la mesure, ceci rend leurs estimations indispensables.

Notre deuxième contribution dans cette thèse consiste à proposer (chapitre 3) une nouvelle commande robuste aux incertitudes paramétriques et aux perturbations externes assurant le suivi d'une trajectoire donnée. Cette méthode est basée sur la platitude différentielle qui transforme le système non linéaire en système linéaire commandable sous la forme de Brunovsky. Pour tenir compte des incertitudes, nous avons proposé un bouclage basé sur le mode glissant et le contrôle actif par rejet des perturbations. Nous avons considéré deux cas de simulation afin d'effectuer une étude comparative. Dans la première simulation, nous avons résolu le problème de poursuite en présence des incertitudes et perturbations externes par la commande par platitude basée sur le mode glissant. Nous remarquons l'existence d'un phénomène de broutement qui rend la mise en œuvre de l'algorithme de commande très délicat. Dans la deuxième simulation, nous avons proposé d'intégrer le principe de contrôle actif par rejet des perturbations (ADRC) avec la méthode par platitude basée sur le mode glissant.

La méthode ADRC repose sur le bon fonctionnement de l'observateur à état étendu (ESO) qui estime l'état complet du système et un état supplémentaire représentant la somme des incertitudes paramétriques et les perturbations externes connues par la perturbation totale. Pour le bon fonctionnement de l'algorithme, il est souhaitable de considérer des perturbations du type constant ou de variation très négligeable. Les résultats de simulation ont prouvé que l'approche proposée permet d'éliminer l'effet des perturbations totales et de réduire l'effet de broutement tout en assurant le degré de robustesse demandé.

Pour le cas des perturbations inconnues à variations significatives affectant aussi bien le système que les mesures, la commande robuste proposée précédemment est incapable d'assurer le suivi de la trajectoire de référence. Notre troisième contribution (chapitre 4), consiste à développer une nouvelle commande pour les systèmes non linéaires plats soumis à des

perturbations inconnues mais bornées de bornes connues. L'approche proposée utilise la même structure que celle de la commande établie précédemment sauf au niveau du terme de bouclage. En effet, la commande par platitude transforme le système non linéaire soumis à des perturbations inconnues mais bornées à des systèmes linéaires incertains. L'observateur par intervalle est appliqué au système linéarisé incertain afin de générer un intervalle contenant tous les états possibles du système en présence des incertitudes. Le centre de l'intervalle obtenu est choisi comme estimation ponctuelle robuste pour le système incertain. Ainsi, un nouveau terme de bouclage basé sur les estimations robustes est conçu. Ce terme de rétroaction est intégré dans la commande par platitude donnant naissance à la nouvelle commande de suivi garantie.

La commande proposée dans le quatrième chapitre a été testée pour résoudre le problème du suivi de trajectoire d'un quadrirotor soumis à des perturbations inconnues à variation significative. Les résultats de simulation montrent que la commande par platitude basée sur l'observateur par intervalle garantit le suivi de trajectoire de référence malgré l'existence des incertitudes inconnues de valeurs importantes affectant le quadrirotor. Il est à noter que tous les algorithmes établis dans cette thèse peuvent être étendus pour le cas général des systèmes robotiques. En effet, nous avons testé tous les algorithmes pour le cas d'un robot mobile différentiel.

Comme première perspective pour cette thèse, il serait intéressant de procéder à une évaluation expérimentale en mettant en œuvre tous les algorithmes développés dans cette thèse sur une plateforme expérimentale qui tienne compte des différentes conditions atmosphériques réelles.

Comme deuxième perspective, nous pourrions nous en inspirer de l'article [Yong et al., 2019], pour développer une nouvelle commande par platitude à rejet de perturbation basée sur les observateurs par intervalle. En effet, si nous arrivons à compenser l'effet des perturbations inconnues à variations significatives affectant le système, la taille de l'intervalle d'estimation obtenue par l'observateur par intervalle serait petite. Par conséquent, comme nous réduirons la taille de l'intervalle d'estimation, nous pourrions obtenir un meilleur suivi des trajectoires de référence pour les systèmes robotiques.

Comme troisième perspective, il sera très intéressant de considérer des obstacles de géométrie et d'emplacement inconnus. Pour ce faire, des capteurs et des systèmes de vision seront nécessaires pour déterminer la position et la géométrie des obstacles. Par conséquent, nous pourrions développer un guidage pratique pour les systèmes robotiques dans un environnement réel et dynamique.

