

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
ÉCOLE DOCTORALE ÉNERGIE, MATÉRIAUX,
SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS

Laboratoire Gabriel LaMé

THÈSE présentée par :

Adeline PETIT

soutenue le : **24 Janvier 2023**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Sciences et Technologies Industrielles Génie
Mécanique**

**Réponse de Structure auxétique en dynamique rapide :
étude théorique et expérimentale**

THÈSE dirigée par :

M. LANGLET André

HDR, LaMé, Univ. d'Orléans

M. DRAZETIC Pascal

Pr. Univ., LAMIH, Univ. polytechnique Hauts-de-France

RAPPORTEURS :

M. ROTH Sébastien

Pr. Univ., ICB, Univ. de Technologie de Belfort-Montbéliard

M. MAHEO Laurent

Pr. Univ., IRDL, Univ. Bretagne Sud

JURY :

M. ROTH Sébastien

Pr. Univ., ICB, Univ. de Technologie de Belfort-Montbéliard
(Président du jury)

M. LANGLET André

HDR, LaMé, Univ. d'Orléans

M. MAHEO Laurent

Pr. Univ., IRDL, Univ. Bretagne Sud

M. DIRRENBARGER Justin

HDR, PIMM, Conservatoire National des Arts et Métiers

M. GASSER Alain

Pr. Univ., LaMé, Univ. d'Orléans

M. HANUS Jean-Luc

M.C., LaMé, INSA Centre Val de Loire

À mes parents,
Roselyne et Jean-Marc.
Et à mes frères,
Christopher et Jonathan.

« N'oublie pas qu'il y a 1500 ans, tout le monde était sûr
que la Terre était le centre de l'univers...
N'oublie pas qu'il y a 500 ans, tout le monde était sûr que
la Terre était plate...
Il y a moins de 20 minutes, t'étais sûr, toi même, qu'on
était seul sur cette planète...
Imagine de quoi tu seras sûr demain ? »

K à J, Men in Black (1997)

REMERCIEMENTS

Il n'est pas facile d'écrire ses remerciements après trois ans de thèse. Il faut penser à toutes les personnes que l'on a rencontrées et qui nous ont aidées. Je ne suis pas de ceux qui vont ordonner ces personnes selon la gratitude que j'éprouve à leur égard. L'ordre dans lequel elles apparaîtront ne reflétera donc en rien ce que j'éprouve pour elles. Ces remerciements seront donc un peu anarchiques, mais je tenterais de n'oublier personne. Contrairement à ce que beaucoup de monde m'a dit, je n'ai pas l'impression que la thèse a été une épreuve pour moi (comparé à deux ans de classes préparatoires). On m'avait promis des périodes de grand doute personnel au point d'en faire des cauchemars ou d'avoir presque l'envie d'abandonner, mais cela n'a pas réellement été mon cas. Il est vrai que j'ai eu des moments de doute quant à la qualité et à l'importance de mon travail, mais cela est dans ma nature. J'ai toujours douté de mes capacités alors qu'elles ont su m'emmener jusqu'au doctorat. Je pense que le sujet d'étude m'a finalement bien aidée à apprécier ces trois ans et demi de doctorat, car c'est un sujet qui me plaisait déjà lorsque j'ai postulé. De plus, j'ai découvert le domaine de la dynamique rapide qui m'a donné, je ne dirais pas une vocation, mais une réelle envie de continuer dans cette direction. Je vais à présent mettre fin à cette introduction et passer aux remerciements.

Je vais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse André LANGLET (HDR) pour son encadrement, ses conseils et ses remarques pertinentes. Il était toujours disponible pour m'aider dans mes travaux et n'hésitait pas à mettre la main à la pâte lorsque j'étais bloquée. Je n'oublierai pas ces discussions sur les codes MatLab, les erreurs de signes (faut-il un « + » ou un « - » ?) et les histoires de rideaux. Je remercie aussi grandement mon co-directeur de thèse, le Professeur des Universités Pascal DRAZETIC. Il est vrai qu'avec la distance nous n'avons pas pu discuter autant que je l'aurais souhaité, mais il m'a toujours soutenue et fait des remarques pertinentes. Je n'oublierai pas son accent du nord (ou « Ch'Ti ») qui a su me rappeler mes racines.

Pour avoir accepté la charge d'être les rapporteurs de ce mémoire de thèse, je vais ensuite remercier les Professeurs des Universités Sébastien ROTH, qui a également accepté d'être le président de mon jury et Laurent MAHEO. Je remercie également monsieur Justin DIRRENBARGER (HDR), le Professeur des Universi-

tés Alain GASSER et le Maître de Conférences (MdC) Jean-Luc HANUS d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie aussi le Professeur des Universités Patrice LONGERE qui aurait dû faire partie de mon jury de thèse lui aussi et n'a malheureusement pas pu être des nôtres. Nous avons cependant pu échanger quelques réflexions sur ma thèse. La soutenance de thèse est généralement un moment d'intense angoisse et de stress. Cela a certes été le cas pour moi aussi, mais cela n'a pas duré face à la bienveillance de ce jury.

Je vais à présent remercier tous ceux qui sont intervenus dans le projet AxSur en commençant par la région Centre - Val de Loire qui a financé ce projet. Je remercierai ensuite Yves PARMANTIER qui s'est occupé de la partie « gestion de projet » et qui m'a aussi permis de trouver un toit rapidement en arrivant à Bourges. Je remercie ensuite l'équipe de l'entreprise CEDREM qui fait partie du projet : Karine THORAL-PIERRE (Présidente-Directrice Général du CEDREM), David BEAUJOUAN (merci à toi pour ta formation sur Radioss et ton aide sur les simulations) et Edouard FERRY. Les échanges ont toujours été intéressants avec vous trois. Ma gratitude va aussi à l'équipe du laboratoire LAMIH à Valenciennes dont fait partie Pascal DRAZETIC, mais aussi le MdC Fahmi CHAARI et monsieur Rémi DELILLE. Votre aide a, elle aussi, été importante dans mes travaux. Enfin je remercie Guy AUBERT, le directeur de EFJM, qui fait lui aussi partie du projet et, bien que rarement disponible, a toujours proposé des idées très intéressantes.

C'est à présent au tour des personnes que j'ai pu rencontrer à l'IUT de Bourges ou à l'université d'Orléans. Merci à Stéphane qui m'a permis d'expérimenter le rôle d'enseignant en encadrant des travaux pratiques de la formation Génie Mécanique et Productique (GMP). Merci à Christelle, la secrétaire du laboratoire LaMé, qui a toujours su répondre à mes questions. Merci également aux secrétaires successives du laboratoire PRISME, Laure et Nathalie, bien que je ne faisais pas partie de ce laboratoire, elles m'ont toujours aidée. Je remercie Léo, Mame, Eddy, Matthieu, Sylvain, Dominique, Anne, Soufiane et les autres que j'ai dû oublier pour leur présence au quotidien et avec qui j'ai apprécié discuter. Un merci particulier à Gilles qui m'a toujours impressionnée par son savoir-faire et qui nous a aidé pour l'instrumentation de l'expérience. Merci à Olivier, Jean-Luc et Yannick qui m'ont grandement aidée pour la réalisation des essais expérimentaux et sans qui une partie de cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Ensuite merci à tous les doctorants et ingénieurs de recherche que j'ai croisés au cours de ces années. La communication n'a pas toujours été facile. Il y a eu des bas, mais il y a surtout eu beaucoup de hauts et de rire. Merci aux triples J (Jérémy, Jordan et Jérémy), à Charles-Arthur, aux deux Nicolas, à Samuel (que je dois remercier pour je ne sais plus combien de raisons), Alix et Chayma (« les petits » comme j'aime les appeler), à Lucie et Clément (qui ont fait un rapide passage).

Merci, à un stagiaire en particulier, Mister Welsh comme certains l'appelle, qui m'a supportée pendant ces trois ans et qui est toujours là pour moi. Merci, à Aravind qui m'a accueillie dans son bureau et m'a fait découvrir la ville de Bourges. Je n'oublierai pas toutes ces soirées plus drôles les unes que les autres. Enfin, merci à Thomas que je pourrais appeler mon jumeau de thèse. Il est arrivé deux ou trois mois avant moi et a soutenu quelques semaines avant (je lui ai gracieusement cédé mon anniversaire). Nous n'avions certes pas les mêmes tempéraments, mais nous avons passé beaucoup d'épreuves en même temps (les cours de l'école Doctorale, les inscriptions chaque année, le dépôt du mémoire...). Il a, je pense, été d'un grand soutien.

Je souhaite remercier tous mes amis de l'école d'ingénieur, Marine, Camille, Éléonore, Jeanne, Corentin, Alban, Étienne, Lucas, Florent, Paul, Jacob et Pierre, mes chers petits Caen-Lanta. Ils m'ont toujours soutenue. Je remercie en particulier Marine qui en arrivant à Bourges m'a ramené un peu de gaieté et de chaleur du Sud.

Je vais aussi remercier ma très chère Pauline, ma voisine éternelle même si dans les faits, nous ne le sommes plus depuis longtemps, elle le restera toujours et est bien plus qu'une simple amie.

Enfin merci à toute ma famille, plus ou moins proche, qui a toujours cru en moi. Merci à mes frères qui m'ont supportée et que j'ai également dû supporter, mais n'est-ce pas là une relation normale entre frères et sœurs ?

Je finirai mes remerciements par les deux personnes les plus importantes pour moi : mes parents. Merci à eux qui m'ont toujours guidée, soutenue (morale et financièrement) et encouragée lors des périodes de doute. Vous avez toujours cru en moi et pour cela, MERCI ! Je vous aime !

Table des matières

Remerciements	iii
Liste Des Figures	x
Liste Des Tableaux	xi
Préambule	xvi
1 État de l'art	1
1.1 Quelques généralités sur les matériaux cellulaires	1
1.2 Les structures auxétiques	3
1.2.1 Généralité sur les structures auxétiques	3
1.2.2 Quelques catégories de structures auxétiques	5
1.3 Propriétés physiques des structures cellulaires	8
1.3.1 Particularité des structures auxétiques	10
1.3.2 Absorption d'énergie	11
1.3.3 Comportement sous chargement dynamique	16
1.4 Conclusion de l'état de l'art	22
1.5 Démarche des travaux de recherche	23
2 Modélisation analytique de la structure ré-entrante	25
2.1 Auxétique 2D ré-entrant	25
2.1.1 Géométrie de la structure auxétique	25
2.1.2 Densité relative et déformation à densification	27
2.2 Propriétés quasi-statiques : détermination de la contrainte plateau . .	29
2.3 Propriétés dynamiques	32
2.3.1 Relations de Rankine-Hugoniot	33
2.3.2 Application de la théorie d'onde de choc aux structures auxé- tiques	35
2.3.3 Détermination de grandeurs physiques (déformation de la structure, temps d'arrêt, temps à densification...)	39
2.3.4 Exemples illustratifs	41
2.4 Recommandations concernant les paramètres caractéristiques	43
2.5 Conclusion	46

3	Modélisations numériques (éléments finis)	49
3.1	Modélisation du comportement des structures auxétiques ré-entrantes	49
3.1.1	Réalisation du modèle géométrique	50
3.1.2	Présentation du modèle éléments finis	51
3.1.3	Modélisation d'une compression à faible vitesse	54
3.1.4	Modélisation d'une compression à vitesse constante élevée	56
3.1.5	Modélisation d'un impact à vitesse initiale	59
3.2	Modélisation d'essai sur pendule balistique	64
3.3	Conclusion	70
4	Étude expérimentale	73
4.1	Méthode et matériau de fabrication	73
4.1.1	Fabrication additive	73
4.1.2	Matériau d'impression sélectionné	75
4.1.3	Caractérisation du PLA	76
4.2	Essais de compression quasi-statiques de la structure auxétique	81
4.3	Essais dynamiques	84
4.3.1	Dispositif expérimental	84
4.3.2	Méthode de mesure des grandeurs physiques	88
4.3.3	Résultats	90
4.4	Conclusion	96
5	Résultats et discussion	99
5.1	Évaluation de la fiabilité du modèle numérique	99
5.1.1	Petite SA	99
5.1.2	Grande SA	101
5.2	Évaluation de l'absorption d'énergie	105
5.3	Conclusion	107
6	Conclusion générale	109
	Bibliographie	116

Table des figures

1.1	Diagramme d'Ashby du module d'Young en fonction de la masse volumique pour les principales familles de matériaux [1].	2
1.2	Structures cellulaires naturelles [2].	3
1.3	Nombre de publications parues par an utilisant le terme auxétique depuis 1991. Les données sont issues de l'outil de recherche de Scopus.com.	4
1.4	Comparaison en traction et en compression de matériaux conventionnels et auxétiques.	5
1.5	Exemples d'auxétiques obtenus à partir de feuilles.	6
1.6	Exemple de structure auxétique chirale [13].	7
1.7	Structure auxétique « 2D ré-entrant » ou « nid d'abeilles ré-entrant » [15].	7
1.8	Mousse polymère à cellules ouvertes. À gauche, mousse initiale . À droite, mousse polymère ré-entrante avec coefficient de Poisson de -0.6 après traitement. Marqueur d'échelle : 2 mm [5].	8
1.9	Gammes de propriétés physiques accessibles grâce à l'utilisation de mousses [2].	9
1.10	Courbes de compression quasi-statique des matériaux cellulaires.	9
1.11	Représentation schématisée du comportement lors de l'indentation d'un matériau conventionnel et un matériau auxétique [22].	11
1.12	Chargement à 6 m.s^{-1} selon l'axe Y d'une structure auxétique [26].	13
1.13	Chargement à 7 m.s^{-1} selon l'axe Y d'une structure auxétique [24].	14
1.14	Géométrie d'un Nida [28].	15
1.15	Modes de déformations observés sur un auxétique ré-entrant comprimé à 1 mm.min^{-1} [15] : (a) mode en V , (b) mode en y , (c) mode en X	16
1.16	Étude des modes de déformation des Nida réguliers pour différentes vitesses de chargement [30].	17
1.17	Déformation successive des cellules d'un Nida comprimé à 10 m.s^{-1} . Le terme « <i>cell strain</i> » correspond au rapport de la hauteur d'une cellule à un instant donné et de sa hauteur initiale [27].	17
1.18	Répartition de la déformation dans une mousse d'aluminium suite à un impact à 107.5 m.s^{-1} . Le trait vertical représente le front de discontinuité avec à gauche les cellules densifiées et à droite les cellules non densifiées. La flèche indique la face impactée. [34].	18
1.19	Courbe de contrainte-déformation d'un matériau cellulaire. En trait plein, le comportement expérimental, en pointillé, le comportement idéalisé $R-P-P-L$. σ_{cr} correspond à la contrainte plateau statique et ε_l est la limite déformation à densification de la structure [33].	19

1.20	Schématisation de la propagation du choc au travers d'un matériau <i>R-P-P-L</i> suite à l'impact d'un projectile de masse M et de vitesse V [37].	19
1.21	Étude de la réponse à un essai d'indentation d'une sphère rigide de 10 g à une vitesse initiale de 1.5 m.s^{-1} [43].	21
2.1	Exemple d'une structure auxétique complète (« SA »).	26
2.2	Configuration d'une cellule unitaire d'une SA.	26
2.3	Représentation graphique d'une SA à densification.	28
2.4	Déformation plastique d'une cellule de SA selon l'axe Y . La cellule initiale est représentée en pointillé.	30
2.5	Moment fléchissant atteint dans la paroi A-B.	31
2.6	Propagation d'un front d'onde de choc. Le front parcourt une distance dD pendant un temps dt	33
2.7	Courbe contrainte/déformation d'une SA suivant un modèle <i>R-P-P-L</i>	35
2.8	Schéma et paramètres définissant la propagation d'un choc dans une structure cellulaire lors d'un impact de masse rigide.	35
2.9	Temps d'arrêt t_{stop} et temps de densification t_{DS} en fonction de la vitesse initiale v_0 . Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.	42
2.10	Vitesse v_{DS} du projectile au moment où la densification totale de la SA est atteinte à $t = t_{DS}$. Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.	42
2.11	Contrainte dynamique σ_{dyn} en fonction du temps. Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.	42
2.12	Distance u parcourue par le projectile en fonction du temps. Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.	43
2.13	Variation de ε_{stop} en fonction de n et de τ	44
2.14	Évolution de ε_{stop} en fonction de n pour différentes vitesses d'impact.	45
2.15	Couples v_0 - M pouvant être arrêtés par une SA pour différentes valeurs de τ , L étant fixée.	46
3.1	Modèle numérique de l'auxétique et des plaques en acier avec les cellules numérotées de 1 à 6 dans la hauteur.	50
3.2	Agrandissement sur le maillage de la SA.	52
3.3	Déformation numérique de la SA à 0.5 m.s^{-1} à différents taux de déformation.	54
3.4	Résultats numériques de la compression de la SA à 0.5 m.s^{-1}	55
3.5	Résultats de simulation pour une compression à 0.5 m.s^{-1} et à 5 m.s^{-1}	56
3.6	Déformation numérique de la SA à 100 m.s^{-1} à différents taux de déformation.	56
3.7	Résultats numériques de la compression de la SA à 100 m.s^{-1}	57
3.8	Résultats numériques de la compression de la SA à 200 m.s^{-1}	58
3.9	Résultats numériques de l'impact de la SA à $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$	59
3.10	Résultats numériques de l'impact de la SA pour différentes vitesses initiales. Courbes de contrainte et de vitesse à gauche. Courbes de déformation à droite.	61
3.11	Résultats numériques de l'impact de la SA pour différentes vitesses initiales. Courbes de contrainte et de vitesse à gauche. Courbes de déformation à droite.	62

3.12	Résultats numériques de l'impact de la SA pour différentes vitesses initiales. Courbes de contrainte et de vitesse à gauche. Courbes de déformation à droite.	63
3.13	Modèle numérique de l'impact sur un pendule balistique.	65
3.14	Modèle numérique de la SA utilisée pour l'impact sur pendule.	66
3.15	Maillage du culot et de la SA.	66
3.16	Déformation de la SA à des temps différents de la simulation (voir figure 3.17)	68
3.17	Courbes de contraintes en fonction du temps aux interfaces culot-SA et SA-pendule.	69
3.18	Bilan d'énergie du pendule balistique, du culot et de la SA. ET : Energie Totale; EI : Energie Interne; EC : Energie Cinétique.	70
4.1	Représentation schématique d'une imprimante utilisant la méthode FDM.	74
4.2	Représentation schématique du motif de remplissage en grille.	77
4.3	Eprouvette de traction réalisée par CAO.	77
4.4	Eprouvettes imprimées en PLA PolyMax TM et testées en traction. L'essai 0 correspond à l'éprouvette en sortie d'impression.	78
4.5	Courbes conventionnelles de traction pour cinq éprouvettes en PLA PolyMax TM	78
4.6	Eprouvettes imprimées en PLA PolyMax TM et testées en compression.	80
4.7	Courbes conventionnelles de compression pour quatre éprouvettes en PLA PolyMax TM	80
4.8	Échantillon auxétique ré-entrant pour le test en compression quasi-statique (hauteur : 4.28×10^{-2} m).	82
4.9	Courbes conventionnelles de compression pour quatre éprouvettes de SA en PLA PolyMax TM	83
4.10	Banc d'essai.	85
4.11	Culot en PTFE.	87
4.12	Échantillons auxétiques en PLA.	87
4.13	Résultats du filtrage des signaux de la barrière de vitesse.	89
4.14	Signal de la barrière de vitesse.	89
4.15	Vitesse du culot en sortie de canon en fonction de la pression de tir.	90
4.16	Cinématique de l'impact de la petite SA sur le pendule balistique.	91
4.17	Évolution de la longueur et de la déformation de la petite SA en fonction du temps.	92
4.18	Déplacement du pendule enregistré par caméra rapide.	92
4.19	Cinématique de l'impact de la grande SA sur le pendule balistique.	94
4.20	Évolution de la longueur et de la déformation de la grand SA en fonction du temps.	95
4.21	Déplacement du pendule enregistré par caméra rapide.	95
5.1	Évolution de la longueur d et de la déformation ε de la petite SA en fonction du temps d'après les résultats expérimentaux et numériques.	101
5.2	Déplacement du pendule expérimental et numérique.	101
5.3	Évolution de la longueur d et de la déformation ε de la grand SA en fonction du temps d'après les résultats expérimentaux et numériques.	102
5.4	Déplacement du pendule expérimental et numérique.	103

5.5	Erreur (en pourcentage) calculée pour la longueur d de la SA numérique par rapport à l'expérience. Les valeurs de références sont celles des figures 5.1 et 5.3. Le temps à densification, t_{DS} , est indiqué par le trait vertical.	104
5.6	Bilan énergétique du modèle numérique de la petite SA. EC : énergie cinétique, EI : énergie interne.	105
5.7	Bilan énergétique du modèle numérique de la grande SA.	106

Liste des tableaux

2.1	Paramètres de la SA pour l'exemple illustratif.	41
3.1	Dimensions de la SA modélisée.	50
3.2	Propriétés des matériaux du modèle EF.	53
3.3	Comparaison des contraintes plateaux calculées par EF et par l'équation 2.35a.	58
3.4	Dimensions de la SA cylindrique modélisée.	65
3.5	Propriétés des matériaux du modèle EF.	67
4.1	Propriétés physiques fabricant du PLA PolyMax™.	75
4.2	Propriétés mécaniques fabricant du PLA PolyMax™.	76
4.3	Résultats des essais de traction sur les éprouvettes de PLA PolyMax™.	79
4.4	Résultats des essais de compression sur les éprouvettes de PLA PolyMax™.	81
4.5	Résultats des essais de compression sur les éprouvettes de SA en PLA PolyMax™.	83
4.6	Bilan des énergies cinétiques.	93
4.7	Bilan des énergies cinétiques.	96
5.1	Comparaison des énergies cinétiques (EC) du culot, de la petite SA et du pendule entre expérience et simulation numérique.	105
5.2	Comparaison des énergies cinétiques du culot, de la grande SA et du pendule entre expérience et simulation numérique.	106

Préambule

La capacité à se protéger face à des chocs ou des impacts est une préoccupation majeure, que ce soit pour la protection des personnes ou des structures. Les systèmes de protection contre ces menaces ont connu plusieurs évolutions avec comme objectifs une protection la plus légère et la plus efficace possible. C'est pour cette raison que les matériaux cellulaires ont été intégrés dans les structures protectrices. Un type de matériau en particulier fait l'objet de nombreuses recherches pour sa capacité à absorber les impacts : ce sont les structures « auxétiques ». C'est dans ce contexte que s'inscrit le projet AxSur, financé par la région Centre - Val de Loire, dans lequel interviennent les entreprises CEDREM et EFJM ainsi que les laboratoires LaMé (Université d'Orléans) et LAMIH (Université de Valenciennes).

Les matériaux cellulaires sont déjà connus pour leurs capacités à absorber l'énergie due à un choc ou un impact tout en limitant l'effort transmis. Ils possèdent une courbe de contrainte-déformation quasi-statique caractéristique comportant un plateau entre la zone élastique et le début de la densification. La capacité d'un matériau ou d'une structure à absorber de l'énergie mécanique est fortement liée à l'aire sous la courbe de contrainte-déformation. La connaissance des paramètres influençant la valeur de la contrainte plateau et de la déformation à densification permet de mettre au point une protection adaptée à la menace considérée. Les structures auxétiques possèdent, elles aussi, ce type de courbes caractéristiques. Le terme auxétique s'applique à tous les matériaux et toutes les structures possédant un coefficient de Poisson négatif. Le coefficient de Poisson est défini comme la valeur négative du rapport entre la déformation latérale et la déformation axial d'un matériau soumis à une contrainte uniaxiale. La structure auxétique va ainsi s'élargir horizontalement sous l'effet d'une traction verticale et rétrécir horizontalement sous l'effet d'une compression verticale. Cette propriété lui permet, lors d'un impact, de regrouper la matière sous celui-ci au lieu de fuir le point d'impact comme c'est le cas pour les matériaux « conventionnels » (matériaux à coefficient de Poisson positif). Les structures auxétiques se présentent donc comme des candidates potentielles pour des applications de protection. Elles peuvent être utilisées dans les systèmes d'absorbeur de choc dans les transports, ou être employées dans les Équipements de Protection Individuelle (EPI) en cas d'incident industriel, dans les équipements sportifs et les protections

du combattant.

Bien que des travaux ont déjà pu montrer les capacités supérieures des structures auxétiques dans le domaine de l'absorption d'énergie par rapport celles des matériaux conventionnels, plusieurs questions peuvent se poser pour concevoir des protections adaptées aux menaces : quels sont les paramètres matériaux ou géométriques qui influencent la réponse des auxétiques en dynamique rapide ? Comment se comporte cette structure face à un impact et est-il possible de prédire sa réponse pour guider la conception de la structure ? L'utilisation d'un banc expérimental peut-il permettre l'évaluation de l'énergie absorbée par une structure auxétique au cours d'un impact ? Autant de questions qui constituent la base de ces travaux de thèse qui doivent pouvoir être utilisés pour guider la conception d'une protection basée sur les structures auxétiques.

Structure du mémoire de thèse

La thèse s'articule autour de plusieurs points organisés de la manière suivante.

Le premier chapitre est consacré à l'état de l'art. Il débute avec une présentation générale des matériaux cellulaires et des différents avantages qu'ils présentent face aux matériaux plus conventionnels. Les structures auxétiques étant une sous-famille des matériaux cellulaires, elles sont présentées dans un second temps de manière plus détaillée. Après avoir fait un rapide historique de leur découverte et abordé leur caractéristique commune, le coefficient de Poisson négatif, nous nous intéressons aux différents types de structures existantes. Les propriétés physiques des structures cellulaires ainsi que celles concernant exclusivement les auxétiques seront abordées. Une partie sera ensuite centrée autour de l'absorption d'énergie de ces matériaux. Elle introduira quelques paramètres influençant cette propriété et des moyens de l'estimer. Différents travaux publiés dans la littérature seront présentés pour justifier l'emploi des matériaux cellulaires dans les systèmes de protection ainsi que l'avantage que représente les auxétiques.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation analytique du comportement des structures auxétiques. La structure auxétique ré-entrante qui sera utilisée tout au long de ce mémoire est tout d'abord présentée. Nous formulerons différents paramètres caractérisant la cellule choisie (densité de la structure, limite de déformation à densification, ...). Certaines limitations géométriques sont également présentées. Par analogie avec des travaux menés sur les structures nids d'abeilles sous chargement quasi-statique, une formule analytique pour la contrainte plateau de la structure est mise en place. L'étude bibliographique a mis en avant le fait

que la réponse en dynamique des structures cellulaires peut être analysée grâce à l'analogie avec la propagation d'une onde de choc dans un matériau. Une équation décrivant l'évolution de la contrainte sous chargement dynamique est alors proposée sur la base des relations de Rankine-Hugoniot. Différentes propriétés analytiques (temps d'arrêt d'un projectile, état de déformation de la structure, ...) sont ainsi déduites et permettent de guider la réflexion pour la conception d'une protection comme la vitesse résiduelle d'un projectile ou encore la valeur de la déformation de la structure lors de l'arrêt de celui-ci.

Le troisième chapitre est dédié aux simulations par éléments finis. Dans une première partie, un modèle est mis en place afin de dépasser les limites du modèle analytique. Ce modèle permet de simuler l'écrasement d'une structure auxétique à vitesse imposée ou par l'impact d'une plaque avec une vitesse initiale. Les résultats obtenus par simulations sont confrontés à ceux obtenus avec le modèle analytique. Il apparaît que le modèle analytique est performant tant que certaines hypothèses sont vérifiées, notamment celle concernant la flexion des parois. Dans la deuxième partie, un troisième modèle numérique constitué d'un projectile, d'un auxétique et d'un pendule balistique, est mis en place afin d'étudier les transferts d'énergie entre les différentes parties. Ce modèle devra permettre d'étudier la quantité d'énergie absorbée par l'auxétique et celle transmise au pendule.

Le quatrième chapitre est centré sur l'étude expérimentale de la structure auxétique. Dans un premier temps, la méthode de fabrication additive par dépôt de fil fondu sélectionnée pour la réalisation des échantillons expérimentaux est présentée. Cette méthode de fabrication peut avoir une influence sur le comportement final du matériau utilisé. Les propriétés annoncées par le fabricant sont alors comparées à des essais quasi-statiques menés sur le matériau post-impression et montrent des variations dues à l'introduction de défauts dans les échantillons suite au procédé de fabrication. Des essais de compression quasi-statique sont ensuite réalisés sur la structure auxétique pour en déterminer la valeur de la contrainte plateau. Les essais dynamiques consistent en la projection sur un pendule balistique d'une structure auxétique collée à un culot. Ces essais permettent d'étudier l'énergie transmise au pendule balistique suite à l'impact de la structure et du culot.

Dans le cinquième chapitre, les résultats issus des simulations numériques et des essais dynamiques sont discutés. Ce travail permet de valider le modèle numérique. Les analyses des simulations et expérimentations peuvent ainsi être couplées pour évaluer les échanges d'énergie dans les différents composants qui ne peuvent être mesurés expérimentalement.

Enfin, le dernier chapitre présente les conclusions et les perspectives de ces travaux de thèse.

Mots Clefs : Structure auxétique, impact dynamique, simulation éléments finis, solution analytique, expérimentation.

Chapitre 1

État de l'art

Résumé : Ce chapitre présente l'étude bibliographique menée dans le cadre de ces travaux de recherches. Les matériaux cellulaires sont présentés dans un premier temps. Puis, les structures auxétiques, sujet principal de cette thèse, sont introduits. Nous nous intéressons ensuite aux propriétés physiques qui font des auxétiques des structures particulières. L'intérêt de les utiliser dans le domaine de l'absorption d'énergie sera également exposée. Ce chapitre se conclut par la présentation de la démarche entreprise pour ces travaux.

1.1 Quelques généralités sur les matériaux cellulaires

Les matériaux sont, de manière générale, partagés en trois familles de matériaux monolithiques : les métaux, les céramiques et les polymères. À l'intersection de ces trois groupes se trouve ce qui est communément appelé les « composites ». Ce terme fait référence à une combinaison d'au moins deux matériaux. Cependant, cette quatrième classe de matériaux ne se limite pas seulement aux composites. On peut parler plus largement de matériaux « hybrides » ou « architecturés » comme le mentionne Ashby [1]. Ces deux termes, utilisés de manière équivalente, définissent des matériaux composés de deux matériaux ou plus, ou bien une combinaison de matière et d'espace. Les structures sandwiches, les mousses ou encore les matériaux ou structures cellulaires font ainsi partie de cette famille. La composition des matériaux hybrides doit permettre d'atteindre des propriétés qui ne sont pas accessibles avec les trois principales familles de matériaux. La figure 1.1 représente les valeurs de module d'Young de différents matériaux en fonction de leur masse volumique respective. Les zones notées « Hole » représentent des couples de module d'Young-masse volumique qui ne correspondent à aucun matériau connu. Ce sont des zones où

l'on pourrait retrouver des matériaux hybrides notamment dans la partie supérieure gauche afin d'obtenir un matériau léger et rigide.

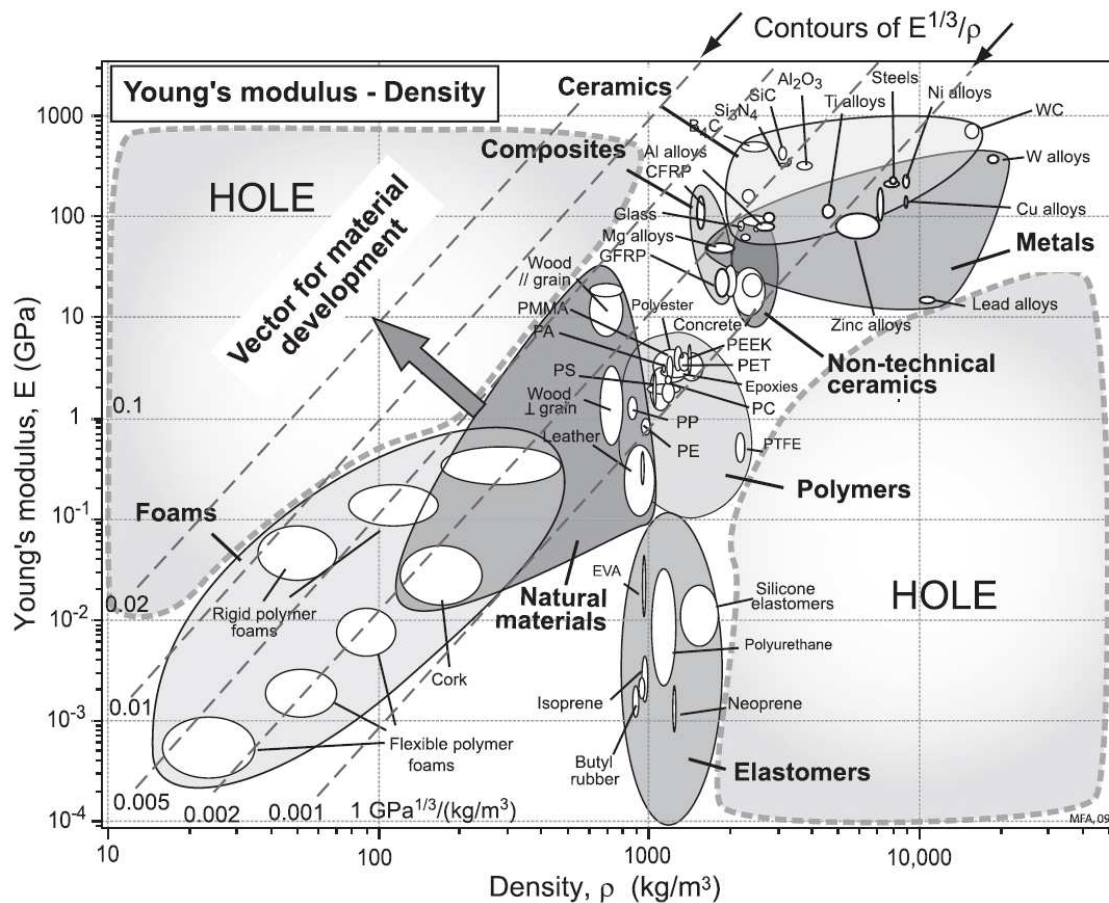


FIGURE 1.1 – Diagramme d'Ashby du module d'Young en fonction de la masse volumique pour les principales familles de matériaux [1].

Les structures cellulaires sont décrites par Gibson et Ashby [2] comme un assemblage de cellules avec des arêtes ou des faces solides reliées ensemble de manière à ce qu'elles remplissent l'espace. Elles sont partagées en différents groupes suivant leur topologie. Il existe, tout d'abord, les structures cellulaires à deux dimensions pour lesquelles les cellules possèdent la même génératrice. Ensuite, les structures cellulaires à trois dimensions possèdent des cellules qui peuvent avoir une orientation aléatoire ou régulière dans l'espace. Dans les structures à trois dimensions, on retrouve les structures à cellules dites « ouvertes » (les cellules sont inter-connectées) et les structures à cellules « fermées » (chaque cellule est isolée de sa voisine par une face pleine) [2].

On peut trouver les structures cellulaires, en premier lieu, dans la nature comme dans l'écorce du chêne-liège (figure 1.2a) ou les tiges de la plupart des plantes (figure 1.2b). Les structures cellulaires sont naturellement employées pour un besoin de légèreté, mais aussi de résistance face à une sollicitation statique et cyclique sur une

grande période de temps, comme en témoigne leur présence dans les os spongieux (figure 1.2c), le bois (figure 1.2d) ou encore le corail (figure 1.2e) [2].

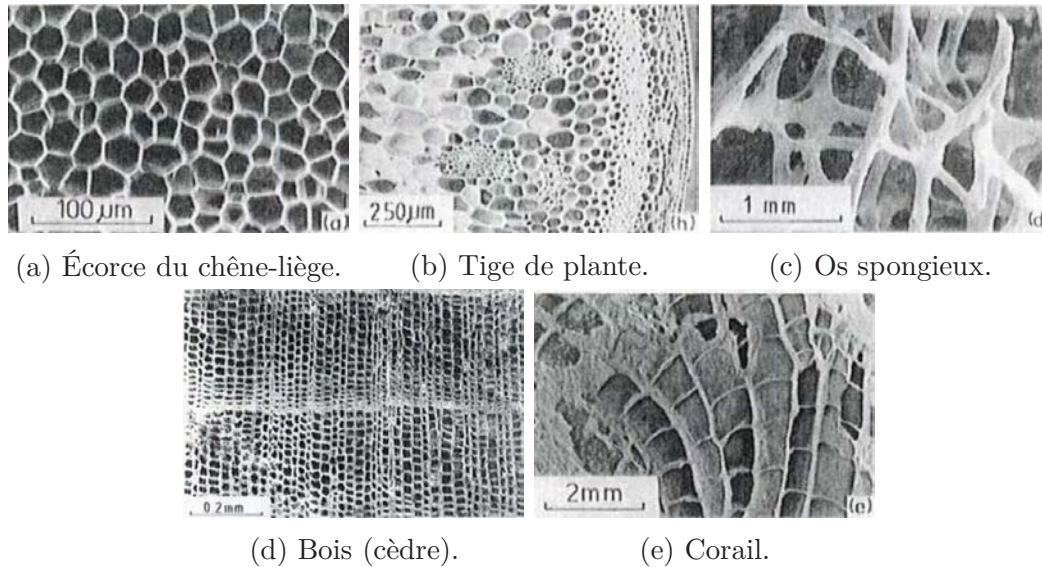


FIGURE 1.2 – Structures cellulaires naturelles [2].

L'homme a souvent employé des matériaux cellulaires naturels tels que le bois, mais il en maîtrise aujourd'hui la fabrication [2] afin de répondre à ses besoins. Il est possible de faire des mousses, qui se caractérisent par des cellules orientées aléatoirement, avec toutes les familles de matériaux. La fabrication des structures cellulaires régulières se limitait à des structures simples pouvant être fabriquées par moulage, extrusion ou assemblage de sous-structures [2]. Avec l'avènement de la fabrication additive, le champ des possibles s'est élargi. Des formes bien plus compliquées [3] peuvent être mises au point pour atteindre les propriétés physiques souhaitées.

Bien que les mousses et les structures en nid d'abeilles (Nida) fassent partie des familles de matériaux cellulaires les plus étudiées, il en existe une autre qui a retenu l'intérêt des chercheurs et industriels depuis quelques décennies : il s'agit de la famille des matériaux ou structures auxétiques.

1.2 Les structures auxétiques

1.2.1 Généralité sur les structures auxétiques

Le terme « auxétique » vient du grec ancien « *auxetos* » qui signifie « qui peut être augmenté » [4]. Bien que ce terme soit employé au minimum depuis 1951 en biologie (selon l'outil de recherche de Scopus.com), son utilisation dans le cadre des matériaux cellulaires est bien plus récente. En effet, son emploi a été proposé pour

la première fois par Evans [4] en 1991 pour désigner des matériaux ou structures possédant un coefficient de Poisson, noté ν , négatif.

Cependant, la découverte d'un tel matériau est souvent attribuée à Lakes [5] qui présenta en 1987 une mousse de polymère possédant un coefficient de Poisson de -0.6 . Le terme auxétique a continué d'être employé et cette nouvelle catégorie de matériaux cellulaires a fait l'objet de recherches de plus en plus nombreuses, figure 1.3.

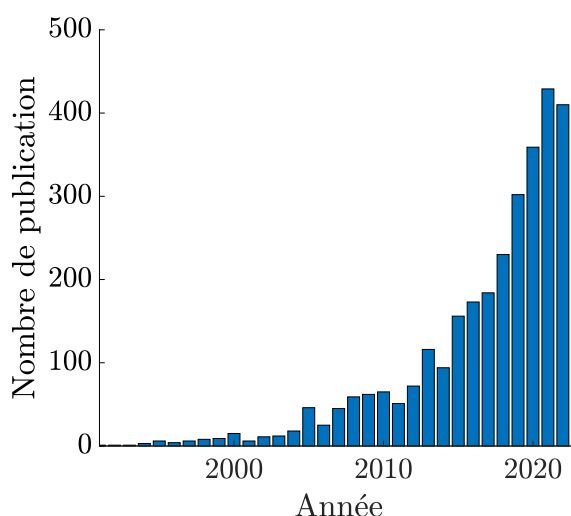


FIGURE 1.3 – Nombre de publications parues par an utilisant le terme auxétique depuis 1991. Les données sont issues de l'outil de recherche de Scopus.com.

Le coefficient de Poisson est l'une des propriétés caractéristiques d'un matériau. Il permet de mesurer le ratio entre la déformation transversale et la déformation longitudinale lors d'une sollicitation longitudinale du matériau. Le coefficient est généralement compris entre -1 et 0.5 dans le cas des matériaux isotropes [6], mais il peut évoluer entre $-\infty$ et $+\infty$ si le matériau est anisotrope [7]. Les matériaux conventionnels présentent généralement un coefficient de Poisson positif. Une structure ou matériau auxétique, grâce à son coefficient de Poisson négatif, verra donc sa longueur transversale augmenter sous l'effet d'une traction longitudinale. Au contraire cette longueur transversale va diminuer lors d'une compression longitudinale, figure 1.4.

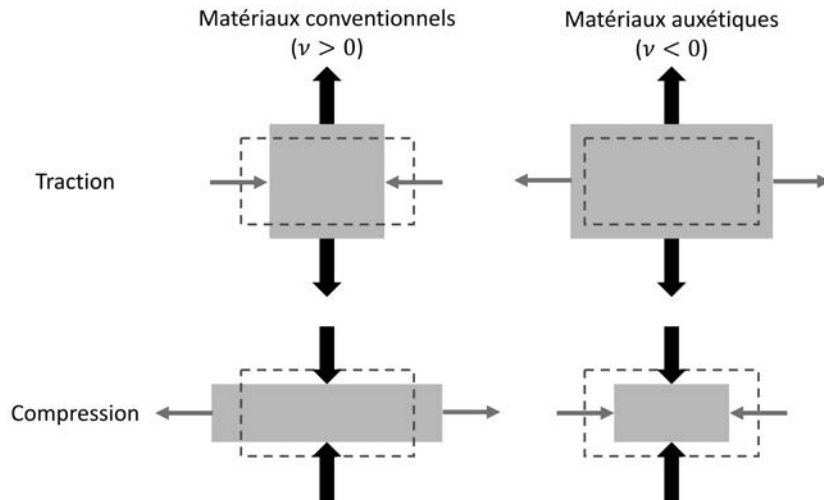


FIGURE 1.4 – Comparaison en traction et en compression de matériaux conventionnels et auxétiques.

Bien que cette propriété puisse exister à l'état naturel, comme dans l' α -cristobalite, selon certains plans cristallographiques [8], on trouve de l'auxétisme plus généralement dans des matériaux architecturés et le plus souvent dans ceux créés par l'homme.

Les structures auxétiques peuvent être catégorisées suivant la forme de leurs cellules élémentaires, leurs modes de déformation, la manière dont elles sont obtenues.

1.2.2 Quelques catégories de structures auxétiques

Les feuilles perforées, froissées et pliées

Il est possible d'obtenir des structures auxétiques à partir de feuilles. Une première méthode consiste à les froisser pour obtenir le comportement souhaité. Bouaziz *et al.* [9] a montré qu'un comportement auxétique peut être observé lors de la compression de feuilles d'aluminium froissées, figure 1.5a pour certaines valeurs de densité relative.

Une seconde méthode consiste à créer des entailles ou des perforations dans des feuilles (de papier, d'aluminium ou autre) de manière aléatoire ou ordonnée afin de créer un comportement auxétique, figure 1.5b, [10].

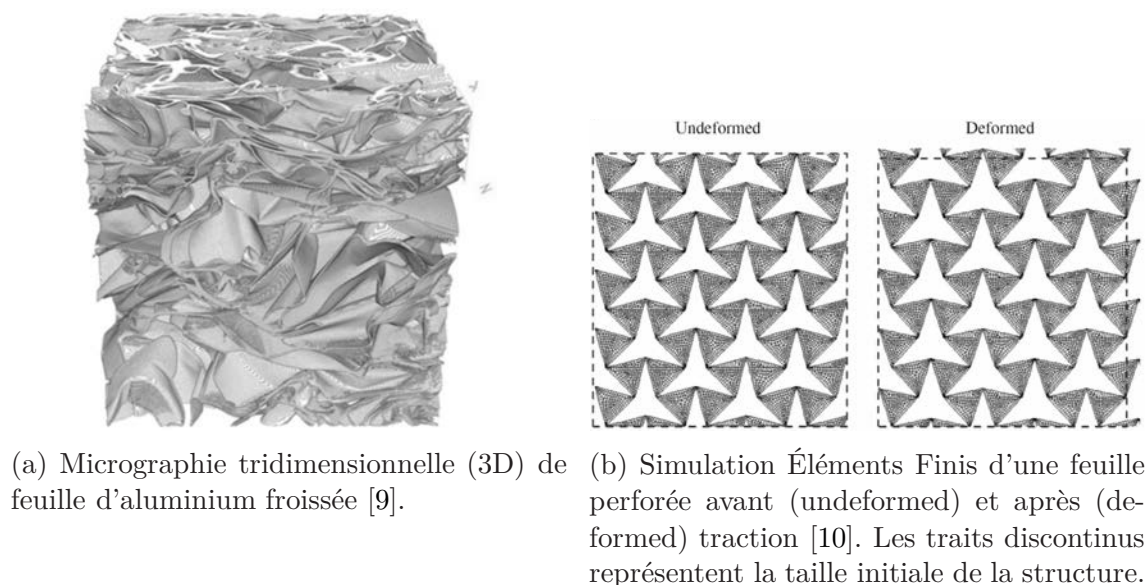


FIGURE 1.5 – Exemples d'auxétiques obtenus à partir de feuilles.

Il est également possible d'obtenir un comportement auxétique en réalisant des plis bien définis sur une feuille à la manière des origamis comme le pliage « *Miura-ori* » [11].

Les structures rotatives

Les structures rotatives forment une autre catégorie de structures auxétiques. Le principe est de créer un réseau de cellules unitaires reliées par une travée, une poutre ou encore un nœud. Lorsque la structure est étirée ou comprimée, les cellules se déroulent ou s'enroulent autour de l'élément de jonction. Grima *et al.* [8] ont utilisé ce modèle de structure pour expliquer la valeur négative du coefficient de Poisson de l' α -cristobalite [8]. Attard *et al.* [12] ont étudié des réseaux de parallélogrammes reliés par leurs sommets afin de déterminer leurs caractères auxétiques et ont obtenus des structures pouvant présenter un coefficient de Poisson égal à -1 .

Les structures chirales

Une autre catégorie peut être générée par les structures rotatives et est basée sur la chiralité des cellules. La chiralité désigne le fait qu'un objet ne peut pas se superposer à son image dans le miroir.

Le principe est de créer un schéma ou une cellule chirale composé de ligament. Chaque cellule est connectée aux autres grâce à un motif autour duquel les ligaments de la cellule pourront s'enrouler ou se dérouler. Prall et Lakes [13] ont mis au point une structure chirale, figure 1.6. Les ligaments qui forment le triangle s'enroulent, lors de la compression, autour du cercle qui constitue la connexion entre les cellules.

Le coefficient de Poisson théorique pour cette structure est égal à -1 . Cette valeur a été validée expérimentalement.

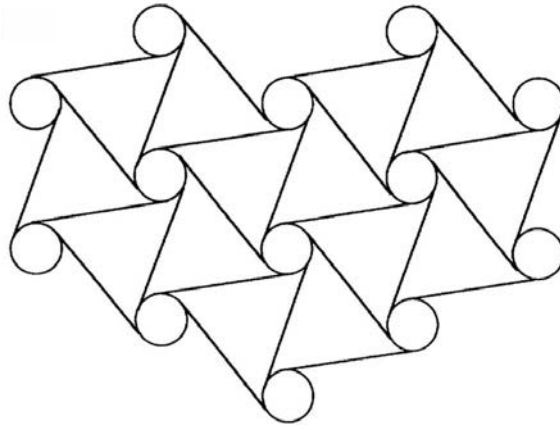


FIGURE 1.6 – Exemple de structure auxétique chirale [13].

Les structures ré-entrantes

Les structures auxétiques ré-entrantes font référence aux structures dont les membres, lors d'une sollicitation en compression, vont se diriger à l'intérieur de la structure. L'exemple le plus étudié est l'auxétique « *2D ré-entrant* » (2D : bidimensionnel) ou « *nid d'abeilles ré-entrant* », figure 1.7. Cette structure est semblable à un Nida classique. Cependant, les angles sont de signes opposés [14]. La géométrie de cette cellule fait que les travées qui la composent vont inévitablement se diriger vers l'intérieur lors d'une compression.

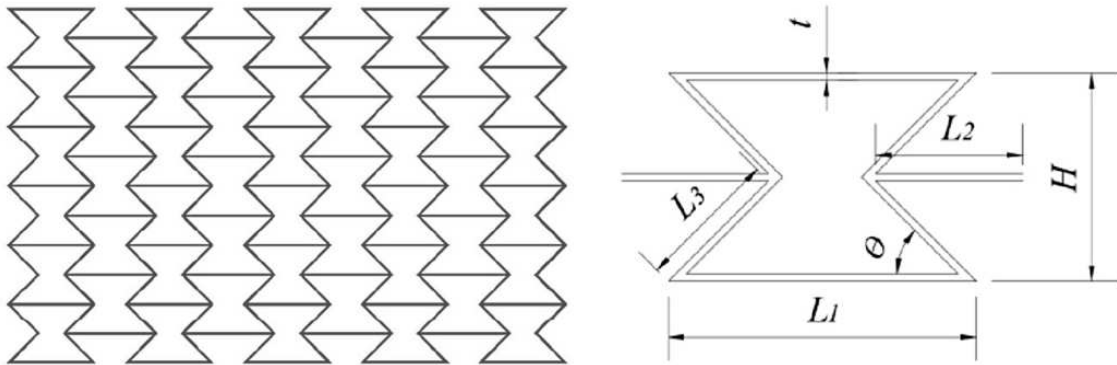
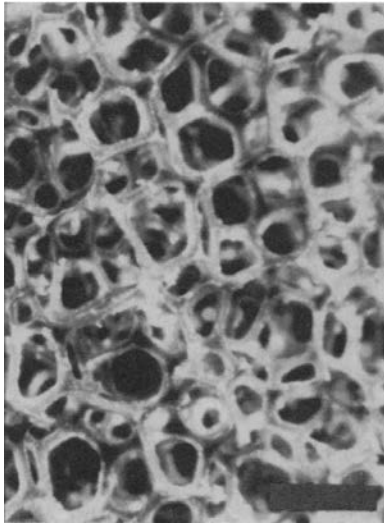
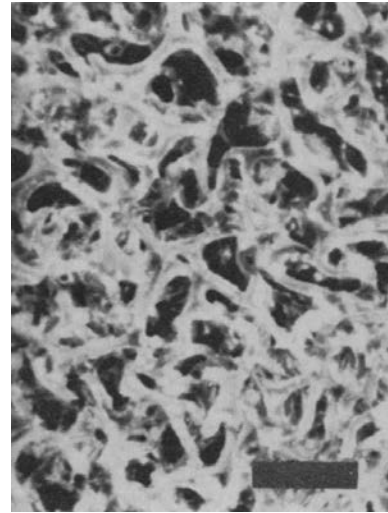


FIGURE 1.7 – Structure auxétique « *2D ré-entrant* » ou « *nid d'abeilles ré-entrant* » [15].

Les mousses auxétiques sont également des structures ré-entrantes. En effet, les mousses auxétiques sont créées à partir de mousses conventionnelles, figure 1.8a, auxquelles on a appliqué un traitement thermique et mécanique afin de réorienter les travées vers l'intérieur des cellules, figure 1.8b [5].



(a) Mousse polymère conventionnelle.



(b) Mousse polymère auxétique.

FIGURE 1.8 – Mousse polymère à cellules ouvertes. À gauche, mousse initiale . À droite, mousse polymère ré-entrante avec coefficient de Poisson de -0.6 après traitement. Marqueur d'échelle : 2 mm [5].

Il existe encore beaucoup de géométries différentes conférant des propriétés auxétiques [16]. Par exemple, les structures auxétiques peuvent aussi être obtenues par des méthodes de tissage [17]. Le tissage montre également qu'il est possible d'obtenir des auxétiques en utilisant les matériaux composites en les assemblant judicieusement.

Ainsi, les structures auxétiques présentées ci-dessus constituent une liste non-exhaustive de toutes celles qui peuvent exister.

1.3 Propriétés physiques des structures cellulaires

La première propriété représentant l'atout majeur des structures cellulaires est une faible masse volumique comparée aux matériaux monolithiques. Grâce à la présence de vide dans la structure, une mousse d'aluminium par exemple, sera plus légère à volume équivalent qu'un bloc monolithique fait du même aluminium, figure 1.9a. De plus, il est possible de moduler la masse volumique des matériaux structurés en faisant varier la taille des vides et la forme des cellules.

Le choix des cellules, mais aussi du matériau constitutif de la structure, permet de faire varier les propriétés physiques des matériaux cellulaires, telles que la conductivité thermique, le module d'Young ou encore la résistance à la compression (figure 1.9). La faible conductivité thermique fait des mousses un isolant thermique

performant et léger, figure 1.9b. Bien qu'une faible valeur de module d'élasticité paraisse peu intéressant, figure 1.9c, il fait des mousses le matériau tout indiqué pour les systèmes d'assises par exemple [2].

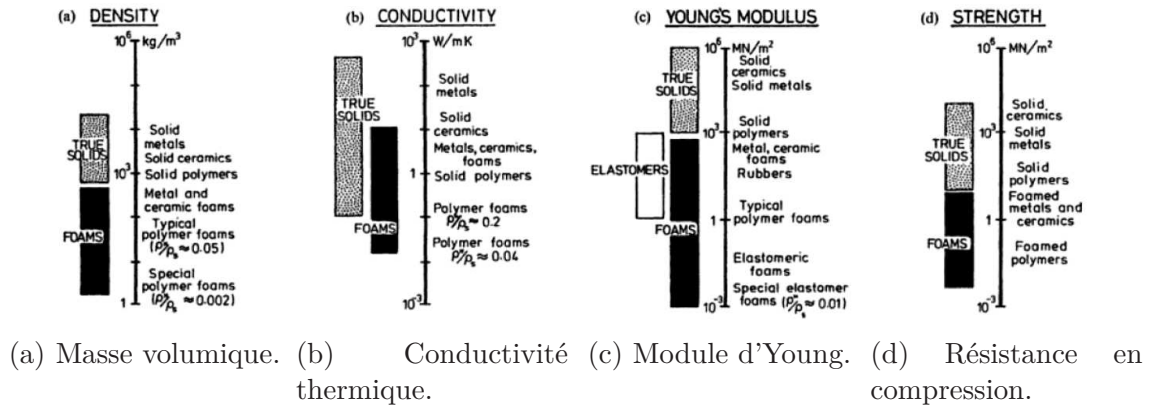


FIGURE 1.9 – Gammes de propriétés physiques accessibles grâce à l'utilisation de mousses [2].

Les matériaux cellulaires présentent également une courbe de contrainte-déformation en compression typique, figure 1.10, divisible en trois sections [18], figure 1.10a.

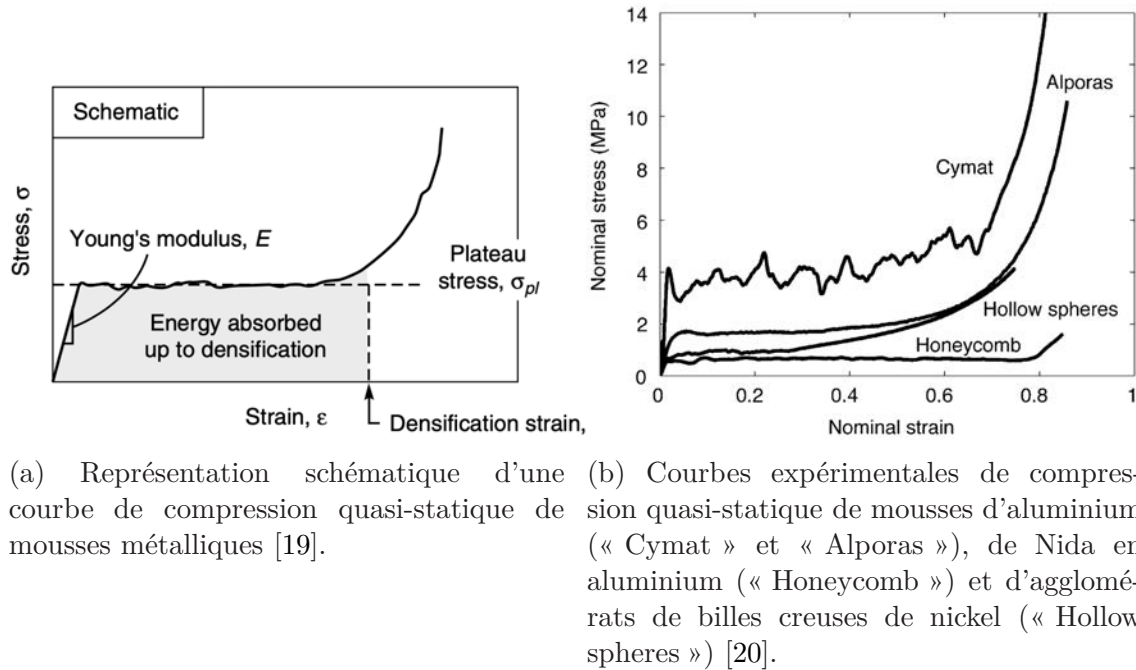


FIGURE 1.10 – Courbes de compression quasi-statique des matériaux cellulaires.

La première section correspond à la réponse élastique de la structure et s'étend d'une déformation nulle à une déformation pour laquelle la contrainte atteint une valeur particulière appelée « contrainte plateau ». La deuxième section correspond

à un long plateau de contrainte. La valeur de contrainte atteinte à la fin de la déformation élastique reste quasi constante jusqu'à la densification de la structure. Ce plateau de contrainte est causé par un effondrement plastique des arêtes ou faces solides constitutives des cellules. Il apparaît lorsque le moment dans la paroi dépasse le moment plastique maximal de ces jonctions créant des rotules plastiques dans les cellules [18]. C'est également sur cette période que l'absorption d'énergie mécanique, correspondant à l'aire sous la courbe, est la plus importante, figure 1.10a. Enfin, intervient la densification de la structure où la contrainte va augmenter très fortement jusqu'à ce que la structure soit entièrement écrasée. Les pores sont réduits au maximum et la valeur de la pente de contrainte-déformation rejoint celle du module d'Young du matériau constitutif [18]. Selon Ashby *et al.* [19], un absorbeur d'énergie idéal possède une courbe de contrainte-déformation longue et plate. Les structures cellulaires sont ainsi des matériaux appropriés pour la fabrication d'absorbeur d'énergie si le dimensionnement de celles-ci est adapté à l'énergie à absorber et à la force à ne pas dépasser.

1.3.1 Particularité des structures auxétiques

Les structures auxétiques, faisant partie des structures cellulaires, possèdent également des propriétés similaires. Cependant, leur coefficient de Poisson négatif représente un atout supplémentaire.

Premièrement, les auxétiques sont théoriquement plus résistants face aux contraintes de cisaillement [16]. Le module de cisaillement G d'un matériau isotrope s'exprime de la manière suivante :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.1)$$

Avec E le module d'Young du matériau. Le module de cisaillement va donc augmenter lorsque le coefficient de Poisson diminue.

De plus, des travaux sur les mousses auxétiques [21] ont montré qu'elles présentent une résistance à la fracture supérieure aux mousses conventionnelles, et ce, même si les mousses auxétiques possèdent un module d'Young inférieur.

Enfin, les matériaux auxétiques peuvent atteindre des valeurs de résistance à l'indentation ou de dureté théoriquement plus élevées que celles des matériaux conventionnels [22]. Une indentation crée localement une compression sur le matériau. Alors que la matière des matériaux et structures conventionnels (à coefficient de Poisson positif) va « fuir » le point de sollicitation (figure 1.11a), la matière de l'auxétique va affluer sous ce point (figure 1.11b) et la structure deviendra plus dense augmentant ainsi la résistance à l'indentation [22].

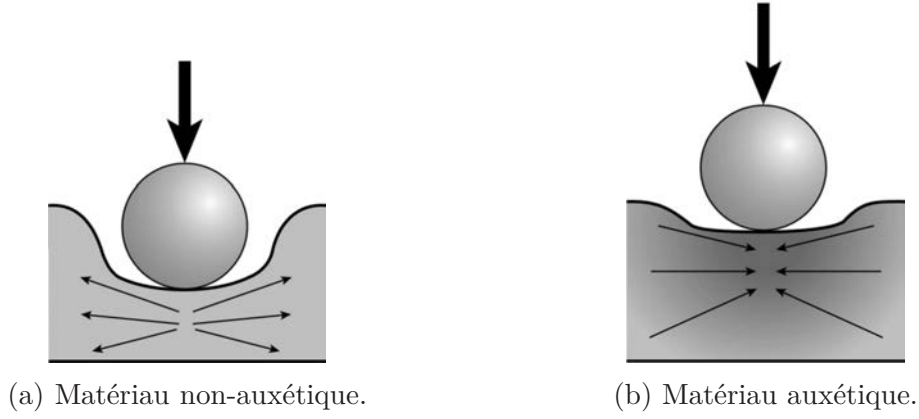


FIGURE 1.11 – Représentation schématique du comportement lors de l'indentation d'un matériau conventionnel et un matériau auxétique [22].

La théorie confirme ce comportement. La dureté d'un matériau isotrope est liée à la valeur du coefficient de Poisson de la manière suivante :

$$H \propto \left[\frac{E}{(1 - \nu^2)} \right]^\gamma \quad (1.2)$$

Avec H la dureté, E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et γ égale à 1 dans le cas d'une distribution uniforme de la pression et égale à $2/3$ dans le cas d'un contact de Hertz [23].

Considérons le cas d'une indentation avec répartition homogène de la pression, soit $\gamma = 1$. Le coefficient de Poisson peut théoriquement varier entre -1 et 0.5 [6]. Pour une valeur de E fixée, les matériaux à coefficient de Poisson positif peuvent atteindre une valeur de $(1 - \nu^2)$ au plus de $3/4$ si $\nu = 0.5$. Cette valeur est également atteignable par des matériaux auxétiques si $\nu = -0.5$. Cependant, leur coefficient de Poisson peut évoluer entre $\nu = -0.5$ et $\nu = -1$. Ils pourront donc avoir des valeurs de dureté supérieures (et tendre vers l'infini si $\nu = -1$) à celles accessibles avec des matériaux conventionnels [23]. Cette caractéristique renforce le choix des structures auxétiques comme absorbeur d'énergie.

1.3.2 Absorption d'énergie

Comme l'ont mentionné Ashby *et al.* [19], la capacité à absorber de l'énergie mécanique est liée au comportement en compression du matériau considéré. Dans le cas des matériaux cellulaires et donc des auxétiques, ce comportement est caractérisé par la valeur de déformation à densification et de la hauteur du plateau de contrainte.

La déformation à densification dépend de la géométrie de la cellule. En effet, la borne supérieure de déformation ε_{max} pouvant être atteinte par une structure est

égale à sa porosité [2] :

$$\varepsilon_{max} = 1 - \frac{\rho}{\rho_s} \quad (1.3)$$

Avec ρ la masse volumique de la structure et ρ_s la masse volumique du matériau constitutif de la structure.

Toutefois, des essais sur des matériaux cellulaires (bois, mousses polymères et mousse céramique) [18] ont montré que lorsque la densification est atteinte, $\varepsilon = \varepsilon_D$, et donc que la contrainte est presque verticale (sur la courbe de contrainte-déformation), le solide occupe 1/3 du volume total initial de la structure. Ainsi, la valeur de déformation à densification correspondant à la fin du plateau s'exprime de la manière suivante :

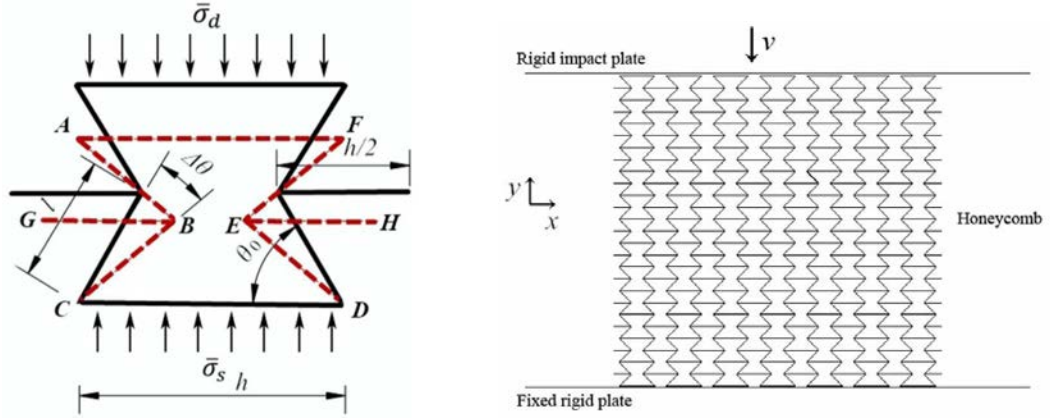
$$\varepsilon_D = 1 - 3 \frac{\rho}{\rho_s} \quad (1.4)$$

La maîtrise de la longueur du plateau de contrainte passe donc par la maîtrise de la géométrie de la structure puisque ε_D dépend de ρ .

Le plateau de contrainte est lié au moment plastique maximal qui apparaît aux jonctions des parois de la structure. Il est donc dépendant de la limite de plasticité du matériau sélectionné pour mettre au point la structure. Cependant, le plateau dépend aussi de la géométrie de la cellule.

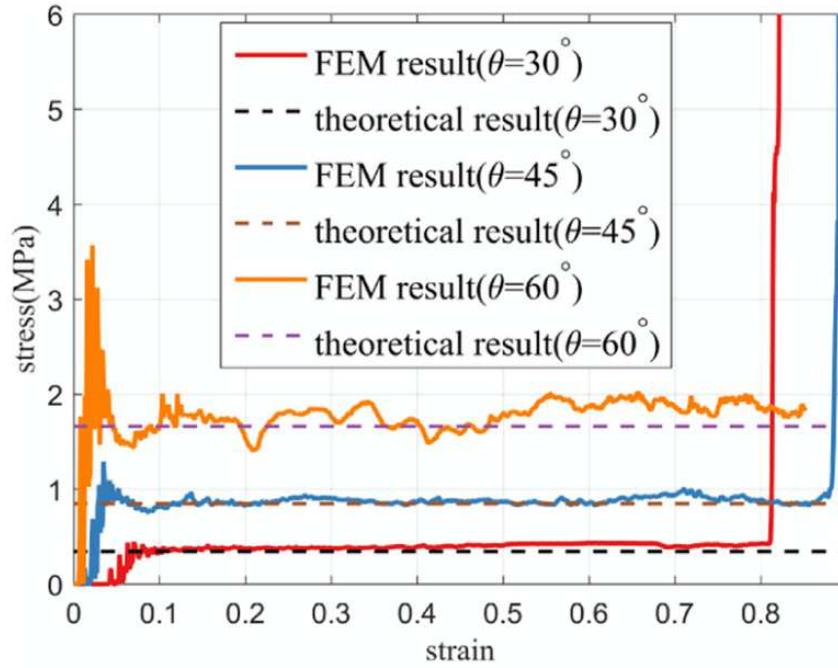
Le plateau de contrainte dépend d'abord de l'épaisseur des parois. Plusieurs études, expérimentale [15] et numériques [24,25], réalisent des essais de compression sur des cellules auxétiques en ne faisant varier que l'épaisseur des parois de cellules. Il apparaît que l'augmentation de ce paramètre contribue à faire augmenter la valeur de la contrainte plateau. Cependant, cela fait diminuer la valeur de la déformation à densification [15].

Des études numériques sur des auxétiques 2D ré-entrants et des Nida [24,26,27] montrent que l'angle entre les parois a une influence non-négligeable sur la valeur de la contrainte plateau. Les études de Hu *et al.* [26] et de Zhang *et al.* [24], sur des auxétiques semblables, montrent que suivant l'axe de chargement sur la structure, la variation de l'angle n'aura pas le même effet sur la contrainte plateau. Hu *et al.* [26] simulent une compression d'un auxétique ré-entrant, figure 1.12 pour plusieurs valeurs d'angles θ_0 . On observe alors que la valeur de la contrainte plateau augmente avec celle de l'angle.



(a) Cellule étudiée.

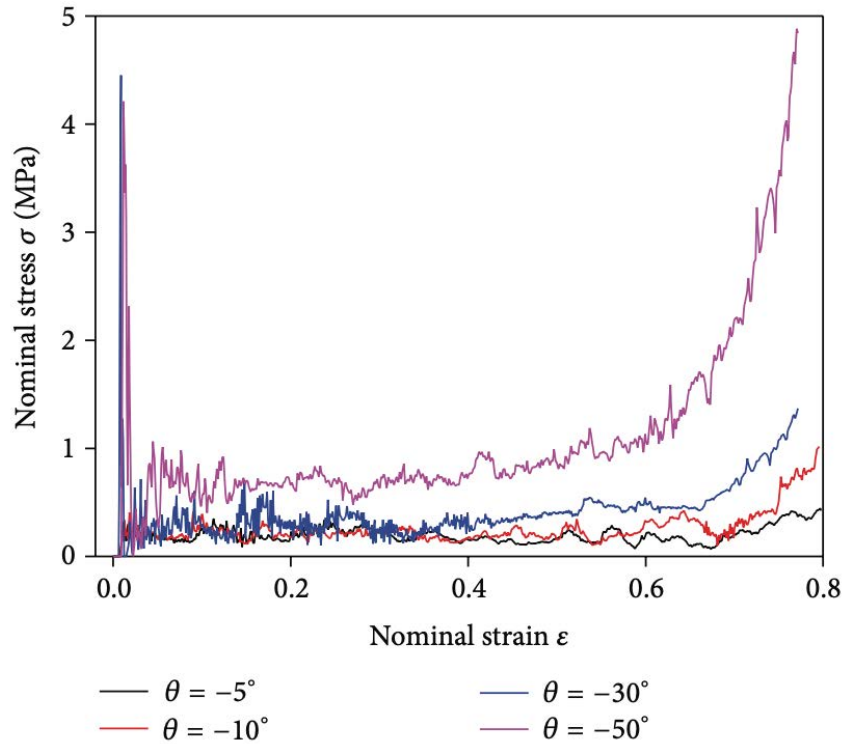
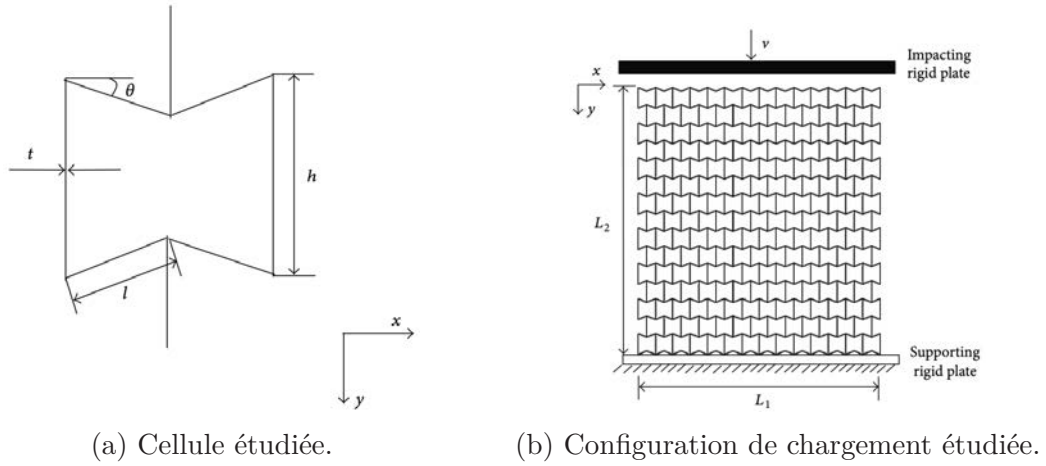
(b) Configuration de chargement étudiée.



(c) Evolution de la contrainte plateau pour différents angles θ_0 (voir figure 1.12a) de structure.

FIGURE 1.12 – Chargement à 6 m.s^{-1} selon l'axe Y d'une structure auxétique [26].

En revanche, les conclusions que l'on peut tirer d'une étude similaire réalisée par Zhang *et al.* [24], figure 1.13, sont opposées. L'auxétique est sollicité selon une direction perpendiculaire à celle de Hu *et al.* [26] et il faut noter que les angles ne sont pas définis de manière identique dans ces deux travaux. On observe ici que plus la valeur absolue de θ augmente, ce qui correspond à une diminution de θ_0 dans la figure 1.12a, plus la contrainte plateau augmente. Ainsi, les variations dans les notations et les définitions des paramètres géométriques rendent confuses les comparaisons entre différents travaux.



(c) Evolution de la contrainte plateau pour différents angles θ (voir figure 1.13a) de structure.

FIGURE 1.13 – Chargement à 7 m.s^{-1} selon l'axe Y d'une structure auxétique [24].

Les paramètres géométriques des cellules ont une grande importance dans la détermination à la fois de la contrainte plateau, mais aussi de la limite de densification pour une forme de cellule donnée. Faire varier l'épaisseur des parois peut permettre d'augmenter la résistance de la structure au détriment de la limite de densification. Il devient alors nécessaire d'étudier l'influence de ces paramètres en réalisant des campagnes d'essais et de simulations pour chaque nouvelle structure étudiée.

L'utilisation de formules analytiques permettant d'estimer les propriétés mécaniques de la structure sans avoir à la tester ou à la simuler devient alors un avantage dans la conception d'absorbeur d'énergie. Comme l'a montré l'étude de

Maiti *et al.* [18], la détermination du plateau de contrainte des mousses est reliée à la densité relative de celles-ci.

Gibson *et al.* [28] ont proposé des relations analytiques pour déterminer les propriétés des Nida à partir des paramètres géométriques et des propriétés du matériau constitutif. Les parois sont assimilées à des poutres pour lesquelles la déformation en cisaillement, l'extension et la compression axiale des poutres ne sont pas considérées. Par ailleurs, les déformations sont supposées assez petites pour qu'aucun changement important de géométrie ne se produise. Pour la formulation analytique du plateau de contrainte, Gibson *et al.* [28] ont utilisé la méthode de définition de bornes inférieures et supérieures. La borne supérieure est définie par le travail plastique des rotules de la cellule. La borne inférieure est définie par le moment fléchissant maximum d'une paroi de cellule et par le moment plastique d'une rotule. La formulation de la contrainte plateau est alors exprimée, suivant l'axe de sollicitation (X_1 ou X_2 dans la figure 1.14), de la manière suivante :

$$\sigma_{1,pl} = \sigma_y \frac{t^2}{l^2} \frac{1}{2(h/l + \sin \theta) \sin \theta} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{2,pl} = \sigma_y \frac{t^2}{l^2} \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \quad (1.6)$$

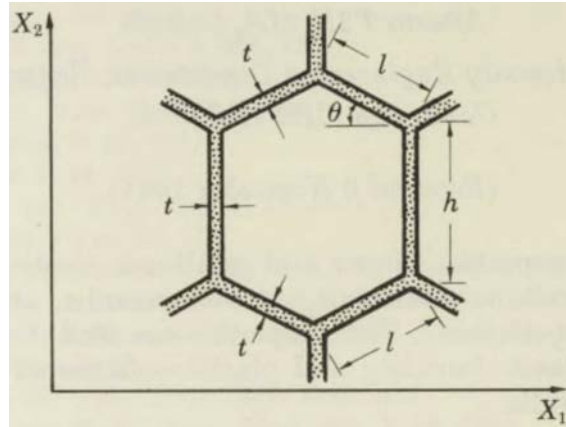


FIGURE 1.14 – Géométrie d'un Nida [28].

Avec l , h , t et θ les paramètres géométriques de la cellule comme définis dans la figure 1.14. σ_y est la limite élastique du matériau utilisé.

Ces formules 1.5 et 1.6 ont été utilisées dans d'autres travaux [14, 29, 30, 31]. Cependant, les équations sont généralement appliquées aux Nida « réguliers » (sur la figure 1.14 : angle θ de 30° et l et h égaux). Wang *et al.* [25] ont proposé une formulation du plateau de contrainte d'une structure alliant motifs de sablier et motifs d'étoile en se basant sur l'approche de la borne supérieure et inférieure de Gibson *et al.* [28]. Dans leurs études sur les structures ré-entrantes, Hou *et al.* [14]

et Xiao *et al.* [32] ont présenté la formule de la contrainte plateau en remplaçant directement les variables par les paramètres de la structure.

Toutes ces études permettent de comprendre quels sont les paramètres influençant l'allure de la courbe de contrainte-déformation. Cependant, elles ne permettent pas de comprendre la réponse d'une structure auxétique face à un chargement dynamique.

1.3.3 Comportement sous chargement dynamique

Les structures cellulaires, à faible vitesse de déformation, montrent un écrasement généralisé de la structure [15]. Les cellules constituant l'échantillon se déforment simultanément, mais sans que la déformation soit absolument identique d'une cellule à l'autre. Il en résulte une non-uniformité de déformation des cellules qui se manifeste par des « figures » caractéristiques dans la structure déformée. Ces figures sont appelées modes, figure 1.15.

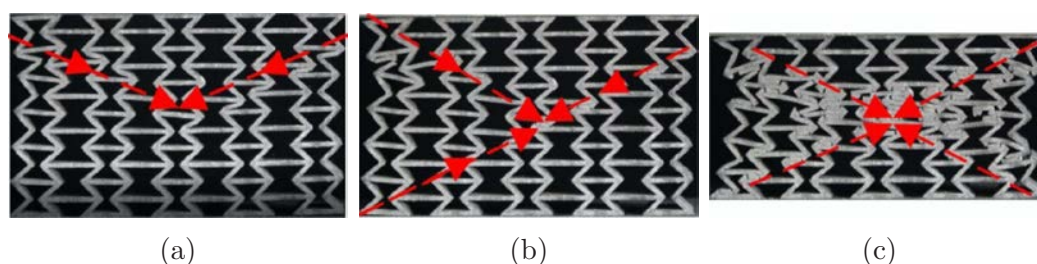
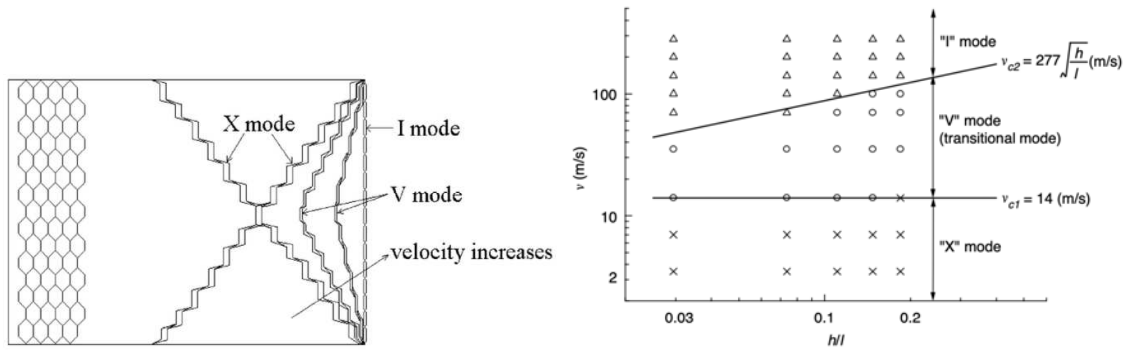
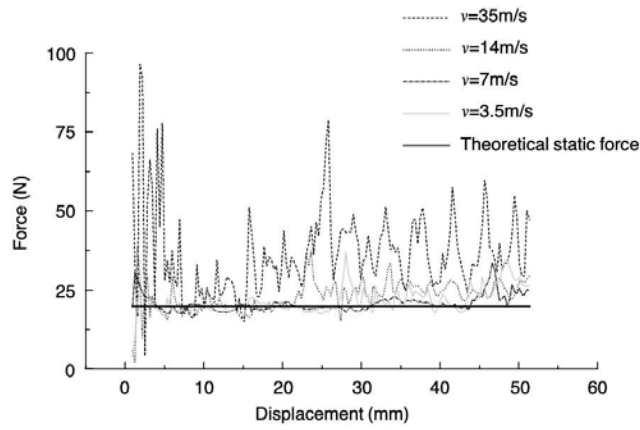


FIGURE 1.15 – Modes de déformations observés sur un auxétique ré-entrant comprimé à $1 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ [15] : (a) mode en V, (b) mode en y, (c) mode en X.

Certains motifs, caractéristiques de chaque géométrie [14, 15, 24, 25, 30], peuvent être observés. Lorsque la vitesse de chargement augmente, les modes de déformation changent [30] et les équations théoriques pour déterminer la contrainte plateau ne sont plus applicables. Dans son étude sur les Nida réguliers, Ruan *et al.* [30] réalisent des simulations de compression à différentes vitesses de $3.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $280 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La structure est sollicitée par une plaque rigide l'écrasant à vitesse constante d'un côté tandis que les nœuds de la structure de la face opposée sont bloqués en déplacement. Le mode de déformation en « X » est observé aux vitesses faibles à modérées. Lorsque la vitesse augmente, le mode évolue vers le mode « I » [14, 24, 25, 30], figure 1.16a. Le mode « I » apparaît sur la face « proximale », c'est à dire la face où se produit l'impact. Les cellules à cet endroit sont instantanément densifiées et cette déformation se propage rang après rang dans la structure, figure 1.17. Ce mode est observé à condition que la vitesse de chargement soit suffisamment grande, figure 1.16b. La courbe de force-déplacement simulée s'éloigne de celle obtenue par la théorie à mesure que la vitesse augmente, figure 1.16c.



(a) Schématisation des modes de déformation (b) Carte des modes de déformation observés suivant l'évolution de la vitesse de compression et le rapport entre l'épaisseur et la longueur des parois.



(c) Courbe de force-déplacement pour différentes vitesses de chargement comparé à la valeur théorique de la contrainte plateau statique, équation 1.5.

FIGURE 1.16 – Étude des modes de déformation des Nida réguliers pour différentes vitesses de chargement [30].

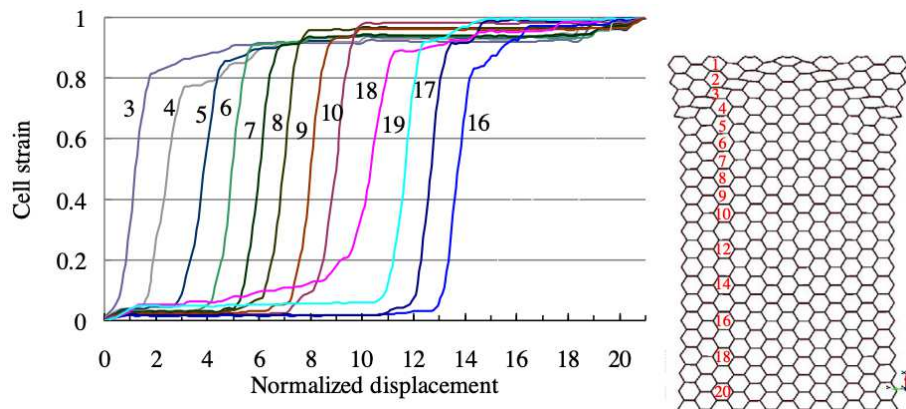


FIGURE 1.17 – Déformation successive des cellules d'un Nida comprimé à 10 m.s^{-1} . Le terme « *cell strain* » correspond au rapport de la hauteur d'une cellule à un instant donné et de sa hauteur initiale [27].

Les études menées sur le comportement dynamique du bois [33] par Reid et

Peng assimilent le mode « I » à la propagation d'une onde de choc à travers la structure. À grande vitesse de sollicitation, les matériaux cellulaires répondent à un impact en formant une onde de choc car ils possèdent une courbe de contrainte-déformation croissante monotone et convexe par rapport à l'axe des déformations [33]. La déformation débute sur la face proximale. Les cellules, au niveau de cette face, sont quasi-instantanément densifiées. La déformation se propage ensuite dans la structure en créant une discontinuité de déformation dans la structure. Cette discontinuité est semblable à un front d'onde avec une zone non densifiée d'un côté et une zone densifiée de l'autre, figure 1.18 [34].

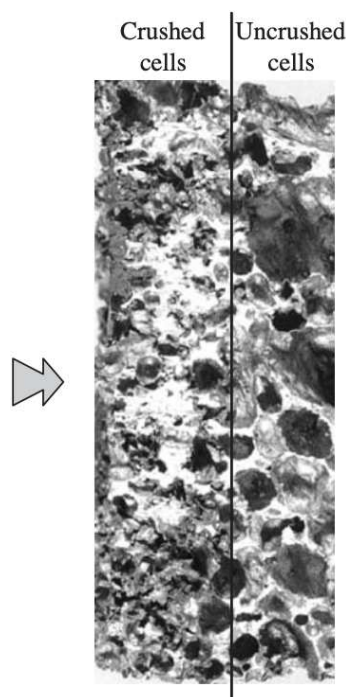


FIGURE 1.18 – Répartition de la déformation dans une mousse d'aluminium suite à un impact à 107.5 m.s^{-1} . Le trait vertical représente le front de discontinuité avec à gauche les cellules densifiées et à droite les cellules non densifiées. La flèche indique la face impactée. [34].