Références

[Abadi et al., 2020a]

Abadi, A., Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2020a). Guaranteed tracking controller for wheeled mobile robot based on flatness and interval observer. In *58th IEEE Conference on Decision and Control*. (cité dans 1 et 10).

[Abadi et al., 2018]

Abadi, A., Brahim, A. B. H., Mekki, H., El Amraoui, A., & Ramdani, N. (2018). Sliding mode control of quadrotor based on differential flatness. In *2018 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)* (pp. 1–6).: IEEE. (cité dans 1 et 10).

[Abadi et al., 2019a]

Abadi, A., El Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2019a). Guaranteed trajectory tracking control based on interval observer for quadrotors. *International Journal of Control*, (pp. 1–17). (cité dans 1, 10, et 96).

[Abadi et al., 2019b]

Abadi, A., El Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2019b). Optimal trajectory generation and robust flatness-based tracking control of quadrotors. *Optimal Control Applications and Methods*. (cité dans 1, 10, et 43).

[Abadi et al., 2020b]

Abadi, A., El Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2020b). Flatness-based active disturbance control for a wheeled mobile robot subject to slips and external environmental disturbances. (cité dans 2).

[Abadi et al., 2020c]

Abadi, A., El Amraoui, A., Mekki, H., & Ramdani, N. (2020c). Robust tracking control of quadrotor based on flatness and active disturbance rejection control. *IET Control Theory & Applications*, (pp. Révision majeure). (cité dans 1 et 10).

[Abadi et al., 2017]

Abadi, A., Mekki, H., Brahim, A. B. H., El Amraoui, A., & Ramdani, N. (2017). Optimal trajectory generation and flatness tracking control for a mobile robot. In *2017 18th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)* (pp. 223–228).: IEEE. (cité dans 1, 10, et 116).

[Aguilar-Ibáñez et al., 2012]

Aguilar-Ibáñez, C., Sira-Ramírez, H., Suárez-Castañón, M. S., Martínez-Navarro, E., & Moreno-Armendariz, M. A. (2012). The trajectory tracking problem for an unmanned four-rotor system: flatness-based approach. *International Journal of Control*, 85(1), 69–77. (cité dans 67).

[BELLAHCENE, 2013]

BELLAHCENE, Z. (2013). *Synthèse de lois de commande robuste pour un hélicoptère à quatre hélices*. PhD thesis, usto. (cité dans 18).

[Boubezoula et al., 2018]

Boubezoula, M., Hassam, A., & Boutalbi, O. (2018). Robust-flatness controller design for a differentially driven wheeled mobile robot. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 16(4), 1895–1904. (cité dans 23).

[Branch & Grace, 1996]

Branch, M. A. & Grace, A. (1996). *MATLAB: optimization toolbox: user's guide version 1.5*. The MathWorks. (cité dans 33).

[Butcher, 1976]

Butcher, J. C. (1976). On the implementation of implicit runge-kutta methods. *BIT Numerical Mathematics*, 16(3), 237–240. (cité dans 32).

[Cacace et al., 2014]

Cacace, F., Germani, A., & Manes, C. (2014). A new approach to design interval observers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 60(6), 1665–1670. (cité dans 91).

[Charlet et al., 1989]

Charlet, B., Lévine, J., & Marino, R. (1989). On dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 13(2), 143–151. (cité dans 7 et 23).

[Chen et al., 2016]

Chen, L., Jia, Y., & Du, J. (2016). Robust control of flat systems using sliding mode approach. In *2016 American Control Conference (ACC)* (pp. 4749–4753).: IEEE. (cité dans 9 et 57).

[Cowling et al., 2010]

Cowling, I. D., Yakimenko, O. A., Whidborne, J. F., & Cooke, A. K. (2010). Direct method based control system for an autonomous quadrotor. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 60(2), 285–316. (cité dans 39).

[De Boor et al., 1978]

De Boor, C., De Boor, C., Mathématicien, E.-U., De Boor, C., & De Boor, C. (1978). *A practical guide to splines*, volume 27. springer-verlag New York. (cité dans 40).

[Derafa et al., 2006]

Derafa, L., Madani, T., & Benallegue, A. (2006). Dynamic modelling and experimental identification of four rotors helicopter parameters. In *2006 IEEE International Conference on Industrial Technology* (pp. 1834–1839).: IEEE. (cité dans 21).

[Dickmanns & Well, 1975]

Dickmanns, E. D. & Well, K. H. (1975). Approximate solution of optimal control problems using third order hermite polynomial functions. In *Optimization Techniques IFIP Technical Conference* (pp. 158–166).: Springer. (cité dans 32).

[Diedam & Sager, 2018]

Diedam, H. & Sager, S. (2018). Global optimal control with the direct multiple shooting method. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(2), 449–470. (cité dans 30).

[Faessler et al., 2017]

Faessler, M., Franchi, A., & Scaramuzza, D. (2017). Differential flatness of quadrotor dynamics subject to rotor drag for accurate tracking of high-speed trajectories. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3(2), 620–626. (cité dans 23 et 67).

[Fang et al., 2008]

Fang, Z., Zhi, Z., Jun, L., & Jian, W. (2008). Feedback linearization and continuous sliding mode control for a quadrotor uav. In *2008 27th Chinese Control Conference* (pp. 349–353).: IEEE. (cité dans 71).

[Fethalla et al., 2018]

Fethalla, N., Saad, M., Michalska, H., & Ghommam, J. (2018). Robust observer-based dynamic sliding mode controller for a quadrotor uav. *IEEE Access*, 6, 45846–45859. (cité dans 67 et 73).

[Fliess et al., 1992]

Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., & Rouchon, P. (1992). Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *CR Acad. Sci. Paris*, (pp. 619). (cité dans 7).

[Fliess et al., 1993]

Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., & Rouchon, P. (1993). On differentially flat nonlinear systems. In *Nonlinear Control Systems Design 1992* (pp. 159–163). Elsevier. (cité dans 22).

[Fliess et al., 1995]

Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., & Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International journal of control*, 61(6), 1327–1361. (cité dans 22).

[Gao & Hung, 1993]

Gao, W. & Hung, J. C. (1993). Variable structure control of nonlinear systems: A new approach. *IEEE transactions on Industrial Electronics*, 40(1), 45–55. (cité dans 9).

[Gao, 2006]

Gao, Z. (2006). Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning. In *Proceedings of the American control conference*, volume 6 (pp. 4989–4996). (cité dans 80).

[Gill et al., 2005]

Gill, P. E., Murray, W., & Saunders, M. A. (2005). Snopt: An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM review*, 47(1), 99–131. (cité dans 33).

[Gouzé et al., 2000]

Gouzé, J.-L., Rapaport, A., & Hadj-Sadok, M. Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological modelling*, 133(1-2), 45–56. (cité dans 89 et 90).

[Hagenmeyer & Delaleau, 2003]

Hagenmeyer, V. & Delaleau, E. (2003). Robustness analysis of exact feedforward linearization based on differential flatness. *Automatica*, 39(11), 1941–1946. (cité dans 9 et 57).

[Hagenmeyer & Delaleau, 2010]

Hagenmeyer, V. & Delaleau, E. (2010). Robustness analysis with respect to exogenous perturbations for flatness-based exact feedforward linearization. *IEEE Transactions on automatic control*, 55(3), 727–731. (cité dans 9 et 57).

[Hamel et al., 2002]

Hamel, T., Mahony, R., Lozano, R., & Ostrowski, J. (2002). Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 217–222. (cité dans 16).

[Hammer & Hollingsworth, 1955]

Hammer, P. C. & Hollingsworth, J. W. (1955). Trapezoidal methods of approximating solutions of differential equations. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, (pp. 92–96). (cité dans 32).

[Hammouche et al., 2018]

Hammouche, M., Mohand-Ousaid, A., Lutz, P., & Rakotondrabe, M. (2018). Robust interval luenberger observer-based state feedback control: Application to a multi-dof micropositioner. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 27(6), 2672–2679. (cité dans 89).

[Han, 1995]

Han, J. (1995). A class of extended state observers for uncertain systems. *Control and decision*, 10(1), 85–88. (cité dans 9 et 58).

[Harada et al., 2013]

Harada, M., Nagata, H., Simond, J., & Bollino, K. (2013). Optimal trajectory generation and tracking control of a single coaxial rotor uav. In *AIAA Guidance, navigation, and control (GNC) conference* (pp. 4531). (cité dans 43).