Le phénomène est grandement étudié expérimentalement [35, 36] et numériquement [14, 26, 37, 38]. La contrainte déterminée par les forces de contact entre le projectile et la structure (face proximale) montre qu'elle est supérieure à la contrainte du plateau quasi-statique déterminée et augmente avec la vitesse d'impact [26]. La contrainte déterminée par les forces de contact avec le support (face distale, face opposée à la face impactée) atteint très rapidement la contrainte plateau quasi-statique; elle reste égale à celle-ci tant que l'onde de choc n'a pas atteint la face distale. L'observation de cette réponse a mené à l'utilisation d'un modèle simplifié pour étudier analytiquement le comportement des matériaux cellulaires sous chargement dynamique [33]. La structure est ramenée à un modèle de matériau rigide,

parfaitement plastique avec densification (« *Rigid, Prefectly-plastic, Locking* » en anglais) pour lequel l'acronyme *R-P-P-L* sera utilisé, figure 1.19.

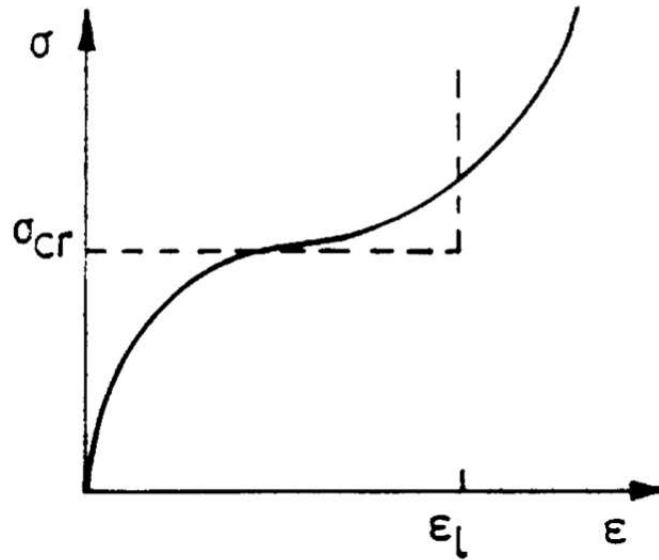


FIGURE 1.19 – Courbe de contrainte-déformation d'un matériau cellulaire. En trait plein, le comportement expérimental, en pointillé, le comportement idéalisé *R-P-P-L*. σ_{cr} correspond à la contrainte plateau statique et ε_l est la limite déformation à densification de la structure [33].

Selon la description de Reid et Peng [33], le matériau *R-P-P-L* soumis à une sollicitation dynamique voit sa contrainte augmenter instantanément à la valeur σ_{cr} à cause de son comportement rigide. Dans la figure 1.20, le front d'onde se déplace vers la droite à travers la structure mettant en mouvement la matière derrière lui à la même vitesse que la vitesse V du chargement. La partie de la structure se trouvant en amont du front est entièrement densifiée et voit sa contrainte s'élever à la valeur de la contrainte dynamique. La partie de la structure en aval du front reste intact et à la contrainte plateau, figure 1.20 [37].

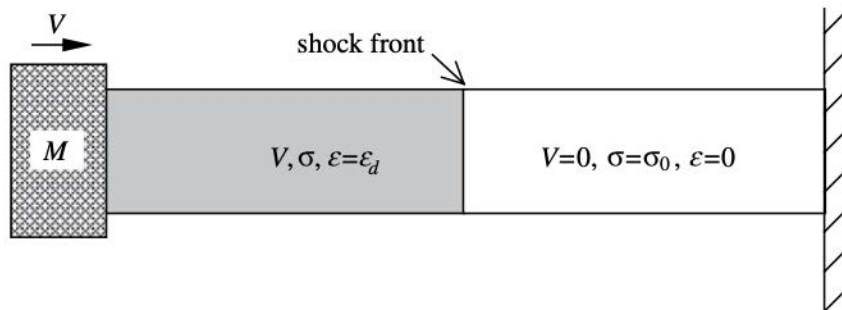


FIGURE 1.20 – Schématisation de la propagation du choc au travers d'un matériau *R-P-P-L* suite à l'impact d'un projectile de masse M et de vitesse V [37].

L'application de ce modèle pour déterminer la valeur de la contrainte dynamique de la face proximale repose sur le principe de conservation de masse, de la quantité de

mouvement et de l'énergie à travers le front. Bien que Reid et Peng [33] proposent une résolution directe de ce problème, la solution peut être obtenue par l'application au matériau *R-P-P-L* des conditions de Rankine-Hugoniot [39], qui sont une manière d'exprimer ces trois principes de conservation en connaissant l'état du matériau devant et derrière le front d'onde.

Différentes solutions sont proposées, [14, 26], mais celle qui prédomine et est largement adoptée fait intervenir le carré de la vitesse d'impact [33, 39] :

$$\sigma_d = \sigma_{cr} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_l} v^2 \quad (1.7)$$

Avec σ_d la contrainte dynamique et ρ_0 la masse volumique de la structure.

Des travaux menés sur des simulations d'impact de structures [30, 37] montrent une bonne correspondance entre la théorie et les simulations.

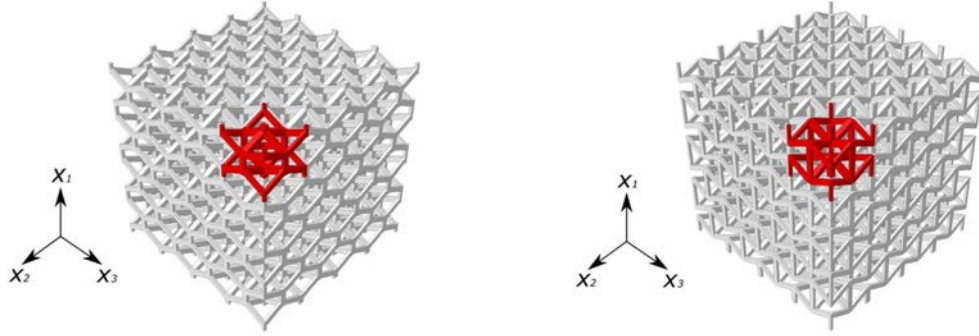
La possibilité de déterminer des équations théoriques du comportement dynamique des structures est un atout pour guider la réflexion afin de dimensionner les absorbeurs d'énergie. En appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement au système projectile/structure, Harrigan *et al.* [40] ont pu déduire de ces équations analytiques une équation de l'évolution de la contrainte dynamique en fonction du déplacement du projectile ainsi qu'une expression de la vitesse initiale pour laquelle le projectile est arrêté lorsque la structure est densifiée.

Afin d'évaluer le taux d'absorption d'énergie, il faut veiller à ce que les essais ou les simulations soient adaptés. En effet, certains travaux [14, 26, 30, 37, 41] étudient le comportement de structures sous chargement à vitesse constante. Cela a pour effet de surestimer l'énergie absorbée puisqu'il est nécessaire d'en apporter constamment au projectile afin de conserver une vitesse constante.

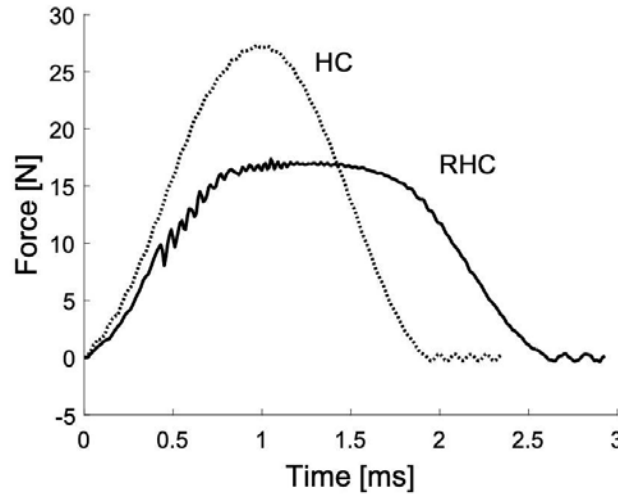
Il convient donc de réaliser les études adéquates pour estimer cette absorption. Fila *et al.* [42] ont réalisé des essais dynamiques sur trois géométries d'auxétiques différentes, dont un auxétique ré-entrant, au moyen de barres de Hopkinson. L'analyse des courbes de contrainte-déformation a permis de déterminer l'énergie spécifique en J.kg^{-1} pour chaque géométrie et montre que la structure auxétique ré-entrante possède la plus grande énergie spécifique.

Les essais d'indentation dynamique sont également un moyen adapté pour étudier l'absorption d'énergie d'une structure. Il consiste généralement à l'impact d'une sphère sur une structure. De plus, cet essai est similaire aux cas applicatifs dans le cadre d'utilisation des matériaux architecturés comme système de protection. Faraci *et al.* [43] ont étudié en ce sens le comportement de structures tridimensionnelles (« 3D ») avec des motifs ré-entrants et des motifs de Nida. Les essais d'indentation sur ces structures montrent qu'elles permettent de diminuer la force de contact du côté opposé à l'indentation, donc du côté de l'élément à protéger. Ils montrent égale-

ment que la structure auxétique est mieux adaptée puisqu'elle contribue à diminuer un peu plus cette force de contact, figure 1.21.



(a) Structure 3D Nida (HC : « honeycomb »). (b) Structure 3D auxétique ré-entrant (RHC : « re-entrant honeycomb »).



(c) Résultats des forces des contacts sur la face distale en fonction du temps pour les structures HC (Nida) et RHC (auxétique ré-entrant).

FIGURE 1.21 – Étude de la réponse à un essai d'indentation d'une sphère rigide de 10 g à une vitesse initiale de 1.5 m.s^{-1} [43].

Différentes structures auxétiques sont testées et simulées avec un indenteur plat et un indenteur hémisphérique pour différentes énergies initiales par Shepherd *et al.* [44]. Ces structures sont comparées à un Nida. Les résultats semblent indiquer qu'à faible énergie d'impact (1 J et 3 J), le Nida est le plus indiqué pour atténuer le choc. Cependant, à 5 J, les structures auxétiques dissipent mieux l'impact et évitent grâce à leur coefficient de Poisson négatif que la matière ne fuit le point d'impact ce qui rendrait la distance entre la position de l'indenteur et le bas de l'échantillon plus petite. Les essais d'indentation sur des structures auxétiques plus grandes (0.1 m contre des structures de $4.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ [43] à environ $4.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ [44] de haut) menés par Qi *et al.* [45] vont également dans ce sens. Cette étude, tout comme [42] et [43], prouve l'intérêt d'utiliser des structures auxétiques pour l'absorption d'énergie. Imbalzano *et al.* [29] montrent également l'efficacité d'une structure auxétique ré-

entrante comparée à une structure Nida toutes deux soumises à une onde de choc provoquée par une explosion. Yang *et al.* [46] étudient également la performance des auxétiques. Ils soumettent une mousse d'aluminium et une structure ré-entrante à un impact balistique et montrent que cette dernière absorbe mieux l'énergie de la balle que la mousse d'aluminium.

La réduction de l'effet dit « face arrière » (déplacement de la face opposée à celle de l'impact suite à la sollicitation dynamique) grâce aux structures auxétiques est un élément non-négligeable dans la conception d'un système de protection. En limitant cet effet, on contribue à limiter les dommages sur l'objet à protéger. Lan *et al.* [47] réalisent des essais numériques sur des panneaux cylindriques, composées de mousses d'aluminium, de Nida ou d'auxétiques ré-entrants, soumis à une onde de choc provoquée par une explosion. Les résultats montrent une meilleure résistance, une meilleure absorption d'énergie et un déplacement plus petit en utilisant la structure auxétique plutôt que la mousse ou le Nida. L'effet face arrière est ainsi limité.

Afin d'améliorer les absorbeurs d'énergie basés sur les structures auxétiques, des propositions de remplissage des espaces vides sont également étudiés [42, 48, 49] et montrent des propriétés, notamment d'absorption d'énergie, améliorées.

1.4 Conclusion de l'état de l'art

Au terme de cette étude bibliographique, un état des recherches actuelles a pu être dressé concernant les structures auxétiques, mais également la réponse des matériaux cellulaires sous chargement dynamique.

Les structures auxétiques font partie des matériaux architecturés et ont la particularité de posséder un coefficient de Poisson négatif. Cette propriété leur confère des propriétés améliorées et en particulier une meilleure résistance à l'indentation par rapport aux matériaux conventionnels. C'est pour cette raison qu'ils sont très étudiés dans le domaine de l'absorption d'énergie mécanique. La capacité à absorber de l'énergie est directement reliée à l'aire sous la courbe contrainte-déformation des matériaux structurés. Pour les matériaux architecturés, cette courbe possède une allure particulière. Elle se divise en trois parties [18] : une zone élastique, une zone de déformation plastique à contrainte constante appelée contrainte plateau et une zone de densification à partir de laquelle la contrainte augmente fortement. Les travaux de Gibson *et al.* [28] ont permis d'établir une équation de la contrainte plateau applicable d'abord aux Nida mais aussi, par analogie, aux auxétiques ré-entrant [14]. Cette équation est cependant appliquée directement à la structure considérée sans mettre en évidence les paramètres ayant une influence sur celle-ci. De plus, les variations dans les appellations des grandeurs géométriques des auxétiques ré-entrants, le

manque de clarté sur ce que représente la longueur définie dans certaines représentations schématiques ou encore la définition de l'angle d'inclinaison des parois de la cellule unitaire [14, 15, 24, 26, 29, 32, 43, 45, 46, 49] rendent confuses les comparaisons entre les différents travaux de recherches.

Lorsqu'un matériau architecturé est soumis à un impact rapide, d'un projectile par exemple, un mode de déformation structurelle se met en place à la manière de la propagation d'une onde de choc. Une idéalisation de la structure par le modèle $R-P-P-L$ permet avec cette dernière analogie de mettre en place un modèle analytique afin de déterminer la contrainte dynamique de la structure. Plusieurs études ont validé ce modèle expérimentalement et numériquement. Bien que Harrigan *et al.* [40] ait pu obtenir une équation de la contrainte dynamique en fonction du déplacement du projectile pour des matériaux cellulaires, il n'y a, à notre connaissance, que peu de travaux cherchant à appliquer cette méthode aux structures auxétiques.

D'autre part, la comparaison entre des structures conventionnelles et des structures auxétiques ont montré la capacité supérieure de l'auxétique à absorber l'énergie dans différents cas de sollicitation [29, 42, 43, 46]. Dans le but d'améliorer la réponse de systèmes de protection, certaines améliorations comme le remplissage des espaces avec des polymères sont proposées [42, 48, 49].

1.5 Démarche des travaux de recherche

Cette étude de l'état de l'art a pu mettre en avant les avantages que présentent les structures auxétiques par rapport aux matériaux à coefficient de Poisson positif. Ils semblent être une solution adéquate pour la réalisation de systèmes de protection. Parmi les géométries d'auxétiques qui peuvent exister, la structure 2D ré-entrante est sélectionnée pour sa simplicité, tant pour les modèles analytiques, les simulations numériques que pour sa facilité à être produite. De plus, sa parenté géométrique avec les Nida permettra d'effectuer facilement des comparaisons entre ces deux types de matériaux cellulaires.

Ces travaux de thèse portant sur l'étude de la réponse dynamique des structures auxétiques, il semble nécessaire d'effectuer, dès le chapitre 2, une définition rigoureuse de la structure ré-entrante. L'étude des travaux antérieurs a également montré que les paramètres définissant la géométrie de la cellule auxétique peuvent avoir des influences non-négligeable sur la réponse mécanique de la structure. Les paramètres géométriques, comme l'ont montré les travaux sur les matériaux cellulaires conventionnels, interviennent dans l'expression analytique du plateau de contrainte statique, mais également dans la détermination de la contrainte dynamique. Les formulations analytiques de ces contraintes sont le plus souvent appliquées aux Nida ou

plus largement aux matériaux cellulaires. L'adaptation de ces équations à la structure ré-entrante sélectionnée ainsi qu'une étude de l'influence qu'ont les paramètres géométriques de la cellule fera également l'objet du chapitre 2. Un modèle numérique mis en place dans le chapitre 3 permettra de valider les équations analytiques. Un second modèle sera présenté visant à simuler le banc expérimental du chapitre 4. Le chapitre 4 sera donc consacré à l'étude expérimentale sous chargement quasi-statique et dynamique de la structure auxétique. Le chapitre 5 portera sur la comparaison des résultats expérimentaux et numériques et l'emploi de la simulation numérique pour estimer l'énergie absorbée lors de l'essai dynamique. Les résultats de ces travaux devront permettre de guider la conception de protections auxétiques et d'évaluer l'énergie absorbée par la structure considérée au cours d'un impact expérimental.

Chapitre 2

Modélisation analytique de la structure ré-entrante

Résumé : La structure auxétique utilisée est présentée dans ce chapitre. Tous les paramètres géométriques de la structure, qui interviendront dans la suite de ce mémoire, sont présentés ici. Nous allons également établir les équations analytiques permettant de prédire la réponse mécanique des structures auxétiques sous différents chargement. Nous allons utiliser les grandeurs définies dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous généraliserons les équations afin quelles puissent être utilisées pour tous les matériaux et pour toutes les géométries de structures auxétiques 2D ré-entrantes.

2.1 Auxétique 2D ré-entrant

La structure retenue pour ces travaux est un auxétique 2D ré-entrant ou nid d'abeilles ré-entrant. Dans la suite de ces travaux nous utiliserons le terme « structure auxétique » (SA) pour évoquer l'auxétique 2D ré-entrant. Si une autre forme d'auxétique doit être nommée, elle le sera dans son intégralité.

2.1.1 Géométrie de la structure auxétique

La cellule unitaire d'une SA possède la forme d'un sablier. Une SA dans son intégralité (assemblage de plusieurs cellules unitaires) est distinguable d'un autre par plusieurs grandeurs géométriques. Un exemple de SA entière est représenté dans la figure 2.1. Elle est constituée de cellules correspondant à la figure 2.2. Sa hauteur totale est notée D_0 , sa largeur L_0 et sa profondeur b . La surface projetée de la SA sur le plan X - Z est notée S_0 .

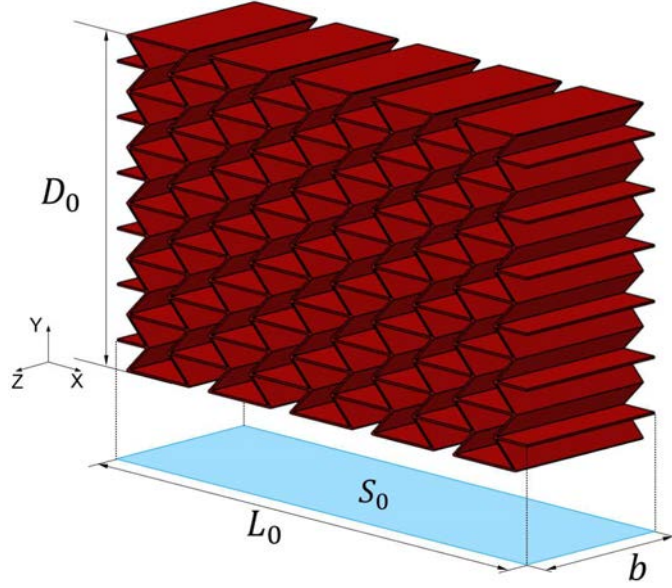


FIGURE 2.1 – Exemple d'une structure auxétique complète (« SA »).

La géométrie d'une cellule unitaire d'une SA est caractérisée par son axe neutre (en pointillé noir sur la figure 2.2). L'axe neutre horizontal est noté H et l'axe neutre oblique est noté L . L'angle formé par les axes neutres H et L est noté θ . Enfin, l'épaisseur des parois est identique dans toute la structure et est notée t_{thick} .

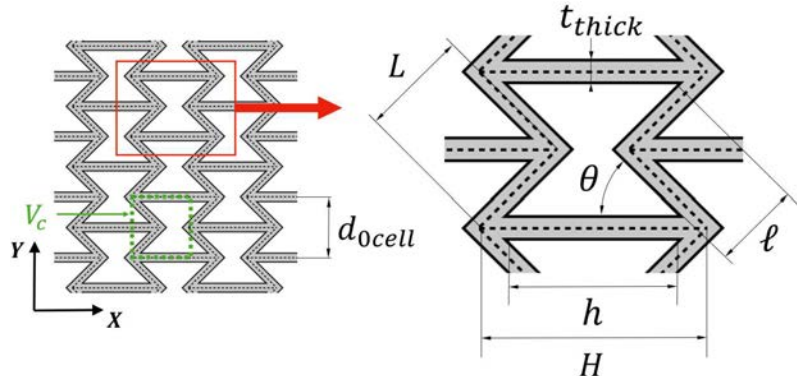


FIGURE 2.2 – Configuration d'une cellule unitaire d'une SA.

Il est possible de déterminer, comme suit, les longueurs du "sablier vide" notées h et ℓ sur la figure 2.2 :

$$\ell = L - \frac{t_{thick}}{2 \sin \theta} \quad (2.1)$$

$$h = H - \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} t_{thick} \quad (2.2)$$

On peut alors déterminer la hauteur d'une cellule d_{0cell} :

$$d_{0cell} = 2 L \sin \theta \quad (2.3)$$

Une SA est composée de n cellules entières de hauteur d_{0cell} dans la direction Y . d_{0cell} est la hauteur entre les deux axes neutres horizontaux d'une cellule unitaire. Pour déterminer la hauteur totale d'une SA, il est nécessaire d'ajouter aux cellules extrêmes (en haut et en bas) une sur-épaisseur de $t_{thick}/2$ afin que toutes les parois aient la même épaisseur. D_0 est alors défini par :

$$D_0 = n d_{0cell} + t_{thick} \quad (2.4)$$

Deux paramètres adimensionnels peuvent être définis à partir des caractéristiques géométriques de la cellule :

$$\tau = \frac{t_{thick}}{L} \quad (2.5)$$

$$\eta = \frac{H}{L} \quad (2.6)$$

2.1.2 Densité relative et déformation à densification

La densité relative d'une structure cellulaire est le rapport entre la masse volumique de cette structure ρ_c et la masse volumique du matériau brut ρ_s dont elle est constituée. Dans le cas d'une SA, cette densité relative s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\rho_c}{\rho_s} = \frac{V_s}{V_c} \quad (2.7)$$

Où V_c et V_s sont respectivement les volumes occupés par la structure et par le matériau brut.

Le volume V_c correspondant à la surface verte, occupée par la structure dans la figure 2.2, multipliée par la profondeur b est donné par :

$$V_c = d_{0cell} S_{cell} \quad (2.8)$$

Avec S_{cell} la surface projetée sur le plan X - Z et donnée par :

$$S_{cell} = b(H - L \cos \theta) \quad (2.9)$$

En soustrayant de V_c le volume occupé par le vide, on obtient le volume V_s de matière brut :

$$V_s = V_c - 2 b \ell \sin \theta (h - \ell \cos \theta) \quad (2.10)$$

La densité relative de la SA s'exprime alors de la façon suivante :

$$\frac{\rho_c}{\rho_s} = 1 - \frac{L \sin \theta - \frac{t_{thick}}{2}}{L \sin \theta (H - L \cos \theta)} \left[H - L \cos \theta - \frac{t_{thick}}{\sin \theta} \left(1 + \frac{\cos \theta}{2} \right) \right] \quad (2.11)$$

L'équation 2.11 peut également s'écrire en fonction des termes adimensionnels τ et η :

$$\frac{\rho_c}{\rho_s} = 1 - \frac{\sin \theta - \frac{\tau}{2}}{\sin \theta (\eta - \cos \theta)} \left[\eta - \cos \theta - \frac{\tau}{\sin \theta} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \right] \quad (2.12)$$

Dans la suite de ces travaux, la SA est étudiée en compression suivant l'axe Y .

Selon le *Metal foam Guide* [19], un bon absorbeur d'énergie possède une courbe de contrainte/déformation avec un plateau haut et long durant la compression avant d'atteindre la phase de densification. À densification, les cellules se sont toutes écrasées comme dans la figure 2.3 au point que la contrainte de compression rejoigne celle du matériau brut lui-même. La déformation en compression sera comptée positivement et définie comme le ratio de la variation de hauteur $D_0 - D$ et de la hauteur initiale D_0 , où D représente la hauteur instantanée de la SA.

$$\varepsilon = \frac{D_0 - D}{D_0} \quad (2.13)$$

A la phase de densification, la déformation est notée ε_{DS} et la hauteur de la SA est D_s , alors que la distance parcourue depuis la hauteur initiale pour atteindre Ce stade de déformation est $\varepsilon_{DS}D_0$ comme le montre la figure 2.3

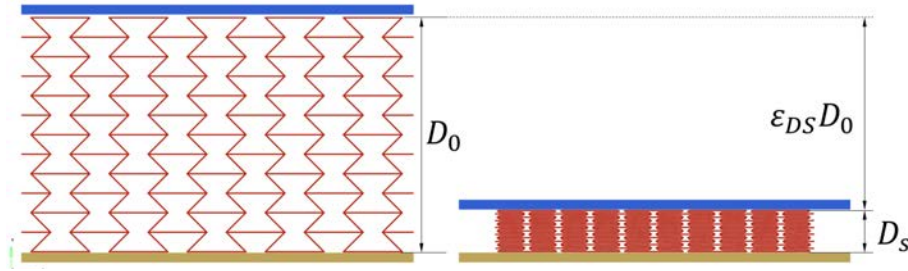


FIGURE 2.3 – Représentation graphique d'une SA à densification.

Selon la description d'Ashby *et al.* [19], un bon absorbeur d'énergie doit avoir un plateau de contrainte jusqu'à densification le plus long possible. Il est donc nécessaire de définir la valeur de la déformation à ce stade. Sur un essai de compression, il est possible de définir le début de la densification comme la déformation pour laquelle la contrainte augmente de manière importante. À ce stade, toutes les cellules sont écrasées. Gibson *et al.* [2] établissent qu'un matériau cellulaire est entièrement densifié lorsque la déformation est égale à la porosité ; cela signifie que la déformation théorique à densification totale est :

$$\varepsilon_d^{totally} = 1 - \frac{\rho_c}{\rho_s} \quad (2.14)$$

Il faut toutefois noter que si la déformation est égale à $\varepsilon_d^{totally}$, la structure est entièrement écrasée et il ne reste plus aucun espace vide. Cependant, selon la proposition

précédente, la densification intervient lorsque la contrainte augmente fortement. Cela signifie que toutes les parois de la structure sont en contact et qu'il reste encore des espaces vides. La déformation est alors notée ε_{DS} . Ainsi $\varepsilon_{DS} \leq \varepsilon_d^{totally}$.

Suivant cette définition, la densification d'une cellule commence exactement lorsque $d_{cell} = 4n t_{thick}$. Pour toute la SA, ε_{DS} s'écrit alors :

$$\varepsilon_{DS} = 1 - \frac{(4n + 1) t_{thick}}{D_0} \quad (2.15)$$

Pour un nombre suffisant de cellule, cette valeur tend vers une limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_{DS} = 1 - \frac{4 t_{thick}}{d_{0cell}} \quad (2.16)$$

À partir de l'équation 2.15, il est possible de définir une masse volumique de la structure densifiée :

$$\rho_{DS} = \frac{\rho_c}{1 - \varepsilon_{DS}} \quad (2.17)$$

L'équation 2.15 correspond à la valeur maximale qu'une SA avec une géométrie donnée peut atteindre. En effet, suivant les valeurs que prennent les ratios η et τ , cette valeur de déformation à densification ne pourra pas être atteinte à cause de l'encombrement des parois et de leurs longueurs. Cela soulève la question du choix des valeurs des différents paramètres géométriques qu'il est possible de faire varier pour optimiser les propriétés souhaitées de la SA.

Dans le cas présent, la valeur de ε_{DS} ne pourra être égale à l'équation 2.15 à la condition que les parois des cellules puissent s'effondrer sans entrer en contact au niveau de la zone étroite du sablier "vide" de la SA. Cela signifie que la longueur h doit être au moins deux fois plus grande que la longueur ℓ . Connaissant ceci et en utilisant les équations 2.1 et 2.6, on obtient alors la condition suivante sur la valeur de η :

$$\eta \geq 2 + \frac{\tau}{\tan \theta} \quad (2.18)$$

À présent que la cellule auxétique a correctement été définie, l'étude analytique de la réponse des SA peut être entreprise.

2.2 Propriétés quasi-statiques : détermination de la contrainte plateau

Les matériaux cellulaires présentent des courbes de contrainte/déformation caractéristiques divisibles en trois parties :

- Une zone élastique présentant un module d'Young caractéristique de la

structure.

- Une zone dite « plateau », où la contrainte reste constante et la structure se déforme plastiquement.
- Une zone de densification où la contrainte augmente très fortement. Cette zone débute à la déformation ε_{DS} .

Dans un premier temps, la réponse d'une SA sous chargement quasi-statique va être analysée et formulée de manière analytique.

Les travaux de Gibson *et al.* [28] ont permis de déterminer analytiquement les propriétés quasi-statiques des structures en Nida. Bien que ces travaux aient souvent été repris, ils sont en général appliqués à une géométrie particulière [14, 29, 30]. Les formules déduites ne sont alors applicables qu'à la géométrie considérée par l'auteur. Or le but des travaux présentés ici consiste à permettre l'étude du plus grand nombre de géométries des SA.

Cette étude menée par Gibson *et al.* [28] se base sur la formulation des poutres en négligeant les déformations dues au cisaillement et la compression ou traction axiale des poutres. Enfin, les déformations sont supposées suffisamment petites pour considérer qu'il n'y a pas de grand changement dans la géométrie de la structure. Nous allons suivre la méthode proposée par Gibson *et al.* [28] et l'appliquer aux SA.

La contrainte plateau sous chargement quasi-statique est notée σ_{stat} . Elle correspond à la contrainte nécessaire pour déformer plastiquement les parois de la SA lors d'une compression. Cette contrainte plateau est atteinte si le matériau dont est constitué la SA possède une limite élastique et si le moment de flexion dans les parois atteint le moment plastique de celles-ci. Considérons une compression de la SA suivant l'axe Y , comme sur la figure 2.4.

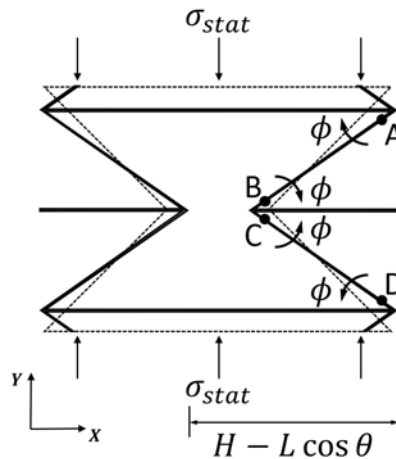


FIGURE 2.4 – Déformation plastique d'une cellule de SA selon l'axe Y . La cellule initiale est représentée en pointillé.

La force F , correspondant à la contrainte σ_{stat} , nécessaire à la déformation

plastique des quatre rotules A, B, C et D d'une cellule est :

$$F = \sigma_{stat} S_{cell} = \sigma_{stat} b (H - L \cos \theta) \quad (2.19)$$

Le travail réalisé par la force F durant la rotation ϕ (figure 2.4) de ces rotules est :

$$W = \sigma_{stat} b (H - L \cos \theta) 2 L \phi \cos \theta \quad (2.20)$$

Le travail W , réalisé par la force F , ne peut pas excéder le travail du moment plastique M_p réalisé lors de la rotation ϕ au niveau de ces mêmes rotules [28, 50] :

$$4 M_p \phi \geq \sigma_{stat} b (H - L \cos \theta) 2 L \phi \cos \theta \quad (2.21)$$

Le moment plastique d'une rotule est donné par :

$$M_p = \frac{1}{4} \sigma_y b t_{thick}^2 \quad (2.22)$$

L'équation 2.21 constitue une borne supérieure du travail W . En reportant l'équation 2.22 dans l'équation 2.21, la valeur maximale de la contrainte plateau statique σ_{stat} peut être écrite :

$$\sigma_{stat} \leq \sigma_y \frac{t^2}{2 L (H - L \cos \theta) \cos \theta} \quad (2.23)$$

Le moment fléchissant maximal induit par la force F (figure 2.5) est :

$$M_{max} = \frac{1}{2} \sigma_{stat} b (H - L \cos \theta) L \cos \theta \quad (2.24)$$

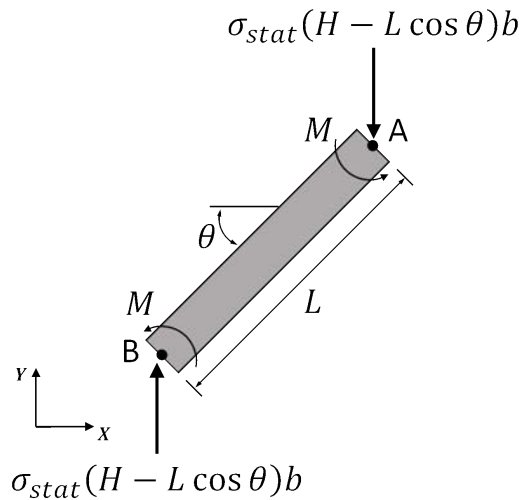


FIGURE 2.5 – Moment fléchissant atteint dans la paroi A-B.

Le moment plastique M_p constitue une borne inférieure du moment fléchissant

maximal M_{max} [28, 50] et permet de déterminer la valeur minimale de σ_{stat} :

$$\sigma_{stat} \geq \sigma_y \frac{t^2}{2L(H - L \cos \theta) \cos \theta} \quad (2.25)$$

Les bornes supérieures et inférieures de σ_{stat} étant égales, cela implique que σ_{stat} est égale à ses bornes, soit :

$$\sigma_{stat} = \sigma_y \frac{t^2}{2L(H - L \cos \theta) \cos \theta} \quad (2.26)$$

L'équation 2.26 peut s'exprimer suivant les ratios η et τ :

$$\sigma_{stat} = \sigma_y \frac{\tau^2}{2(\eta - \cos \theta) \cos \theta} \quad (2.27)$$

Cette méthode peut également être employée pour déterminer une contrainte plateau statique dans le cas d'une sollicitation suivant l'axe X . Dans ce cas, la contrainte plateau s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma_{stat, X} = \sigma_y \frac{\tau^2}{2 \sin^2 \theta} \quad (2.28)$$

Les équations 2.27 et 2.28 permettent de prédire le comportement statique des SA. Ces équations dépendent avant tout de la géométrie de la cellule unitaire de la SA au moyen des paramètres τ , η et θ . L'influence du matériau choisi pour réaliser la SA n'intervient seulement qu'à travers sa limite élastique σ_y .

2.3 Propriétés dynamiques

Plusieurs travaux [30, 33, 34] montrent que les matériaux architecturés présentent un mode de déformation typique dans le cas d'une compression dynamique. En effet, la déformation débute sur la face de la structure qui est impactée et s'étend à la manière d'une onde de choc vers l'autre extrémité de la structure créant une forte discontinuité, un « front », lors de son passage.

Reid et Peng [33] propose d'étudier le phénomène d'un point de vue cinématique ainsi que les conservations de masse et de quantité de mouvement entre deux instants de la compression afin de déterminer la contrainte dynamique de la structure. Le même résultat peut être obtenu en appliquant les relations de Rankine-Hugoniot [39]. C'est cette méthode qui sera appliquée au cas des SA.

Avant cela, les relations de Rankine-Hugoniot vont être rappelées.

2.3.1 Relations de Rankine-Hugoniot

Considérons une onde de choc plane, figure 2.6, se propageant le long d'une barre dans le sens positif de l'axe Y . La barre est considérée solide, continue et homogène de longueur infinie et de section S . Le matériau constitutif de la barre est considéré élastique-plastique et l'échauffement du matériau dû au passage du front d'onde est négligé. La section de la barre est considérée constante à travers le choc.

Le problème est étudié dans le système de coordonnées eulériennes et les contraintes et déformations sont comptées positivement en compression. La figure 2.6 représente une portion de la barre dans laquelle le front d'onde se trouve à la position A_t - B_t à un instant t . En une durée dt , le front s'est déplacé d'une longueur dD sur la barre et se trouve à la position A_{t+dt} - B_{t+dt} .

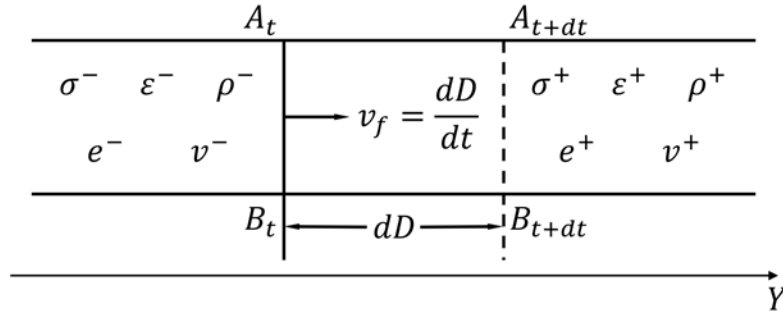


FIGURE 2.6 – Propagation d'un front d'onde de choc. Le front parcourt une distance dD pendant un temps dt .

Le front se déplace donc en coordonnées eulériennes à la vitesse $v_f = \frac{dD}{dt}$. Notons σ la contrainte du matériau, ε sa déformation, ρ la masse volumique du matériau, v la vitesse du matériau et e l'énergie de déformation par unité de masse du matériau.

Lors de son passage, l'onde de choc crée une discontinuité des quantités physiques ψ dans la barre. Les grandeurs physiques devant le front seront notées avec un $+$ en exposant et avec un $-$ derrière le front, figure 2.6. La différence entre ces grandeurs physiques devant et derrière le front est notée $[\psi]$ comme suit :

$$[\psi] = \psi^- - \psi^+ \quad (2.29)$$

Premièrement, le matériau constitutif de la barre est considéré continu et homogène. Ainsi, selon la loi de conservation de masse, le flux de masse, $\dot{m}$, qui passe au travers du front doit être constant. Sachant que la vitesse du front par rapport à la matière est $v_f - v^+$ devant le front et $v_f - v^-$ derrière, la conservation du flux

massique donne :

$$\rho^- (v_f - v^-) = \rho^+ (v_f - v^+) = \dot{m} \quad (2.30)$$

$$\rho^- v^- - \rho^+ v^+ = \rho^- v_f - \rho^+ v_f \quad (2.30a)$$

$$[\rho v] = v_f [\rho] \quad (2.30b)$$

L'équation 2.30b traduit la condition de conservation de la masse à travers le front.

Deuxièmement, le système (la barre) considéré est isolé. La loi de conservation de la quantité de mouvement est alors applicable et s'écrit comme suit :

$$\sigma^- - \sigma^+ = \dot{m} v^- - \dot{m} v^+ \quad (2.31)$$

$$\sigma^- - \sigma^+ = \rho^- (v_f - v^-) v^- - \rho^+ (v_f - v^+) v^+ \quad (2.31a)$$

$$[\sigma] = \dot{m} [v] = \rho^+ (v_f - v^+) [v] \quad (2.31b)$$

L'équation 2.31b traduit la condition de conservation de la quantité de mouvement à travers le front.

Enfin, le système étant isolé et l'échauffement du matériau lors du passage de l'onde étant négligé, ce premier ne possède que de l'énergie mécanique qui est conservée au cours du temps. Le principe de conservation de l'énergie peut donc être appliqué. L'énergie du système se compose d'énergie cinétique, d'énergie de déformation du matériau et du travail des forces de chaque côté du front.

Le principe de conservation de l'énergie s'écrit alors comme suit :

$$\frac{1}{2} \dot{m} v^{-2} + e^- \dot{m} - \sigma^- v^- = \frac{1}{2} \dot{m} v^{+2} + e^+ \dot{m} - \sigma^+ v^+ \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{2} \dot{m} [v^2] + [e] \dot{m} = [\sigma v] \quad (2.32a)$$

$$[e] = \frac{[\sigma v]}{\dot{m}} - \frac{1}{2} [v^2] \quad (2.32b)$$

L'équation 2.32b traduit la condition de conservation de l'énergie à travers le front.

Les trois équations 2.30b, 2.31b et 2.32b correspondent à la formulation eulérienne des relations de Rankine-Hugoniot.

En développant l'équation 2.32b et en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, équation 2.31b, on obtient une autre écriture de la conservation d'énergie :

$$[e] = \frac{1}{2 \dot{m}} (\sigma^+ + \sigma^-) [v] \quad (2.33)$$

2.3.2 Application de la théorie d'onde de choc aux structures auxétiques

Comme décrit précédemment, la SA, sous l'effet d'un impact dynamique, se déforme dans un premier temps au niveau de l'interface sollicitée puis une onde de compression se propage dans la structure. La structure, derrière l'onde, est déformée jusqu'au seuil de densification. Ce comportement peut être idéalisé par un modèle de matériau continu nommé *R-P-P-L* (« *Rigid Perfectly Plastic Locking* »). Un matériau suivant un modèle *R-P-P-L*, figure 2.7, voit sa contrainte passer instantanément d'une contrainte nulle à une contrainte caractéristique de compression quasi-statique ; dans le cas de la SA cela correspond à la contrainte plateau σ_{stat} . La contrainte est maintenue à cette valeur jusqu'à atteindre la déformation limite du matériau ; dans le cas de la SA, il s'agit de ε_{DS} .

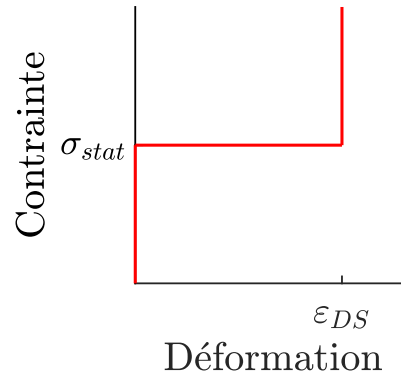


FIGURE 2.7 – Courbe contrainte/déformation d'une SA suivant un modèle *R-P-P-L*.

Le comportement des SA sous chargement dynamique, représenté dans la figure 2.8, est à présent étudié.