[Hart et al., 1968]

Hart, P. E., Nilsson, N. J., & Raphael, B. (1968). A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *IEEE transactions on Systems Science and Cybernetics*, 4(2), 100–107. (cité dans 7).

[HEDJAR et al., 2002]

HEDJAR, R., TOUMI, R., BOUCHER, P., & DUMUR, D. (2002). Commande prédictive non linéaire d'un robot manipulateur rigide. *Journal européen des systèmes automatisés*, 36(6), 845–863. (cité dans 58).

[Herman & Conway, 1996]

Herman, A. L. & Conway, B. A. (1996). Direct optimization using collocation based on high-order gauss-lobatto quadrature rules. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19(3), 592–599. (cité dans 32).

[Huang et al., 2020]

Huang, J., Ma, X., Zhao, X., Che, H., & Chen, L. (2020). Interval observer design method for asynchronous switched systems. *IET Control Theory & Applications*, 14(8), 1082–1090. (cité dans 89).

[Jing et al., 2018]

Jing, C., Xu, H., Song, X., & Lu, B. (2018). Adaptive extended state observer-based flatness nonlinear output control for torque tracking of electrohydraulic loading system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(10), 2999–3009. (cité dans 23).

[Kahale et al., 2014]

Kahale, E., Castillo, P., & Bestaoui, Y. (2014). Minimum time reference trajectory generation for an autonomous quadrotor. In *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)* (pp. 126–133).: IEEE. (cité dans 39).

[Kelly, 2017]

Kelly, M. (2017). An introduction to trajectory optimization: How to do your own direct collocation. *SIAM Review*, 59(4), 849–904. (cité dans 33).

[Lamouchi et al., 2018]

Lamouchi, R., Raïssi, T., Amairi, M., & Aoun, M. (2018). Interval observer framework for fault-tolerant control of linear parameter-varying systems. *International Journal of Control*, 91(3), 524–533. (cité dans 89).

[Lavigne et al., 2001]

Lavigne, L., Cazaurang, F., & Bergeon, B. (2001). Modelling of disturbed flat system for robust control design. In *Proc. of NOLCOS 2001*. (cité dans 9 et 57).

[Li et al., 2020]

Li, X., Wei, G., & Ding, D. (2020). Interval observer design under stealthy attacks and improved event-triggered protocols. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 6, 570–579. (cité dans 89).

[Louembet et al., 2009]

Louembet, C., Cazaurang, F., Zolghadri, A., Charbonnel, C., & Pittet, C. (2009). Path planning for satellite slew manoeuvres: a combined flatness and collocation-based approach. *IET control theory & applications*, 3(4), 481–491. (cité dans 32).

[Maniu, 2014]

Maniu, C. S. (2014). *Contributions à l'estimation robuste et à la commande prédictive robuste par méthodes ensemblistes*. PhD thesis. (cité dans 89).

[Mazenc & Bernard, 2011]

Mazenc, F. & Bernard, O. (2011). Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *Automatica*, 47(1), 140–147. (cité dans 91).

[Meslem, 2008]

Meslem, N. (2008). *Atteignabilité hybride des systèmes dynamiques continus par analyse par intervalles: application à l'estimation ensembliste*. PhD thesis, Paris Est. (cité dans 89).

[Meslem & Ramdani, 2011]

Meslem, N. & Ramdani, N. (2011). Interval observer design based on nonlinear hybridization and practical stability analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 25(3), 228–248. (cité dans 89 et 91).

[Nandi & Singh, 2019]

Nandi, S. & Singh, T. (2019). Differential flatness based run-to-run control of blood glucose for people with type 1 diabetes. In *2019 American Control Conference (ACC)* (pp. 4773–4778).: IEEE. (cité dans 40).

[Nocedal, 2006]

Nocedal, J. (2006). Knitro: An integrated package for nonlinear optimization. In *Large-Scale Nonlinear Optimization* (pp. 35–60). Springer. (cité dans 33).

[Pati, 2014]

Pati, J. R. (2014). *Modeling, identification and control of cart-pole system*. PhD thesis. (cité dans 34).

[Pontryagin, 1985]

Pontryagin, L. S. (1985). The mathematical theory of optimal processes and differential games. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 169, 119–158. (cité dans 8, 12, et 28).

[Pontryagin et al., 1974]

Pontryagin, L. S., Boltyanski, V. G., & Gamkrelidze, R. V. (1974). *Théorie mathématique des processus optimaux*. (cité dans 28).

[Raissi et al., 2012]

Raissi, T., Efimov, D., & Zolghadri, A. (2012). Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1), 260–265. (cité dans 91 et 93).

[Ramdani, 2005]

Ramdani, N. (2005). Méthodes ensemblistes pour l’estimation. *Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris-Est Créteil Val de Marne*, 40. (cité dans 89).

[Rao, 2009]

Rao, A. V. (2009). A survey of numerical methods for optimal control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 135(1), 497–528. (cité dans 12).

[Riedmiller et al., 2007]

Riedmiller, M., Peters, J., & Schaal, S. (2007). Evaluation of policy gradient methods and variants on the cart-pole benchmark. In *2007 IEEE International Symposium on Approximate Dynamic Programming and Reinforcement Learning* (pp. 254–261).: IEEE. (cité dans 33).

[Rigatos, 2015]

Rigatos, G. G. (2015). Differential flatness theory for electric motors and actuators. In *Nonlinear Control and Filtering Using Differential Flatness Approaches* (pp. 403–441). Springer. (cité dans 23).

[Ryu & Agrawal, 2011]

Ryu, J.-C. & Agrawal, S. K. (2011). Differential flatness-based robust control of mobile robots in the presence of slip. *The International Journal of Robotics Research*, 30(4), 463–475. (cité dans 9 et 57).

[Sallak, 2007]

Sallak, M. (2007). *Évaluation de paramètres de sûreté de fonctionnement en présence d'incertitudes et aide à la conception: application aux Systèmes Instrumentés de Sécurité*. PhD thesis. (cité dans 89).

[Siméon et al., 2000]

Siméon, T., Laumond, J.-P., & Nissoux, C. (2000). Visibility-based probabilistic roadmaps for motion planning. *Advanced Robotics*, 14(6), 477–493. (cité dans 7).

[Slotine et al., 1991]

Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ. (cité dans 9 et 60).

[Sussmann, 1996]

Sussmann, H. J. (1996). From the brachystochrone to the maximum principle. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2 (pp. 1588–1594).: IEEE. (cité dans 8 et 12).

[Trent et al., 2004]

Trent, A., Venkataraman, R., & Doman, D. (2004). Trajectory generation using a modified simple shooting method. In *2004 IEEE Aerospace Conference Proceedings (IEEE Cat. No. 04TH8720)*, volume 4 (pp. 2723–2729).: IEEE. (cité dans 30).

[Von Stryk & Bulirsch, 1992]

Von Stryk, O. & Bulirsch, R. (1992). Direct and indirect methods for trajectory optimization. *Annals of operations research*, 37(1), 357–373. (cité dans 8 et 12).

[Yang & Huang, 2009]

Yang, X. & Huang, Y. (2009). Capabilities of extended state observer for estimating uncertainties. In *2009 American control conference* (pp. 3700–3705).: IEEE. (cité dans 65).

[Yong et al., 2019]

Yong, K., Chen, M., & Wu, Q. (2019). Anti-disturbance control for nonlinear systems based on interval observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(2), 1261–1269. (cité dans 117).

[Yu et al., 2016]

Yu, J., Cai, Z., & Wang, Y. (2016). Optimal trajectory generation of a quadrotor based on the differential flatness. In *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)* (pp. 678–683).: IEEE. (cité dans 46).

[Zerar et al., 2004]

Zerar, M., Cazaurang, F., & Zolghadri, A. (2004). Robust tracking of nonlinear mimo uncertain flat systems. In *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (IEEE Cat. No. 04CH37583)*, volume 1 (pp. 536–541).: IEEE. (cité dans 9 et 57).

[Zhang & Yang, 2018]

Zhang, Z.-H. & Yang, G.-H. (2018). Distributed fault detection and isolation for multiagent systems: An interval observer approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. (cité dans 89).

[Zheng et al., 2014]

Zheng, E.-H., Xiong, J.-J., & Luo, J.-L. (2014). Second order sliding mode control for a quadrotror uav. *ISA transactions*, 53(4), 1350–1356. (cité dans 20).

[Zheng et al., 2016]

Zheng, G., Efimov, D., Bejarano, F. J., Perruquetti, W., & Wang, H. (2016). Interval observer for a class of uncertain nonlinear singular systems. *Automatica*, 71, 159–168. (cité dans 100 et 101).