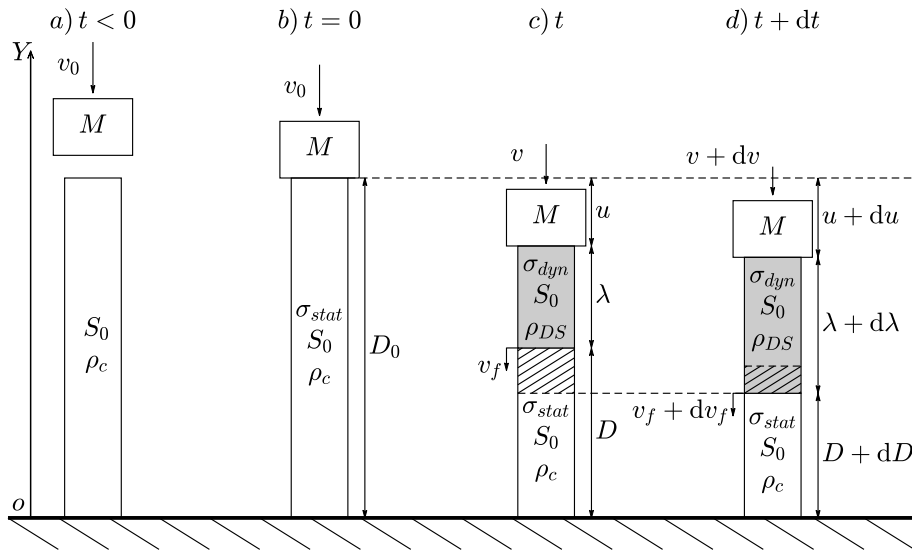


FIGURE 2.8 – Schéma et paramètres définissant la propagation d'un choc dans une structure cellulaire lors d'un impact de masse rigide.

Figure 2.8 a) $t < 0$. Un projectile (impacteur ou plaque) rigide de masse M se déplace à une vitesse initiale v_0 selon l'axe Y en direction de la SA. Cette dernière est de longueur D_0 selon l'axe Y et de section S_0 sur le plan $X - Z$. La SA repose sur un support rigide et fixe. Sa masse volumique initiale est notée ρ_c .

Figure 2.8 b) $t = 0$. Le projectile entre en contact avec la SA sur la surface supérieure en $y = D_0$ alors que la surface inférieure ($y = 0$) reste immobile. Telle que définie par le modèle $R-P-P-L$, la contrainte de la structure monte instantanément à la valeur de plateau de contrainte quasi-statique σ_{stat} .

Figure 2.8 c) t . Le projectile possède à présent une vitesse notée v et s'est déplacé d'une distance u par rapport à sa position à $t = 0$. Une longueur λ de structure est densifiée suite au passage de l'onde de déformation dont le front se déplace à la vitesse v_f . Le front a parcouru pendant le temps t une longueur $u + \lambda$ par rapport à la position $y = D_0$. Une longueur D de structure reste intacte. La partie densifiée de la SA, de longueur λ dont la déformation vaut ε_{DS} , qui va à la même vitesse que celle du projectile, est soumise à la contrainte σ_{dyn} et possède une masse volumique notée ρ_{DS} .

Figure 2.8 d) $t + dt$. Le projectile a une vitesse notée $v + dv$ et s'est déplacé d'une distance du sur un temps dt . La zone densifiée a augmenté d'une longueur $d\lambda$ et le front d'onde a une vitesse $v_f + dv_f$. La longueur de la SA restant intacte est de $D + dD$. La partie densifiée de la SA possède toujours une masse volumique ρ_{DS} et une contrainte σ_{dyn} et se déplace à la même vitesse que celle du projectile.

À l'instant t , on peut écrire les égalités suivantes entre les données du problème et les grandeurs physiques devant et derrière le front :

$$\begin{aligned} \rho^- &= \rho_{DS} & \rho^+ &= \rho_c \\ v^- &= v & v^+ &= 0 \\ \sigma^- &= \sigma_{dyn} & \sigma^+ &= \sigma_{stat} \end{aligned}$$

Les principes de conservation décrits au paragraphe 2.3.1 sont appliqués dans l'ordre.

Le principe de conservation de la masse à partir de l'équation 2.30b et en utilisant l'équation 2.17 donne :

$$\rho_{DS} v - \rho_c \times 0 = \rho_{DS} v_f - \rho_c v_f \quad (2.34)$$

$$v_f = \frac{\rho_{DS}}{\rho_{DS} - \rho_c} v \quad (2.34a)$$

$$v_f = \frac{v}{\varepsilon_{DS}} \quad (2.34b)$$

La vitesse du front est donc dépendante de la vitesse du projectile.

L'application du principe de conservation de la quantité de mouvement doit se faire avec l'équation 2.31b. L'expression de v_f est remplacée par l'équation 2.34b.

$$\sigma_{dyn} - \sigma_{stat} = \rho_c (v_f - 0) (v - 0) \quad (2.35)$$

$$\sigma_{dyn} = \sigma_{stat} + \frac{\rho_c}{\varepsilon_{DS}} v^2 \quad (2.35a)$$

Cette équation décrivant l'évolution de la contrainte dynamique dans la zone densifiée de la SA est la même l'équation 1.7 écrite par Reid et Peng [33] mais obtenue en se basant sur les conditions de Rankine-Hugoniot.

Après l'impact, la vitesse du projectile et les forces de réactions de la SA varient constamment avec le temps à cause du couplage dynamique entre le projectile et la SA à l'interface. Nous proposons d'évaluer cette évolution en fonction du temps en se basant sur la conservation d'énergie du système.

Le système étudié dans la figure 2.8 est composé d'un support rigide et immobile, d'une SA et d'un projectile. Le système est considéré fermé. Les échauffements du matériau au passage de l'onde structurelle ainsi que ceux dus aux frottements sont négligés. Ainsi la variation d'énergie du système est nulle au cours du temps et la variation d'énergie cinétique est égale à la variation d'énergie de déformation de la SA.

L'énergie cinétique du système résulte du mouvement du projectile de masse M et de vitesse v (à l'instant t) et de la partie densifiée de la SA de longueur λ , de section S_0 et de masse volumique ρ_{DS} qui se déplace à la même vitesse que le projectile.

La variation de l'énergie de déformation dE_{SA} est due à la déformation de l'élément de longueur dD qui, sur un pas de temps dt , va se faire balayer par le front de l'onde structurelle. Cet élément va passer d'un état intact de masse volumique ρ_c et soumis à la contrainte σ_{stat} à l'instant t , à un état densifié de déformation ε_{DS} , de masse volumique ρ_{DS} et de contrainte σ_{dyn} . Cette variation d'énergie peut être exprimée à partir de la condition de conservation de Rankine-Hugoniot (équation 2.33) et en remplaçant v_f par l'équation 2.34b. Cette équation correspond à un flux massique d'énergie. La variation d'énergie de déformation correspond alors à l'énergie de déformation produite par l'élément dD de masse $\rho_c S_0 dD$ traversant le front d'onde de section S_0 :

$$dE_{SA} = \frac{1}{2 \rho_c (v_f - 0)} (\sigma_{stat} + \sigma_{dyn}) (v - 0) \rho_c S_0 dD \quad (2.36)$$

$$dE_{SA} = \frac{\varepsilon_{DS}}{2} (\sigma_{stat} + \sigma_{dyn}) S_0 dD \quad (2.36a)$$

En utilisant l'équation 2.35a dans l'équation 2.36a, on obtient une forme factorisée

de dE_{SA} :

$$dE_{SA} = \frac{1}{2} \left(2\sigma_{stat} + \frac{\rho_c}{\varepsilon_{DS}} v^2 \right) \varepsilon_{DS} S_0 dD \quad (2.37)$$

Le bilan de conservation de l'énergie du système entre les instants t et $t + dt$ s'écrit alors de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} [M + \rho_{DS} S_0 (\lambda + d\lambda)] (v + dv)^2 - \frac{1}{2} [M + \rho_{DS} S_0 \lambda] v^2 = \frac{1}{2} (\sigma_{stat} + \sigma_{dyn}) \varepsilon_{DS} S_0 dD \quad (2.38)$$

Pendant dt , la partie densifiée a augmenté d'une longueur $d\lambda$, correspondant à la distance parcourue par le front pendant cette durée par rapport à la position du projectile :

$$d\lambda = v_f dt - v dt \quad (2.39)$$

$$d\lambda = \frac{1 - \varepsilon_{DS}}{\varepsilon_{DS}} v dt \quad (2.39a)$$

Sur cette période dt , la partie intacte perd une longueur dD , correspondant à la distance parcourue par le front sur ce même temps par rapport à sa position au temps précédent, ainsi :

$$dD = -v_f dt \quad (2.40)$$

$$dD = -\frac{v dt}{\varepsilon_{DS}} \quad (2.40a)$$

L'équation 2.38 est développée en utilisant les équations 2.17, 2.39a, 2.40a pour ρ_{DS} , $d\lambda$ et dD respectivement afin d'obtenir la vitesse du projectile en fonction du temps. De plus, les termes du second ordre sont négligés.

Finalement, une équation différentielle non-linéaire permet de décrire la décélération du projectile :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\sigma_{stat} + Cv^2}{B + Cu} \quad (2.41)$$

Avec les constantes B et C :

$$B = \frac{M}{S_0} \quad (2.42)$$

$$C = \frac{\rho_c}{\varepsilon_{DS}} \quad (2.43)$$

L'équation 2.41 peut être formulée en fonction du déplacement u du projectile en associant les notations $\ddot{u}$ et $\dot{u}$ aux dérivées temporelles secondes et premières de u :

$$B\ddot{u} + C u \ddot{u} + C \dot{u}^2 + \sigma_{stat} = 0 \quad (2.44)$$

La résolution de l'équation 2.44 en utilisant les conditions initiales du problème,

$\dot{u} = v_0$ et $u = 0$ à $t = 0$, donne :

$$u(t) = -\frac{B}{C} + \frac{\sqrt{C^2 \sigma_{stat}^2 (B^2 + 2 B C v_0 t - C \sigma_{stat} t^2)}}{C^2 \sigma_{stat}} \quad (2.45)$$

Enfin, la dérivée temporelle de $u(t)$ donne la vitesse instantanée du projectile

$$v(t) = \frac{\sigma_{stat} (B C v_0 - C \sigma_{stat} t)}{\sqrt{C^2 \sigma_{stat}^2 (B^2 + 2 B C v_0 t - C \sigma_{stat} t^2)}} \quad (2.46)$$

Le remplacement de v par l'équation 2.46 dans l'équation 2.35a donne la formule analytique de la contrainte dynamique en fonction du temps et des conditions d'impact.

2.3.3 Détermination de grandeurs physiques (déformation de la structure, temps d'arrêt, temps à densification...)

À présent que la vitesse de projectile (équation 2.46) et que la contrainte dynamique (équation 2.35a) sont connues analytiquement, il est possible de déterminer certaines grandeurs physiques permettant de connaître le temps d'arrêt du projectile ou la valeur de la déformation global de la structure.

- **Déformation de la structure.** L'intégration de la vitesse du projectile au cours du temps donne la distance parcourue par celui-ci au temps t et donc la longueur dont s'est fait écraser la SA. On obtient ainsi la valeur de la déformation ε de la SA au temps t :

$$\varepsilon(t) = \frac{u(t)}{D_0} \quad (2.47)$$

- **Temps d'arrêt du projectile.** À partir de l'équation 2.46, il est possible de déterminer le temps t_{stop} pour lequel le projectile possède théoriquement une vitesse nulle. Ce temps s'écrit alors :

$$t_{stop} = \frac{B}{\sigma_{stat}} v_0 \quad (2.48)$$

- **Temps à la densification de la structure.** À un instant particulier noté t_{DS} , la SA commence à se densifier entièrement. En égalisant la longueur de structure écrasée à $\varepsilon_{DS} D_0$, le temps t_{DS} correspondant à la densification de la SA est égale à la racine (physique) de l'équation suivante :

$$u(t) - \varepsilon_{DS} D_0 = 0 \quad (2.49)$$

On obtient ainsi un polynôme d'ordre deux :

$$\mathcal{A} t^2 + \mathcal{B} t + \mathcal{C} = 0 \quad (2.50)$$

Avec comme constantes :

$$\mathcal{A} = -C\sigma_{stat} \quad (2.51)$$

$$\mathcal{B} = 2 B C v_0 \quad (2.52)$$

$$\mathcal{C} = -(\varepsilon_{DS} D_0 C)^2 - 2\varepsilon_{DS} D_0 C B \quad (2.53)$$

$$\Delta = \mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} \quad (2.54)$$

Pour une valeur donnée de v_0 , la densification de la SA est atteinte au temps :

$$t_{DS} = \frac{-\mathcal{B} + \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{A}} \quad (2.55)$$

- **Vitesse seuil d'arrêt à densification.** Deux états finaux sont possibles pour la SA :

- le projectile est arrêté avant la densification générale de la SA et on détermine le temps correspondant avec t_{stop} (équation 2.48).
- le projectile n'est pas arrêté et la structure est entièrement densifiée. La détermination du temps à l'instant de la densification de la SA se fait par le calcul de t_{DS} (équation 2.55).

Il existe une vitesse initiale de projectile particulière notée v_{0S} pour laquelle le projectile est arrêté exactement lorsque la déformation à densification ε_{DS} est atteinte. Dans ce cas, les équations 2.48 et 2.55 sont égales :

$$\frac{B v_{0S}}{\sigma_{stat}} = -\frac{\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\mathcal{A}} \quad (2.56)$$

Dans ce cas particulier, $\mathcal{B}/(2\mathcal{A}) = B v_{0S}/\sigma_{stat}$; cela implique que $\sqrt{\Delta} = 0$ si $v_0 = v_{0S}$. La valeur de v_{0S} permettant d'obtenir $\Delta = 0$ est :

$$v_{0S} = \frac{\sigma_{stat}}{B} \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}} \quad (2.57)$$

Les équations présentées dans cette section sont valides tant que la structure n'est pas entièrement densifiée. La déformation de la SA doit donc être inférieure ou égale à ε_{DS} , ou bien, la distance parcourue par le projectile doit être égale ou inférieure à $\varepsilon_{DS} D_0$.

Si la vitesse v_0 du projectile est inférieure au seuil v_{0S} , le projectile est arrêté au temps t_{stop} avant la densification totale de la structure. Dans ce cas, l'équation

2.45 du déplacement et celles qui en découlent ne doivent plus être considérées pour $t > t_{stop}$.

Si la vitesse v_0 du projectile est supérieure au seuil v_{0S} , et même si la SA a atteint la densification, le projectile n'est pas arrêté après le temps t_{DS} . Le projectile possède une vitesse résiduelle notée v_{DS} correspondant à l'énergie qui n'a pas pu être absorbée par la déformation de la SA. Même si le projectile possède encore une vitesse non nulle, les équations de la section 2.3.2 ne peuvent plus être employées pour déterminer l'évolution des grandeurs physiques du problème. Elles ne sont valides que pour des temps inférieurs à t_{DS} .

2.3.4 Exemples illustratifs

Afin d'avoir une meilleure compréhension du modèle, une SA, dont les paramètres sont présentés dans la table 2.1, est considérée et impactée par un projectile de masse M à trois vitesses initiales v_0 différentes : 35 m.s^{-1} , 41.70 m.s^{-1} et 60 m.s^{-1} .

M [kg]	C [kg.m ⁻³]	S_0 [m ²]	σ_{stat} [Pa]	ε_{DS} [m.m ⁻¹]	D_0 [m]
4×10^{-3}	340.666	1.808×10^{-4}	3.585×10^5	0.845	4.833×10^{-2}

TABLE 2.1 – Paramètres de la SA pour l'exemple illustratif.

Les courbes de t_{stop} , t_{DS} et v_{DS} sont tracées en fonction de v_0 dans les figures 2.9 et 2.10 respectivement. Les résultats de contrainte dynamique et de distance parcourue par le projectile sont tracés dans les figures 2.11 et 2.12. Dans la figure 2.11, σ_{stat} représente une limite asymptotique de la contrainte dynamique. Dans la figure 2.12, la limite de validité de la distance parcourue par le projectile est représentée par la ligne horizontale correspondant à $u = \varepsilon_{DS} D_0$.

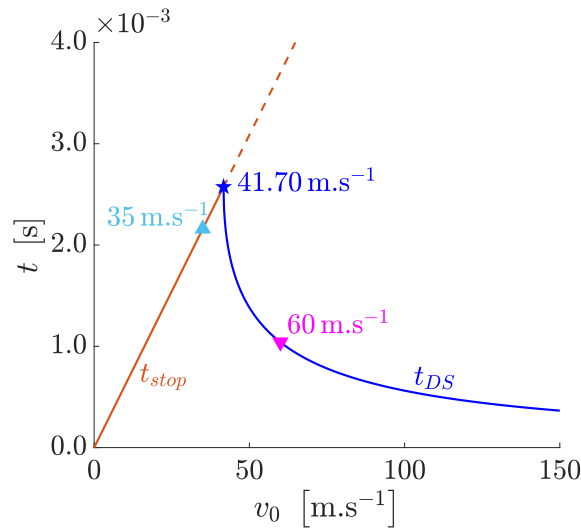


FIGURE 2.9 – Temps d'arrêt t_{stop} et temps de densification t_{DS} en fonction de la vitesse initiale v_0 . Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.

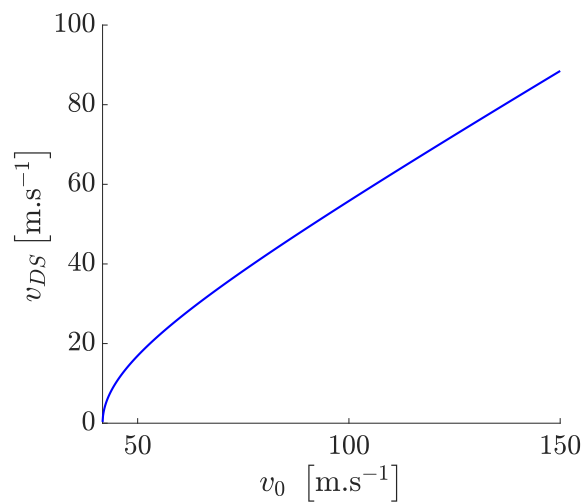


FIGURE 2.10 – Vitesse v_{DS} du projectile au moment où la densification totale de la SA est atteinte à $t = t_{DS}$. Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.

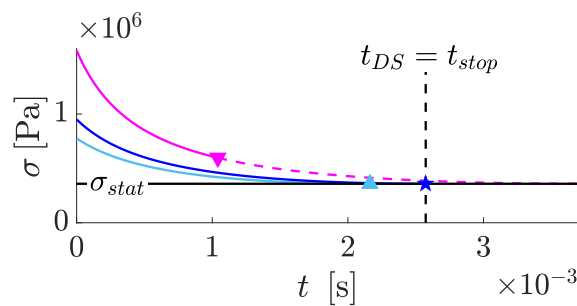


FIGURE 2.11 – Contrainte dynamique σ_{dyn} en fonction du temps. Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.

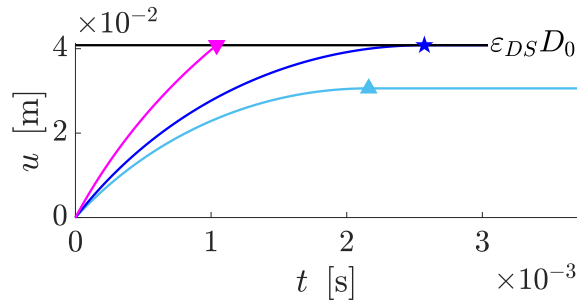


FIGURE 2.12 – Distance u parcourue par le projectile en fonction du temps. Tracé à partir des paramètres de la table 2.1.

Dans l'exemple présenté ici, la valeur de v_{0S} (symbole ★), calculée avec l'équation 2.57, est de 41.70 m.s^{-1} . À cette vitesse initiale, le projectile doit théoriquement s'arrêter exactement au temps $t_{stop} = t_{DS} = 2.57 \times 10^{-3} \text{ s}$ et la distance parcourue par le projectile est $u(t_{stop}) = u(t_{DS}) = \varepsilon_{DS} D_0$. Ainsi, dans la figure 2.10, la première valeur de v_0 est $v_{0S} = 41.70 \text{ m.s}^{-1}$. Cela correspond donc à une valeur nulle pour v_{DS} .

Si $v_0 = 60 \text{ m.s}^{-1}$ (symbole ▼), la prédiction du temps t_{stop} n'est plus valide, figure 2.9, tout comme la contrainte dynamique σ_{dyn} , figure 2.11 et la distance parcourue u , figure 2.12. En effet, le projectile a parcouru la distance nécessaire à déformer la SA jusqu'à sa densification et il ne peut aller plus loin. Les valeurs non-valides sont tracées en pointillés dans les figures 2.9 et 2.11.

Si $v_0 = 35 \text{ m.s}^{-1}$ (symbole ▲), le projectile est arrêté avant la densification et reste immobile pour $t > t_{stop}$, à la droite du symbole ▲ dans la figure 2.12.

Cet exemple montre également que plus la vitesse v_0 augmente, plus la densification intervient tôt contrairement à la densification calculée aux basses vitesses.

2.4 Recommandations concernant les paramètres caractéristiques

Dans cette section, nous allons aborder les conclusions que l'on peut déduire du modèle analytique afin d'énoncer quelques recommandations concernant l'absorption d'énergie.

L'élément clé définissant une bonne protection est qu'elle puisse arrêter un projectile avant qu'elle ne soit entièrement densifiée. L'objectif est donc de concevoir une SA pour laquelle la déformation ε_{stop} , définissant la valeur de déformation générale de la SA atteinte à t_{stop} , soit inférieur à ε_{DS} . Pour parvenir à cela, l'utilisateur doit exploiter les équations développées dans les sous-sections 2.3.2 et 2.3.3 afin d'étudier l'influence des différents paramètres sur les grandeurs permettant d'atteindre l'objectif fixé. Premièrement, comme dans toutes phases de conception, les restrictions

concernant les dimensions (de la cellule unitaire ou de la structure en entier), le matériau utilisé, le nombre de cellules, doivent être listées pour guider le choix vers la géométrie de cellule à adopter. En effet, selon l'utilisation que l'on souhaite faire de la protection, des limites de masse, de dimension ou de compatibilité de matériaux doivent certainement exister. Il est préférable également de savoir à quelle menace peut faire face la protection (couple masse-vitesse du projectile).

Trois cas vont être étudiés afin de présenter la manière d'utiliser les équations des sous-sections 2.3.2 et 2.3.3 pour concevoir une protection. Dans chacun des cas, les grandeurs fixées correspondent à celles utilisées dans la table 2.1.

- **Cas N°1.** La protection doit faire face à un impact particulier, c'est-à-dire que la masse et la vitesse initiale du projectile sont connues. Le matériau est imposé, donc σ_y est connu. Les longueurs H , L et b sont fixées, donc η est connu. Enfin, l'angle θ est lui aussi choisi. Le choix pour la conception de la SA va se porter sur la valeur de τ , donc de t_{thick} puisque L est connue et sur le nombre n de cellules dans la hauteur, ce qui imposera la valeur de D_0 . La figure 2.13 représente la variation de ε_{stop} en fonction de n et de τ . La ligne rouge en sur-épaisseur représente la limite $\varepsilon_{stop} = \varepsilon_{DS}$.

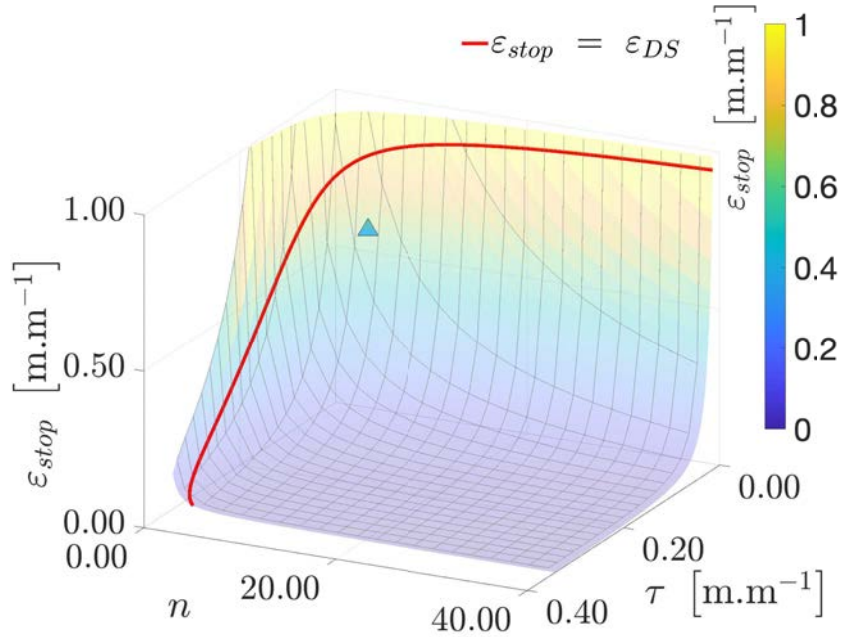


FIGURE 2.13 – Variation de ε_{stop} en fonction de n et de τ .

Cette figure permet de définir le couple τ - n afin de garantir que la densification ne soit pas atteinte pour les conditions d'impacts considérées. Tous les couples τ - n pour lesquels ε_{stop} se trouve sous la ligne rouge sont des candidats potentiels. Le symbole ▲ fait référence au cas présenté dans la sous-section 2.3.4. Comme le montre la figure 2.12, cette structure permet

en théorie d'arrêter un tel impact.

De plus, à travers la figure 2.13, on peut observer l'influence de τ et n sur ε_{stop} . Plus τ diminue, plus ε_{stop} augmente pour une valeur donnée de n .

- **Cas N°2.** La géométrie de la cellule est fixée ainsi que le matériau, de manière à correspondre à la cellule étudiée dans la sous-section 2.3.4. L'objectif est de déterminer le nombre de cellules nécessaires dans la direction Y pour arrêter un projectile de masse $M = 4 \times 10^{-3}$ kg pour différentes vitesses initiales. Bien que la masse du projectile soit faible, elle est supérieure à celle de la SA qui est de 2.6 g.

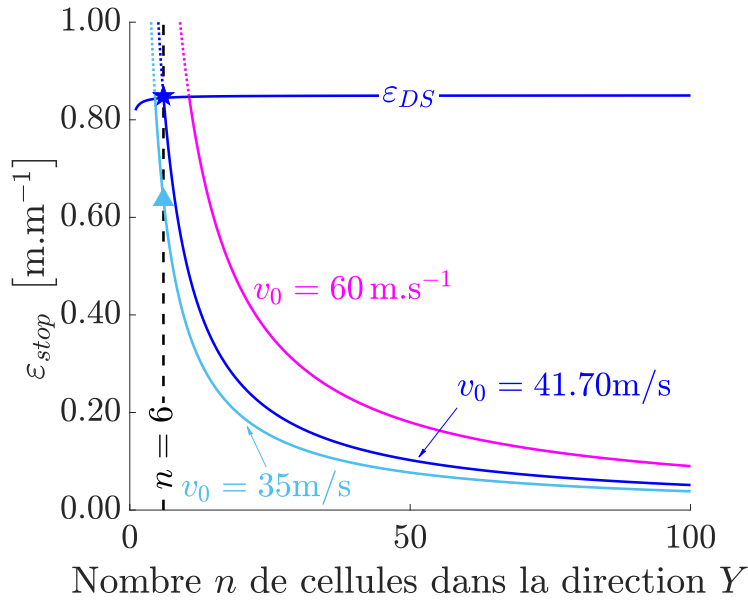


FIGURE 2.14 – Évolution de ε_{stop} en fonction de n pour différentes vitesse d'impact.

La figure 2.14 représente l'évolution de ε_{stop} en fonction de n pour des vitesses initiales correspondant à la sous-section 2.3.4, soit $35 m.s^{-1}$, $41.70 m.s^{-1}$ et $60 m.s^{-1}$. Le trait interrompu vertical correspond au nombre de cellules considérées dans l'exemple illustratif, $n = 6$. On peut observer que la structure à 6 cellules est capable d'arrêter des projectiles jusqu'à $41.70 m.s^{-1}$ de vitesse initiale. Si l'on souhaite arrêter le projectile allant à $60 m.s^{-1}$, il faudra un plus grand nombre de cellules, au moins 11 cellules. Ces courbes permettent également de connaître l'état de déformation de la structure au moment de l'arrêt du projectile.

- **Cas N°3.** Le matériau, l'angle θ , le nombre de cellules n et les longueurs de cellule H , L et b , figure 2.2, sont fixées, donc σ_y et η sont connus. Seule le paramètre τ est variable. On cherche ici à connaître les couples limites masse-vitesse auxquels peut faire face une SA pour un τ donné.

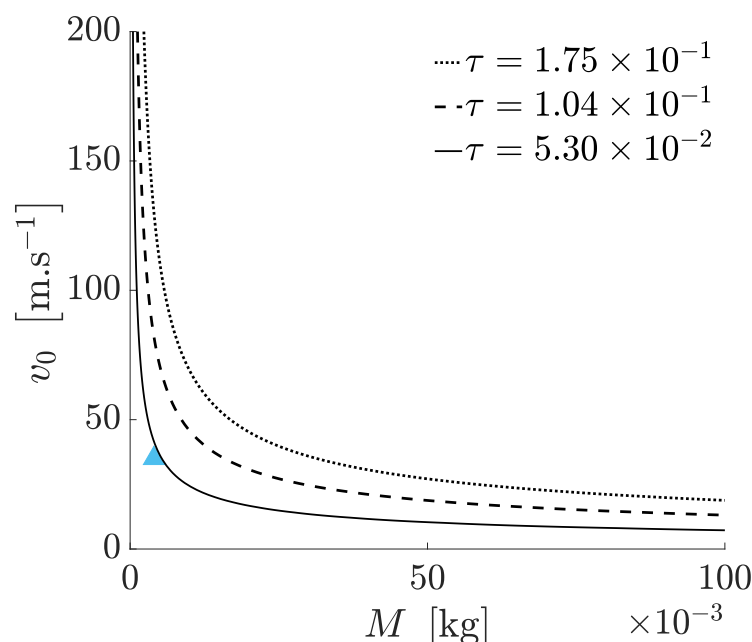


FIGURE 2.15 – Couples v_0 - M pouvant être arrêter par une SA pour différentes valeurs de τ , L étant fixée.

La figure 2.15 représente sous forme de courbes les couples limites de masse-vitesse que peut arrêter une SA pour trois valeurs de τ différentes : 5.30×10^{-2} (en trait plein, correspondant à l'exemple illustratif), 1.04×10^{-1} (en trait interrompu) et 1.75×10^{-1} (trait pointillé). Les projectiles ayant des valeurs de v_0 - M se trouvant sous de chacune de ces courbes seront arrêtés par la protection considérée. En effet, les couples masse-vitesse sous la courbe limite d'une valeur de τ donnée possède une énergie inférieure à celle que peut absorber la SA. Ces courbes permettent, dans un cas où la géométrie de la cellule est imposée, de connaître les limites d'utilisations de celle-ci.

2.5 Conclusion

Nous avons, dans un premier temps, présenté dans ce chapitre de manière précise les paramètres géométriques nécessaires à la conception de la structure auxétique étudiée. Les différentes grandeurs qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire ont également été détaillées. Une attention particulière a été apportée à la mise en place des équations théoriques de la masse volumique cellulaire ρ_c de la structure auxétique ainsi que de la déformation à densification ε_{DS} .

Ensuite, la réponse des SA en quasi-statique et en dynamique est étudiée de manière analytique.

La détermination de l'expression de la contrainte plateau se base sur l'étude de Gibson *et al.* [28] sur les Nida. En utilisant les théorèmes des bornes supérieures

et inférieures, l'expression de la contrainte plateau de la SA peut être déterminée. Cette contrainte σ_{stat} dépend à la fois de la limite élastique du matériau choisi pour fabriquer la SA et des paramètres géométriques de la structure définie dans ce chapitre.

La réponse dynamique des SA est ensuite considéré. Comme cela a pu être observé dans la littérature (voir chapitre 1), le mode de déformation dynamique des SA s'apparente à la propagation d'une onde de choc. Ce comportement particulier peut-être décrit au moyen des relations de Rankine-Hugoniot qui ont été rappelées. La loi de comportement de la structure peut être simplifiée par un modèle *R-P-P-L* (« *Rigid Perfectly Plastic Locking* »). L'impact d'un projectile sur une SA est étudié en appliquant les conditions de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie afin d'exprimer la vitesse du front de l'onde de déformation structurelle et la contrainte dynamique de la structure. Cette dernière dépend du comportement quasi-statique de la structure mais aussi de la vitesse instantanée à l'ordre deux du projectile.

Afin de déterminer cette vitesse, un bilan d'énergie est effectué sur le système étudié. Une équation non-linéaire d'ordre deux du déplacement du projectile est obtenue et peut-être résolue pour écrire l'expression de la vitesse du projectile. Connaissant cette dernière, il est possible de calculer la contrainte dynamique à chaque instant. La contrainte dynamique dépend finalement du matériau, de la géométrie de la SA, mais aussi de la vitesse initiale du projectile et de sa masse.

Ces formulations permettent de déterminer des grandeurs physiques théoriques comme le temps nécessaire pour arrêter la plaque et ainsi la valeur de la déformation de la structure à cet instant. Il est aussi possible de déterminer la vitesse initiale limite du projectile considéré pour une SA donnée afin que la structure arrête celui-ci avant la densification totale. Un exemple est proposé afin de comprendre ces grandeurs physiques.

Enfin quelques recommandations et exemples d'utilisations de ces équations sont présentées.

Les formulations obtenues dans ce chapitre permettent, bien qu'elles restent théoriques, de guider la réflexion pour concevoir une SA appropriée au cas d'usage considéré. Elles sont également utiles pour comparer l'influence des différents paramètres sur les propriétés recherchées comme par exemple déterminer le nombre de cellules nécessaires pour arrêter un projectile. Elles présentent notamment l'avantage d'être plus rapide que des simulations par éléments finis dans les phases d'avant-projet.

Dans le prochain chapitre, des simulations par éléments finis seront réalisées afin de comparer les résultats obtenus aux valeurs calculées par la méthode analytique. Les limites du modèle théorique pourront ainsi être mises en évidence. Un

modèle numérique de pendule balistique sera mis en place pour étudier les transferts d'énergie et déterminer l'efficacité de la SA considérée.

Chapitre 3

Modélisations numériques (éléments finis)

Résumé : Dans ce chapitre, nous proposons deux modélisations par éléments finis de structures auxétiques ré-entrantes. Le premier modèle permettra de vérifier les équations développées au chapitre précédent. Il mettra également en avant les limites de ces formulations. Le second modèle est dédié à la simulation d'un impact sur un pendule balistique qui permettra d'évaluer les échanges d'énergies et notamment la part absorbée par l'auxétique. Ces simulations seront réalisées à l'aide du logiciel HyperMesh® et du solveur explicite Radioss® (Altair HyperWorks®).

3.1 Modélisation du comportement des structures auxétiques ré-entrantes

Cette première partie se consacre à la modélisation par éléments finis du comportement des SA sous chargement quasi-statique et dynamique, figure 3.1. Le modèle est constitué d'une SA en aluminium, composée de six cellules dans la direction Y et de cinq cellules dans la direction X , placée entre deux plaques d'acier. La première, placée en $y = 0$, sert de support immobile à la structure et la seconde comprime la SA.

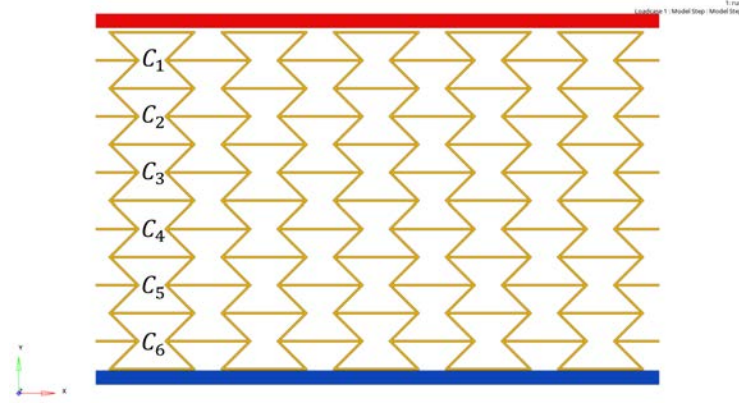


FIGURE 3.1 – Modèle numérique de l’auxétique et des plaques en acier avec les cellules numérotées de 1 à 6 dans la hauteur.

3.1.1 Réalisation du modèle géométrique

Avant de réaliser une simulation éléments finis (EF) sur la SA, il faut réaliser le modèle géométrique de la structure qui sera importé dans le logiciel EF puis maillé.

Ce modèle géométrique est réalisé à l’aide du logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) CATIA. Les dimensions de la SA, suivant les définitions présentées dans la section 2.1 du chapitre 2, sont indiquées dans la table 3.1.

L [m]	H [m]	t_{thick} [m]	θ [deg]
5.66×10^{-3}	1.2×10^{-2}	3.00×10^{-4}	45°
b [m]	ε_{DS}	D_0 [m]	L_0 [m]
2.25×10^{-3}	0.8448	4.823×10^{-2}	8.034×10^{-2}

TABLE 3.1 – Dimensions de la SA modélisée.

La méthodologie employée afin de réaliser les modèles CAO est la suivante :

- un parallélépipède rectangle ayant des dimensions supérieures à celles de la structure finale souhaitée est dessiné.
- un premier sablier en trait de construction (traits interrompus dans la figure 2.1) est dessiné avec l’outil d’esquisse. Les contraintes géométriques de ce sablier doivent correspondre aux paramètres géométriques H , L et θ choisis pour la cellule. Un second sablier est dessiné à l’intérieur du premier en trait standard (traits pleins dans la figure 2.1) et est contraint en définissant une distance de $t_{thick}/2$ avec chaque trait parallèle aux traits de construction.
- le second sablier est utilisé pour réaliser un trou dans le parallélépipède rectangle.
- un troisième sablier en trait de construction est dessiné à côté du trou formé précédemment. Les contraintes géométriques de ce sablier sont les mêmes

que le premier. Des contraintes de distances supplémentaires sont ajoutées afin que ce troisième sablier soit espacé de $t_{thick}/2$ avec chaque trait parallèle aux limites du trou. Un quatrième sablier est dessiné à l'intérieur du troisième en trait standard et est contraint en définissant une distance de $t_{thick}/2$ avec chaque traits parallèles aux traits de construction du troisième sablier.

- le quatrième sablier est utilisé pour réaliser un trou dans le parallélépipède rectangle.
- les trous formés sont répétés afin de créer le nombre de cellules souhaitées. Les répétitions sont espacées afin que l'épaisseur des parois soit égale à t_{thick} . Il faut ainsi un espacement de $2L \sin \theta$ dans la hauteur et $2(H - l \cos \theta)$ dans la largeur.
- les "surplus" de la structure sont enlevés afin d'obtenir une structure auxétique régulière.

Le modèle géométrique obtenu est exporté au format STEP puis importé dans le logiciel Hypermesh® pour être maillé.

3.1.2 Présentation du modèle éléments finis

Le maillage de la SA, figure 3.2, est créé en deux étapes. Tout d'abord, la surface de la structure sur le plan $X-Y$ est maillée en utilisant l'outil de maillage automatique de HyperMesh®. Ensuite, ce maillage est extrudé selon l'axe Z afin de créer des éléments solides. Un nombre de trois éléments a été choisi dans la direction Z . Une étude de sensibilité au maillage est entreprise en partant d'un maillage grossier (un élément dans l'épaisseur des parois) jusqu'à un maillage fin (cinq éléments dans l'épaisseur de parois). Aucune variation significative des résultats n'a pu être observée. Un nombre de deux éléments dans l'épaisseur de parois (éléments de 0.15 mm) a donc été retenu.

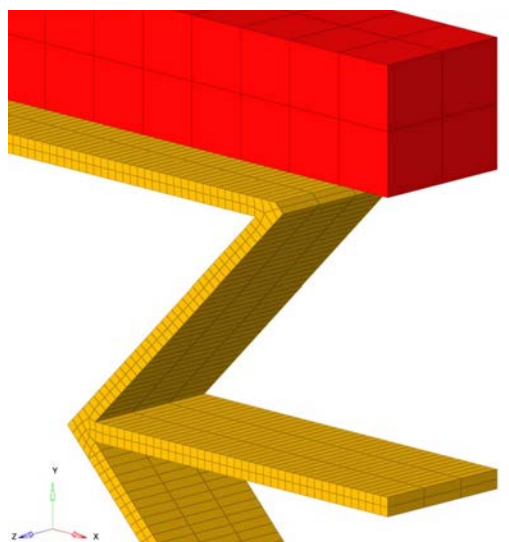


FIGURE 3.2 – Agrandissement sur le maillage de la SA.

Les plaques en acier sont modélisées telles que leur surface soit égale à celle de la surface S_0 de la SA. Elles font donc 8.034×10^{-2} m de longueur, 2.25×10^{-3} m de profondeur et 2.0×10^{-3} m de hauteur. Les plaques sont maillées avec des éléments hexaédriques de 1.0 mm

Pour les trois composants (deux plaques et la SA), des éléments solides hexaédriques linéaires sous-intégrés à huit nœuds avec une stabilisation physique sont choisis (les modes de déformation à énergie nulle sont contrôlés par la correction de l'énergie interne de manière analytique, $i_{solid} = 24$ sous Radioss®). La formulation est adaptée à la non-linéarité géométrique et la non-linéarité du matériau. C'est une formulation dite en grande déformation et qui peut passer à une formulation en petite déformation si cela est nécessaire pour éviter les volumes négatifs ou les pas de temps trop petits.

Un modèle d'aluminium élastique, parfaitement plastique est utilisé pour la SA. Un acier parfaitement élastique est choisi pour les deux plaques. Les propriétés des matériaux sont indiquées dans la table 3.2.

Nom du composant	Auxétique	Plaque
Loi de comportement matériau	élastique, parfaitement plastique	parfaitement élastique
ρ_s [kg/m ³]	2700	7800
E [Pa]	6.8×10^{10}	2.10×10^{11}
σ_y [Pa]	2.55×10^8	-
ν , []	0.33	0.33
Nombre d'éléments	57378	2×320
Nombre total d'éléments	58018	

TABLE 3.2 – Propriétés des matériaux du modèle EF.

Dans les simulations qui seront présentées dans les sections suivantes, la masse volumique de l'acier sera amenée à changer artificiellement afin que la masse du composant correspondent à celle souhaitée.

La plaque support est entièrement contrainte afin qu'elle reste immobile. La plaque sollicitant la structure n'est autorisée à se déplacer que sur l'axe Y . La SA est contrainte en translation selon l'axe Z afin d'éviter les déplacements en dehors du plan X - Y .

Un contact général surface-surface avec une formulation par pénalité est choisi pour gérer les interactions entre les plaques et la SA ainsi que les interactions entre les parois des cellules de la SA. Le frottement n'est pour l'instant pas pris en compte.

Les résultats issus des simulations EF sont exprimés par des courbes de contrainte σ en fonction de la déformation ε , dans le cas des vitesses de compression constantes et en fonction du temps t , dans le cas d'impacts avec vitesses initiales. La plaque est supposée être toujours en contact avec la SA. La contrainte σ est calculée à partir des forces de contact normales à l'interface entre la plaque supérieure et la SA divisées par la surface d'emprise S_0 de la SA sur le plan X - Z . La déformation ε est exprimée au moyen de l'équation 2.13.

L'évolution de la déformation des cellules sera également étudiée en fonction de la déformation de la SA ou du temps suivant le cas étudié. La déformation d'une cellule par rapport à sa taille initiale est notée ε_{cell} et correspond à :

$$\varepsilon_{cell} = \frac{d_{0cell} - d_{cell}}{d_{0cell}} \quad (3.1)$$

Avec d_{cell} , la hauteur instantanée de la cellule.

3.1.3 Modélisation d'une compression à faible vitesse

Le comportement de la SA est d'abord étudié à faible vitesse de compression.

La plaque supérieure comprime la SA avec une vitesse constante de 0.5 m.s^{-1} . Comme le montre la figure 3.3 de la déformation numérique de la SA, les cellules s'écrasent en deux temps. D'abord, elles se déforment de manière générale jusqu'à ce que quasiment tous les pores forment des losanges puis ces derniers s'écrasent à leur tour.

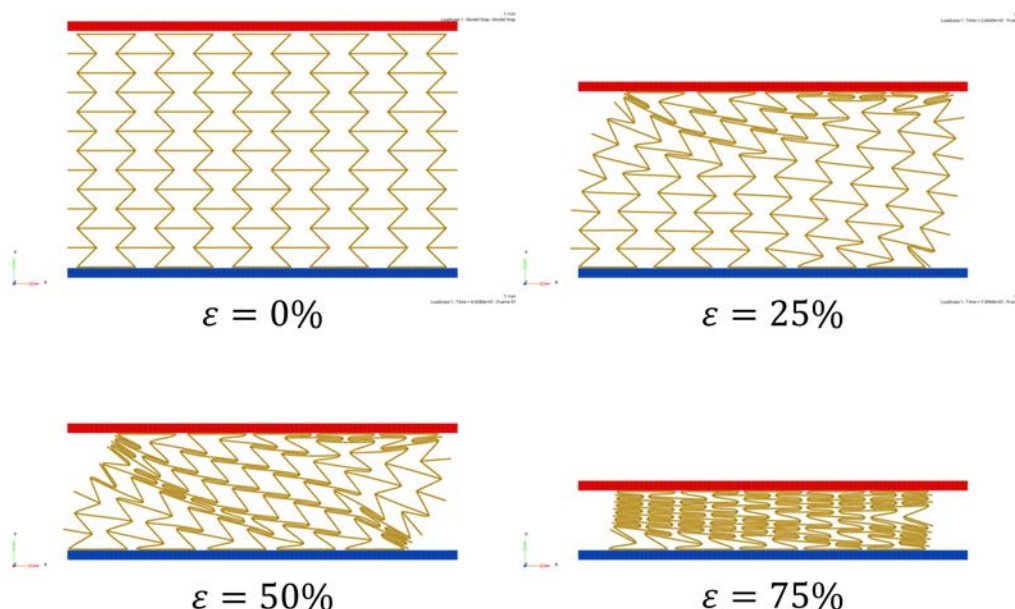
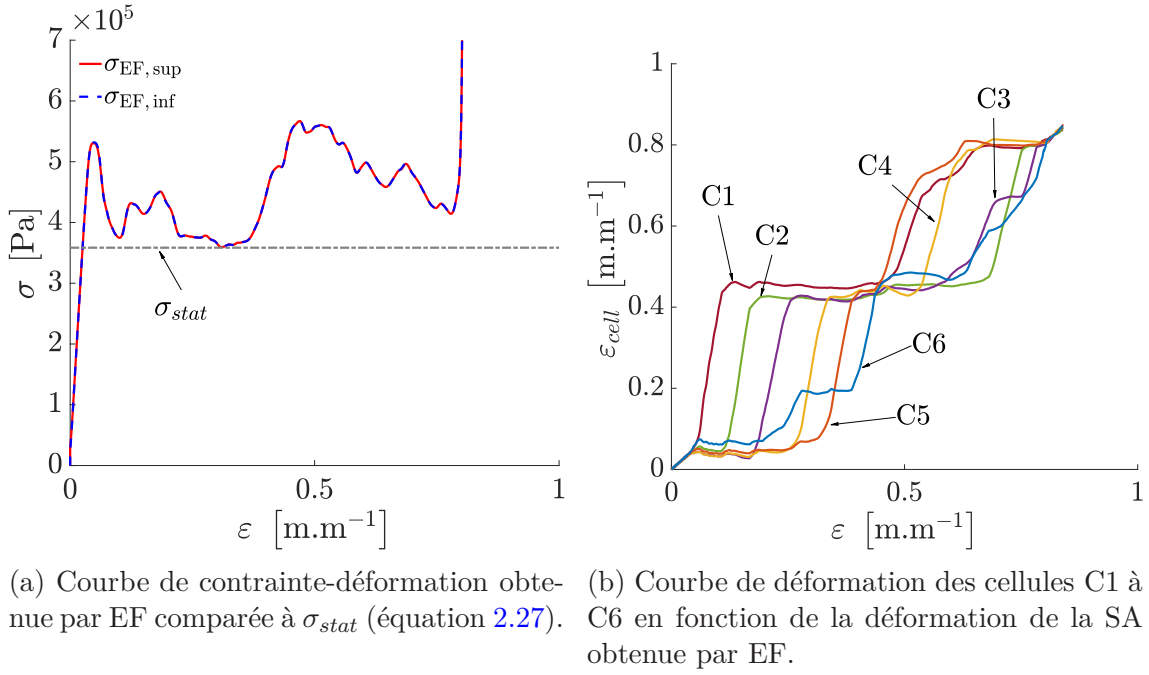


FIGURE 3.3 – Déformation numérique de la SA à 0.5 m.s^{-1} à différents taux de déformation.

La courbe de contrainte-déformation, figure 3.4a, montre que les contraintes calculées aux interfaces supérieures et inférieures entre la SA et les plaques, respectivement $\sigma_{\text{EF},\text{sup}}$ et $\sigma_{\text{EF},\text{inf}}$, se superposent parfaitement. La SA est uniformément soumise à la contrainte σ_{stat} .


 FIGURE 3.4 – Résultats numériques de la compression de la SA à 0.5 m.s^{-1} .

On peut observer le changement de mode de déformation dans les résultats de contrainte, figure 3.4a et de déformations cellulaires, figure 3.4b. Sur la courbe de contrainte-déformation, figure 3.4a, on observe un premier palier de contrainte entre 0 % et 36 % pour lequel, l'équation 2.27 de σ_{stat} donne une bonne approximation de sa valeur. On observe ensuite un second palier de contrainte plus élevé correspondant au second stade de déformation de la structure. De la même manière, on observe que les cellules se déforment d'abord jusqu'à 42 % environ, ce qui correspond à $\varepsilon_{DS}/2$. Puis lorsque chacune d'entre elles a atteint cette déformation, le second mode de déformation débute jusqu'à la densification totale des cellules et de la structure.

Une simulation numérique sur la même structure a été effectuée pour une vitesse de compression de 5 m.s^{-1} . Les résultats de contraintes issues des forces de contact de l'interface supérieure pour cette simulation et celle à 0.5 m.s^{-1} sont tracés dans la figure 3.5.

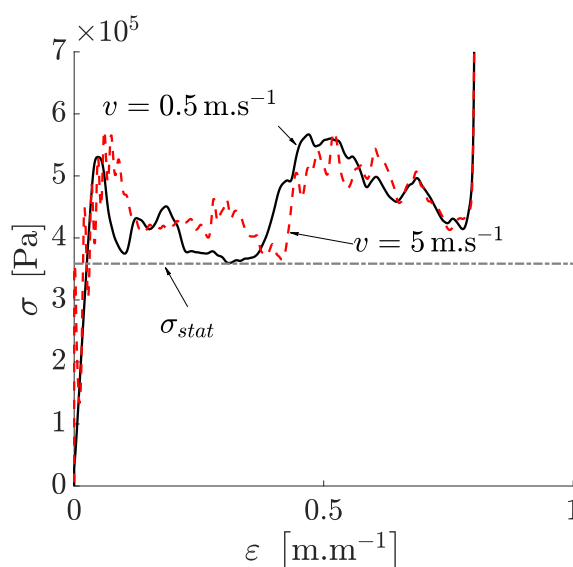


FIGURE 3.5 – Résultats de simulation pour une compression à 0.5 m.s^{-1} et à 5 m.s^{-1} .

Malgré un facteur multiplicateur de 10 entre les deux vitesses, la contrainte de la structure reste approximativement constante et sans changement d'ordre de grandeur, comme cela a pu être observé par Ruan *et al.* [30] sur les Nida.

3.1.4 Modélisation d'une compression à vitesse constante élevée

Le comportement de la SA est à présent étudié à vitesse constante élevée de compression. Le comportement de la SA est comprimé à une vitesse constante de 100 m.s^{-1} .

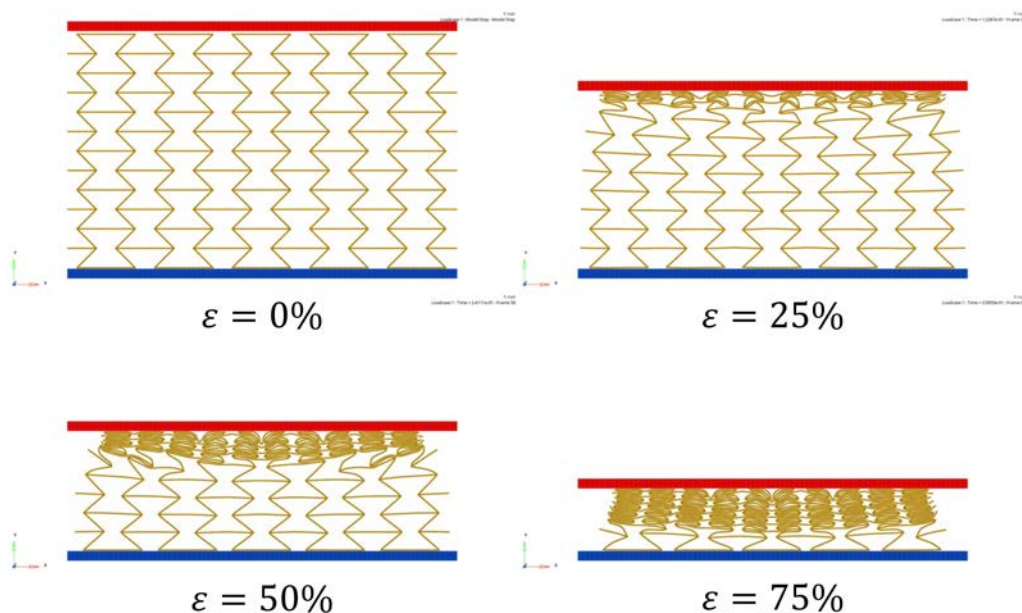
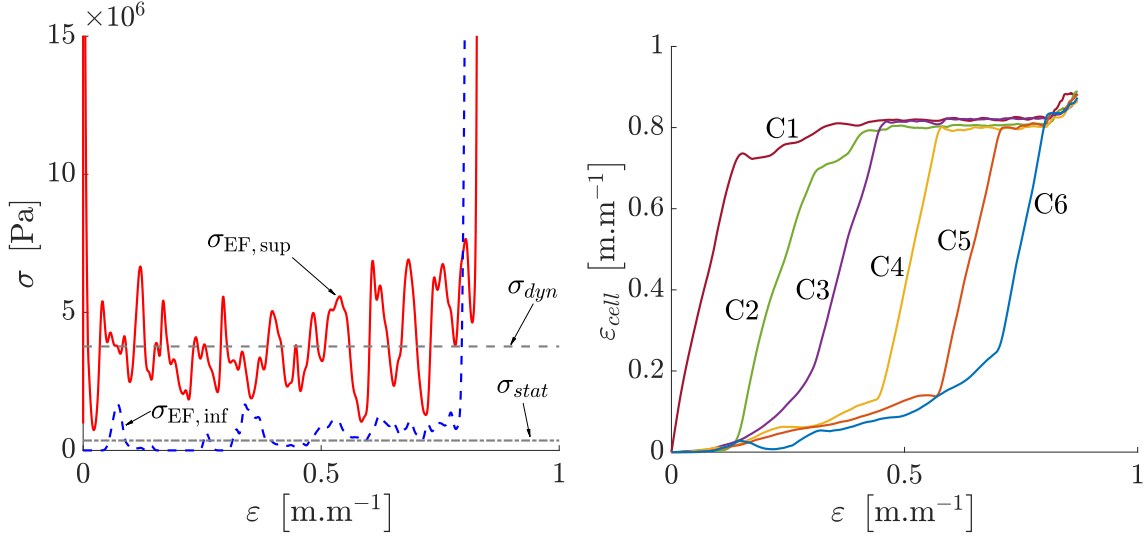


FIGURE 3.6 – Déformation numérique de la SA à 100 m.s^{-1} à différents taux de déformation.

Comme cela a été constaté dans la littérature [14, 24, 25, 30], le mode de déformation prédominant à grande vitesse est un mode « I ». Dans la figure 3.6, on peut observer que la déformation des cellules débute sur la face proximale et s'étend au reste de la structure. La discontinuité entre la zone densifiée et la zone non-densifiée est bien visible.



(a) Courbe de contrainte-déformation obtenue par EF comparée à σ_{stat} (équation 2.27) et σ_{dyn} (équation 2.35a). (b) Courbe de déformation des cellules C1 à C6 en fonction de la déformation de la SA obtenue par EF.

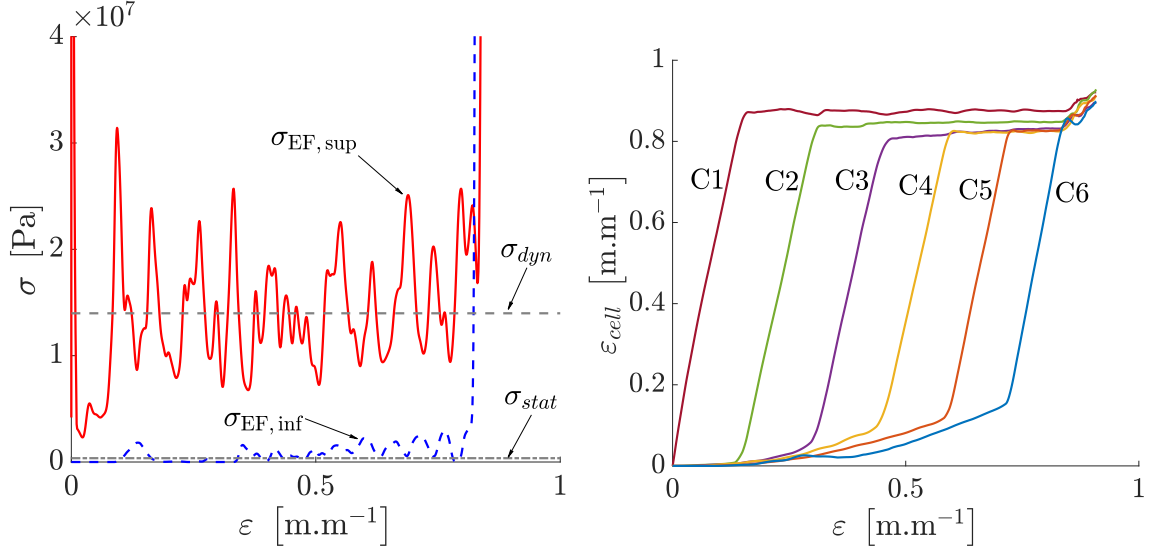
FIGURE 3.7 – Résultats numériques de la compression de la SA à 100 m.s⁻¹.

Comme présenté dans le chapitre 2, la zone densifiée est supposée être soumise à la contrainte dynamique σ_{dyn} et la zone non-densifiée à la contrainte statique σ_{stat} . On observe en effet une différence entre la contrainte calculée à partir de l'interface supérieure $\sigma_{EF, sup}$ et celle de l'interface inférieure $\sigma_{EF, inf}$. De plus, les valeurs de σ_{dyn} (équation 2.35a), calculées en remplaçant le terme $v(t)$ par v_0 , et de σ_{stat} (équation 2.27) sont respectivement cohérentes avec les résultats EF de $\sigma_{EF, sup}$ et $\sigma_{EF, inf}$. On peut également observer un pic de contrainte au début de la simulation au moment de l'entrée en contact de la plaque supérieure et de la SA. Ce pic est dépendant de la vitesse d'impact, de la raideur de contact et, dans le cas d'un impact avec une vitesse initiale, de la masse du projectile [51].

Le mode de déformation « I », correspondant à un écrasement par étage, est confirmé par les résultats de déformation cellulaire, figure 3.7b. On peut remarquer que les cellules se compriment depuis C1 jusqu'à C6 les unes après les autres. Lorsque une cellule a atteint un taux de déformation pour lequel ses parois sont en contact, la cellule suivante commence à se déformer de manière significative. Le front de l'onde de déformation est passé d'une cellule à l'autre. Cependant, une déformation simultanée des cellules est visible avant que le front d'onde n'arrive à leur niveau. Il semble donc y avoir une onde de structure qui se propage à une vitesse supérieure

à celle du front de discontinuité et qui pourrait être assimilée aux ondes élastiques de déformation qui se propagent dans les matériaux monolithiques sous l'effet d'un choc.

Ces conclusions sont confirmées par une simulation réalisée à 200 m.s^{-1} .



(a) Courbe de contrainte-déformation obtenue par EF comparée à σ_{stat} (équation 2.27) et σ_{dyn} (équation 2.35a). (b) Courbe de déformation des cellules C1 à C6 en fonction de la déformation de la SA obtenue par EF.

FIGURE 3.8 – Résultats numériques de la compression de la SA à 200 m.s^{-1} .

Une comparaison est faite entre la valeur de σ_{dyn} calculée par l'équation 2.35a et la valeur moyenne de la courbe de contrainte déterminée par le rapport entre l'aire sous la courbe entre deux valeurs de déformation et la différence entre ces deux mêmes déformations. Les valeurs de déformations sont choisies telles que le comportement à la densification n'influe pas sur le calcul. Les résultats sont présentés dans la table 3.3.

Vitesse	100 m.s^{-1}	200 m.s^{-1}
σ_{dyn} (équation 2.35a)	$3.7652 \times 10^7 \text{ Pa}$	$1.3985 \times 10^7 \text{ Pa}$
σ_{moy} (aire sous la courbe)	$3.8607 \times 10^7 \text{ Pa}$	$1.4289 \times 10^7 \text{ Pa}$
Erreur	2.47 %	2.13 %

TABLE 3.3 – Comparaison des contraintes plateaux calculées par EF et par l'équation 2.35a.

L'erreur mesurée entre les plateaux de contrainte issus des EF et de la théorie des ondes de choc est de l'ordre de 2 %. C'est un écart acceptable en considérant les

hypothèses de simplifications qui ont été faites pour l'établissement de l'équation 2.35a.

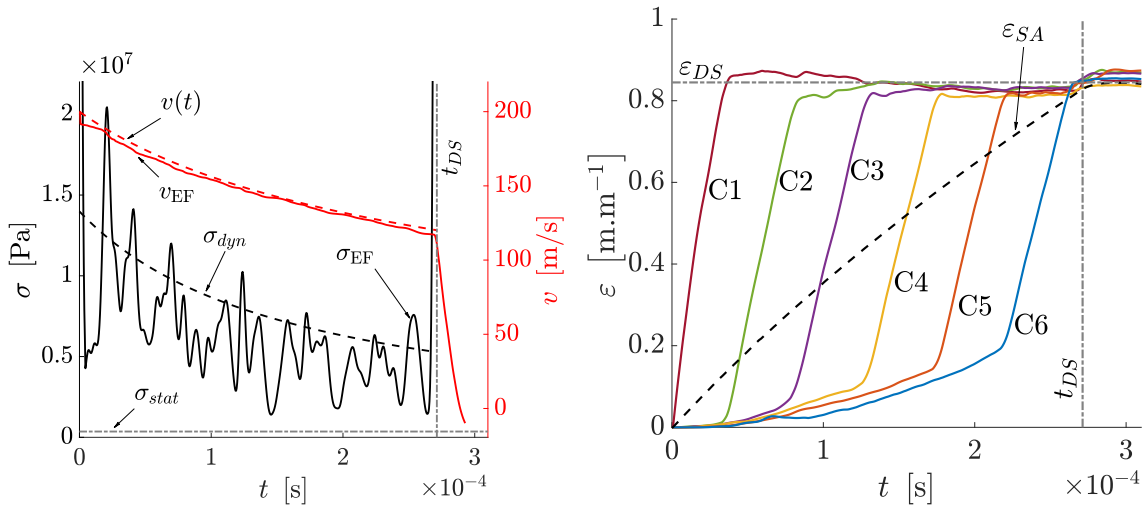
3.1.5 Modélisation d'un impact à vitesse initiale

À présent que les formulations analytiques pour des vitesses de sollicitations constantes ont montré une bonne correspondance avec les résultats EF, nous allons étudier le cas d'impacts à vitesse initiale.

La plaque supérieure du modèle numérique est maintenant lancée avec une vitesse initiale. La masse volumique de l'acier est modifiée afin que la masse de la plaque soit égale à 4 g. Bien que cela puisse paraître peu, elle est supérieure à celle de la SA qui est de 2.6 g.

Nous allons étudier différentes vitesses initiales en commençant par les plus élevées.

L'impact de la plaque d'acier sur la SA à $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$ donne les résultats présentés dans la figure 3.9.



(a) Courbes de contrainte et de vitesse de plaque en fonction du temps obtenues par EF comparées à σ_{dyn} (équation 2.35a) et $v(t)$ (équation 2.46). (b) Courbes de déformation des cellules C1 à C6 et de la SA, ε_{SA} , en fonction du temps obtenue par EF.

FIGURE 3.9 – Résultats numériques de l'impact de la SA à $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$.

Dès que la plaque entre en contact avec la SA, sa vitesse diminue faisant alors varier la contrainte calculée à partir des forces de contact. La contrainte σ_{dyn} déterminée au moyen de l'équation 2.35a et la vitesse $v(t)$ issue de l'équation 2.46 sont cohérentes avec les résultats EF. Le temps de densification t_{DS} (équation 2.55) correspond au temps où la contrainte augmente fortement et où la vitesse s'apprête à décroître fortement à cause de la densification de la structure, figure 3.9a. La figure

3.9b montre que la déformation d'ensemble de la SA (notée ε_{SA}) atteint sa valeur maximale à t_{DS} .

Tout comme pour la compression à vitesse constante, un pic de contrainte est observable au début de la simulation. Ce pic entraîne une forte absorption d'énergie faisant chuter la vitesse de la plaque. Ce pic n'est cependant pas pris en compte dans la théorie développée dans le chapitre 2. Cela explique l'écart entre la vitesse EF et la vitesse analytique au début de la simulation.

Les résultats EF à $v_0 = 150 \text{ m.s}^{-1}$, $v_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_0 = 75 \text{ m.s}^{-1}$ mènent aux mêmes conclusions.

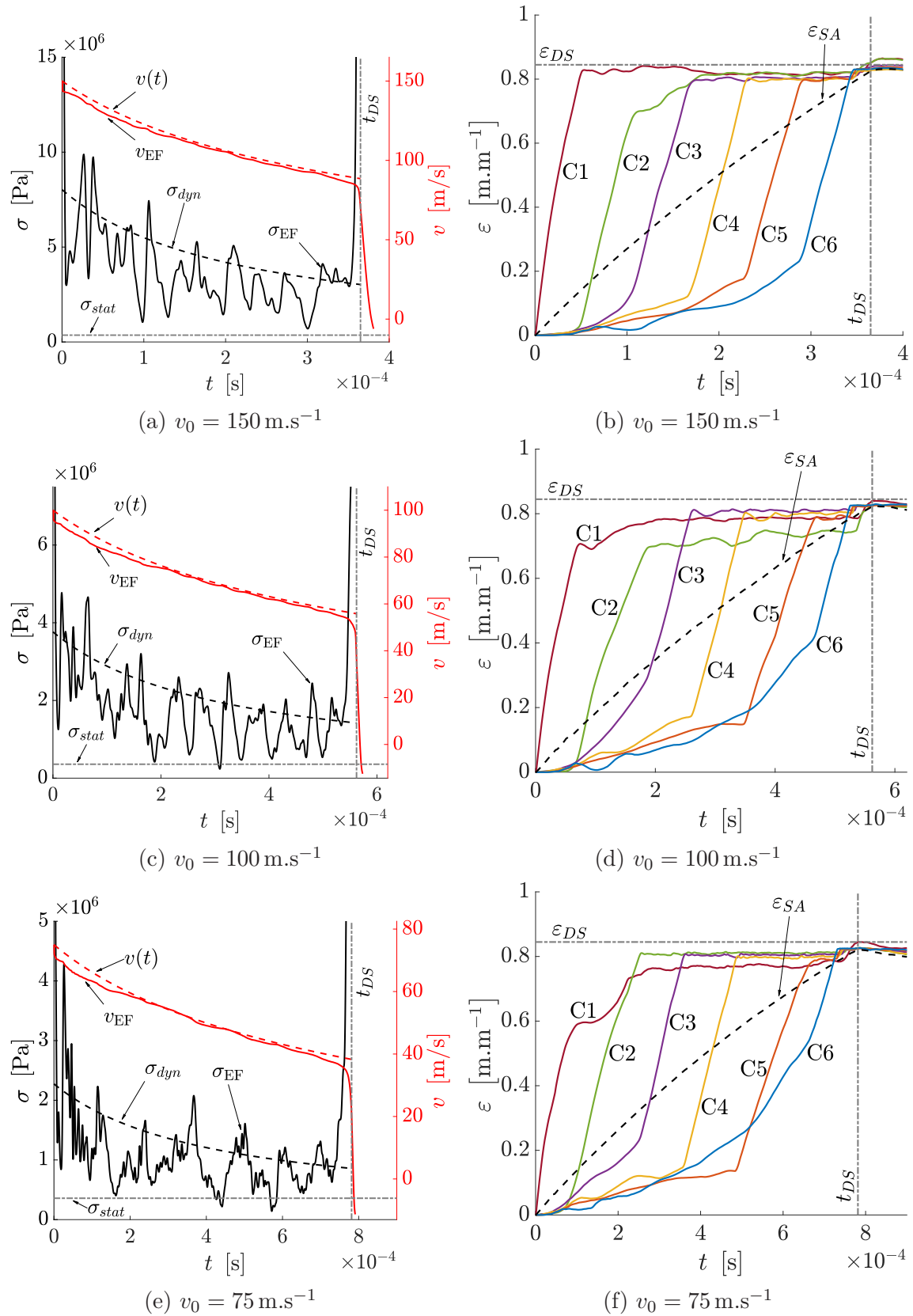


FIGURE 3.10 – Résultats numériques de l'impact de la SA pour différentes vitesses initiales. Courbes de contrainte et de vitesse à gauche. Courbes de déformation à droite.

Bien que les résultats analytiques soient toujours en cohérence avec les résultats EF, on peut observer, dans les figures 3.10c et 3.10e, que le temps théorique de densification t_{DS} s'écarte du temps déterminé numériquement. En effet, le ralentissement brutal de la plaque se produit plus tôt que t_{DS} . De plus, l'analyse de la déformation des cellules montre que la cellule C6 se déforme avant que la cellule C5 soit rejointe par le front d'onde structurelle.

Ce phénomène s'accroît lorsque la vitesse diminue encore. À 60 m.s^{-1} et 50 m.s^{-1} , la vitesse de la plaque déterminée par EF diminue plus vite que celle calculée par l'équation 2.46. Les figures 3.11b et 3.11d montrent que la cellule C6, supposée se déformer la dernière d'après le mode de déformation « I », commence à être comprimée avant les cellules C4 et C5. La discontinuité, présentée dans le chapitre 2 et constatée dans les simulations à grandes vitesses, n'est plus aussi nette.

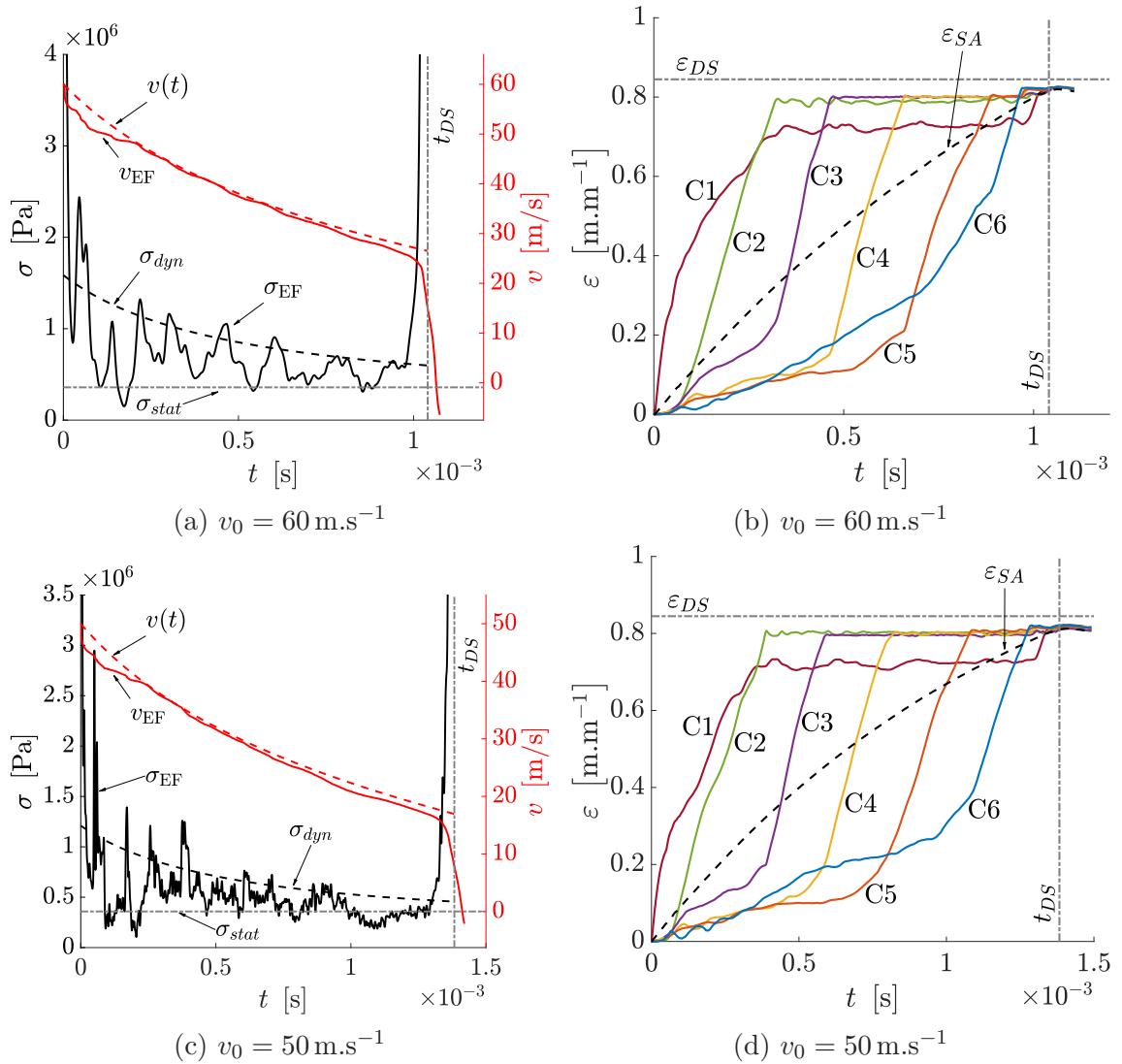


FIGURE 3.11 – Résultats numériques de l'impact de la SA pour différentes vitesses initiales. Courbes de contrainte et de vitesse à gauche. Courbes de déformation à droite.

Une simulation est réalisée à la vitesse initiale v_{0S} , pour laquelle $t_{stop} = t_{DS}$, soit 41.70 m.s^{-1} . Comme prévu par la théorie, la plaque est arrêtée avant la densification de la structure puisqu'aucun pic de contrainte n'est observable à la fin de la simulation, figure 3.12a et que la valeur de la déformation de la SA n'atteint pas ε_{DS} , figure 3.12b. Pourtant, la plaque simulée ne s'arrête pas exactement à la densification, mais à $2.202 \times 10^{-2} \text{ s}$. Ce qui fait un écart de 16.9 % sur la prédiction de t_{stop} . Enfin, l'écart est plus important entre les vitesses FE et analytiques. Il en va de même pour la simulation à 30 m.s^{-1} , figures 3.12c et 3.12d. Les prédictions de contrainte, de vitesse et de temps d'arrêt sont surestimées par rapport aux résultats EF.

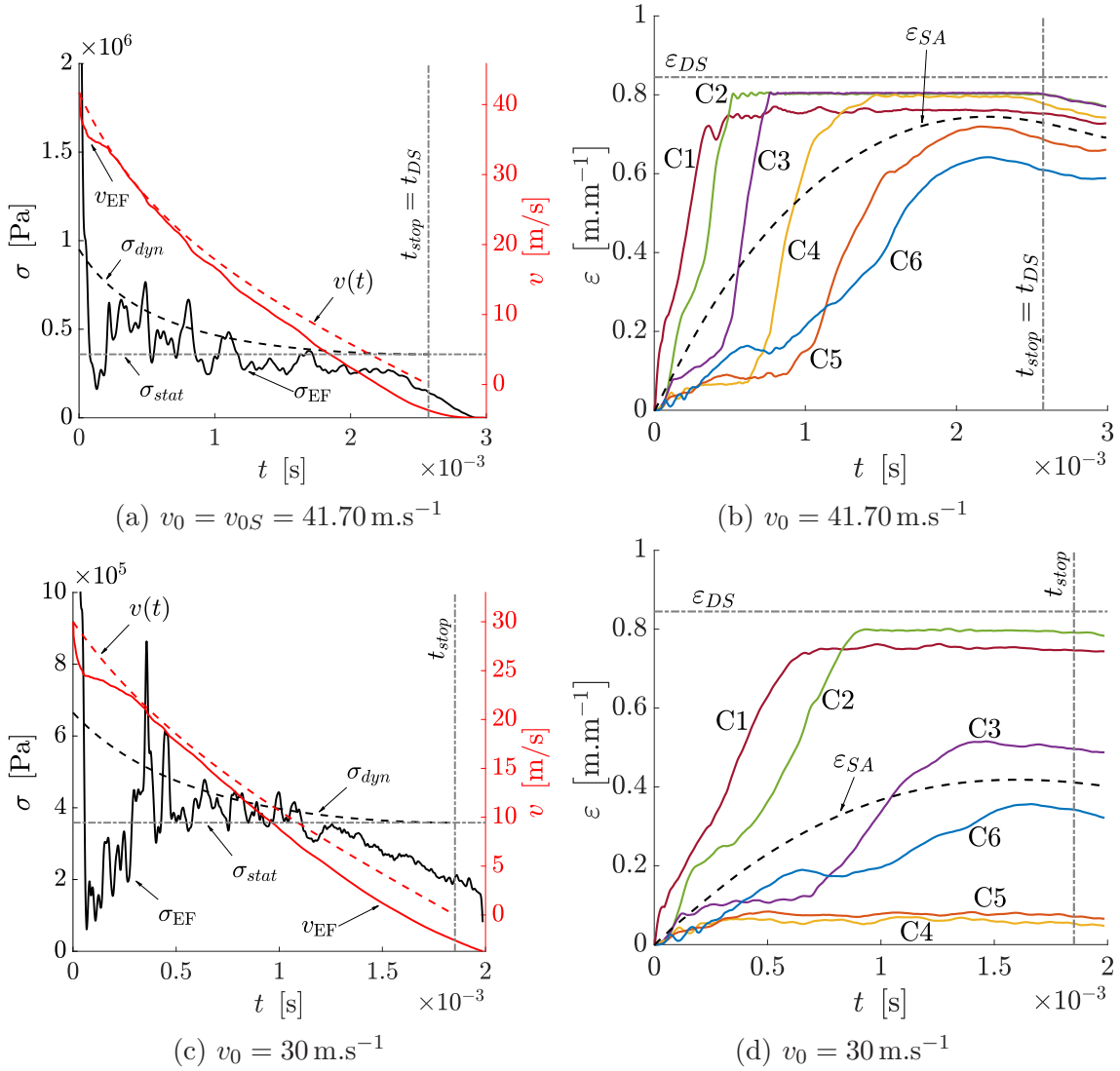


FIGURE 3.12 – Résultats numériques de l'impact de la SA pour différentes vitesses initiales. Courbes de contrainte et de vitesse à gauche. Courbes de déformation à droite.

Le mode de déformation « I » n'est plus présent excepté pour les cellules C1 et C2 qui se déforment l'une à la suite de l'autre.

La théorie développée au chapitre précédent montre donc des limites pour des cas de sollicitations proches ou inférieurs à la vitesse v_{0S} . En effet, la théorie de propagation de l'onde de choc suppose que les cellules en amont du front ne sont pas déformées. Ce qui n'est plus le cas lorsque la vitesse initiale de la plaque diminue. Les cellules inférieures commencent à se déformer avant que les précédentes soient entièrement densifiées, figures 3.11b, 3.11d, 3.12b, 3.12d. C'est cette déformation des cellules inférieures qui contribue à augmenter l'énergie absorbée par la SA et qui fait ralentir la plaque plus vite.

Les formulations présentées au chapitre 2 permettent de prévoir le comportement d'une SA à grande vitesse d'impact avec une bonne cohérence par rapport au modèle numérique, mais pas pour de faibles vitesses. La simulation numérique reste donc un outil de vérification pour l'étude du comportement dynamique.

3.2 Modélisation d'essai sur pendule balistique

Les limites des équations analytiques sont à présent connues. Cette seconde partie présente un modèle destiné à analyser des essais expérimentaux visant à caractériser l'atténuation des chocs par les SA. Le modèle est un projectile constitué d'une SA en acide polylactique (PLA) collée à un culot en polytétrafluoroéthylène (PTFE), lancé à une vitesse v_0 sur un pendule balistique, figure 3.13. Les dimensions du culot et de la SA sont choisies de telle sorte que ces deux composants puissent entrer dans le tube d'un canon à air comprimé de 4.0×10^{-2} m de diamètre intérieur. Les dimensions du pendule correspondent aux dimensions expérimentales.

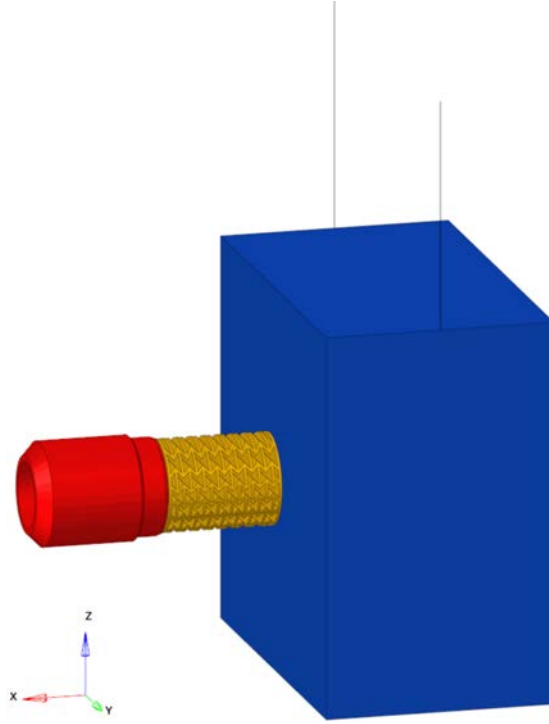


FIGURE 3.13 – Modèle numérique de l'impact sur un pendule balistique.

La géométrie de la SA est modifiée et correspond aux valeurs de la table 3.4. La SA est modélisée par CAO de la même manière que dans la sous-section 3.1.1 cependant la structure est extrudée plus profondément afin de pouvoir y découper un cylindre 3.5×10^{-2} m de diamètre et d'obtenir la pièce présentée dans la figure 3.14. Les cellules sont dimensionnées afin qu'il y ait un nombre de cinq cellules complètes selon l'axe Z . Un nombre de huit cellules selon l'axe X est choisi.

L [m]	H [m]	t_{thick} [m]	θ [deg]
3.707×10^{-3}	8.414×10^{-3}	1.00×10^{-3}	45°
ε_{DS}		D_0 [m]	
0.2315		4.29×10^{-2}	

TABLE 3.4 – Dimensions de la SA cylindrique modélisée.



FIGURE 3.14 – Modèle numérique de la SA utilisée pour l’impact sur pendule.

La SA est tout d’abord maillée grossièrement avec des éléments tétraédriques, puis ces derniers sont divisés pour obtenir des éléments hexaédriques. Le culot et le pendule sont maillés eux aussi avec des éléments hexaédriques. Comme pour l’étude numérique précédente, les éléments sont des éléments solides sous-intégrés à huit nœuds avec une stabilisation physique. Les éléments possèdent une formulation en grande déformation et il y a possibilité de passer à une formulation en petite déformation. Le maillage de la SA et du culot est présenté dans la figure 3.15.

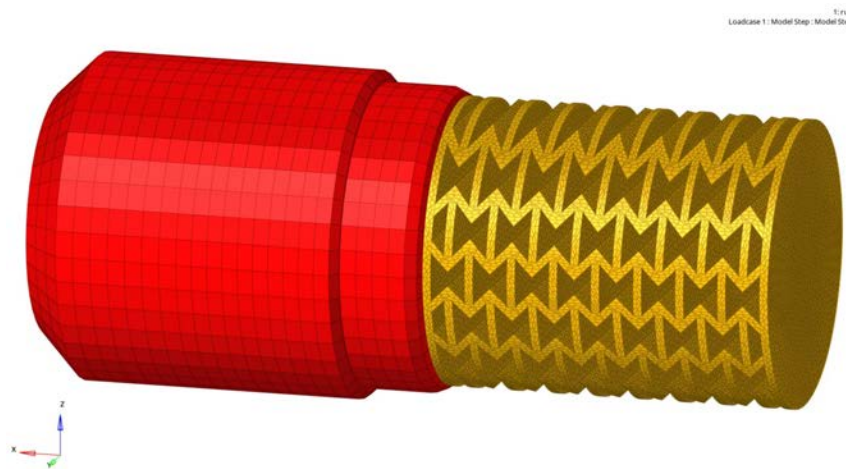


FIGURE 3.15 – Maillage du culot et de la SA.

Des câbles en acier de 9.27×10^{-1} m sont fixés au pendule en aluminium. Les câbles sont maillés avec des éléments TRUSS de 1.0×10^{-1} m et possèdent les mêmes propriétés matériaux que l’acier de la table 3.2. Le pendule est un bloc d’aluminium de 1.46×10^{-1} m de haut, 1.51×10^{-1} m de large et 8.7×10^{-2} m de profondeur. Il est simulé avec une loi parfaitement élastique de module d’Young 70×10^9 Pa, un coefficient de Poisson de 0.3 et une masse volumique de 3.53×10^3 kg.m⁻³ pour que sa masse soit de 6.764 kg.

Le culot, de diamètre 3.97×10^{-2} m, est simulé en utilisant une loi matériau

élastique-plastique et la SA par une loi matériau élastique parfaitement plastique dont les propriétés sont résumées dans la table 3.5. Les propriétés du PLA sont issues des essais de traction menés au chapitre 4. Le comportement du PTFE est basé sur une fiche matériau de l'entreprise Bearing Works¹. La masse volumique du PTFE a été modifiée afin que le culot ait une masse de 1.087×10^{-1} kg.

Nom du composant	Auxétique	Culot
Loi de comportement matériau	élastique, parfaitement plastique	élastique-plastique
ρ_s [kg/m ³]	1.113×10^3	2.231×10^3
E [Pa]	1.6081×10^9	4.0×10^8
σ_y [Pa]	2.082×10^7	9.0×10^6
ν []	0.35	0.46
σ_{UTS} [Pa]	-	1.0×10^7
ε_{UTS} [m.m ⁻¹]	-	0.75
ε_{max} [m.m ⁻¹]	-	0.9

TABLE 3.5 – Propriétés des matériaux du modèle EF.

Les différents contacts sont gérés de la même manière que précédemment, c'est-à-dire un contact général surface-surface avec une formulation par pénalité. Les coefficients de frottements des différents contacts sont choisis d'après la littérature ou les fiches matériaux disponibles. Le coefficient de frottement est de : 0.04 pour les contacts culot-culot (contact PTFE-PTFE¹), 0.1 pour les contacts culot-SA (contact PTFE-plastic [52]), 0.195 pour les contacts SA-SA (contact PLA-PLA²), 0.492 pour les contacts SA-pendule (contact PLA-métal [53]).

Le culot et la SA sont lancés à $v_0 = 83.55 \text{ m.s}^{-1}$ en direction du pendule. Des images des résultats de la simulation sont présentées dans la figure 3.16 pour des temps de t_1 à t_6 . L'image 3.16a à t_1 correspond à la première image disponible après l'entrée en contact de la SA et du pendule. L'image 3.16b à t_2 est prise à un instant arbitraire au cours de la compression de la SA. L'image 3.16c à t_3 est prise lorsque les travées sont toutes en contact, cela correspond approximativement à la déformation de ε_{DS} . L'image 3.16d à t_4 est arbitrairement choisie lors de la compression du PLA après la densification de la SA. L'image 3.16e à t_5 correspond au temps avant que le contact ne cesse et que la vitesse du culot ne change de sens pour rebondir. L'image 3.16f à t_6 est prise à un instant quelconque après que les trois composants (culot, SA et pendule) soit séparés.

1. <https://www.bearingworks.com/uploaded-assets/pdfs/retainers/ptfe-datasheet.pdf>
2. <https://matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=ab96a4c0655c4018a8785ac4031b9278&ckck=1>

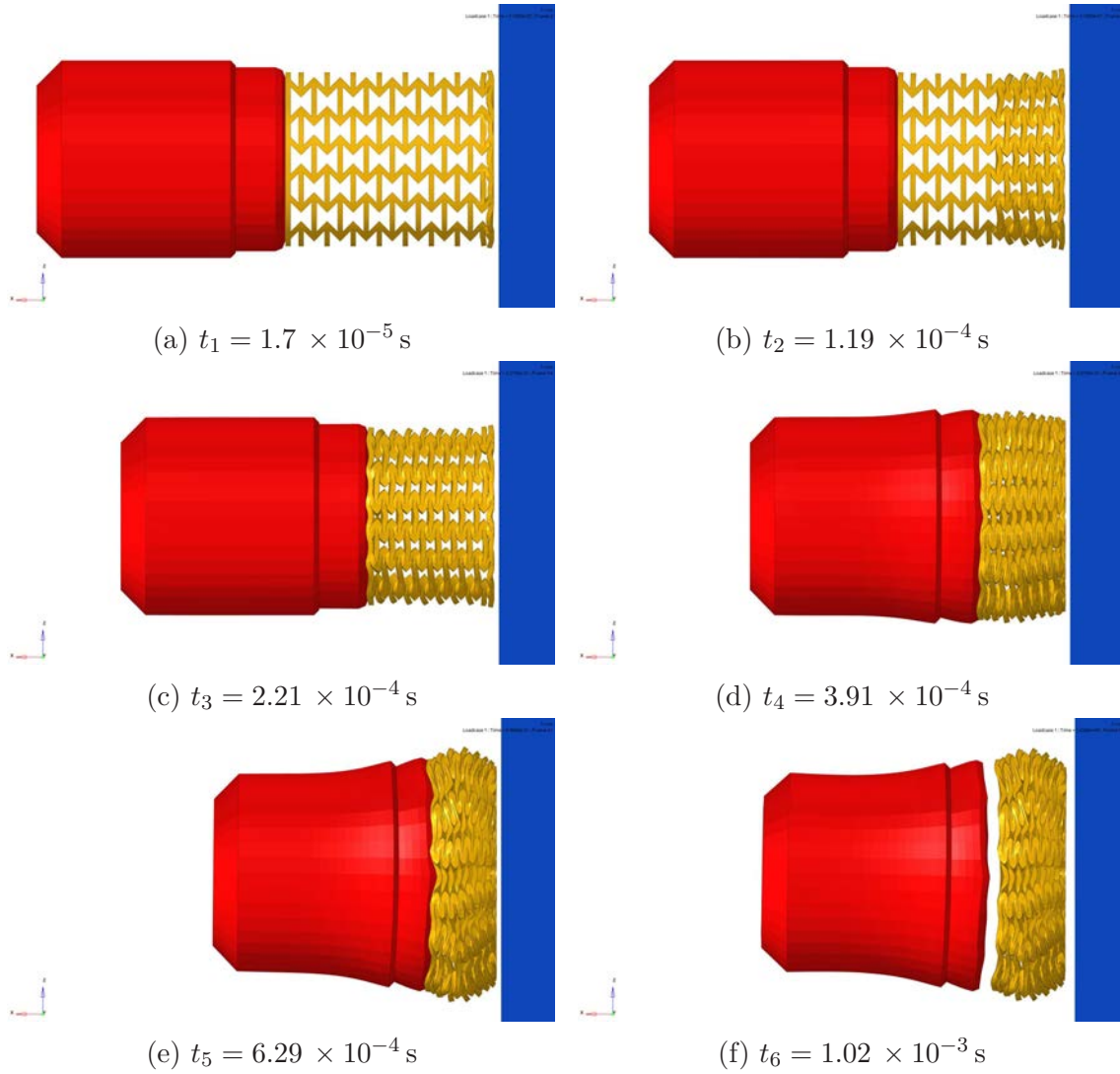


FIGURE 3.16 – Déformation de la SA à des temps différents de la simulation (voir figure 3.17)

On peut observer sur les figures 3.16d et 3.16e que le culot se déforme après la compression totale de la SA. En effet, le PLA est plus rigide et à une limite d'élasticité plus élevée que le PTFE. De plus, la propagation de l'onde de déformation se déplace du pendule vers le culot, ce qui reste cohérent avec le fait que la face impactée de la SA, la face proximale, est celle du côté du pendule.

Les contraintes σ_{culot} et σ_{pendule} sont calculées respectivement à partir des forces de contacts des interfaces culot-SA et SA-pendule et présentées dans la figure 3.17. Les temps t_1 à t_5 (figures 3.16a à 3.16e) sont marqués par une croix sur les courbes. Le temps $t_6 = 1.02 \times 10^{-3} \text{ s}$, figure 3.16f, n'y figure pas, car il est en dehors des limites du graphique.

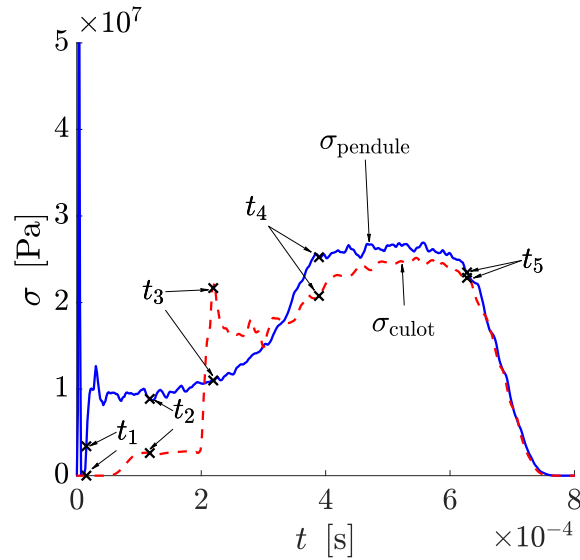


FIGURE 3.17 – Courbes de contraintes en fonction du temps aux interfaces culot-SA et SA-pendule.

On peut observer dans un premier temps que la contrainte σ_{culot} reste quasiment nulle jusqu'à 5.0×10^{-5} s alors que σ_{pendule} se trouve à une contrainte dynamique. La contrainte σ_{culot} atteint une valeur de contrainte plateau vers 1.0×10^{-4} s, un peu avant t_2 . Cela laisse présager la présence d'une onde supplémentaire se propageant devant le front de déformation et qui va faire augmenter la contrainte σ_{culot} une fois qu'elle aura atteint l'interface culot-SA. À t_3 , la SA est entièrement densifiée et σ_{culot} augmente fortement pour atteindre ensuite un équilibre avec σ_{pendule} qui a également augmentée. En effet, une fois que la SA est entièrement densifiée, elle va continuer à être comprimée, mais ce sont les propriétés du PLA qui vont prendre le pas sur la réponse. Le culot se déforme lui aussi lors de cette étape. Une fois que l'énergie cinétique du couple culot-SA est absorbée, les trois composants perdent le contact et les contraintes diminuent. Le retour élastique des matériaux va entraîner le rebond du culot.

La figure 3.18 représente les échanges d'énergies entre les différentes parties du modèle numérique.

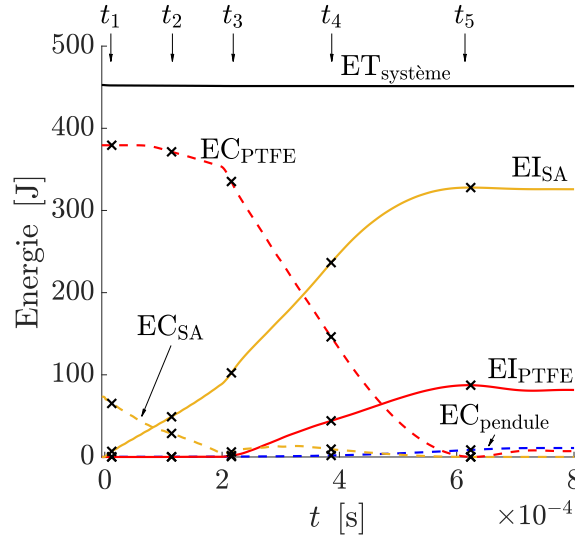


FIGURE 3.18 – Bilan d'énergie du pendule balistique, du culot et de la SA. ET : Energie Totale; EI : Energie Interne; EC : Energie Cinétique.

L'énergie totale du système prend en compte la somme des énergies cinétiques et internes des composants ainsi que l'énergie dissipée par les frottements. La part d'énergie absorbée par la SA semble importante, 72.0 % de l'énergie totale initiale. Cependant, la part absorbée jusqu'à la densification de la SA, vers t_3 , n'est que de 19.7 %. Cela correspond à l'absorption de sa propre énergie cinétique et à 4.2 % de l'énergie cinétique du culot. Au-delà de t_3 , c'est le PLA densifié et le PTFE qui vont se déformer et absorber le reste de l'énergie. Une petite partie est transmise au pendule qui est mis en mouvement à partir de la densification de la SA et atteint une énergie finale de 10.9 J.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, des simulations numériques par EF ont été menées pour modéliser le comportement des SA sous différents chargements. Un modèle simple de SA en aluminium comprimée par une plaque en acier a été mis en place pour effectuer trois séries de modélisations afin d'étudier la cohérence entre les formulations analytiques du chapitre 2 et les résultats des simulations par EF. Les deux premières séries concernent des cas de sollicitations à vitesse constante faible et rapide. Les résultats ont été comparés à la formule du plateau de contrainte statique σ_{stat} , équation 2.27, et celle de la contrainte dynamique σ_{dyn} , équation 2.35a, appliquée au cas d'une vitesse constante. L'analyse des résultats EF a montré une bonne corrélation entre analytique et numérique. La troisième série de simulations visait à valider l'équation 2.35a de σ_{dyn} dans le cas d'un impact à vitesse initiale. Plusieurs vitesses initiales ont été testées, de $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$ à $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$. Il ressort de cette étude que l'évolution de σ_{dyn} prédit par l'équation 2.35a est fiable à

grande vitesse tant que le mode de déformation « I » est présent. Il en va de même pour la prédiction du temps d'arrêt ou de densification de la SA. Dans le cas de la structure étudiée et pour la masse de plaque choisie, ce mode de déformation est moins visible en dessous de $v_0 = 60 \text{ m.s}^{-1}$. Ces conclusions sont en cohérences avec le fait que les formulations analytiques sur les cas dynamiques soient basées sur la forte discontinuité de déformations existant dans la structure et qui n'existe plus à vitesse moyenne ou faible.

Un second modèle numérique reproduit un essai d'impact sur pendule balistique. La SA en PLA est fixée à un culot en PTFE lancé en direction d'un pendule en aluminium. Le comportement du PLA modélisé est basé sur les résultats expérimentaux présentés dans le chapitre 4. Les résultats issus de cette simulation permettent de comprendre les échanges d'énergies entre différents composants mobiles, ce qui n'était pas le cas dans les simulations précédentes, car la SA était retenue par une plaque immobile. Lors de l'impact, l'énergie du projectile est transmise au pendule à partir du moment où la SA est entièrement densifiée. C'est à partir de cet instant que le pendule va se mettre en mouvement. Cela met en évidence le point critique à améliorer pour l'absorption d'énergie : augmenter le plus possible la période où la SA se déforme pour absorber l'énergie du culot. Pour ce modèle, la déformation de la SA ne permet d'absorber que 19.7 % de l'énergie totale initiale. Les résultats de cette simulation ne peuvent pas être comparés aux équations analytiques du chapitre 2. Dans ce modèle, la SA est solidaire du culot. L'ensemble va impacter un pendule balistique. Dans le chapitre 2, il s'agissait d'une SA seule posée sur une paroi rigide et impactée par une plaque. Pour cette raison, les formules analytiques ne peuvent pas être rigoureusement appliquées à la simulation du pendule, et plus tard, à l'analyse des résultats expérimentaux. De plus, bien que la géométrie de la cellule choisie suive les recommandations énoncées dans la section 2.1 du chapitre 2, l'élancement des parois obliques (rapport entre la longueur L et l'épaisseur t_{thick}) est trop petit pour respecter les hypothèses de Gibson *et al.* [28] relatives à la théorie des poutres. L'équation 2.27 du plateau de contrainte statique n'est alors pas applicable.

Finalement, la possibilité de prévoir le comportement des SA de manière analytique peut représenter un gain de temps par rapport aux modélisations FE et être utiles en phase de préconception. Cependant, si on souhaite appliquer les résultats analytiques, il est important de rester dans les limites des paramètres géométriques imposées par les hypothèses utilisées. Il faut tout de même retenir que ce n'est pas parce que ces limites ne sont pas respectées que la structure n'est plus auxétique. Et c'est dans ces cas là que les simulations numériques par EF restent essentielles.

Dans le chapitre suivant, une étude expérimentale de la SA va être menée. Des essais de compression quasi-statiques seront réalisés. Un banc expérimentale sera également mis en place pour étudier le comportement dynamique de la SA.

Chapitre 4

Étude expérimentale

Résumé : Ce chapitre présente les résultats des études expérimentales menées sur la structure auxétique. Après avoir présenté la méthode de fabrication des échantillons, des essais de traction et de compression sur le PLA, utilisé pour la fabrication des SA, sont effectués. Ensuite, la SA est testée en compression quasi-statique pour déterminer la valeur du plateau de contrainte. Enfin, une campagne d'essais dynamiques est réalisée. La structure auxétique est collée à un culot en PTFE afin de constituer un projectile lancé sur un pendule balistique grâce à un canon à air comprimé. La campagne se focalise sur l'énergie transférée au pendule suite à l'impact de la structure et du culot.

4.1 Méthode et matériau de fabrication

Les structures auxétiques, toutes géométries confondues, sont des structures qui peuvent être difficiles à obtenir par des moyens de fabrications dit « traditionnels » tels que le moulage ou la découpe de plaque par exemple. Cette difficulté est due à la forme parfois compliquée qu'il faut donner à la matière pour obtenir l'effet auxétique. C'est pour cela que la méthode de fabrication additive a été choisie pour ces travaux. Bien que la SA étudiée ici semble avoir une géométrie relativement simple, il est plus aisé de la fabriquer « étage par étage » que de la mouler, non seulement d'un point de vue faisabilité, mais aussi à cause de la facilité et de la rapidité d'exécution et de réalisation de SA de géométries différentes sans passer par la phase de conception de moule.

4.1.1 Fabrication additive

Les échantillons utilisés dans ces travaux de thèse ont été réalisés en employant la méthode FDM (Fused Deposition Modeling). Les échantillons ont pu être fabri-

qués grâce aux machines Pro2 fabriquées par Raise3D du département GMP (Génie Mécanique et Productique) de l'IUT de Bourges.

Le principe de la fabrication additive est de fabriquer la pièce par couches successives. La méthode FDM consiste à faire passer un filament de polymère de l'ordre de quelques millimètres de diamètre au travers d'une tête d'extrusion (ou extrudeur) grâce à des roues d'entrainements. Le filament passe dans une buse de diamètre inférieur à celui du filament et chauffée à une température proche de la température de fusion du filament. La tête d'extrusion se déplace suivant des axes X et Y permettant le dépôt de matière sur le plateau support lui aussi chauffé à une température inférieure à la température de transition vitreuse du filament. À la fin de l'impression de chaque couche, le plateau se déplace le long de l'axe verticale Z afin d'imprimer la couche suivante. La figure 4.1 représente de manière schématique une imprimante utilisant la méthode FDM.

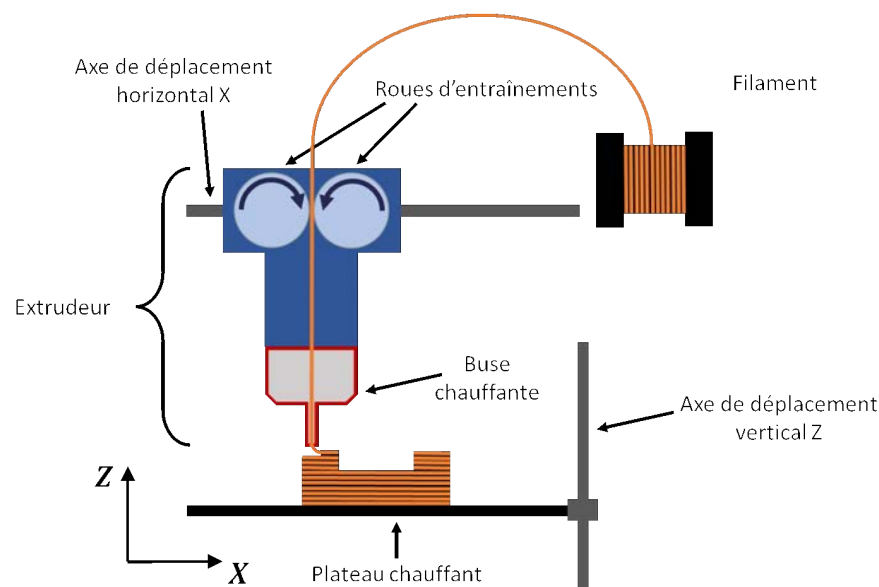


FIGURE 4.1 – Représentation schématique d'une imprimante utilisant la méthode FDM.

Dans un premier temps, les échantillons sont conçus grâce au logiciel de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) CATIA développé par la compagnie Dassault Systèmes. La pièce est ensuite exportée au format de fichier STL, qui est un format décrivant la géométrie de surface de la pièce. Ce fichier est ensuite importé dans le *slicer* (logiciel de découpage en tranches) ideaMaker développé par Raise3D. Le *slicer* permet de découper la pièce « en étage » et de traduire le fichier STL en un code utilisant le langage G-code, un langage de programmation de commande numérique. C'est ce langage qu'utilise la machine d'impression pour exécuter la fabrication. C'est au moment du passage du fichier STL au fichier G-CODE qu'il faut régler les paramètres d'impressions. Il est possible de modifier plusieurs paramètres

influençant sur la qualité de la pièce finale tels que les températures de consignes de la buse chauffante et du plateau support. Il est également possible de modifier la vitesse d'impression, le taux d'extrusion, la hauteur de couche (qui conditionne le découpage)... Le fichier d'entrée étant un fichier décrivant seulement les surfaces, il faut également choisir le taux et le schéma (grille, ligne, gyroïde...) de remplissage des volumes fermés. Le fichier obtenu est ensuite communiqué à la machine d'impression et l'impression peut être lancée. L'étude de l'influence des paramètres d'impressions ne fera pas l'objet d'une étude approfondie dans ces travaux. En effet, ceux-ci peuvent varier suivant le filament utilisé, mais aussi pour un filament d'un même type, suivant son fabricant et mériteraient donc une étude à part entière. Ainsi, les paramètres d'impressions sont choisies suivant les recommandations du fabricant et l'expérience du technicien responsable de la machine.

4.1.2 Matériau d'impression sélectionné

Le matériau d'impression sélectionné pour cette étude est le PLA. C'est un polymère biosourcé, qui peut par exemple être obtenu à partir d'amidon de maïs. C'est un matériau reconnu pour être facilement imprimable et est peu cher. Parmi la large gamme de PLA qui existe pour imprimante 3D, le PLA PolyMax™ fabriqué par Polymaker a été sélectionné. En plus des propriétés caractéristiques du PLA, le PLA PolyMax™, dont les propriétés du constructeur sont données dans les tables 4.1 et 4.2, intègre une technologie dite « nano-reinforcement » grâce à laquelle le fabricant assure améliorer la ténacité par rapport au PLA « classique ».

Propriété	Valeur type	Méthode de test
Masse volumique	1.17 - 1.24 (g/cm ³ à 21.5 °C)	ASTM D792 (ISO 1183, GB/T1033)
Température de transition vitreuse	61 (°C)	DSC, 10 °C.min ⁻¹
Point de ramolissement Vicat	62 (°C)	ASTM D1525 (ISO 306, GB/T 1633)
Indice de fluidité à chaud	5 - 8 (g/10 min)	210 °C, 2.6 kg
Température de fusion	149 (°C)	DSC, 10 °C.min ⁻¹
Température de cristallisation	112 (°C)	DSC, 10 °C.min ⁻¹

TABLE 4.1 – Propriétés physiques fabricant du PLA PolyMax™.

Propriété	Valeur type	Méthode de test
Module d'Young (X - Y)	1879 ± 109 (MPa)	ASTM D638 (ISO 527, GB/T 1040)
Résistance à la traction (X - Y)	28.1 ± 1.3 (MPa)	ASTM D638 (ISO 527, GB/T 1040)
Elongation à la rupture (X - Y)	1.4 ± 0.3 (%)	ASTM D638 (ISO 527, GB/T 1040)
Module de flexion (X - Y)	2119 ± 60 (MPa)	ASTM D790 (ISO 178, GB/T 9341)
Résistance à la flexion	48.0 ± 1.9 (MPa)	ASTM D790 (ISO 178, GB/T 9341)
Résistance à l'impact (essai Charpy)	12.2 ± 1.03 (kJ/m ²)	ASTM D256 (ISO 179, GB/T 1043)

TABLE 4.2 – Propriétés mécaniques fabricant du PLA PolyMax™.

Bien que les données du constructeur soient connues, il est nécessaire de préciser que le procédé de fabrication influe sur les propriétés mécaniques du filament.

La SA étant fabriquée par ce procédé, une campagne de test a été réalisée pour déterminer les propriétés du matériau post-impression. Les résultats de cette étude sont présentés ci-après.

4.1.3 Caractérisation du PLA

Les essais réalisés pour déterminer les propriétés du matériau sont des essais de traction et de compression. Afin de guider la conception des éprouvettes, il a été décidé de se tourner vers les normes existantes. Depuis quelques années, la fabrication additive connaît un essor grandissant parmi les entreprises ce qui a incité l'écriture de nouvelles normes. La norme NF EN ISO 17296-3 donne une liste des exigences que l'on peut attendre d'une pièce produite par fabrication additive et des méthodes d'essais correspondantes. Les méthodes d'essais particulières pour les pièces de fabrication additive sont toujours en cours d'investigation. Il est donc recommandé dans la norme d'utiliser une liste de normes internationales existantes suivant le type de matériau utilisé. Les matières pour la fabrication additive sont divisées en trois familles : les métaux, les céramiques et les plastiques. Le PLA fait partie de cette dernière famille et le procédé de FDM s'apparente plus à une fabrication par extrusion. Il a donc été décidé d'utiliser comme guide la norme ISO 527-2 pour les essais de traction et la norme ISO 604 pour les essais de compression, selon les recommandations de la norme NF EN ISO 17296-3.

Les essais suivants, réalisés dans le département GC (Génie Civil) de l'IUT de Bourges, visent à caractériser le matériau dont sera fait la SA. Ainsi pour limiter les effets de sous-structurel dans la SA, il a été décidé de réaliser les pièces avec un taux de remplissage des parois de 100 %. Les éprouvettes de traction et de compression seront donc réalisées, elles aussi, avec un taux de remplissage de 100 %. Le schéma de remplissage choisi correspond à une grille. La tête d'impression réalise donc des aller-retour à -45° sur une couche puis à $+45^\circ$ par rapport à l'axe X du plateau d'impression, selon la figure 4.2

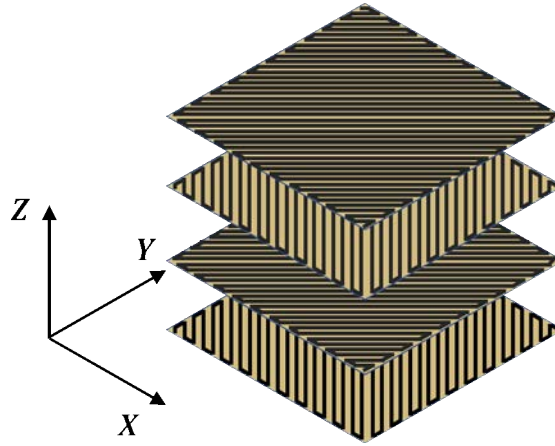


FIGURE 4.2 – Représentation schématique du motif de remplissage en grille.

Essais de traction

Comme mentionné précédemment, la norme ISO 527-2 sera utilisée comme guide pour concevoir les éprouvettes de traction et réaliser les essais. La pièce réalisée par CAO est représentée dans la figure 4.3.

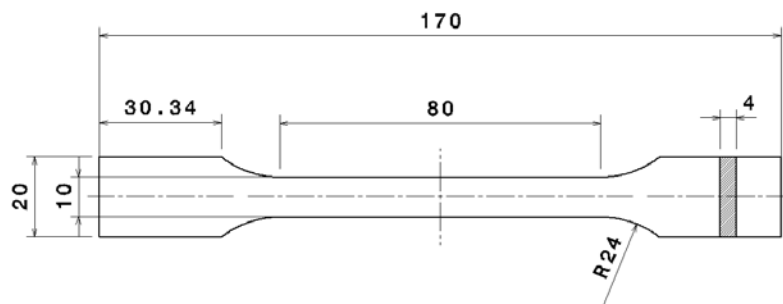


FIGURE 4.3 – Eprouvette de traction réalisée par CAO.

La pièce est ensuite fabriquée comme décrit dans la sous-section 4.1.1. Cinq éprouvettes sont testées avec une machine de traction SHIMADZU de la série AGS-X. Elles sont placées dans les mords de telle façon à ce qu'il y ait une distance de 115 mm entre eux. Un extensomètre de longueur initiale $l_0 = 50$ mm est placé

au milieu de l'éprouvette. La machine de traction est programmée pour imposer un déplacement de $1 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ à la traverse. L'acquisition des résultats est effectuée avec le logiciel TRAPEZIUM X de l'entreprise SHIMADZU. Les résultats sont traités avec MATLAB développé par MathWorks.

Lors de l'essai, des déformations en dehors de l'extensomètre sont observables, figure 4.4. Il est conseillé dans ce cas, selon la norme, de tracer la courbe conventionnelle en utilisant les résultats de l'extensomètre jusqu'à la déformation correspondant à la limite d'écoulement de l'éprouvette puis d'utiliser les résultats de la traverse pour le reste de la courbe.

Les courbes conventionnelles obtenues de cette manière sont présentées dans la figure 4.5.

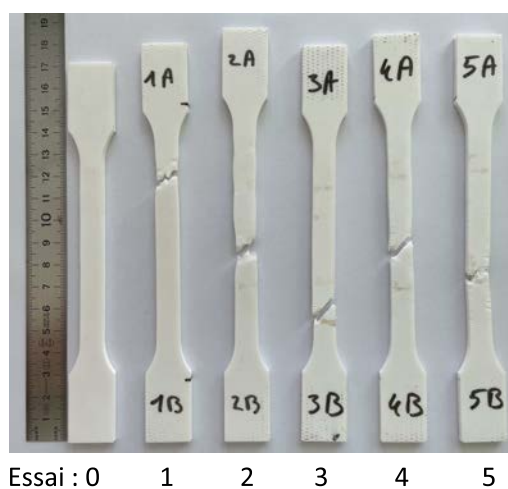


FIGURE 4.4 – Epreuves imprimées en PLA PolyMax™ et testées en traction. L'essai 0 correspond à l'éprouvette en sortie d'impression.

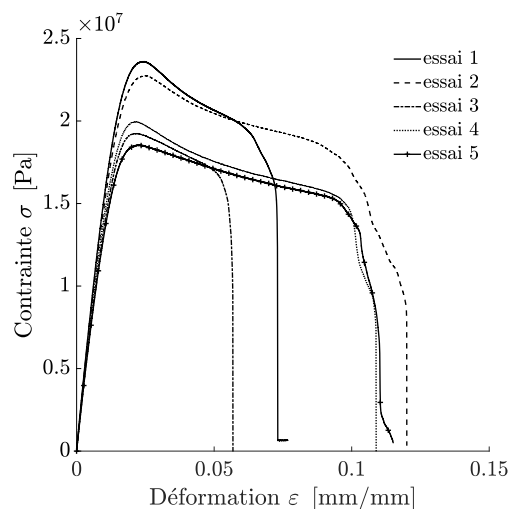


FIGURE 4.5 – Courbes conventionnelles de traction pour cinq éprouvettes en PLA PolyMax™.

Dans le tableau 4.3 sont résumées les valeurs obtenues pour le module d'Young et la limite d'écoulement pour chacune des éprouvettes ainsi que la moyenne de ces valeurs et l'écart-type.

N° essai	Module d'Young (Pa)	Limite d'écoulement (Pa)
1	1.7042×10^9	2.3603×10^7
2	1.6676×10^9	2.2743×10^7
3	1.5273×10^9	1.9245×10^7
4	1.6294×10^9	1.9963×10^7
5	1.5118×10^9	1.8546×10^7
Moyenne	1.6081×10^9	2.0820×10^7
Ecart-type	7.6186×10^7	1.9917×10^6

TABLE 4.3 – Résultats des essais de traction sur les éprouvettes de PLA PolyMax™.

Les valeurs de module d'Young obtenues sont relativement proches compte tenu du fait que le procédé de fabrication, l'impression 3D, introduit des défauts non contrôlables dans les éprouvettes même si le fichier d'impression utilisé est identique pour toutes les éprouvettes. Une grande dispersion des résultats est observée pour la limite d'écoulement ainsi que la déformation à la rupture. En effet, les cinq éprouvettes ne faisant pas parti du même lot de fabrication (les pièces sont en général imprimées par trois), le PLA de chacune des éprouvettes n'a pas le même historique (exposition aux UV (ultra-violet), à la température, à l'humidité...) ce qui peut les fragiliser et les rendre moins résistantes.

Essais de compression

Les essais de compression sont réalisés en utilisant la norme ISO 604 comme guide pour concevoir les éprouvettes de compression et réaliser les essais. La pièce est réalisée par CAO. C'est un parallélépipède rectangle de base $20 \times 20 \text{ mm}^2$ et de 40 mm. Le rapport dimensionnel du plus petit côté de la section transversale sur la hauteur de l'échantillon est de 0.5 afin d'éviter le flambage de l'éprouvette. La pièce est également fabriquée par impression 3D. Quatre éprouvettes sont testées, figure 4.6, en compression en remplaçant les mords de la machine de traction précédemment utilisée par des plateaux de compression. La machine est programmée pour imposer un déplacement à la traverse de $1 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$. L'acquisition et l'exploitation des résultats se fait de la même manière que pour l'essai de traction. Les courbes conventionnelles, figure 4.7, sont tracées directement avec le déplacement de la traverse puisqu'aucun appareil de mesure de précision n'a pu être ajouté sur les éprouvettes. Les déformations sont tracées dans le sens positif.

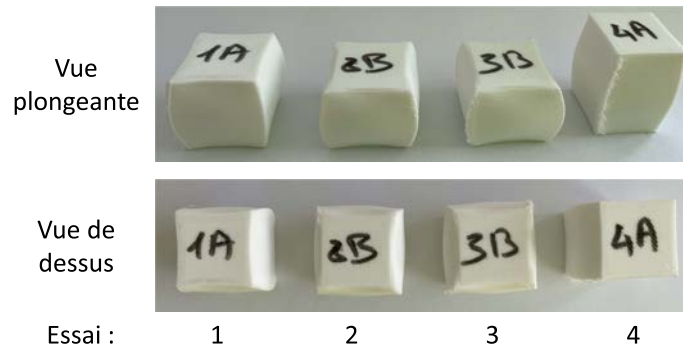


FIGURE 4.6 – Eprouvettes imprimées en PLA PolyMax™ et testées en compression.

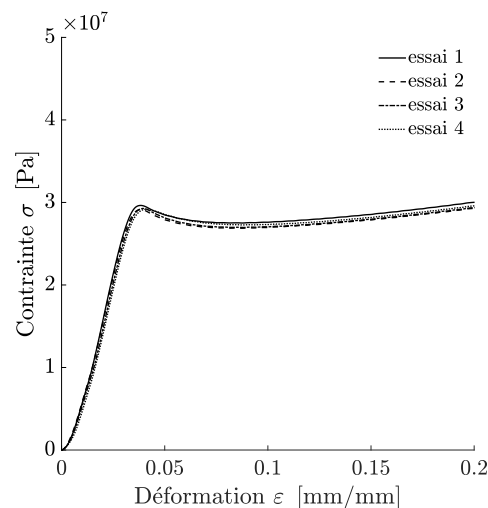


FIGURE 4.7 – Courbes conventionnelles de compression pour quatre éprouvettes en PLA PolyMax™.

L'éprouvette N°4, figure 4.6, était un essai de calibration pour estimer la longueur nécessaire à l'obtention des propriétés mécaniques. Il a été décidé d'augmenter la distance de compression afin de mieux observer ce qui se passe après le seuil d'écoulement. Les éprouvettes numérotées de 1 à 3, figure 4.6, ne sont pas toutes comprimées au même taux de déformation, car les plateaux de compression n'étaient pas initialement en contact avec les éprouvettes et positionnés à la même distance initiale de celles-ci. Afin de limiter le pied de courbe dans les résultats, la valeur minimale de 2 N a été choisie pour déterminer l'instant où le plateau de compression supérieur entre en contact avec l'échantillon. Les courbes sont ramenées pour cet instant à une contrainte et une déformation nulle. Afin de s'affranchir des difficultés d'interprétations liées à l'historique des éprouvettes, comme cela a été le cas pour les essais de traction, il a été décidé de réaliser les essais de compression le même jour et sur des éprouvettes issues du même lot de fabrication.

N° essai	Module en compression (Pa)	Limite d'écoulement en compression (Pa)
1	1.1343×10^9	2.9638×10^7
2	1.1033×10^9	2.9134×10^7
3	1.0985×10^9	2.9267×10^7
4	1.0767×10^9	2.9170×10^7
Moyenne	1.1032×10^9	2.9302×10^7
Ecart-type	2.0553×10^7	1.9998×10^5

TABLE 4.4 – Résultats des essais de compression sur les éprouvettes de PLA Poly-Max™.

Il y a peu de dispersion dans les valeurs de module de compression et de limite d'écoulement comparé aux essais menés en traction. Il y a également peu de différence entre les modules d'élasticités en traction et en compression. Les courbes de compression sont similaires aux courbes de compression qui peuvent être obtenues pour des matériaux cellulaires. Ceci peut être en grande partie dû au fait que bien qu'un taux de remplissage à 100 % soit choisi, les éprouvettes ne sont pas aussi denses que le matériau brut. Il y a un effet de « micro-structure » dans les éprouvettes.

Les résultats obtenus, notamment pour la traction, sont inférieurs à ceux annoncés par le fabricant (section 4.1.2). L'une des raisons expliquant cette différence est que les éprouvettes utilisées par Polymaker sont des éprouvettes de matériaux plein et non des éprouvettes fabriquées par impression 3D. En effet, le procédé de fabrication introduit des défauts et des micro-porosités dans les échantillons et influence ainsi la réponse mécanique de la pièce testée. Il n'est cependant pas possible de conclure sur cette hypothèse puisqu'aucune information supplémentaire, autre que les normes utilisées, n'est fournies par le fabricant.

4.2 Essais de compression quasi-statiques de la structure auxétique

La géométrie de la cellule de la SA doit être choisie de telle sorte qu'il y ait un nombre suffisant de cellules dans la largeur de l'échantillon testé pour limiter les effets de bords. Dans son étude sur les auxétiques ré-entrants, Dong *et al.* [15] conclut qu'il faut un nombre minimum de quatre cellules dans chacune des directions du plan de la structure. Le canon à air comprimé utilisé dans la campagne d'essais dynamiques possède un diamètre intérieur de 4.0×10^{-2} m. Les cellules de la SA sont donc choisies de façon à ce qu'il y ait cinq cellules dans le diamètre de l'échantillon

qui est de 3.5×10^{-2} m. Les dimensions des cellules sont identiques à celles de la SA utilisée dans la section 3.2 du chapitre 3 (voir table 3.4).

Les échantillons sont fabriqués en PLA avec l'imprimante 3D présentée dans la section 4.1. Pour les essais quasi-statiques, les SA possèdent huit cellules dans la hauteur et quatre cellules entières dans la largeur, figure 4.8.

L'échantillon mesure 4.28×10^{-2} m de haut, 4.6×10^{-2} m de large et 3.1×10^{-2} m de profondeur. Les essais quasi-statiques sont réalisés dans le département GCCD (Génie Civil et Construction Durable) de l'IUT de Bourges. La machine utilisée est une SHIMADZU de la série AGS-X équipée de plateaux de compression. Le plateau supérieur de la machine est positionné au plus près de la structure sans entrer en contact avec celle-ci. La machine est programmée pour imposer un déplacement de $2 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ à la traverse. L'acquisition des résultats est effectuée avec le logiciel TRAPEZIUM X de l'entreprise SHIMADZU. Les résultats sont traités avec MATLAB, développé par MathWorks.



FIGURE 4.8 – Échantillon auxétique ré-entrant pour le test en compression quasi-statique (hauteur : 4.28×10^{-2} m).

Les courbes conventionnelles sont présentées dans la figure 4.9. La déformation ε est déterminée par le rapport entre le déplacement du plateau supérieur et la hauteur initiale de l'échantillon. Les déformations sont tracées dans le sens positif. La contrainte σ est le rapport entre la force exercée par le plateau supérieur et la surface initiale d'emprise de l'échantillon.

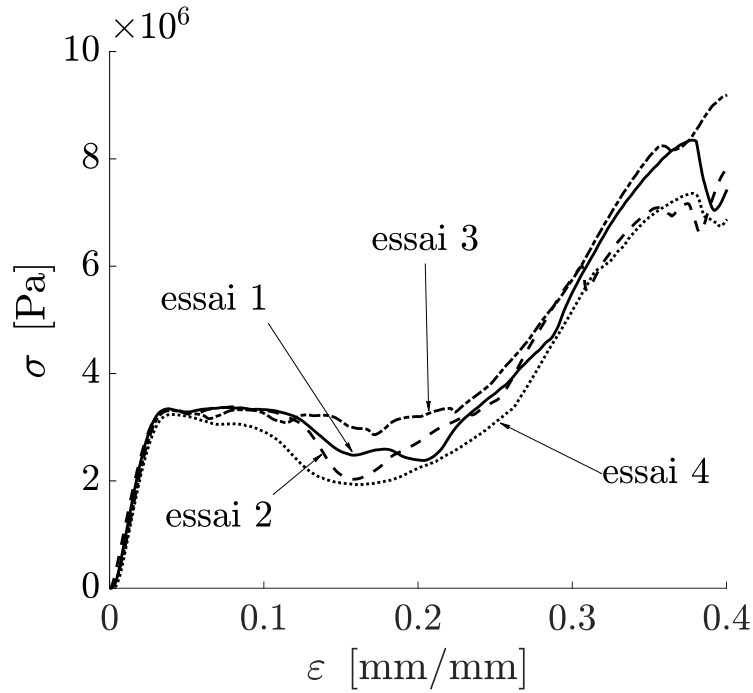


FIGURE 4.9 – Courbes conventionnelles de compression pour quatre éprouvettes de SA en PLA PolyMax™.

Les éprouvettes sont numérotées de 1 à 4. Comme dans la section 4.1.3, une valeur minimale de 2 N a été choisie pour déterminer l’instant où le plateau de compression supérieur entre en contact avec l’échantillon afin de limiter le pied de courbe.

Les valeurs des modules de compression et des plateaux de contraintes $\sigma_{stat, exp}$ sont notées dans la table 4.5. Le module de compression est déterminé en calculant la pente de la courbe correspondante. Le plateau de contrainte, $\sigma_{stat, exp}$, correspond au rapport entre l’intégrale de la contrainte entre la déformation au seuil d’écoulement et la déformation à densification et la différence entre les bornes de l’intégrale.

N° essai	Module en compression (Pa)	Plateau de contrainte $\sigma_{stat, exp}$ (Pa)
1	1.4500×10^8	3.0107×10^6
2	1.3289×10^8	2.9336×10^6
3	1.3545×10^8	3.1884×10^6
4	1.3351×10^8	2.5809×10^6
Moyenne	1.3671×10^8	2.9284×10^6
Ecart-type	4.8778×10^6	2.2087×10^5

TABLE 4.5 – Résultats des essais de compression sur les éprouvettes de SA en PLA PolyMax™.

Il y a peu de dispersion dans les valeurs de modules de compression. En revanche, on peut noter une plus grande disparité dans les valeurs de contrainte plateau. Ceci est dû aux différences de comportements observés dans les courbes de compression, figure 4.9, notamment l'adoucissement des éprouvettes N°2 et N°4. Ces variations peuvent être expliquées par l'introduction de défauts dus au mode de fabrication. La valeur de déformation à densification calculée au chapitre précédent pour cette structure, $\varepsilon_{DS} = 0.2315$, est cohérente avec la déformation observée lors de l'augmentation de la contrainte. La contrainte du plateau statique déterminée au moyen de l'équation 2.27, $\sigma_{stat} = 6.8558 \times 10^5$ Pa, ne correspond pas à la valeur du plateau de contrainte déterminée dans la table 4.5. En effet, pour les mêmes raisons que celles exposées dans la section 3.2 du chapitre 3, la géométrie choisie ne correspond pas aux hypothèses de calculs de σ_{stat} , équation 2.27. Le choix de la géométrie des cellules ne peut pas être guidé seulement par les hypothèses de calculs. En effet, si l'on souhaitait les suivre en ayant tout de même un nombre de cellules suffisant pour limiter les effets de bords lors de l'étude dynamique suivante, il faudrait une fine épaisseur de parois. Cela rendrait la fabrication des échantillons par impression 3D bien plus compliquée voire quasiment impossible en utilisant l'imprimante à notre disposition.

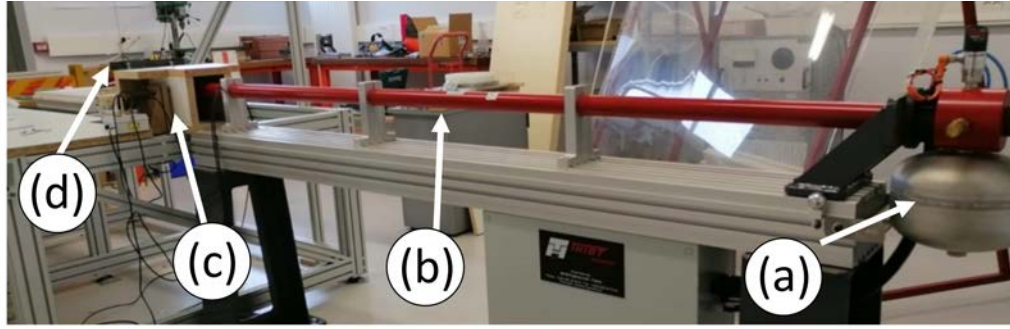
4.3 Essais dynamiques

4.3.1 Dispositif expérimental

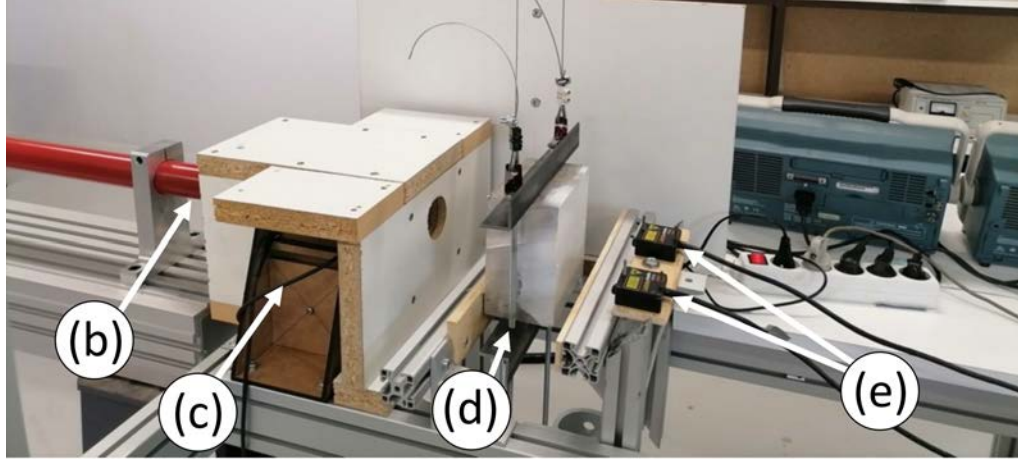
Les essais sont réalisés au laboratoire LaMé, sur le site de l'IUT de Bourges. Ils consistent à lancer, avec un canon à air comprimé, un projectile, constitué d'un culot en PTFE et de la SA, sur un pendule balistique.

Banc d'essai

Le banc d'essai, figure 4.10, se compose d'un canon à air comprimé et d'un pendule balistique tous deux maintenus à l'aide de profilés NORCAN.



(a) Réservoir à air comprimé (a), canon (b), barrière de vitesse (c) et pendule (d).



(b) Barrière de vitesse (c) en sortie de canon (b), pendule balistique (d) et capteurs de déplacements (e).

FIGURE 4.10 – Banc d'essai.

Le canon est constitué d'un tube en acier de 2.5 m de long et d'un diamètre intérieur de 4.0×10^{-2} m. Il est équipé d'un réservoir à air comprimé d'une capacité maximale de 8 bar, figure 4.10a. Le pendule balistique, figure 4.10b, positionné à 3.05×10^{-1} m de la sortie du canon, est un bloc d'aluminium de 1.46×10^{-1} m de haut, 1.51×10^{-1} m de large et 8.7×10^{-2} m de profondeur. Il est bridé entre deux profilés en acier au moyen de tiges filetées. Le tout est relié à des suspentes en acier de 9.27×10^{-1} m de long. Le bloc en aluminium ainsi que les profilés en acier ont une masse totale de 6.764 kg.

Instrumentation

Une barrière de vitesse, figure 4.10b, est placée à la sortie du canon pour déterminer la vitesse des projectiles. Elle est constituée de deux couples émetteurs laser - récepteurs photodiode espacés de 1.0×10^{-1} m et couplés à un oscilloscope numérique. Les photodiodes ont un temps moyen de montée du signal de 6.0×10^{-3} s. Sa proximité avec la sortie de canon et le faible temps de vol libre entre celles-ci et le pendule permet de considérer que la barrière de vitesse donne une bonne

approximation de la vitesse du projectile lors de l'impact.

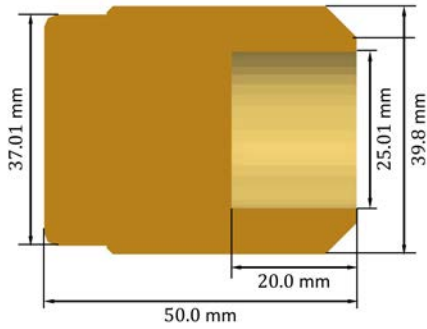
Deux capteurs lasers de déplacements, eux aussi branchés à un oscilloscope numérique, sont placés derrière le pendule sur un plan horizontal, figure 4.10b. Les deux oscilloscopes sont couplés au premier laser de la barrière de vitesse afin de déclencher l'enregistrement simultanément. Les deux capteurs sont positionnés aux extrémités latérales du pendule. En effet, il peut y avoir des déséquilibres lors de l'impact entraînant une légère rotation du pendule autour de son axe vertical. La mesure du déplacement en fonction du temps en deux points espacés permet de calculer une valeur moyenne. Ces deux capteurs ont une plage de mesure de $\pm 1.0 \times 10^{-2}$ m avec une distance de mesure moyenne de 6.5×10^{-2} m. Ils sont donc placés à une distance de 7.5×10^{-2} m du pendule lorsqu'il est au repos. Un arrêtoir est positionné à 3.5×10^{-2} m derrière le pendule pour éviter tout endommagement des capteurs. La fréquence d'échantillonnage est de 4.0×10^4 Hz et le temps de réponse est de 1.0×10^{-4} s. Les capteurs ne permettent d'enregistrer que la composante horizontale du déplacement du pendule. Cependant, la longueur des câbles de suspension a été choisie de telle sorte à obtenir un mouvement quasi-horizontale sur la plage de déplacement observée du pendule.

Une caméra rapide FASTCAM SA5, ainsi que deux projecteurs, sont positionnés de manière à filmer le projectile au moment de l'impact. La caméra possède une fréquence d'acquisition de 42000 images/seconde. On dispose ainsi d'une centaine d'images entre le temps de vol libre et le rebond après impact, dont une dizaine uniquement pour la période de densification de la structure, ce qui reste correct pour décrire la réponse de la SA lors de l'impact.

L'enregistrement des appareils de mesures est déclenché par le passage du projectile devant le premier laser de la barrière de vitesse.

Culots et échantillons

Les culots, figure 4.11, sont fabriqués à partir de barres en PTFE au moyen d'un tour à commande numérique. Ils sont usinés selon la géométrie présentée dans la figure 4.11a. Ils ont une masse de 1.087×10^{-1} kg.



(a) Géométrie du culot.



(b) Culot usiné.

FIGURE 4.11 – Culot en PTFE.

Les échantillons auxétiques, figure 4.12, sont fabriqués en PLA avec une imprimante 3D selon la méthode présentée dans la section 4.1. La géométrie des cellules et de la structure correspond à celle présentée dans la section 3.2 du chapitre 3. Des échantillons possédant cinq cellules dans la hauteur sont également fabriqués. Les échantillons possédant cinq cellules dans la hauteur seront appelés « petite » SA et ceux en possédant huit, « grande » SA.

La SA est collée au culot au moyen d'une colle cyanoacrylate. Un mouchetis est réalisé, à l'aide d'une bombe de peinture noire, sur l'ensemble culot-SA afin de pouvoir suivre le déplacement du projectile avant et après l'impact et de déterminer la déformation globale de la structure.



(a) Petite SA. Hauteur $D_0 = 2.747 \times 10^{-2}$ m, diamètre 3.5×10^{-2} m, masse 1.35×10^{-2} kg.



(b) Grande SA. Hauteur $D_0 = 4.284 \times 10^{-2}$ m, diamètre 3.5×10^{-2} m, masse 2.10×10^{-2} kg.

FIGURE 4.12 – Échantillons auxétiques en PLA.

4.3.2 Méthode de mesure des grandeurs physiques

Caméra rapide

Le contraste des images obtenues par caméra rapide est modifié a posteriori afin d'améliorer la visibilité du projectile et du pendule. Le mouchetis du projectile permet de suivre sa trajectoire et donc l'évolution de sa vitesse. Un code MatLab est écrit pour suivre la position de points de peinture. Les images sont sélectionnées selon l'information que l'on souhaite obtenir. Ensuite, un curseur est utilisé sur chaque image pour enregistrer la position du point de peinture qui est suivi. La vitesse du projectile avant impact est comparée à la vitesse donnée par la barrière de vitesse pour s'assurer de la bonne concordance des valeurs. La déformation globale de la structure est suivie en mesurant, au cours du choc, la distance entre le pendule et l'extrémité du culot en contact avec la SA. Le déplacement du pendule est mesuré à partir de sa position initiale. Pour cette grandeur, la vitesse du pendule étant faible, moins de 2 m.s^{-1} , le déplacement du pendule est très peu visible entre deux images successives ce qui augmente les erreurs de mesure. Les positions sont prises à intervalles régulier de 10 images afin de réduire ces erreurs.

Il est à noter que les images de la caméra fournissent un champ de déplacement que l'on peut exploiter par corrélation d'image.

Capteurs laser

Le passage du projectile devant le premier laser de la barrière de vitesse déclenche l'enregistrement des appareils et définit le temps $t = 0$ s de l'essai.

Une transformée de Fourier rapide est appliquée aux signaux bruts obtenus sur l'oscilloscope. Les fréquences hautes qui brulent les signaux sont identifiées et un filtre passe-bas est utilisé afin de les enlever. Les signaux sont ensuite reconstruits temporellement. Un exemple de filtrage est donné dans la figure 4.13. Il est appliqué aux signaux obtenus par les lasers de la barrière de vitesse. Les oscillations à la fin du signal correspondent au passage de gouttelettes de lubrifiant sortant du canon.

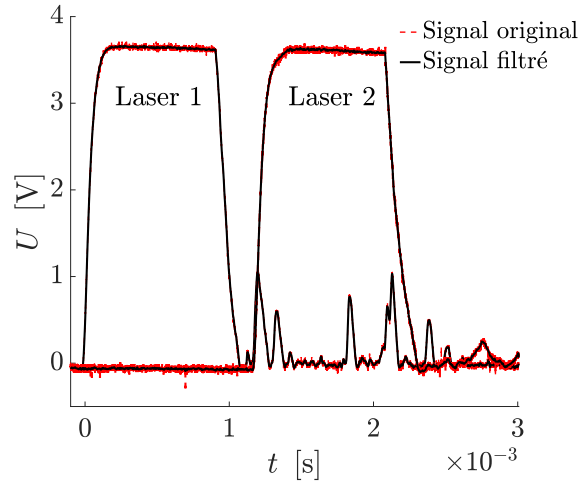


FIGURE 4.13 – Résultats du filtrage des signaux de la barrière de vitesse.

La vitesse v_0 du projectile en sortie de canon est déterminée grâce aux signaux donnés par la barrière de vitesse, figure 4.14. La distance entre les deux lasers est fixée à 1.0×10^{-1} m. En déterminant le temps de passage, Δt , du projectile devant les lasers, on en déduit la vitesse du projectile.

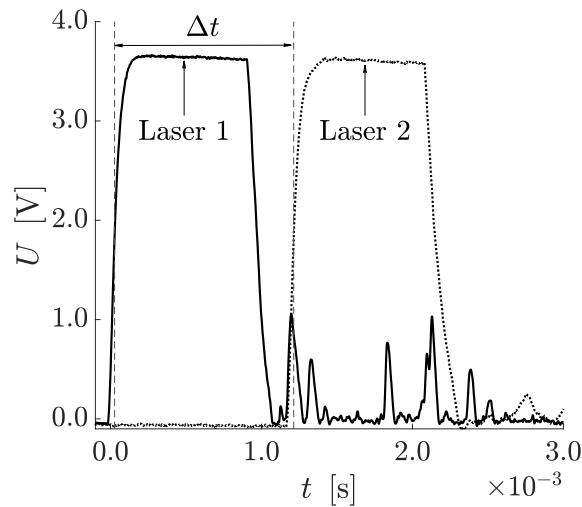


FIGURE 4.14 – Signal de la barrière de vitesse.

Les capteurs de déplacements situés à l'arrière du pendule, figure 4.10b, permettent de mesurer le déplacement du pendule jusqu'à 2.0×10^{-2} m avec un pas de temps de 2.5×10^{-5} s. Les deux capteurs de déplacements permettent d'obtenir une moyenne des déplacements mesurés sur deux points de la face arrière du pendule. Cette mesure sera redondante avec celle du déplacement du pendule obtenu par caméra rapide. C'est cette dernière qui servira de base pour l'exploitation des résultats.

4.3.3 Résultats

Influence de la pression initiale

Une série d'essais de tirs a été réalisée afin de déterminer la pression à utiliser dans le réservoir à air comprimé pour les essais avec la SA. Un culot en PTFE de $8.6 \times 10^{-2} \text{ kg}$ a été utilisé pour cette campagne d'essais. Le culot est tiré sans SA dans une « caisse à chiffon » (boîte remplie de tissus) pour qu'il puisse être récupéré facilement et réutilisé. Deux tirs ont été réalisés pour des pressions de 1 bar à 7 bar et les vitesses ont été reportées dans la figure 4.15.

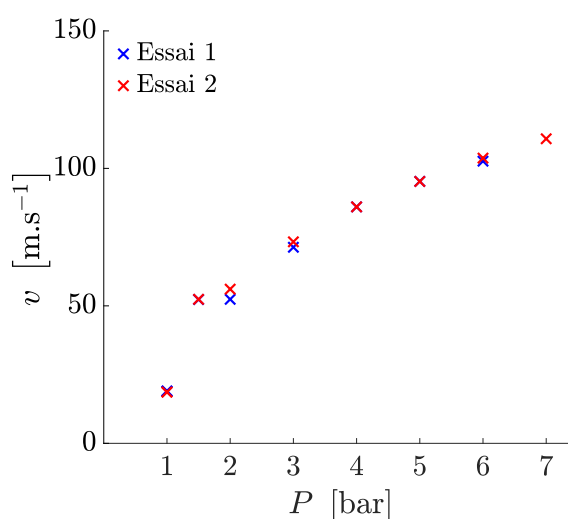


FIGURE 4.15 – Vitesse du culot en sortie de canon en fonction de la pression de tir.

Au-delà de 4 bar, on peut observer une évolution avec une légère courbure de la vitesse en fonction de la pression. De plus, il y a moins de dispersion dans les résultats au-delà de 4 bar. Une pression de 4 bar sera donc utilisée par la suite pour le réservoir à air comprimé afin de garantir une bonne répétabilité pour la mesure de la vitesse en sortie de canon.

Petite SA

Un premier essai est réalisé en collant la petite SA au culot. L'ensemble est introduit dans le canon et propulsé en utilisant une pression de 4 bar.

Le passage du projectile devant le premier laser de la barrière de vitesse déclenche l'enregistrement des appareils et définit le temps $t = 0 \text{ s}$. La vitesse v_0 en sortie de canon du projectile est déterminée comme indiqué dans la section 4.3.2. La vitesse mesurée au moyen de la barrière de vitesse est de $v_0 = 84.76 \text{ m.s}^{-1}$.

La cinématique de l'impact de la petite SA est représentée dans la figure 4.16 entre le début du choc, figure 4.16a, et la fin du contact, figure 4.16f. Entre les figures 4.16a et 4.16c, la SA est écrasée progressivement. Sur cette période, le pendule ne

bouge quasiment pas. Une fois que la SA est densifiée, le culot possède encore de l'énergie pour écraser le PLA. C'est à cet instant, figure 4.16c, que le pendule va se mettre en mouvement. Le culot en PTFE va lui aussi se déformer et absorber de l'énergie. Une fois que toute l'énergie cinétique initiale du culot a été dissipée, il rebondit, figure 4.16f et se déplace dans le sens opposé. Le pendule continue de se déplacer.

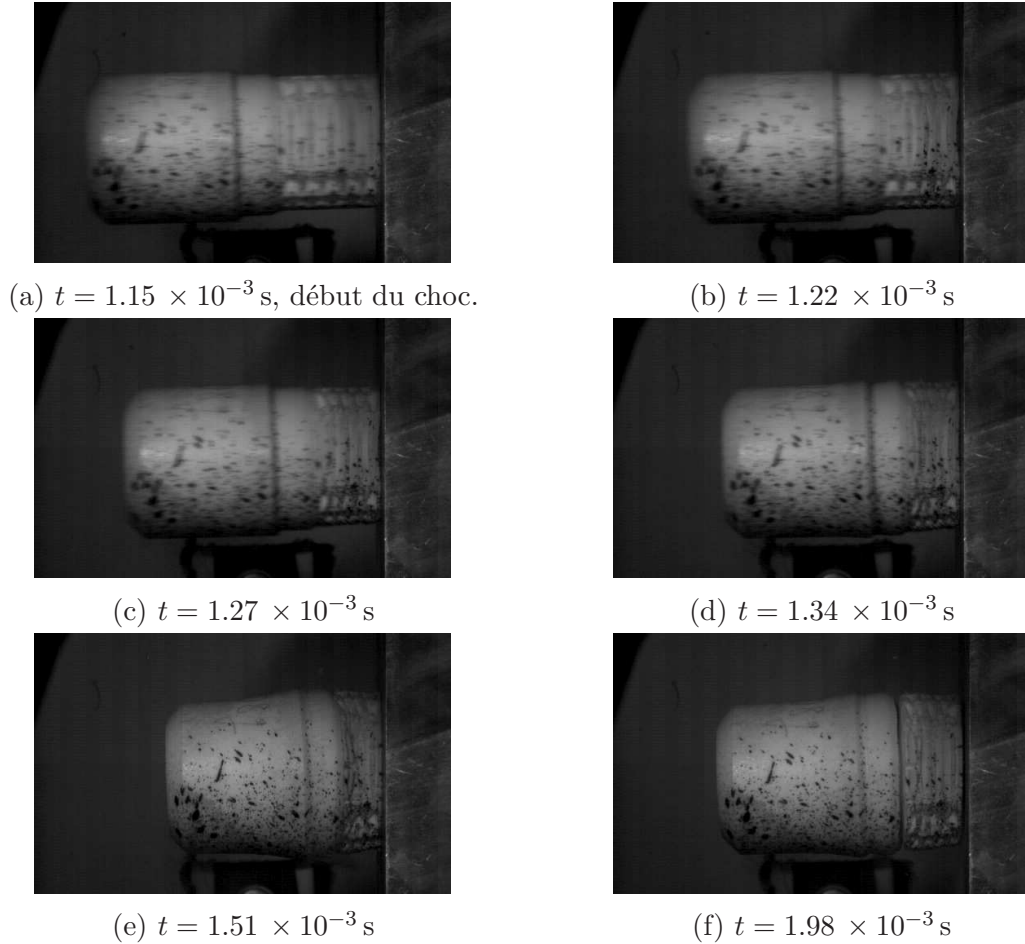


FIGURE 4.16 – Cinématique de l'impact de la petite SA sur le pendule balistique.

La vitesse v_0 mesurée avec la caméra rapide est de 84.35 m.s^{-1} . Il y a un écart de 0.48 % par rapport à celle donnée par la barrière de vitesse. Cependant, cet écart peut s'expliquer par un ralentissement du projectile dû aux frottements de l'air et par les incertitudes sur la détermination des points sélectionnés sur les images pour suivre le déplacement du culot.

La figure 4.17 illustre la variation de longueur et la déformation de la petite SA. La déformation à densification théorique $\varepsilon_{DS} = 0.2315$ est atteinte un peu avant la figure 4.16c. Il est bien visible que la SA, même après la densification, continue à être comprimée jusqu'à un peu plus de 50 %. On peut donc prévoir que l'énergie absorbée par la SA sera également due à la déformation du PLA lorsque la SA sera densifiée.

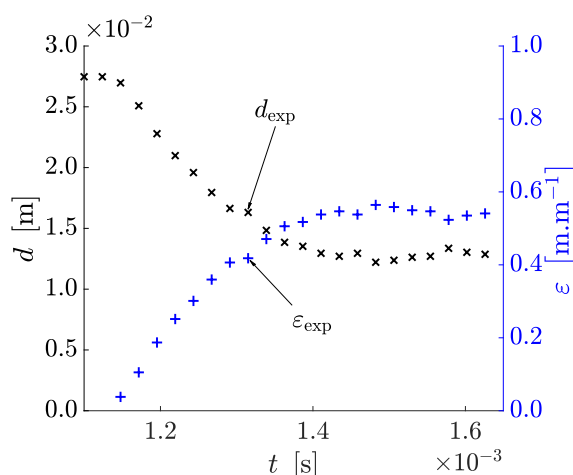


FIGURE 4.17 – Évolution de la longueur et de la déformation de la petite SA en fonction du temps.

Le déplacement du pendule est déterminé en utilisant les images obtenues par la caméra rapide. Les résultats sont présentés dans la figure 4.18.

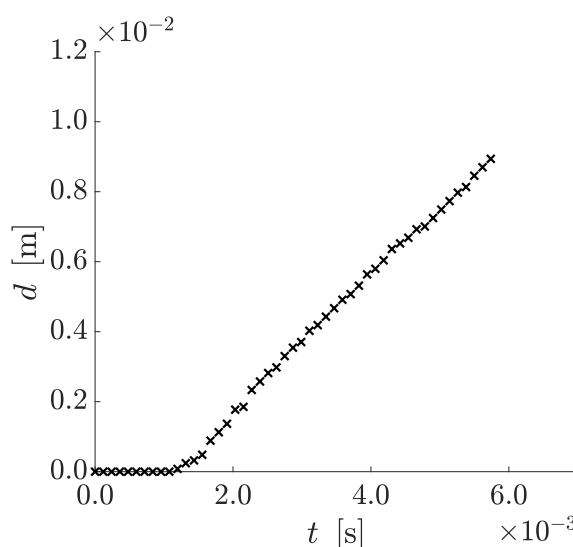


FIGURE 4.18 – Déplacement du pendule enregistré par caméra rapide.

Une régression linéaire est appliquée aux résultats entre 1.67×10^{-3} s et 5.74×10^{-3} s. La vitesse du pendule suite au choc est donnée par la pente de la courbe de déplacement sur cette période. Cette vitesse est de 1.93 m.s^{-1} .

La caméra rapide permet également de mesurer la vitesse du culot en PTFE suite au rebond. Il faut prendre soin de réaliser cette mesure une fois que le culot ne se déforme plus et qu'il s'est décollé de la SA afin que cette mesure représente la vitesse de tous les points du culot. En effet, tant que le culot se déforme, cette hypothèse n'est pas valide. De plus, le rebond du culot ne suit pas le même axe que l'impact, il tombe rapidement au sol. La mesure ne peut être faite que sur un nombre restreint d'images. Une vitesse de 14.79 m.s^{-1} a été obtenue.

Un bilan d'énergie, table 4.6 permet d'estimer la part absorbée par la déformation de la SA et du culot. L'énergie cinétique finale de la SA est négligée étant donné sa faible masse et sa faible vitesse au rebond. Les vitesses utilisées pour les calculs d'énergie sont celles déterminées par la caméra rapide puisque la vitesse de rebond du culot ne peut être obtenue que par ce moyen de mesure.

Composant	Énergie cinétique initiale (J)	Énergie cinétique finale (J)
Culot	386.70	11.89
SA	48.03	0
Pendule	0	12.60
Énergie absorbée	410.24 (94.4 % de $EC_{tot, ini}$)	

TABLE 4.6 – Bilan des énergies cinétiques.

Le culot et la SA ont donc absorbé 94.4 % de l'énergie cinétique initiale totale du système. La métrologie utilisée ne nous permet pas de déterminer la part absorbée par la SA et celle absorbée par le culot ni même celle absorbée par le comportement auxétique de la structure.

Grande SA

Le second essai est réalisé en utilisant la grande SA de la même manière que précédemment. L'ensemble est introduit dans le canon et propulsé en utilisant une pression de 4 bar.

Le temps $t = 0$ s est à nouveau défini par le passage du projectile devant le premier laser de la barrière de vitesse. La vitesse déterminée par la barrière de vitesse est de $v_0 = 83.85 \text{ m.s}^{-1}$.

La cinématique de l'impact de la grande SA est représentée dans la figure 4.19 entre le début du choc, figure 4.19a, et la fin du contact, figure 4.19f. Entre les figures 4.19a et 4.19c, la SA est écrasée progressivement. Sur cette période, le pendule ne bouge quasiment pas. La propagation du front de discontinuité de déformation est particulièrement visible dans la figure 4.19b car les cellules sont orientées vers le champ de vision de la caméra. Au moment de la densification, figure 4.19c, le culot possède encore suffisamment d'énergie pour se déformer et écraser le PLA. C'est aussi à ce moment que le pendule se met en mouvement. Le culot rebondit et se déplace dans le sens opposé à son mouvement initial lorsqu'il n'a plus assez d'énergie, figure 4.19f. Le pendule, lui, continue de se déplacer.

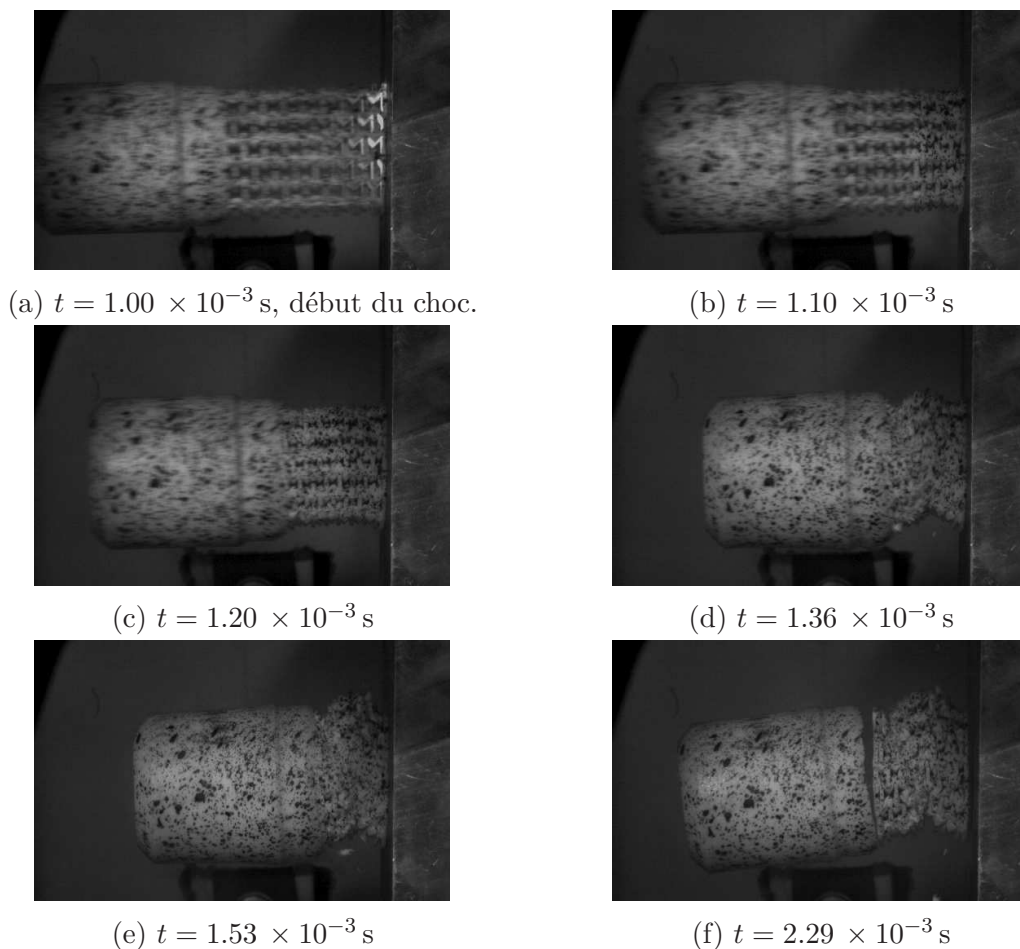


FIGURE 4.19 – Cinématique de l'impact de la grande SA sur le pendule balistique.

La vitesse v_0 mesurée avec la caméra rapide est de $83.55, \text{m.s}^{-1}$. Il y a un écart de 0.36 % par rapport à celle donnée par la barrière de vitesse.

La figure 4.20 illustre la variation de longueur et la déformation de la grande SA. La déformation à densification théorique $\varepsilon_{DS} = 0.2315$ est atteinte entre les figures 4.19b et 4.19c. Il est bien visible que la SA continue à être comprimée après la densification jusqu'à un peu plus de 55 %. Tout comme pour la petite SA, une part de l'énergie absorbée par la SA sera également due à la déformation du PLA lorsque la SA sera densifiée.

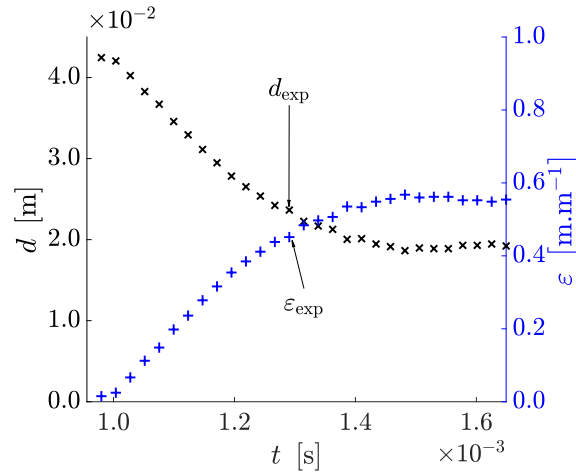


FIGURE 4.20 – Évolution de la longueur et de la déformation de la grand SA en fonction du temps.

Le déplacement du pendule est illustré dans la figure 4.21.

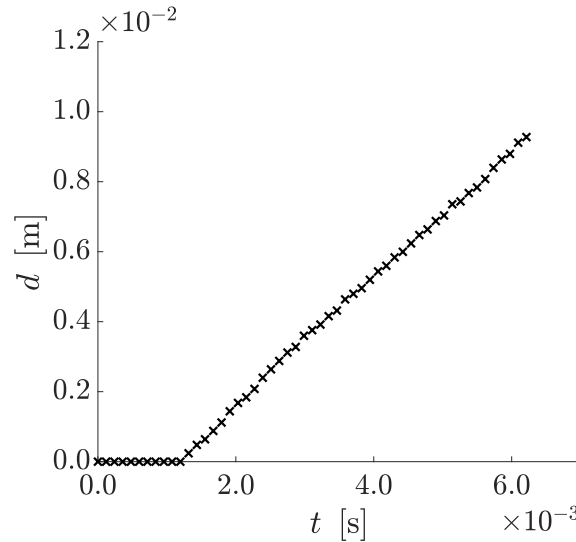


FIGURE 4.21 – Déplacement du pendule enregistré par caméra rapide.

La même méthode que pour la petite SA est employée pour déterminer la vitesse du pendule. La régression linéaire est appliquée entre 1.43×10^{-3} s et 6.09×10^{-3} s. La vitesse du pendule est de 1.82 m.s^{-1} .

De la même manière que pour la petite SA, il est possible de mesurer la vitesse de rebond du culot à l'aide de la caméra rapide. Le culot tombant rapidement au sol, la plage de mesure est très réduite. On peut tout de même estimer sa vitesse à environ 11.64 m.s^{-1} .

Un bilan d'énergie, table 4.7 nous permet, comme précédemment, d'estimer la part d'énergie absorbée par la déformation de la SA et du culot. L'énergie cinétique finale de la SA est négligée ici aussi. Les vitesses utilisées pour les calculs sont celles déterminées par la caméra rapide.

Composant	Énergie cinétique initiale (J)	Énergie cinétique finale (J)
Culot	379.40	7.36
SA	73.30	0
Pendule	0	11.20
Énergie absorbée	434.14 (95.9 % de $EC_{tot,ini}$)	

TABLE 4.7 – Bilan des énergies cinétiques.

Le culot et la SA ont donc absorbé 95.9 % de l'énergie cinétique initiale totale du système. Les mesures ne nous permettent pas de déterminer la part absorbée par la SA et celle absorbée par le culot.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord détaillé la méthode de fabrication additive retenue pour la mise au point des éprouvettes. Les propriétés du fabricant concernant le PLA choisi pour fabriquer les échantillons sont également présentées. La fabrication additive est une méthode rapide, peu coûteuse et utile dans le cas d'une étude sur des structures cellulaires.

Des essais de caractérisation en traction et en compression quasi-statiques ont été menés afin de déterminer les propriétés du matériau imprimé. Cela a mis en avant l'influence de la méthode de fabrication sur les propriétés matériaux par rapport à celles annoncées par le fabricant. Ces essais ont également permis de se rendre compte de la dispersion dans les résultats qu'il peut y avoir en utilisant des matières plastiques avec un procédé introduisant des défaut non-contrôlables. C'est toutefois une méthode de fabrication rapide, peu coûteuse et utile dans le cas d'une étude sur des structures cellulaires.

Deux études expérimentales supplémentaires ont été réalisées sur une structure auxétique fabriquée en PLA par impression 3D.

La première étude porte sur le comportement quasi-statique de la SA. Les échantillons testés montrent une bonne répétabilité concernant leurs comportements élastiques et en début de plateau de contrainte. Cependant, des disparités surviennent plus tard dans le chargement. Cela peut être expliqué par les défauts créés lors de la fabrication des échantillons. La valeur théorique de la déformation à densification est toutefois respectée. La géométrie choisie ne répondant pas aux hypothèses de calculs de la contrainte de plateau statique, aucune conclusion ne peut être faite sur la concordance avec la valeur du plateau expérimentale.

La seconde étude est une campagne de tirs d'un ensemble culot-SA de tailles différentes sur un pendule balistique. Les différents systèmes d'acquisitions permettent le calcul des vitesses du projectile en sortie de canon, mais aussi les vitesses de déplacement du pendule ainsi que la déformation de la SA. Les images de la cinématique du choc permettent une observation de la propagation de l'onde de déformation dans la SA. L'étude de la déformation de la SA montre que sa déformation va au-delà de la déformation à densification. La variation de l'énergie cinétique avant et après l'impact montre qu'une grande part de l'énergie est absorbée par la déformation de la SA et du culot. Il n'est cependant pas encore possible, à ce stade, de déterminer la répartition de l'énergie absorbée entre ces deux composants avec les seuls instruments de mesures à disposition.

Le chapitre 5 qui suit, nous montrerons comment la répartition des énergies pourra être établie en couplant la simulation EF et les résultats expérimentaux.

Chapitre 5

Résultats et discussion

Résumé : Ce chapitre présente la comparaison entre les résultats des simulations numériques de l'impact sur pendule balistique du chapitre 3 et des résultats expérimentaux du chapitre 4. La validation de la fiabilité du modèle numérique permettra d'utiliser les simulations en compléments des essais expérimentaux pour estimer l'énergie absorbée par la structure auxétique lors de l'impact sur le pendule balistique.

5.1 Évaluation de la fiabilité du modèle numérique

Le modèle numérique utilisé pour simuler l'essai dynamique, présenté au chapitre 4, est celui de la section 3.2 du chapitre 3. Ce modèle correspond à l'essai de la grande SA. Un modèle numérique utilisant les mêmes propriétés que celle présentées dans la section 3.2 du chapitre 3 est réalisé pour simuler l'impact de la petite SA. La fiabilité du modèle numérique est évaluée grâce aux mesures de la vitesse finale du culot, de la vitesse finale du pendule, de la longueur d et de la déformation ε de la SA.

5.1.1 Petite SA

Un modèle numérique est réalisé en remplaçant la grande SA du modèle de la section 3.2 du chapitre 3 par la petite SA. La vitesse initiale du projectile simulé est de 84.35 m.s^{-1} .

La première comparaison qu'il est possible de faire concerne les vitesses finales (après rebond) du culot et du pendule. Numériquement, le culot possède une vitesse finale de 10.69 m.s^{-1} contre 14.79 m.s^{-1} en expérimental (27.7 % d'écart avec

l'expérimental). Le pendule possède une vitesse numérique finale de 1.70 m.s^{-1} alors qu'elle est de 1.93 m.s^{-1} expérimentalement (12 % d'écart avec l'expérimental).

La figure 5.1 montre l'évolution de la longueur d de la petite SA et de sa déformation ε en fonction du temps. Afin de pouvoir comparer les résultats expérimentaux et numériques, il est nécessaire de tracer ces deux résultats sur la même base de temps. Le temps expérimental est pris comme référence. Le temps $t = 0 \text{ s}$ est l'instant de déclenchement de la barrière de vitesse, comme défini au chapitre 4. La simulation numérique ne reproduit pas la totalité de l'essai expérimental. Dans le modèle EF, le culot et la SA se trouvent à quelques millimètres du pendule puisqu'il n'est pas nécessaire de simuler le vol complet du projectile depuis la sortie du canon. Le temps zéro numérique ne correspond donc pas au temps zéro de l'essai. Afin de recaler temporellement expérience et simulation numérique, le temps numérique où la SA entre en contact avec le pendule (premier temps où la force de contact est non-nulle) est relevé. Le temps présumé du contact expérimental entre la SA et le pendule est déterminé comme suit. La métrologie permet de détecter le contact à une image près, ce qui fait une incertitude de $\pm 2.38 \times 10^{-5} \text{ s}$. Les valeurs de temps de contact expérimental et numérique sont utilisées pour décaler temporellement les courbes numériques afin que les contacts soient synchronisés.

Les résultats numériques sont tracés en trait continu, sur la figure 5.1, jusqu'à la valeur théorique de ε_{DS} (le trait vertical correspond à t_{DS}) puis en traits discontinus. On observe dans un premier temps que la déformation numérique de la petite SA suit correctement celle donnée par la caméra rapide jusqu'à $t = 1.3 \times 10^{-3} \text{ s}$. Au-delà, les résultats numériques s'écartent des résultats expérimentaux. En effet, la SA numérique semble plus se déformer que la SA expérimentale. Lors de la déformation pré-densification de la SA, ce sont les paramètres structurels qui dirigent la réponse de la SA. Comme nous l'avons vu avec les équations analytiques du chapitre 2, bien qu'elles ne soient pas applicables à la géométrie choisie, les paramètres définissant la SA ($L, H, t_{thick}, \theta \dots$) ont un effet déterminant sur la réponse structurale. Le seul paramètre du matériau intervenant dans la résistance de la SA est la limite élastique du PLA dont la valeur numérique correspond à celle obtenue expérimentalement. Ceci explique la bonne correspondance entre expérience et simulation jusqu'à la densification. Au-delà, la structure étant entièrement densifiée, c'est le comportement du PLA (comportement du matériau monolithique) qui s'impose. À ce stade, le manque de données sur ce matériau à différentes vitesses de déformation, mais aussi l'influence que peut avoir le procédé de fabrication des échantillons sont très probablement à l'origine de déformation exagérée (par rapport à l'essai) de la SA après densification.

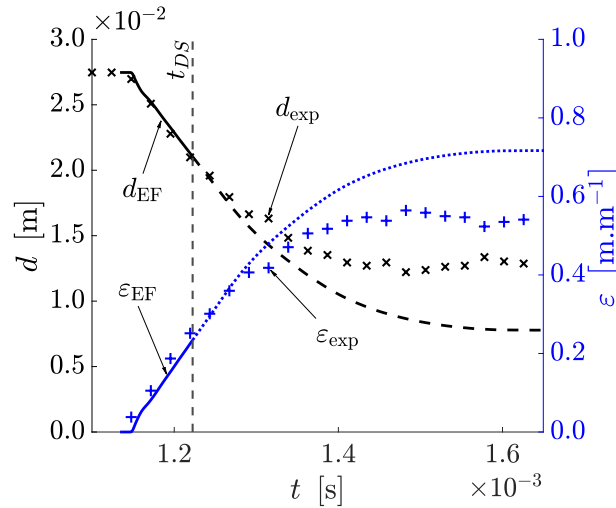


FIGURE 5.1 – Évolution de la longueur d et de la déformation ε de la petite SA en fonction du temps d'après les résultats expérimentaux et numériques.

La figure 5.2 représente le déplacement du pendule en fonction du temps. Un décalage temporel est présent entre les résultats numériques et expérimentaux. Cela peut être dû à l'imprécision sur le début du contact expérimental se produisant entre deux images. Cependant, la pente des deux courbes donnant la vitesse du pendule conduit à un écart de 12 % entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux.

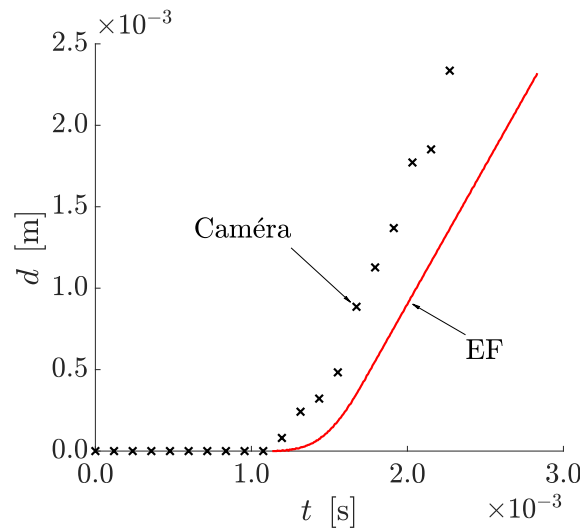


FIGURE 5.2 – Déplacement du pendule expérimental et numérique.

5.1.2 Grande SA

Le projectile du modèle numérique de la grande SA (section 3.2, chapitre 3) est lancé avec une vitesse initiale de 83.55 m.s^{-1} .

Tout comme pour la petite SA, nous comparons les vitesses finales du culot et du pendule. Le culot rebondit avec une vitesse numérique de 11.14 m.s^{-1} contre une

vitesse expérimentale de 11.64 m.s^{-1} . Il y a donc un écart de 4.3% par rapport à l'expérimental. Le pendule se déplace à une vitesse de 1.79 m.s^{-1} numériquement contre 1.82 m.s^{-1} expérimentalement. Cela donne un écart de 1.6% .

Les courbes de longueur d et de déformation ε de la grande SA sont ensuite tracées en fonction du temps. Les résultats sont présentés dans la figure 5.3 et un décalage temporel des résultats numériques ont été effectués de la même manière que dans la sous-section 5.1.1. Tout comme pour la petite SA, il y a une bonne concordance des résultats jusqu'à la densification de la SA (trait vertical). Au-delà, la solution numérique s'écarte de l'expérimental pour les mêmes raisons que celles exposées à la sous-section 5.1.1 précédente.

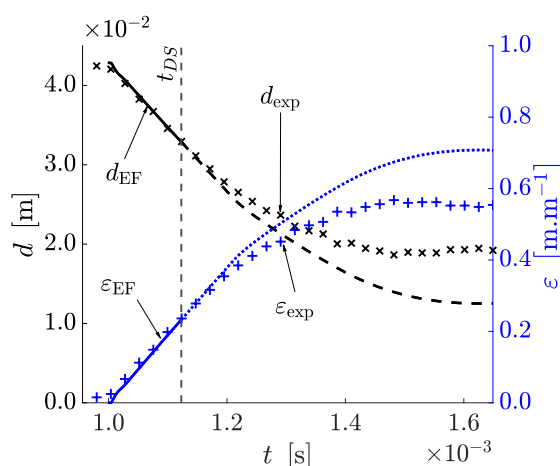


FIGURE 5.3 – Évolution de la longueur d et de la déformation ε de la grand SA en fonction du temps d'après les résultats expérimentaux et numériques.

La figure 5.4 représente le déplacement du pendule en fonction du temps. Un décalage temporel est ici aussi observable. Cependant, les tendances des deux courbes sont semblables. En effet, l'écart entre les vitesses numériques et expérimentales du pendule ne sont que de 1.6% .

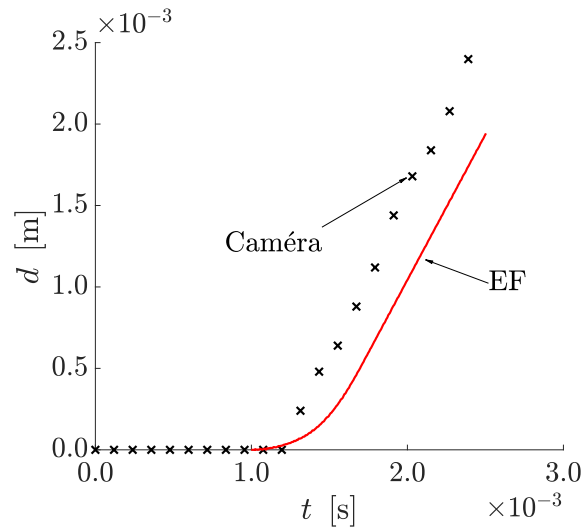


FIGURE 5.4 – Déplacement du pendule expérimental et numérique.

Finalement, bien que l'écart estimé pour la vitesse du pendule semble important (les vitesses étant petites, l'écart peut rapidement varier), une part de l'erreur peut provenir de la manière dont sont exploitées les images de la caméra rapide. En effet, un curseur est utilisé pour enregistrer le changement de position du mouchetis fait sur le projectile. Sur un même essai, les résultats peuvent sensiblement varier en fonction du point choisi sur le mouchetis ou de la précision du curseur. Il en va de même pour la vitesse de rebond du culot qui ne peut être déterminé qu'avec quelques images.

La très bonne superposition des courbes expérimentales et numériques des résultats de longueurs d et de déformation ε de la SA (figures 5.1 et 5.3) jusqu'à la densification de la SA (trait vertical) montre que les résultats numériques sont fiables jusqu'à cet instant. Les figures 5.5a et 5.5b montrent, en effet, que pour un temps inférieur à t_{DS} , l'erreur entre d numérique et expérimental est légèrement inférieure à 4 % pour la petite SA et inférieure à 2 % pour la grande SA. Une fois la structure densifiée, on peut observer que les résultats numériques s'écartent des résultats de la caméra rapide (l'erreur dépasse 10 %). Cette différence est certainement due au comportement du PLA pris en compte dans la simulation. En effet, le PLA semble être sensible aux vitesses de déformation [54]. Or, le comportement du PLA, implémenté dans le modèle numérique, est basé sur les essais quasi-statiques menés au chapitre 4 et un comportement élastique parfaitement plastique. Lorsque le comportement du PLA prévaut sur la réponse de la SA, il est sollicité à une vitesse plus élevée ce qui peut entraîner une augmentation de la résistance du matériau. Cela expliquerait le fait que l'échantillon expérimental est moins déformé à l'état final que la SA numérique, figures 5.1 et 5.3. Le comportement du PLA devra donc être amélioré afin de prendre en compte la sensibilité à la vitesse de déformation.

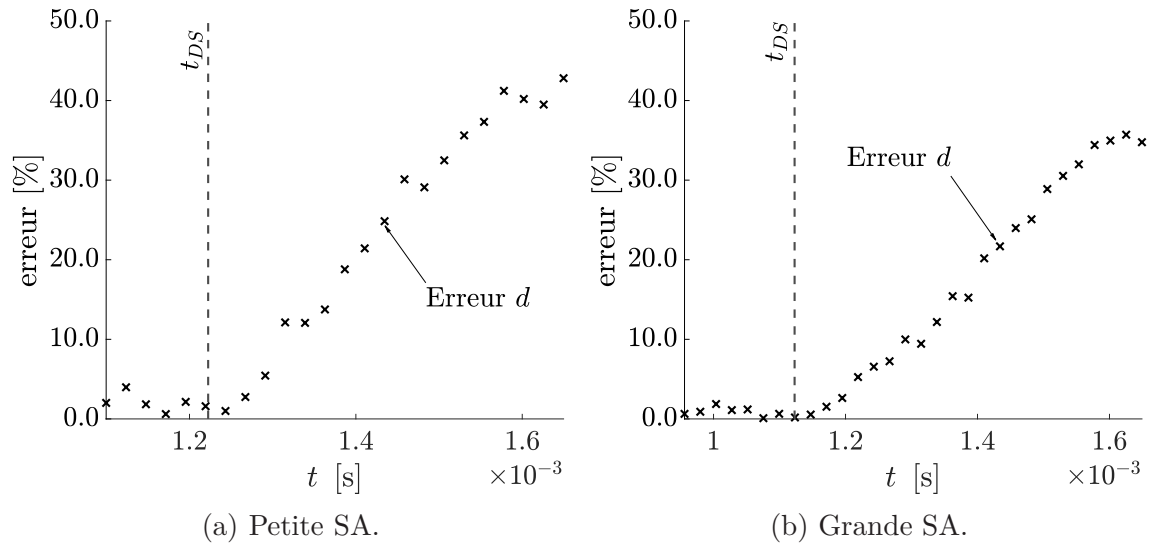


FIGURE 5.5 – Erreur (en pourcentage) calculée pour la longueur d de la SA numérique par rapport à l'expérience. Les valeurs de références sont celles des figures 5.1 et 5.3. Le temps à densification, t_{DS} , est indiqué par le trait vertical.

Concernant la vitesse de rebond du culot, l'écart entre expérience et simulation numérique est plus grand pour la petite SA (27.7 %) que pour la grande SA (4.3 %). Comme nous avons pu le voir dans la figure 2.14, le nombre de cellules dans la SA influence l'absorption d'énergie. Ainsi, lors de la densification de la petite SA, le culot possède une vitesse supérieure à celle observable dans le cas de la grande SA. Le culot sera certainement soumis à une vitesse de déformation plus grande. Le comportement numérique du PTFE devra lui aussi être amélioré dans le but de prendre en compte la sensibilité à la vitesse de déformation [55].

Enfin, la contrainte au contact culot-SA, supposé être en contrainte quasi-statique jusqu'à la densification de la SA, est de l'ordre de 2.6×10^6 Pa. Cette valeur est cohérente avec la contrainte moyenne expérimentale du plateau quasi-statique déterminée au chapitre 4 qui est de 2.9284×10^6 Pa.

Les résultats expérimentaux permettent de valider avec une précision raisonnable (moins de 5 % d'erreur jusqu'à la densification de la SA) la simulation numérique de l'impact sur pendule balistique compte tenu de la méthode d'extraction des résultats de la caméra rapide. Comme cela a pu être observé dans les figures 5.1, 5.3, 5.5a et 5.5b, la simulation est fiable jusqu'à la densification de la SA. Cela est toutefois suffisant pour évaluer la part d'énergie absorbée par la SA puisqu'une fois densifiée, elle ne joue plus son rôle de protection.

Les essais numériques vont à présent servir à évaluer les énergies de déformation du culot et de la SA qui ne sont pas accessibles avec la métrologie employée.

5.2 Évaluation de l'absorption d'énergie

L'exploitation des résultats obtenus grâce à la caméra rapide, au chapitre 4, a permis d'effectuer un bilan d'énergie pour déterminer la part absorbée par la déformation du projectile (culot et SA). Cependant, ces résultats ne permettent pas de faire la distinction entre l'énergie absorbée par le culot et celle absorbée par la SA. Les modèles de simulations numériques vont donc nous permettre d'en avoir une estimation avec la limite de précision inhérente au modèle.

Le bilan d'énergie de la simulation de la petite SA est présenté dans la figure 5.6. Les valeurs initiales et finales des différentes énergies cinétiques (expérimentales et numériques) sont résumées dans la table 5.1.

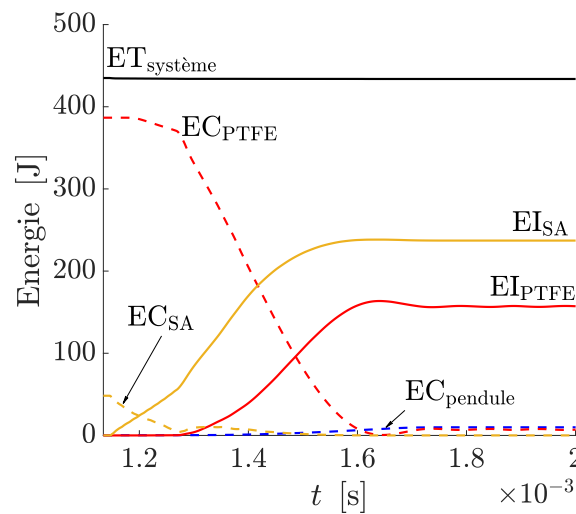


FIGURE 5.6 – Bilan énergétique du modèle numérique de la petite SA. EC : énergie cinétique, EI : énergie interne.

Énergie		Expérience	Simulation EF	Écart(%)
EC culot (J)	Initiale	386.70	386.70	-
	Finale	11.89	7.0	41.13
EC SA (J)	Initiale	48.03	48.03	-
	Finale	0	0.02	-
EC pendule (J)	Initiale	0	0	-
	Finale	12.60	9.87	21.67

TABLE 5.1 – Comparaison des énergies cinétiques (EC) du culot, de la petite SA et du pendule entre expérience et simulation numérique.

Le bilan d'énergie de la simulation de la grande SA est présenté dans la figure 5.7. Les valeurs initiales et finales des différentes énergies cinétiques (expérimentales et numériques) sont résumées dans la table 5.2.

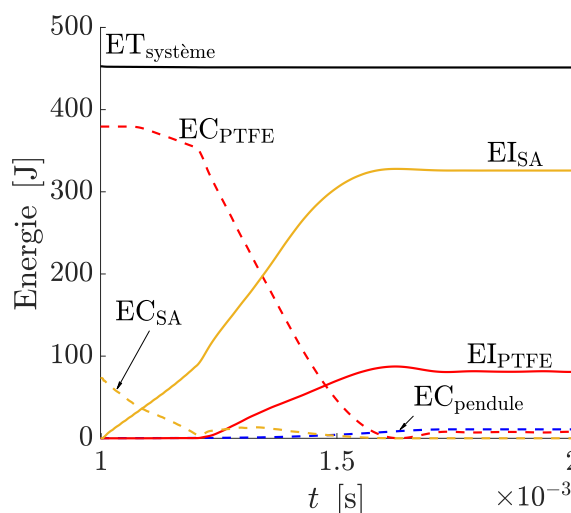


FIGURE 5.7 – Bilan énergétique du modèle numérique de la grande SA.

Énergie		Expérience	Simulation EF	Écart(%)
EC culot (J)	Initiale	379.40	379.40	-
	Finale	7.36	7.64	3.80
EC SA (J)	Initiale	73.30	73.30	-
	Finale	0	0.03	-
EC pendule (J)	Initiale	0	0	-
	Finale	11.20	10.87	2.95

TABLE 5.2 – Comparaison des énergies cinétiques du culot, de la grande SA et du pendule entre expérience et simulation numérique.

L'énergie totale du système, noté $ET_{\text{système}}$ dans les figures 5.6 et 5.7, est la somme des énergies internes et cinétiques du culot, de la SA et du pendule de l'énergie dissipée par les frottements.

Bien qu'entre l'expérience et la simulation de la petite SA, les écarts soient assez importants en ce qui concerne les énergies finales (table 5.1), on peut observer une évolution des énergies internes (figure 5.6) similaire à celle obtenues pour la grande SA (figure 5.7) qui est plus en adéquation avec l'expérience (table 5.2). En effet, une fois le contact entre la SA et le pendule établi, la SA en se déformant, va convertir son énergie cinétique en énergie interne. Lorsque l'énergie interne de la SA devient plus grande que son énergie cinétique (croisement des courbes jaunes en traits continus et discontinus, figure 5.6 et 5.7), le culot va commencer à ralentir. Cette période est celle durant laquelle le front de discontinuité de l'onde de déformation se propage depuis la face de la SA en contact avec le pendule jusqu'à celle collée au culot. Lorsque la SA est densifiée (changement de pente de l'énergie interne vers 1.27×10^{-3} s dans la figure 5.6 et vers 1.21×10^{-3} s dans la figure 5.6), l'énergie interne de

la SA va fortement augmenter. Une fois densifiée, la SA répond à la sollicitation comme un matériau monolithique. L'énergie cinétique du culot va alors diminuer plus rapidement puisqu'il est soumis à une contrainte plus élevée. Il va alors lui aussi se déformer faisant augmenter son énergie interne. C'est également au moment de la densification que le pendule va se mettre en mouvement de manière significative. Une fois que l'énergie initiale du système a été absorbée, le culot rebondit et se déplace dans le sens opposé à son déplacement initial.

Au regard de la précision que l'on peut atteindre avec la simulation numérique par rapport aux résultats expérimentaux, le modèle numérique reproduit avec une précision raisonnable l'essai expérimental jusqu'à la densification de la SA. On peut dire que le modèle numérique du pendule balistique est un bon moyen d'évaluer l'énergie absorbée par la SA pendant la phase où son comportement auxétique est prédominant. L'énergie absorbée calculée au chapitre 4 pour la grande SA était de 434.14 J. Celle calculée d'après les résultats de simulation est de 434.16 J. On peut donc estimer, à l'aide de la simulation EF, que la SA a absorbé 89.40 J jusqu'à sa densification, soit 19.75 % de l'énergie totale initiale. Le reste de l'énergie est répartie entre la déformation du PLA et celle du culot. On peut supposer que les frottements représentent 5.61 % de l'énergie totale initiale, que le culot a absorbé 17.87 % de l'énergie initiale et le PLA 52.24 % entre la densification de la SA et la fin de l'essai. Cependant, cette répartition ne peut pas être confirmée vu le manque d'informations sur le comportement dynamique des matériaux considérés (PLA et PTFE). Dans le cas de la petite SA, on peut estimer à environ 12.94 % l'énergie absorbée par l'auxétique jusqu'à sa densification.

Il est logique d'observer une diminution de la part absorbée par la petite SA, car comme nous l'avons constaté au chapitre 2, le nombre de cellules n contribuant à l'absorption d'énergie joue un rôle majeur à énergie initiale égale (les énergies totales initiales de la grande et de la petite SA sont proches).

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'efficacité du modèle numérique pour répliquer l'essai du pendule balistique jusqu'à la densification de la SA. La bonne correspondance entre la déformation expérimentale et numérique jusqu'à cet état nous permet d'évaluer la part d'énergie absorbée expérimentalement par la SA au cours de sa déformation en associant les mesures expérimentales avec les simulations numériques.

Cependant, au stade actuel de l'étude, la formulation du comportement de PLA et du PTFE reste à améliorer dans les simulations pour pouvoir estimer avec précision la répartition des énergies internes entre le culot et la SA densifiée.

L'exploitation du couplage expérimental-numérique reste toutefois intéressant. En effet, une fois que la SA est densifiée, elle perd sa capacité de d'absorption (le matériau densifié absorbe toujours de l'énergie mais la structure ne joue plus son rôle de protection). Dans le cadre d'essais et de simulations rapides pour étudier différentes SA et évaluer leur capacité d'absorption d'énergie, le modèle proposé reste suffisamment performant. Il faut noter que, pour que le couplage soit efficace, la simulation doit être modifiée et adaptée à chaque essai. Les vitesses initiales et la géométrie de la SA doivent être modifiées en conséquence en fonction des configurations expérimentales.

Nous avons pu également constater que certaines recommandations faites au chapitre 2 restent dans l'absolu vérifiées bien que les équations analytiques ne soient pas applicables à la SA considérée.

Chapitre 6

Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse concernent l'étude de la réponse de structures auxétiques en dynamique rapide par une approche analytique, numérique et expérimentale. L'enjeu est d'établir les paramètres influant la réponse de la structure choisie et de mettre en place un moyen expérimental pour évaluer sa capacité d'absorption d'énergie mécanique.

L'étude bibliographique a mis en avant l'intérêt d'utiliser les structures auxétiques dans les problématiques d'absorption d'énergie.

La capacité de ces structures à absorber de l'énergie mécanique est liée à leur courbe de contrainte-déformation caractérisée par une déformation plastique à contrainte constante appelée contrainte plateau et par une limite de densification. Les travaux disponibles sur les matériaux structurés ont montré que leur réponse à une sollicitation dynamique se caractérise par la propagation d'une onde de choc. L'établissement de la contrainte dynamique à laquelle est alors soumise la structure est basée sur l'utilisation d'un modèle rigide, parfaitement plastique avec densification (*R-P-P-L*) pour idéaliser le matériau cellulaire et sur les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donc proposé, sur la base de ces hypothèses, de formuler analytiquement la contrainte dynamique pour une structure auxétique ré-entrante soumise à un impact. La structure choisie pour ces travaux de thèse est, en premier lieu, détaillée. Les différents paramètres géométriques la décrivant sont présentés et l'expression de la déformation de la structure à densification est explicitée. Sur la base de travaux menés sur les structures Nida, une équation analytique est proposée. L'utilisation du modèle *R-P-P-L* ainsi que les conditions de Rankine-Hugoniot ont permis d'établir une équation de la contrainte dynamique spécifique à la structure ré-entrante dépendant de la vitesse de sollicitation. L'application de la conservation de l'énergie au cours du temps du système étudié (projectile-structure) a permis d'obtenir analytiquement la vitesse en fonction du temps et donc la contrainte dynamique en fonction du temps. Des grandeurs

physiques ont pu être déduites de ces équations. Tout d'abord, le temps d'arrêt du projectile et le temps de densification de la SA ont pu être déduits ainsi que la valeur de la déformation de la structure pour ces temps. Cela a permis de déterminer la valeur limite de vitesse que peut avoir un projectile de masse donnée et qui peut être arrêté par une SA donnée. Une étude analytique de l'influence des paramètres de la SA sur la valeur de la déformation à l'arrêt ou au rebond du projectile a été réalisée. Elle a montré que le nombre de cellules dans le sens de la sollicitation ainsi que le rapport entre l'épaisseur t_{thick} de la paroi d'une cellule et la longueur des parois obliques L ont une importance non-négligeable dans la valeur de la déformation à l'arrêt. Plusieurs cas d'études ont été considérés pour montrer l'intérêt de l'emploi de ces équations analytiques dans les phases de préconception de systèmes de protection.

Dans le troisième chapitre, nous avons mis en place une simulation numérique par éléments finis afin de valider le modèle analytique. Pour ce faire, l'impact d'une plaque sur une structure auxétique a été simulé, d'abord à vitesse constante puis à vitesse initiale d'impact, pour des valeurs allant de 0.5 m.s^{-1} à 200 m.s^{-1} . L'étude à vitesse constante a montré une bonne adéquation entre les modèles analytiques et numériques. Les simulations à vitesse initiale ont mis en avant les limites du modèle analytique. La cohérence entre les deux modèles est correcte tant que les vitesses d'impact sont suffisamment grandes (plus de 60 m.s^{-1} pour le modèle numérique considéré). Lorsque la vitesse du projectile diminue, le modèle numérique a tendance à surestimer les valeurs de contrainte, de vitesse et le temps d'arrêt ou de densification. Ce qui reste, dans le cas de conception de protection, un avantage puisque le modèle analytique décrit alors une situation défavorable par rapport à la simulation.

Un second modèle numérique a été mis en place dans ce chapitre afin de simuler l'essai dynamique du quatrième chapitre, à savoir, l'impact d'un projectile auxétique-culot sur un pendule balistique en aluminium. Les caractéristiques du modèle sont basées sur des informations disponibles dans la littérature, fournies par des fabricants ou issues d'essais expérimentaux. Le modèle de pendule balistique doit permettre d'évaluer l'absorption d'énergie en fournissant les valeurs des énergies de déformation de la structure et du culot. En effet, ces dernières ne sont pas accessibles avec le banc expérimental mis en place. Ce modèle a également montré les limites des équations analytiques. En effet, les dimensions du canon utilisé pour le tir, le nombre de cellules nécessaires pour limiter les effets de bords, ainsi que les limites de l'imprimante 3D utilisée ont conduit à l'élaboration d'une structure dont les cellules ne respectent pas les hypothèses des équations analytiques.

Le quatrième chapitre se concentre sur l'étude expérimentale de l'auxétique étudié. Après avoir présenté le procédé de fabrication additive utilisé pour concevoir les

échantillons, le matériau choisi (l'acide polylactique : PLA) pour les mettre au point est testé en compression quasi-statique pour évaluer à ses propriétés mécaniques ainsi que la répétabilité de son comportement. La structure auxétique réalisée en PLA est, elle aussi, testée en compression quasi-statique. Le banc expérimental mis en place pour évaluer l'énergie absorbée au cours de la déformation de l'auxétique est présenté. Un canon à air comprimé est utilisé pour tirer un auxétique en PLA collé à un culot en polytétrafluoroéthylène (PTFE) sur un pendule balistique en aluminium. Une barrière de vitesse en sortie de canon permet le déclenchement des appareils de mesures et notamment de la caméra rapide. Les images obtenues par ce moyen sont exploitées afin de déterminer les vitesses et les énergies cinétiques de l'auxétique, du culot et du pendule avant et après l'impact. Elles permettent également de suivre la déformation de la structure.

La métrologie mise en place lors de l'essai dynamique permet seulement de connaître l'énergie absorbée à la fin de l'essai, mais pas de connaître la contribution de l'auxétique dans cette absorption. C'est pour cette raison que les résultats expérimentaux sont couplés au modèle numérique de pendule balistique dans le cinquième chapitre. Le modèle numérique montre une bonne adéquation avec les résultats expérimentaux jusqu'à la densification. Le manque de connaissance, à ce stade, sur les comportements du PLA et du PTFE entraîne une divergence entre les deux une fois la densification de l'auxétique dépassée. Cependant, le modèle numérique reste précis pour évaluer la contribution de la déformation de l'auxétique jusqu'à sa densification dans l'absorption d'énergie. Une fois la SA écrasée, ce sont le PLA et le PTFE en se déformant qui vont absorber le reste de l'énergie et non pas la structure grâce à son comportement auxétique. Le comportement en dynamique du PLA et de PTFE devra donc être étudié afin d'améliorer le couplage expérimental-numérique. Cela permettrait de dresser un bilan complet des échanges d'énergies dans le système culot-auxétique-pendule.

La simulation de l'essai dynamique correspondant permet donc d'avoir accès à des informations supplémentaires et notamment à l'efficacité de l'auxétique à absorber l'énergie lors de l'impact. Cette simulation devra être adaptée à chaque condition d'essai et permettra de donner une estimation de l'énergie absorbée lors de la déformation de l'auxétique.

Nous avons finalement pu mettre en lumière les paramètres à considérer lors de la conception de protections utilisant les structures auxétiques ré-entrantes grâce à un modèle analytique. La réponse dynamique de ces structures peut être prédit au moyen des équations analytiques développées dans ce mémoire. Les limites de ce modèle ont pu être mises en avant au moyen de modélisations par éléments finis. La mise en place d'un banc d'essai dynamique couplé à un modèle numérique permet d'avoir accès à la part d'énergie absorbée lors d'un impact par une structure

auxétique.

Les perspectives pouvant être envisagées à la suite de ces travaux de thèse sont :

1. Des essais expérimentaux sur des auxétiques respectant les hypothèses du modèle analytique seraient une validation supplémentaire des équations analytiques en complément des simulations numériques réalisées dans ce mémoire. La géométrie de la structure est toutefois conditionnée par les limites du procédé de fabrication, notamment concernant l'épaisseur des parois.
2. L'effet face arrière jouant également un rôle majeur dans les dommages causés à l'objet devant être protégé, il sera intéressant de mettre en place un banc d'essai afin d'évaluer l'importance de cet effet avec les protections étudiées et en particulier les structures auxétiques.

Bibliographie

- [1] M. Ashby, Designing architected materials, *Scripta Materialia* 68 (1) (2013) 4–7. [vii](#), [1](#), [2](#)
- [2] L. J. Gibson, M. F. Ashby, *Cellular Solids : Structure and Properties*, 2nd Edition, Cambridge Solid State Science Series, Cambridge University Press, 1997. [vii](#), [2](#), [3](#), [9](#), [12](#), [28](#)
- [3] O. Al-ketan, R. Rowshan, R. Abu Al-Rub, Topology-mechanical property relationship of 3d printed strut, skeletal, and sheet based periodic metallic cellular materials, *Additive Manufacturing* 19 (2018) 167–183. [3](#)
- [4] K. E. Evans, M. A. Nkansah, I. J. Hutchinson, S. C. Rogers, Molecular network design, *Nature* 353 (1991) 124. [3](#), [4](#)
- [5] R. Lakes, Foam structures with a negative poisson's ratio, *Science* 235 (4792) (1987) 1038 – 1040. [vii](#), [4](#), [7](#), [8](#)
- [6] A. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Vol. 1, Cambridge University Press, 1892. [4](#), [11](#)
- [7] R. Lakes, Advances in negative poisson's ratio materials, *Advanced Materials* 5 (4) (1993) 293–296. [4](#)
- [8] J. N. Grima, R. Gatt, A. Alderson, K. Evans, An alternative explanation for the negative poisson's ratios in α -cristobalite, *Materials Science and Engineering : A* 423 (1) (2006) 219–224. [5](#), [6](#)
- [9] O. Bouaziz, J. Masse, S. Allain, L. Org  as, P. Latil, Compression of crumpled aluminum thin foils and comparison with other cellular materials, *Materials Science and Engineering : A* 570 (2013) 1–7. [5](#), [6](#)
- [10] J. N. Grima, R. Gatt, B. Ellul, E. Chetcuti, Auxetic behaviour in non-crystalline materials having star or triangular shaped perforations, *Journal of Non-Crystalline Solids* 356 (37) (2010) 1980–1987. [5](#), [6](#)
- [11] M. Schenk, S. D. Guest, Geometry of miura-folded metamaterials, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110 (9) (2013) 3276–3281. [6](#)
- [12] D. Attard, E. Manicaro, J. N. Grima, On rotating rigid parallelograms and their potential for exhibiting auxetic behaviour, *physica status solidi B* 246 (9) (2009) 2033–2044. [6](#)
- [13] D. Prall, R. Lakes, Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio of -1 , *International Journal of Mechanical Sciences* 39 (3) (1997) 305–314. [vii](#), [6](#), [7](#)
- [14] X. Hou, Z. Deng, K. Zhang, Dynamic crushing strength analysis of auxetic honeycombs, *Acta Mechanica Solida Sinica* 29 (5) (2016) 490 – 501. [7](#), [15](#), [16](#), [18](#), [20](#), [22](#), [23](#), [30](#), [57](#)

-
- [15] Z. Dong, Y. Li, T. Zhao, W. Wu, D. Xiao, J. Liang, Experimental and numerical studies on the compressive mechanical properties of the metallic auxetic reentrant honeycomb, *Materials & Design* 182 (2019) 108036. [vii](#), [7](#), [12](#), [16](#), [23](#), [81](#)
 - [16] K. K. Saxena, R. Das, E. P. Calius, Three decades of auxetics research - materials with negative poisson's ratio : A review, *Advanced Engineering Materials* 18 (11) (2016) 1847–1870. [8](#), [10](#)
 - [17] W. Miller, P. Hook, C. Smith, X. Wang, K. Evans, The manufacture and characterisation of a novel, low modulus, negative poisson's ratio composite, *Composites Science and Technology* 69 (5) (2009) 651–655. [8](#)
 - [18] S. Maiti, L. Gibson, M. Ashby, Deformation and energy absorption diagrams for cellular solids, *Acta Metallurgica* 32 (11) (1984) 1963–1975. [9](#), [10](#), [12](#), [15](#), [22](#)
 - [19] M. F. Ashby, A. G. Evans, N. A. Fleck, L. J. Gibson, J. W. Hutchinson, H. N. G. Wadley, *Metal Foams : A Design Guide*, Butterworth-Heinemann, Woburn, 2000. [9](#), [10](#), [11](#), [28](#)
 - [20] I. Elnasri, S. Pattofatto, H. Zhao, H. Tsitsiris, F. Hild, Y. Girard, Shock enhancement of cellular structures under impact loading : Part i experiments, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55 (12) (2007) 2652–2671. [9](#)
 - [21] J.-B. Choi, R. Lakes, Fracture toughness of re-entrant foam materials with a negative poisson's ratio : Experiment and analysis, *International Journal of Fracture* 80 (1996) 73–83. [10](#)
 - [22] A. Alderson, *A triumph of lateral thought*, Chemistry and Industry (London) 10. [vii](#), [10](#), [11](#)
 - [23] K. E. Evans, A. Alderson, Auxetic materials : Functional materials and structures from lateral thinking!, *Advanced Materials* 12 (9) (2000) 617–628. [11](#)
 - [24] X. chun Zhang, H. min Ding, L. qiang An, X. lei Wang, Numerical investigation on dynamic crushing behavior of auxetic honeycombs with various cell-wall angles, *Advances in Mechanical Engineering* 7 (2) (2015) 679678. [vii](#), [12](#), [13](#), [14](#), [16](#), [23](#), [57](#)
 - [25] H. Wang, Z. Lu, Z. Yang, X. Li, A novel re-entrant auxetic honeycomb with enhanced in-plane impact resistance, *Composite Structures* 208 (2019) 758–770. [12](#), [15](#), [16](#), [57](#)
 - [26] L. Hu, M. Zhou, H. Deng, Dynamic crushing response of auxetic honeycombs under large deformation : Theoretical analysis and numerical simulation, *Thin-Walled Structures* 131 (2018) 373–384. [vii](#), [12](#), [13](#), [18](#), [20](#), [23](#)
 - [27] L. L. Hu, T. X. Yu, Mechanical behavior of hexagonal honeycombs under low-velocity impact - theory and simulations, *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013) 3152 – 3165. [vii](#), [12](#), [17](#)
 - [28] L. J. Gibson, M. F. Ashby, G. S. Schajer, C. I. Robertson, The mechanics of two-dimensional cellular materials, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 382 (1782) (1982) 25–42. [vii](#), [15](#), [22](#), [30](#), [31](#), [32](#), [46](#), [71](#)
 - [29] G. Imbalzano, S. Linforth, T. Ngo, P. Lee, J. P. Tran, Blast resistance of auxetic and honeycomb sandwich panels : Comparisons and parametric designs, *Composite Structures* 183. [15](#), [21](#), [23](#), [30](#)
-

- [30] D. Ruan, G. Lu, B. Wang, T. X. Yu, In-plane dynamic crushing of honeycombs - a finite element study, *International Journal of Impact Engineering* 28 (2) (2003) 161 – 182. [vii](#), [15](#), [16](#), [17](#), [20](#), [30](#), [32](#), [56](#), [57](#)
- [31] L. L. Hu, T. X. Yu, Dynamic crushing strength of hexagonal honeycombs, *International Journal of Impact Engineering* 37 (5) (2010) 467 – 474. [15](#)
- [32] D. Xiao, X. Kang, Y. Li, W. Wu, J. Lu, G. Zhao, D. Fang, Insight into the negative poisson's ratio effect of metallic auxetic reentrant honeycomb under dynamic compression, *Materials Science and Engineering : A* 763 (2019) 138151. [16](#), [23](#)
- [33] S. R. Reid, C. Peng, Dynamic uniaxial crushing of wood, *International Journal of Impact Engineering* 19 (5-6) (1997) 531 – 570. [vii](#), [17](#), [18](#), [19](#), [20](#), [32](#), [37](#)
- [34] P. Tan, S. Reid, J. Harrigan, Z. Zou, S. Li, Dynamic compressive strength properties of aluminium foams. part i—experimental data and observations, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53 (10) (2005) 2174–2205. [vii](#), [18](#), [32](#)
- [35] V. Deshpande, N. Fleck, High strain rate compressive behaviour of aluminium alloy foams, *International Journal of Impact Engineering* 24 (3) (2000) 277–298. [18](#)
- [36] P. Tan, S. Reid, J. Harrigan, On the dynamic mechanical properties of open-cell metal foams – a re-assessment of the ‘simple-shock theory’, *International Journal of Solids and Structures* 49 (19) (2012) 2744–2753. [18](#)
- [37] Z. Zou, S. Reid, P. Tan, S. Li, J. Harrigan, Dynamic crushing of honeycombs and features of shock fronts, *International Journal of Impact Engineering* 36 (1) (2009) 165–176. [viii](#), [18](#), [19](#), [20](#)
- [38] D. Karagiozova, G. Langdon, G. Nurick, Propagation of compaction waves in metal foams exhibiting strain hardening, *International Journal of Solids and Structures* 49 (19) (2012) 2763–2777. [18](#)
- [39] L.-L. Wang, L.-M. Yang, Y.-Y. Ding, On the energy conservation and critical velocities for the propagation of a “steady-shock” wave in a bar made of cellular material, *Acta Mechanica Sinica* 29 (3) (2013) 420–428. [20](#), [32](#)
- [40] J. Harrigan, S. Reid, A. S. Yaghoubi, The correct analysis of shocks in a cellular material, *International Journal of Impact Engineering* 37 (8) (2010) 918–927. [20](#), [23](#)
- [41] Y. Liu, T. A. Schaedler, X. Chen, Dynamic energy absorption characteristics of hollow microlattice structures, *Mechanics of Materials* 77 (2014) 1–13. [20](#)
- [42] T. Fíla, P. Zlámál, O. Jiroušek, J. Falta, P. Koudelka, D. Kytýř, T. Doktor, J. Valach, Impact testing of polymer-filled auxetics using split hopkinson pressure bar : Impact testing of polymer-filled auxetics, *Advanced Engineering Materials* 19 (2017) 1700076. [20](#), [21](#), [22](#), [23](#)
- [43] D. Faraci, L. Driemeier, C. Comi, Bending-dominated auxetic materials for wearable protective devices against impact, *Journal of Dynamic Behavior of Materials*. [viii](#), [20](#), [21](#), [23](#)
- [44] T. Shepherd, K. Winwood, P. Venkatraman, A. Alderson, T. Allen, Validation of a finite element modeling process for auxetic structures under impact, *physica status solidi (b)* 257. [21](#)

-
- [45] C. Qi, A. Remennikov, L.-Z. Pei, S. Yang, Z.-H. Yu, T. D. Ngo, Impact and close-in blast response of auxetic honeycomb-cored sandwich panels : Experimental tests and numerical simulations, *Composite Structures* 180 (2017) 161–178. [21](#), [23](#)
 - [46] S. Yang, C. Qi, D. Wang, R. Gao, H. Hu, J. A. Shu, A comparative study of ballistic resistance of sandwich panels with aluminum foam and auxetic honeycomb cores, *Advances in Mechanical Engineering* 5 (2013) 589216. [22](#), [23](#)
 - [47] X. Lan, S. Feng, Q. Huang, T. Zhou, A comparative study of blast resistance of cylindrical sandwich panels with aluminum foam and auxetic honeycomb cores, *Aerospace Science and Technology* 87 (2019) 37–47. [22](#)
 - [48] T. Li, Y. Chen, X. Hu, Y. Li, L. Wang, Exploiting negative poisson's ratio to design 3d-printed composites with enhanced mechanical properties, *Materials Design* 142 (2018) 247–258. [22](#), [23](#)
 - [49] Y. Xue, W. Wang, F. Han, Enhanced compressive mechanical properties of aluminum based auxetic lattice structures filled with polymers, *Composites Part B : Engineering* 171 (2019) 183–191. [22](#), [23](#)
 - [50] C.-H. Chuang, J.-S. Huang, Elastic moduli and plastic collapse strength of hexagonal honeycombs with plateau borders, *International Journal of Mechanical Sciences* 44 (9) (2002) 1827–1844. [31](#), [32](#)
 - [51] H. Li, W. Chen, H. Hao, Influence of drop weight geometry and interlayer on impact behavior of rc beams, *International Journal of Impact Engineering* 131 (2019) 222–237. [57](#)
 - [52] Y. Yamada, Investigation of transfer phenomenon by x-ray photoelectron spectroscopy and tribological properties of polymers sliding against polymers, *Wear* 210 (1) (1997) 59–66. [67](#)
 - [53] W. Pawlak, Wear and coefficient of friction of pla - graphite composite in 3d printing technology., 2018. [67](#)
 - [54] A. Singh, R. Guedes, D. Paiva, F. Magalhães, Experiment and modelling of the strain-rate-dependent response during in vitro degradation of pla fibres, *SN Applied Sciences* 2. [103](#)
 - [55] P. Rae, D. Dattelbaum, The properties of poly(tetrafluoroethylene) (ptfe) in compression, *Polymer* 45 (22) (2004) 7615–7625. [104](#)

Adeline PETIT

Réponse de Structure auxétique en dynamique rapide : étude théorique et expérimentale

Résumé :

L'étude concerne l'amélioration des systèmes de protection constitués de structures auxétiques. Le but est de proposer une méthode d'évaluation de l'absorption d'énergie d'un impact par ces « matériaux » cellulaires à coefficient de poisson négatif. Cette méthode se base sur des études analytiques, des simulations numériques par éléments finis et des essais dynamiques. Les structures auxétiques ré-entrantes étudiées dans la thèse sont réalisées par fabrication additive (dépôt de fil fondu en acide polyamide). Le modèle analytique simplifié a été établi pour prédire la réponse de ces structures en compression quasi-statique ou dynamique. En dynamique, ce modèle est basé sur le comportement R-P-P-L (milieu rigide parfaitement plastique avec densification) et la propagation d'onde de discontinuité dans la structure. Un modèle éléments finis (EF) a été réalisé et il a été validé par l'étude expérimentale (tir sur pendule balistique). Le modèle EF a permis d'évaluer la part d'énergie absorbée par la structure auxétique et de montrer les limites de l'approche analytique.

Mots clés : Structure auxétique, impact dynamique, simulation éléments finis, solution analytique, expérimentation.

Response of auxetic structure under dynamic impact : theoretical and experimental study

Abstract :

The scientific objective of the thesis is to contribute to the understanding of the energy absorption by a protective system made with auxetic structure, having negative Poisson's ratio. The aim of the work is to propose a methodology for assessing the energy absorption during an impact of a projectile on the structure. This methodology is based on analytical calculation, finite element (FE) simulation and experimental study. The auxetic structure studied in the thesis are made thanks to additive manufacturing. The analytical model enables to calculate the quasi-static plateau stress and the dynamic response of the structure. For the dynamic response, the model is based on the rigid, perfectly plastic, locking material hypothesis and the shock wave analogy. A FE model has been validated by an experimental study (impact on a ballistic pendulum). This FE model allow to assess the amount of energy absorbed by the auxetic structure and to identify the limitation of the analytical model.

Keywords : Auxetic structure, dynamic impact, finite element simulation, analytical solution, experimental study.



LaMé
Laboratoire de Mécanique
Gabriel Lamé

**Laboratoire Gabriel LaMé - Université
d'Orléans** 63 Av. de Lattre de Tassigny,
18000 Bourges

